

TUGAS I — STRUKTUR ALJABAR

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

Kerjakan setiap soal berikut dengan menyertakan proses pengerjaan Anda hingga mendapatkan jawaban akhir. Kerjakan setiap soal pada lembar folio bergaris yang berbeda dan diperkenankan setiap soal terdiri dari lebih satu halaman. Bobot setiap soal dicantumkan pada soal yang bersangkutan. Waktu pengerjaan hingga 30 September 2024 dan dikumpulkan di Google Classroom, sedangkan tanggal 1 Oktober 2024 dikumpulkan saat pelaksanaan responsi.

1 [10] Misalkan $A = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$.

- (a) Buktikan bahwa $(A, +_{12}, \cdot_{12})$ membentuk ring.
- (b) Tentukan, jika ada, semua elemen pembagi nol dan elemen unit di A .
- (c) Periksa apakah $(A, +_{12}, \cdot_{12})$ membentuk daerah integral atau tidak.

[10 poin]

2 Diberikan ring $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan biasa $+$ dan perkalian biasa \cdot . Periksa apakah $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ merupakan daerah integral atau field

[10 poin]

3 Tentukan semua subring yang mungkin dari ring $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$.

[10 poin]

4 Misalkan R adalah suatu ring dan A, B subring dari R .

- (a) Buktikan bahwa $A \cap B$ merupakan subring dari R .
- (b) Berikan contoh A, B , dan R untuk menunjukkan bahwa $A \cup B$ **belum tentu** subring dari R .

[15 poin]

5 Diberikan ring $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ dan $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$. Didefinisikan operasi \oplus dan \otimes pada $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ dengan

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a +_3 c, b +_5 d), \quad (a, b) \otimes (c, d) = (a \cdot_3 c, b \cdot_5 d)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Dibentuk ring $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$.

- (a) Tentukan order dari $(\bar{2}, \bar{4}) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.
- (b) Tentukan $\text{char}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$.
- (c) Tentukan semua ideal di $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$.

(d) Apakah $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \oplus, \otimes)$ merupakan ideal pokok?

[20 poin]

6 Diberikan ring R dengan elemen satuan 1_R dan I ideal dari R .

- (a) Diketahui $1_R \in I$. Buktikan bahwa untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \in I$. Simpulkan $I = R$.
- (b) Jika $I \neq R$, buktikan $1_R \notin I$.

[15 poin]

7 Diberikan dua field $(X, +, \cdot)$ dan $(Y, \#, *)$ dengan $|X|, |Y| > 1$. Didefinisikan operasi biner \oplus dan \otimes pada $X \times Y$ dengan

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b \# d), \quad (a, b) \otimes (c, d) = (a \cdot c, b * d)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in X \times Y$. Akibatnya, $(X \times Y, \oplus, \otimes)$ membentuk ring.

- (a) Tentukan elemen nol dan elemen satuan di $(X \times Y, \oplus, \otimes)$. (jika ada.)
- (b) Tentukan semua elemen pembagi nol dan elemen unit di $(X \times Y, \oplus, \otimes)$. (jika ada.)

Catatan. Mahasiswa tidak perlu membuktikan $X \times Y$ ring di lembar jawaban. Namun, diharapkan mahasiswa mengetahui bagaimana membuktikan bahwa $X \times Y$ merupakan ring dan diserahkan sebagai latihan mandiri.

[20 poin]