

Soal dan Solusi UTS Kalkulus II 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Carilah nilai α sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}}$$

konvergen mutlak, konvergen bersyarat, dan divergen.

Penyelesaian.

Pandang barisan a_1, a_2, a_3, \dots di mana $a_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}$. Tinjau

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \alpha \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right| = |\alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |\alpha| \cdot 1 = |\alpha|$$

karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1.$$

Apabila $\rho < 1$, yakni $|\alpha| < 1 \iff -1 < \alpha < 1$, maka deret tersebut pasti konvergen mutlak. Untuk $\alpha = 1$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

yang mana divergen menurut uji- p . Untuk $\alpha = -1$, maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Perhatikan bahwa $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ yang artinya $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ barisan turun. Selain itu, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ sehingga menurut uji deret berganti tanda berlaku deret tersebut konvergen. Namun,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

yang mana divergen, artinya deret tersebut konvergen bersyarat. Jadi,

- Deret konvergen mutlak jika $-1 < \alpha < 1$.
- Deret konvergen bersyarat jika $\alpha = -1$.
- Deret divergen jika $\alpha < -1$ atau $\alpha \geq 1$.



Question 2

Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh

$$f(x, y, z) = \frac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}}{xyz}.$$

- (a). Tentukan daerah asal (domain) fungsi f .
- (b). Tentukan $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z)$ jika ada.
- (c). Tentukan himpunan terbesar di mana f kontinu.
- (d). Tentukan semua turunan parsial orde satu dari fungsi f .

Penyelesaian.

- (a). Syarat yang harus terpenuhi adalah $xyz \neq 0$ dan $144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2 \geq 0$. Jadi, domainnya adalah

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0, 144 \geq 16x^2 + 16y^2 - 9z^2\}.$$

- (b). Tinjau pendekatan $x = y = z$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(144 - 16x^2 - 16x^2 + 9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x \cdot x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)^3} = \sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)} = \infty.$$

Tinjau pendekatan $x = y = -z$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(144 - 16x^2 - 16x^2 + 9(-x)^2)^{\frac{3}{2}}}{x \cdot x \cdot (-x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{144 - 23x^2}{x^2}\right)^3} = -\infty.$$

Jadi, nilai limit tidak ada.

- (c). Tinjau

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{(144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^3}{(xyz)^2}}.$$

Perhatikan bahwa $p(x, y, z) = (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^3$ dan $q(x, y, z) = (xyz)^2$ masing-masing merupakan fungsi polinom yang jelas kontinu. Akibatnya, $\sqrt{\frac{p(x,y,z)}{q(x,y,z)}}$ kontinu asalkan $q(x, y, z) \neq 0$ dan $\frac{p(x,y,z)}{q(x,y,z)} \geq 0 \iff p(x, y, z) \geq 0$. Jadi, himpunan terbesar yang dimaksud adalah

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz \neq 0, 144 \geq 16x^2 + 16y^2 - 9z^2\}.$$

- (d). Diperoleh

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\frac{3}{2} (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}} (-32x)(xyz) - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}} (yz)}{(xyz)^2} \\ &= \frac{yz (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}} (-48x^2 - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2))}{x^2 y^2 z^2} \\ &= - \frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2} (32x^2 - 16y^2 + 9z^2 + 144)}{x^2 y z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{\frac{3}{2} (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}} (-32y)(xyz) - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}} (xz)}{(xyz)^2} \\
&= \frac{xz (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}} \left(-48y^2 - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2) \right)}{x^2 y^2 z^2} \\
&= -\frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2} (32y^2 - 16x^2 + 9z^2 + 144)}{xy^2 z} \\
f_z &= \frac{\frac{3}{2} (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}} (18z)(xyz) - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}} (xy)}{(xyz)^2} \\
&= \frac{xy \sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2} (27z^2 - (144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2))}{x^2 y^2 z^2} \\
&= \frac{\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2} (18z^2 + 16x^2 + 16y^2 - 144)}{xyz^2} \\
&= \frac{2\sqrt{144 - 16x^2 - 16y^2 + 9z^2} (8x^2 + 8y^2 + 9z^2 - 72)}{xyz^2}.
\end{aligned}$$



Question 3

Jika $z = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$, maka tunjukkan $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

Penyelesaian.

Tinjau

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x} \left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= y + \frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) + x \cdot \frac{\partial \phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial \frac{y}{x}} \cdot \frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial x} \\ &= y + \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot \phi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ x\frac{\partial z}{\partial x} &= xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= x + x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= x + x \cdot \frac{\partial \phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial \frac{y}{x}} \cdot \frac{\partial \frac{y}{x}}{\partial y} \\ &= x + x \cdot \phi'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\ y\frac{\partial z}{\partial y} &= xy + y\phi'\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

Diperoleh

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) - y\phi'\left(\frac{y}{x}\right) + xy + y\phi'\left(\frac{y}{x}\right) = xy + \left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = xy + z$$

seperti yang ingin dibuktikan. 

Question 4

Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2$, carilah nilai maksimum dari turunan berarah f pada titik $(-1, 2)$ dan pada arah manakah f tersebut mencapai maksimum.

Penyelesaian.

Tinjau

$$\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle 6x - 2y, -2x + 8y \rangle .$$

Diperoleh $\nabla f(-1, 2) = \langle -6 - 4, 2 + 16 \rangle = \langle -10, 18 \rangle$. Nilai maksimum turunan berarah f pada titik $(-1, 2)$ adalah

$$\| \nabla f \| = \sqrt{(-10)^2 + 18^2} = 2\sqrt{106}$$

yang tercapai saat arahnya $-10\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$.

