Soal dan Solusi UTS Kalkulus 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2-2}{1-x^2}$.

(a). Tentukan selang di mana $f(x)$ monoton naik dan di mana $f(x)$ monoton turun.

(b). Tentukan selang di mana $f(x)$ cekung ke atas dan di mana $f(x)$ cekung ke bawah.

(c). Bila ada, tentukan semua titik ekstrim dan titik beloknya.

(d). Bila ada, tentukan semua asimtot yang ada dan berilah penjelasannya.

(e). Sketsalah grafik $y = f(x)$.

Penyelesaian.

(a). Untuk mengecek kemotonan, perlu dicek $f'(x)$, yaitu

$$f'(x) = \frac{(2x-0)\left(1-x^2\right) - \left(x^2-2\right)(0-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3-4x}{\left(1-x^2\right)^2} = -\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

Perhatikan bahwa $f(x)$ monoton naik apabila $f'(x) > 0$, jadi $-\frac{2x}{(1-x^2)^2} > 0$. Karena $\left(1-x^2\right)^2 \geq 0$ untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, dalam hal ini tinggal mempertimbangkan $-2x > 0 \iff x < 0$. Jadi, $f(x)$ monoton naik di interval $(-\infty, 0)$.

Perhatikan bahwa $f(x)$ monoton turun apabila $f'(x) < 0$, jadi $-\frac{2x}{(1-x^2)^2} < 0$. Karena $\left(1-x^2\right)^2 \geq 0$ untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$, dalam hal ini tinggal mempertimbangkan $-2x < 0 \iff x > 0$. Jadi, $f(x)$ monoton turun di interval $(0, \infty)$.

Jadi, $f(x)$ merupakan $\boxed{\text{monoton naik di } (-\infty, 0)}$ dan $\boxed{\text{monoton turun di } (0, \infty)}$.

(b). Untuk menentukan kecekungan, perlu dicek $f''(x)$. Perhatikan bahwa $f'(x) = -\frac{2x}{1-2x^2+x^4}$, maka

$$f''(x) = -\frac{2\left(1-2x^2+x^4\right) - 2x\left(0-4x+4x^3\right)}{\left(1-2x^2+x^4\right)^2} = -\frac{2\left(1-x^2\right)^2 + 8x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^4}$$

yang dapat difaktorkan menjadi

$$f''(x) = -\frac{2\left(1-x^2\right)\left(\left(1-x^2\right)+4x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2} = -\frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(1-x^2\right)^3} = -\frac{6x^2+2}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Perhatikan bahwa $x^2 \geq 0$, maka $6x^2+2 \geq 0+2 = 2$ yang menunjukkan bahwa $6x^2+2 > 0$. Perhatikan bahwa $f(x)$ cekung ke atas apabila $f''(x) > 0$, ini berarti $-\frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3} > 0$. Karena

$6x^2+2>0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka cukup dipertimbangkan

$$-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}>0 \iff \frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}<0.$$

Akan ditentukan titik pemecahnya, yaitu saat $\left(1-x^2\right)^3=0 \iff x=1 \vee x=-1$.
Untuk $x<-1$, cek untuk $x=-2$ diperoleh

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{1}{\left(1-(-2)^2\right)^3}=\frac{1}{\left(1-4\right)^3}=\frac{1}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}<0.$$

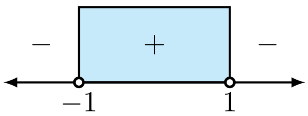
Untuk $-1<x<1$, cek untuk $x=0$ diperoleh

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{1}{\left(1-0\right)^3}=\frac{1}{1}=1>0.$$

Untuk $x>1$, cek untuk $x=2$ diperoleh

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{1}{\left(1-2^2\right)^3}=\frac{1}{\left(1-4\right)^3}=\frac{1}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}<0.$$

Dari sini diperoleh garis bilangan sebagai berikut. Jadi, penyelesaiannya adalah $x<-1 \vee x>1$ yang berarti $f(x)$ cekung ke atas di interval $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.



Kemudian, untuk $f(x)$ cekung ke bawah apabila $f''(x)<0$, ini berarti $-\frac{6x^2+2}{\left(1-x^2\right)^3}<0$. Karena $6x^2+2>0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, hal ini cukup mempertimbangkan

$$-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}<0 \iff \frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}>0.$$

Sebagaimana sebelumnya, diperoleh penyelesaiannya $-1<x<1$. Jadi, $f(x)$ cekung ke bawah di interval $(-1,1)$.
Jadi, $f(x)$ $\boxed{\text{cekung ke atas di } (-\infty,-1)\cup(1,\infty)}$ dan $\boxed{\text{cekung ke bawah di } (-1,1)}$.

(c). Titik ekstrim ada tiga kemungkinan: penyelesaian saat $f'(x)=0$, nilai x yang menyebabkan $f'(x)$ tidak ada, dan ujung interval. Dalam soal ini ujung interval tidak perlu dipertimbangkan.

- Untuk $f'(x)=0$, maka $-\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}=0$ sehingga diperoleh $x=0$.
- Untuk $f'(x)$ tidak ada saat $x=1$ dan $x=-1$. Namun, $x=1$ dan $x=-1$ menyebabkan $f(x)$ tidak terdefinisi sehingga tidak perlu dipertimbangkan.

Jadi, titik ekstrimnya adalah $(0,f(0))=\boxed{(0,-2)}$.
Untuk menentukan titik belok, perlu dipertimbangkan $f''(x)=0$, dengan kata lain $-\frac{6x^2+2}{\left(1-x^2\right)^3}=0 \iff 6x^2+2=0$ yang tidak memberikan penyelesaian bilangan real karena $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{3}}\notin\mathbb{R}$.
Jadi, $f(x)$ $\boxed{\text{tidak memiliki titik belok}}$.

(d). Akan ditentukan asimtot datar dari $y = f(x)$, tinjau

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1.$$

Jadi, asimtot datar dari $y = f(x)$ adalah $\boxed{y = -1}$.

Akan ditentukan asimtot tegak dari $y = f(x)$, tinjau bahwa

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-2}{1-x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-2}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-2}{1-x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2}{1-x^2} = -\infty.$$

Jadi, asimtot tegak dari $y = f(x)$ adalah $\boxed{x = 1}$ dan $\boxed{x = -1}$.

Akan ditentukan asimtot miring dari $y = f(x)$, misalkan $y = mx + n$ di mana $m \neq 0$. Hal ini dapat ditentukan dengan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \text{dan} \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

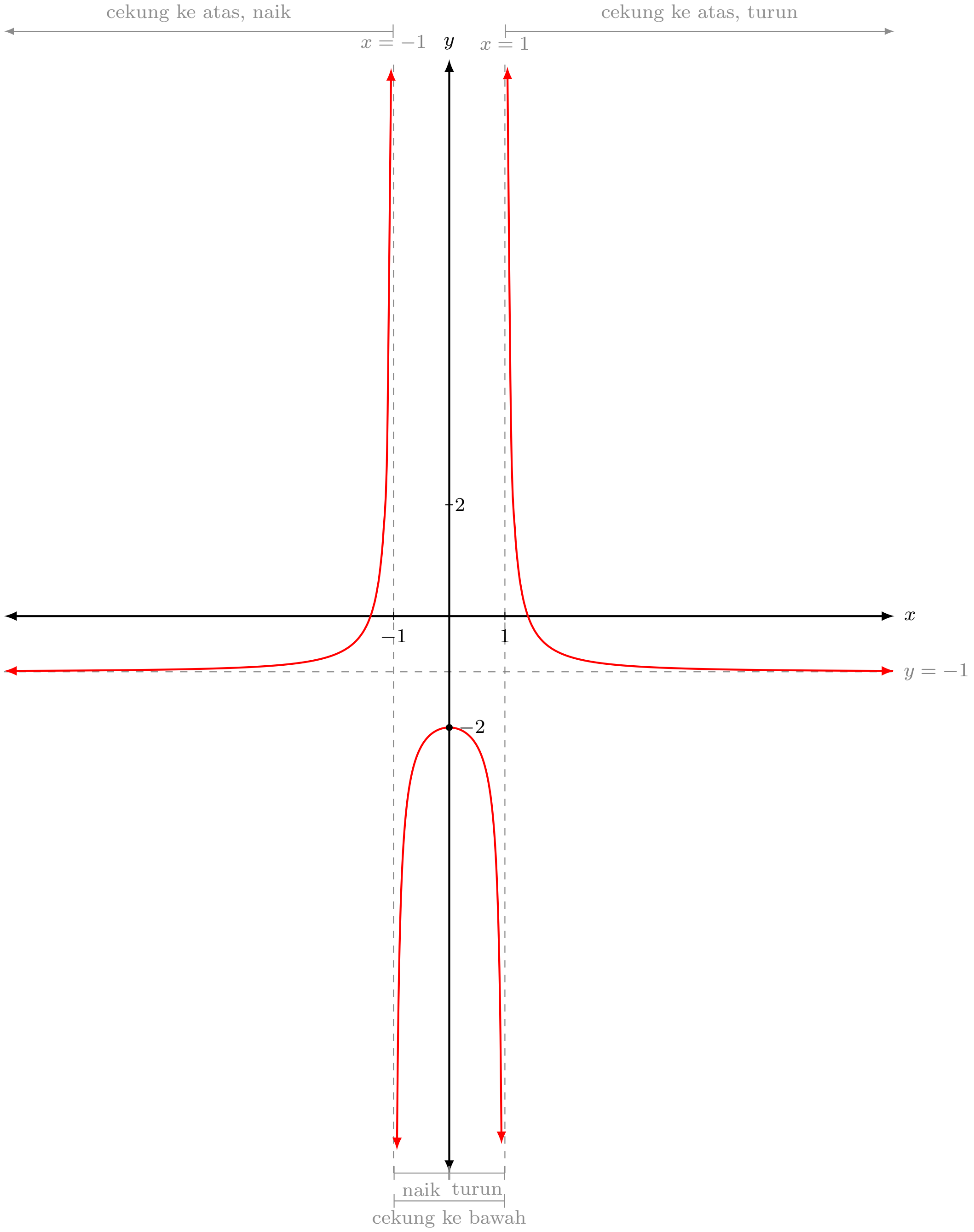
apabila **limitnya ada**.

Tinjau

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{0-0}{0-1} = 0.$$

Mengingat $m \neq 0$, jadi dapat disimpulkan bahwa $y = f(x)$ tidak memiliki asimtot miring.

(e). Memanfaatkan bagian (a), (b), (c), dan (d) diperoleh sketsa dari $y = f(x)$ sebagai berikut.


cekung ke atas, naik
cekung ke atas, turun
$x = -1$
y
$x = 1$
2
x
-1
1
$y = -1$
-2
naik
turun
cekung ke bawah

Question 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x|x| \leq |x-2|$.

Penyelesaian.

Berdasarkan definisi nilai mutlak,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad |x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$$

Akan dibagi kasus berdasarkan nilai x, yaitu saat $x < 0$, $0 \leq x < 2$, dan $x \geq 2$.

- **Kasus 1.** Jika $x < 0$, maka $|x| = -x$ dan $|x-2| = -x+2$. Dari sini diperoleh

  $$x|x| \leq |x-2| \implies x(-x) \leq -x+2 \implies -x^2 \leq -x+2 \implies 0 \leq x^2 - x + 2.$$

  Perhatikan bahwa

  $$x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$$

  Karena $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, ini artinya $x^2 - x + 2 \geq 0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$. Hal ini menunjukkan bahwa $x^2 - x + 2 \geq 0$ selalu terpenuhi apabila $x < 0$.

- **Kasus 2.** Jika $0 \leq x < 2$, maka $|x| = x$ dan $|x-2| = -x+2$. Dari sini diperoleh

  $$x|x| \leq |x-2| \implies x(x) \leq -x+2 \implies x^2 + x - 2 \leq 0.$$

  Akan ditentukan titik pemecahnya, yaitu saat $0 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$. Diperoleh bahwa titik pemecahnya $x = -2$ dan $x = 1$.
  Untuk interval $(-\infty, -2)$, uji $x = -5$ diperoleh $(-5)^2 + (-5) - 2 = 25 - 5 - 2 = 18 > 0$. Untuk interval $(-2, 1)$, uji $x = 0$ diperoleh $0^2 + 0 - 2 = -2 < 0$. Untuk interval $(1, \infty)$, uji $x = 2$ diperoleh $2^2 + 2 - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$. Diperoleh garis bilangan pertidaksamaan sebagai berikut. Diperoleh bahwa penyelesaian dari $x^2 + x - 2 \leq 0$ adalah $-2 \leq x \leq 1$.

  Karena dua syarat $0 \leq x < 2$ dan $-2 \leq x \leq 1$ harus terpenuhi keduanya, maka diiriskan, lalu diperoleh solusinya adalah $0 \leq x \leq 1$.

- **Kasus 3.** Jika $x \geq 2$, maka $|x| = x$ dan $|x-2| = x-2$. Dari sini diperoleh

  $$x|x| \leq |x-2| \implies x(x) \leq x-2 \implies x^2 - x + 2 \leq 0.$$

  Dari kasus 1 telah dibuktikan bahwa $x^2 - x + 2 \geq \frac{7}{4}$. Oleh karena itu, $x^2 - x + 2 \leq 0$ tidak memmiliki penyelesaian.

Jadi, penyelesaiannya adalah gabungan dari kasus 1, kasus 2, dan kasus 3, yaitu $(-\infty, 0) \cup [0, 1] = (-\infty, 1]$. Dapat disimpulkan bahwa himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}}$. ▼

Question 3

Tentukan konstanta a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$.

Penyelesaian.

Agar $f(x)$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$, perlu dicek kekontinuan di $x = 1$ dan $x = 2$.

- Akan dicek kekontinuan di $x = 1$. Agar $f(x)$ kontinu di $x = 1$, maka haruslah

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1).$$

  Tinjau $f(1) = a(1) + b = a + b$, serta

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 1 + 1 = 2, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax+b) = a(1) + b = a + b.$$

  Ini berarti $2 = a + b = a + b \implies a + b = 2$.

- Akan dicek kekontinuan di $x = 2$. Agar $f(x)$ kontinu di $x = 2$, maka haruslah

  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2).$$

  Tinjau $f(2) = 3(2) = 6$, serta

  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = a(2) + b = 2a + b, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 3x = 3(2) = 6.$$

  Ini berarti $2a + b = 6 = 6 \implies 2a + b = 6$.

Jadi, nilai a dan b yang memenuhi haruslah memenuhi sistem persamaan $a + b = 2$ dan $2a + b = 6$, diperoleh $\boxed{(a, b) = (4, -2)}$. ▼

Question 4

Gunakan turunan implisit untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgung pada kurva $y^2 = kx$ di (x_0, y_0) adalah $y_0 y = \frac{k}{2}(x + x_0)$.

Penyelesaian.

Akan ditentukan $\frac{dy}{dx}$, yaitu

$$\frac{d}{dx}\, y^2 = \frac{d}{dx}\, kx \implies 2y\,\frac{dy}{dx} = k \implies \frac{dy}{dx} = \frac{k}{2y}.$$

Diperoleh bahwa kemiringan (gradien) garis singgung di titik (x_0, y_0) adalah $m = \frac{k}{2y_0}$. Karena garis singgung tersebut melalui titik (x_0, y_0), maka persamaan garis singgung tersebut di titik (x_0, y_0) adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) = \frac{k}{2y_0}(x - x_0) \implies yy_0 - y_0^2 = \frac{k}{2}(x - x_0) \implies yy_0 = y_0^2 + \frac{k}{2}(x - x_0).$$

Karena titik (x_0, y_0) terletak pada grafik $y^2 = kx$, ini berarti $y_0^2 = kx_0$. Substitusikan,

$$yy_0 = kx_0 + \frac{k}{2}(x - x_0) = \frac{k}{2}(2x_0 + x - x_0) = \frac{k}{2}(x + x_0) \implies yy_0 = \frac{k}{2}(x + x_0)$$

seperti yang ingin dibuktikan. ▼