

# Pembahasan Tugas 2: Turunan

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrail Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. Diberikan fungsi  $f(x)$  di mana

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x - 2023|}{x - 2023}, & x \neq 2023 \\ 0, & x = 2023 \end{cases}$$

Buktikan bahwa  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ .

*Wildan Bagus Wicaksono*

*Solusi.* Akan dibuktikan bahwa  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ . Menggunakan definisi turunan,

$$f'(2023) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2023 + h) - f(2023)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{|(2023+h)-2023|}{(2023+h)-2023} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h^2}. \quad (*)$$

Akan ditinjau limit kanan dari  $\frac{|h|}{h^2}$ , yaitu

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} = \infty$$

yang berarti limitnya tidak ada. Karena limit kanan dari  $\frac{|h|}{h^2}$  tidak ada, dapat disimpulkan bahwa  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h^2}$  juga tidak ada. Dari (\*), dapat disimpulkan bahwa  $f'(2023)$  tidak ada. Jadi,  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$  seperti yang ingin dibuktikan.

## Skema Penilaian 1:

- Menuliskan  $f'(2023) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2023 + h) - f(2023)}{h}$  secara tepat. (+5)
- Menggunakan definisi turunan dengan menuliskan  $f'(2023) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h^2}$ . (+5)
- Menunjukkan bahwa  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h^2}$  tidak ada. (+10)
- Menyimpulkan  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ . (+5)

*Solusi Alternatif.* Akan dibuktikan bahwa  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ . Menggunakan definisi turunan sepihak dari kanan,

$$\begin{aligned} f'(2023^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2023+h) - f(2023)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{|(2023+h)-2023|}{(2023+h)-2023} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Karena  $f'(2023^+)$  tidak ada, dapat disimpulkan bahwa  $f'(2023)$  tidak ada. Ini artinya  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ .

### Skema Penilaian 2:

- Menuliskan

$$f'(2023^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2023+h) - f(2023)}{h} \vee f'(2023^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2023+h) - f(2023)}{h}$$

secara tepat. (+5)

- Menuliskan  $f'(2023^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h^2}$  atau  $f'(2023^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h^2}$  secara tepat. (+5)
- Berhasil membuktikan  $f'(2023^+)$  ATAU  $f'(2023^-)$  tidak ada. (+10)
- Menyimpulkan  $f$  tidak terdiferensial di  $x = 2023$ . (+5)

2. Diberikan fungsi  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  di mana  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$ .

- (a). Tentukan  $f'(x)$ .  
 (b). Tentukan  $f'(4)$  jika ada.

*Zahra Nazila Annisa*

*Solusi.*

(a). Misalkan  $u = \sqrt{x} - 1 = x^{\frac{1}{2}} - 1$  dan  $v = \sqrt{x} + 1 = x^{\frac{1}{2}} + 1$ , maka

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{dan} \quad v' = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Dari sini diperoleh

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \boxed{\frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2 \sqrt{x}}}.$$

(b). Diperoleh bahwa

$$f'(4) = \frac{1}{(\sqrt{4} + 1)^2 \sqrt{4}} = \frac{1}{3^2 \cdot 2} = \boxed{\frac{1}{18}}.$$

**Skema Penilaian:**

- (a) • Mendapatkan  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  dan  $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . (+7)  
 • Mendapatkan  $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1}{(\sqrt{x} + 1)^2 \sqrt{x}}$ . (+8)  
 (b) Menyelesaikan dengan sempurna. (+5)

3. Tentukan  $\frac{d^{2023}}{dx^{2023}} \sin(2x + \pi)$  beserta penjelasan polanya.

*Petunjuk:* Amati polanya terlebih dahulu dengan memperhatikan pola turunannya.

*Yehezkiel Gibrael Dativa Garin*

*Solusi.* Untuk menentukan turunan ke-2023 dari  $y = \sin(2x + \pi)$ , maka akan ditentukan polanya terlebih dahulu. Satu hal yang perlu diketahui bahwa  $\pi$  konstanta, sehingga turunannya  $\frac{d}{dx}\pi = 0$ .

Perhatikan bahwa turunan ke-1 hingga ke-8 dari  $y$  dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \cos(2x + \pi) &= 2 \cos(2x + \pi) \\ y'' &= 2 \cdot 2(-\sin(2x + \pi)) &= -2^2 \sin(2x + \pi) \\ y^{(3)} &= -2^2 \cdot 2 \cos(2x + \pi) &= -2^3 \cos(2x + \pi) \\ y^{(4)} &= -2^3 \cdot 2(-\sin(2x + \pi)) &= 2^4 \sin(2x + \pi) \\ y^{(5)} &= 2^4 \cdot 2 \cos(2x + \pi) &= 2^5 \cos(2x + \pi) \\ y^{(6)} &= 2^5 \cdot 2(-\sin(2x + \pi)) &= -2^6 \sin(2x + \pi) \\ y^{(7)} &= -2^6 \cdot 2 \cos(2x + \pi) &= -2^7 \cos(2x + \pi) \\ y^{(8)} &= -2^7 \cdot 2(-\sin(2x + \pi)) &= 2^8 \sin(2x + \pi). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pola yang dihasilkan pada fungsi trigonometri pada  $y^{(n)}$  berulang:

$$\cos(2x+\pi), \quad -\sin(2x+\pi), \quad -\cos(2x+\pi), \quad \sin(2x+\pi), \quad \cos(2x+\pi), \quad -\sin(2x+\pi) \cdots$$

untuk  $n = 1, 2, \dots$ . Fungsi trigonometri pada  $y^{(n)}$  berulang setiap 4 pola. Sedangkan, konstan pengali dengan fungsi trigonometri pada  $y^{(n)}$  berbentuk

$$2, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \quad 2^5, \quad 2^6, \quad 2^7, \quad 2^8, \quad \dots$$

untuk  $n = 1, 2, \dots$ . Perhatikan bahwa 2023 dibagi 4 bersisa 3, maka

$$\frac{d^{2023}}{dx^{2023}} \sin(2x + \pi) = y^{(2023)} = \boxed{-2^{2023} \cos(2x + \pi)} = \boxed{2^{2023} \cos(2x)}.$$

### Skema Penilaian 1:

- Menentukan beberapa turunan pertama hingga ke- $n$  dengan benar ( $n \geq 5$ ). (+15)
- Memberi penjelasan lengkap tentang pola untuk turunan di atas. (+5)
- Menunjukkan bahwa turunan ke-2023 sama dengan turunan ketiga dan memberi jawaban berdasarkan kesimpulan yang benar. (+5)

*Solusi Alternatif.* Perhatikan bahwa  $\sin(2x + \pi) = -\sin(2x)$ , misalkan  $y = -\sin(2x)$ . Diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= -\cos(2x) \cdot 2 &= -2 \cos(2x) \\ y'' &= -2(-\sin(2x)) \cdot 2 &= 2^2 \sin(2x) \\ y^{(3)} &= 2^2(\cos(2x)) \cdot 2 &= 2^3 \cos(2x) \\ y^{(4)} &= 2^3(-\sin(2x)) \cdot 2 &= -2^4 \sin(2x) \\ y^{(5)} &= -2^5(\cos(2x)) \cdot 2 &= -2^5 \cos(2x) \\ y^{(6)} &= -2^5(-\sin(2x)) \cdot 2 &= 2^6 \sin(2x) \\ y^{(7)} &= 2^6(\cos(2x)) \cdot 2 &= 2^7 \cos(2x) \\ y^{(8)} &= 2^7(-\sin(2x)) \cdot 2 &= -2^8 \sin(2x) \\ y^{(9)} &= -2^8 \cos(2x) \cdot 2 &= -2^9 \cos(2x). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat diamati pola yang ada berbentuk

$$\begin{array}{cccccccccccc} -\cos(2x), & \sin(2x), & \cos(2x), & -\sin(2x), & -\cos(2x), & \sin(2x), & \cos(2x), & -\dots \\ 2, & 2^2, & 2^3, & 2^4, & 2^5, & 2^6, & 2^7, & 2^8, & 2^9, & \dots \end{array}$$

Fungsi trigonometri pada  $y^{(n)}$  berulang setiap 4 pola. Karena 2023 dibagi 4 bersisa 3, dari sini diperoleh  $\frac{d^{2023}}{dx^{2023}} \sin(2x + \pi) = \boxed{2^{2023} \cos(2x)}$ .

### Skema Penilaian 2:

- Menentukan beberapa turunan pertama hingga ke- $n$  dengan benar ( $n \geq 5$ ). (+15)
- Memberi penjelasan lengkap tentang pola untuk turunan di atas. (+5)
- Menunjukkan bahwa turunan ke-2023 sama dengan turunan ketiga dan memberi jawaban berdasarkan kesimpulan yang benar. (+5)

4. (a). Tentukan  $\frac{dy}{dx}$  di mana  $y = (3x^2 + 1)^2 - 1$  menggunakan aturan rantai.  
 (b). Tentukan  $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}$ .

Zahra Nazila Annisa

Solusi.

- (a). Misalkan  $u = 3x^2 + 1 \Rightarrow u' = 6x$ , maka  $y = u^2 - 1$ . Diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (u^2 - 1) = 2uu' - 0 = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 12x(3x^2 + 1) = \boxed{36x^3 + 12x}.$$

- (b). Misalkan  $u = \sin(x^2 + 2x - 1)$ , maka

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)} = \frac{d}{dx} \sqrt{u} = \frac{d}{dx} u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Akan ditentukan  $u'$ . Misalkan  $v = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow v' = 2x + 2$ , maka  $u = \sin(v)$ . Diperoleh

$$u' = \cos(v)v' = \cos(x^2 + 2x - 1)(2x + 2).$$

Ini berarti

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\cos(x^2 + 2x - 1)(2x + 2)}{2\sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}} = \boxed{\frac{\cos(x^2 + 2x - 1)(x + 1)}{\sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}}}.$$

### Skema Penilaian:

- (a). • Meninjau  $\frac{d}{dx} (3x^2 + 1)^2 = 2(3x^2 + 1) \frac{d}{dx} (3x^2 + 1)$ . (+7)  
 • Mendapatkan  $\frac{d}{dx} (3x^2 + 1) = 6x$ . (+5)  
 • Mendapatkan  $\frac{dy}{dx} = 36x^3 + 12x$ . (+3)  
 • (Jika tidak termasuk ketiga hal di atas)  
 Apabila menuliskan  $\frac{d}{dx} (3x^2 + 1)^2 = 2(3x^2 + 1)$ . (+4)  
 Apabila menyelesaikan soal dengan benar namun tidak menggunakan aturan rantai. (5)
- (b). • Mendapatkan  $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}} \frac{d}{dx} \sin(x^2 + 2x - 1)$ . (+4)  
 Jika menuliskan  $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)} = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}}$ . (+2)  
 • Mendapatkan  $\frac{d}{dx} \sin(x^2 + 2x - 1) = \cos(x^2 + 2x - 1) \frac{d}{dx} (x^2 + 2x - 1)$ . (+4)  
 Jika menuliskan  $\frac{d}{dx} \sin(x^2 + 2x - 1) = \cos(x^2 + 2x - 1)$ . (+2)  
 • Mendapatkan  $\frac{d}{dx} (x^2 + 2x - 1) = 2x + 2$ . (+4)  
 • Mendapatkan  $\frac{d}{dx} \sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)} = \frac{\cos(x^2 + 2x - 1)(x + 1)}{\sqrt{\sin(x^2 + 2x - 1)}}$ . (+3)