

# Soal dan Solusi UAS Geometri Analitik 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

## Question 1

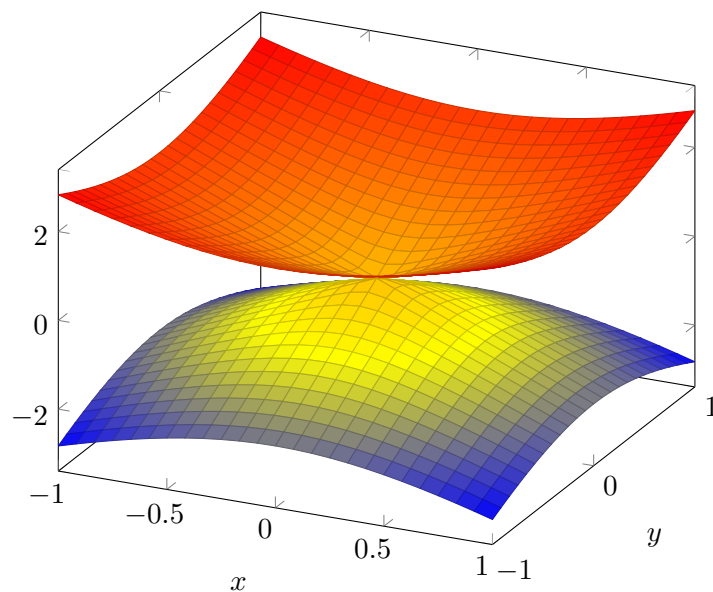
Cari persamaan suatu permukaan yang diperoleh dari kurva  $z = 2y$  diputar terhadap sumbu- $z$ .

### Penyelesaian.

Buat irisan bidang sejajar bidang- $xy$ , misalkan  $z = 2k$  untuk suatu  $k \in \mathbb{R}$ . Bidang ini akan mengiris hasil rotasi  $z = 2y$  dengan sumbu- $z$  berupa lingkaran (berdasarkan sifat rotasi, yakni titik hasil rotasi akan berjarak sama dengan titik pusat rotasinya). Lingkaran tersebut berpusat di titik  $(0, 0, 2k)$  dan titik-titik pada lingkaran tersebut berbentuk  $(x, y, 2k)$ . Selain itu, salah satu titik di lingkaran yang terletak pada bidang- $yz$  salah satunya adalah  $(0, k, 2k)$ . Jarak  $(0, 0, 2k)$  dengan  $(0, k, 2k)$  adalah  $\sqrt{(0-0)^2 + (k-0)^2 + (2k-2k)^2} = \sqrt{k^2} = |k|$ . Jadi, panjang jari-jarinya adalah  $|k|$ . Maka jarak titik  $(x, y, 2k)$  dengan  $(0, 0, 2k)$  adalah  $|k|$  satuan dan berlaku

$$|k|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (2k-2k)^2 = x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = k^2.$$

Dengan mengambil sebarang  $z = 2k \iff k = \frac{z}{2}$ , maka  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$  merupakan persamaan permukaan yang diminta.



### Question 2

Perhatikakn soal berikut.

- (a). Ubah persamaan  $r^2 \cos(2\theta) + z^2 = 1$  ke dalam bentuk kartesius.
- (b). Ubah persamaan  $x^2 + y^2 = 9$  ke dalam bentuk koordinat bola.

### Penyelesaian.

- (a). Perhatikan bahwa

$$1 = r^2 \cos(2\theta) + z^2 = r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + z^2 = r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) + z^2$$

dan diperoleh  $1 = x^2 - y^2 + z^2$  sebagai persamaan yang diminta.

- (b). Perhatikan bahwa  $9 = x^2 + y^2 = r^2$  sehingga  $3 = r = \rho \sin(\varphi) \implies \rho \sin(\varphi) = 3$  sebagai persamaan yang diminta.



**Question 3**

Perhatikan empat titik di ruang berikut:

$$U = (1, 0, 0), \quad V = (0, 2, 0), \quad W = (0, 0, 3), \quad S = (-2, 1, 4).$$

- Tentukan persamaan bidang  $\alpha$  yang melalui tiga titik  $U, V, W$ .
- Nyatakan persamaan bidang tersebut dalam bentuk persamaan vektor.
- Tentukan jarak titik  $S$  ke bidang  $\alpha$ .

**Penyelesaian.**

- (b). Tinjau vektor  $\mathbf{p} = \overrightarrow{UV} = \langle -1, 2, 0 \rangle$  dan  $\mathbf{q} = \overrightarrow{UW} = \langle -1, 0, 3 \rangle$ . Maka vektor yang tegak lurus  $\mathbf{p}$  dan  $\mathbf{q}$  adalah

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \langle 6, 3, 2 \rangle.$$

Maka vektor normal bidang  $\alpha$  adalah  $\mathbf{n} = \langle 6, 3, 2 \rangle$ . Ambil sebarang titik  $A = (x, y, z)$  di  $\alpha$ , maka  $\mathbf{m} = \overrightarrow{UA} = \langle x - 1, y - 0, z - 0 \rangle = \langle x - 1, y, z \rangle$ . Karena  $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$ , maka  $0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$ , yakni  $0 = \langle 6, 3, 2 \rangle \cdot \langle x - 1, y, z \rangle$  sebagai persamaan yang diminta.

- (a). Dari (b), diperoleh persamaan bidang  $\alpha$  adalah

$$0 = \langle 6, 3, 2 \rangle \cdot \langle x - 1, y, z \rangle = 6(x - 1) + 3y + 2z = 6x - 6 + 3y + 2z$$

yang dapat ditulis sebagai  $6x + 3y + 2z = 6$ .

- (c). Tulis  $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ , jarak titik  $S$  dengan  $\alpha$  adalah

$$\frac{|6(-2) + 3(1) + 4(2) - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-12 + 3 + 8 - 6|}{\sqrt{49}} = \frac{|-7|}{7} = 1.$$



**Question 4**

Diketahui tiga titik  $X = (3, -6, 4)$ ,  $Y = (2, 1, 1)$ , dan  $Z = (5, 0, -2)$ .

- Cari vektor unit yang tegak lurus dengan bidang yang melalui tiga titik tersebut.
- Tentukan persamaan garis  $g$  yang melalui titik  $A = (1, 1, 1)$  dan sejajar dengan vektor normal bidang nomor a.
- Tentukan titik potong garis  $g$  dengan bidang nomor a.

**Penyelesaian.**

- (a). Tulis  $\mathbf{a} = \overrightarrow{XY} = \langle 2 - 3, 1 - (-6), 1 - 4 \rangle = \langle -1, 7, -3 \rangle$  dan  $\mathbf{b} = \overrightarrow{XZ} = \langle 5 - 3, 0 - (-6), -2 - 4 \rangle = \langle 2, 6, -6 \rangle$ . Maka vektor yang tegak lurus  $\mathbf{a}$  dan  $\mathbf{b}$  adalah

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & 6 & -6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -24\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 20\mathbf{k} = \langle -24, -12, -20 \rangle = -4 \langle 6, 3, 5 \rangle$$

Maka vektor tegak lurus bidang yang melalui ketiga titik tersebut adalah  $\mathbf{n} = \langle 6, 3, 5 \rangle$ , yang mana vektor unit yang diminta adalah

$$\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\langle 6, 3, 5 \rangle}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 5^2}} = \left\langle \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}} \right\rangle.$$

- (b). Ambil sebarang titik  $B = (x, y, z)$  di garis  $g$  dan tinjau vektor  $\mathbf{m} = \overrightarrow{AB} = \langle x - 1, y - 1, z - 1 \rangle$ . Karena  $\mathbf{m}$  sejajar  $\mathbf{n}$ , maka  $\mathbf{m} = t\mathbf{n} = t \langle 6, 3, 5 \rangle = \langle 6t, 3t, 5t \rangle$  untuk suatu  $t \in \mathbb{R}$ . Diperoleh persamaan garis yang diminta adalah  $x = 6t + 1, y = 3t + 1, z = 5t + 1, t \in \mathbb{R}$ .
- (c). Misalkan titik potong garis  $g$  dengan bidang tersebut adalah  $(a, b, c)$ . Karena titik  $(a, b, c)$  berada di garis  $g$ , maka  $a = 6t + 1, b = 3t + 1$ , dan  $c = 5t + 1$  untuk suatu  $t \in \mathbb{R}$ . Seperti pada nomor 2, persamaan bidang yang melalui  $X, Y, Z$  adalah

$$0 = \mathbf{n} \cdot \langle x - 3, y - (-6), z - 4 \rangle = \langle 6, 3, 5 \rangle \cdot \langle x - 3, y + 6, z - 4 \rangle = 6(x - 3) + 3(y + 6) + 5(z - 4)$$

dan diperoleh  $6x + 3y + 5z = 20$ . Karena  $(a, b, c)$  berada di bidang tersebut, maka memenuhi  $20 = 6a + 3b + 5c$ . Substitusikan,

$$20 = 6(6t + 1) + 3(3t + 1) + 5(5t + 1) = 36t + 6 + 9t + 3 + 25t + 5 = 70t + 14 \implies t = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}.$$

Jadi, titik potongnya adalah

$$(a, b, c) = (6t + 1, 3t + 1, 5t + 1) = \left( 6 \cdot \frac{3}{35} + 1, 3 \cdot \frac{3}{35} + 1, 5 \cdot \frac{3}{35} + 1 \right) = \left( \frac{53}{35}, \frac{44}{35}, \frac{10}{7} \right).$$

