

LATIHAN SOAL PERSIAPAN UTS

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

1. Didefinisikan operasi $*$ dan \cdot pada \mathbb{Z} sebagai

$$a * b = a + b + 1, \quad a \cdot b = a + b + ab$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Periksa apakah $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring, field, atau daerah integral.
 - (b) Tentukan semua pembagi nol di \mathbb{Z} jika ada.
 - (c) Tentukan semua unit di \mathbb{Z} jika ada.
2. Diberikan ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ dengan operasi $*$ dan \cdot sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{3}) * (c + d\sqrt{3}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{3} \\ (a + b\sqrt{3}) \cdot (c + d\sqrt{3}) &= (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Periksa apakah $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ merupakan daerah integral atau field.

3. Diberikan $S = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b = c\}$. Selidiki apakah S subring dari R atau bukan.
4. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.
- (a) Tentukan semua subring dan ideal dari $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$.
 - (b) Tentukan $o(\bar{2}, \bar{5})$.
 - (c) Tentukan $\text{char}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7)$.

5. Diberikan ring $S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ dan ring $T = \{\bar{0}, \bar{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Tentukan $\text{char}(S \times T)$.

6. Misalkan R adalah ring komutatif dan $A \subseteq R$. Buktikan bahwa annihilator A ,

$$\text{Ann}(A) = \{r \in R : ra = 0_R \forall a \in A\}$$

merupakan ideal dari R .

7. Untuk masing-masing $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$ berikut, tentukan hasil dan sisa pembagian $f(x)$ oleh $g(x)$.

(a) $f(x) = \bar{5}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{1}, g(x) = \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$.

(b) $f(x) = \bar{2}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{4}x + \bar{1}, g(x) = \bar{3}x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

(c) $f(x) = \bar{2}x^5 + \bar{2}x^4 + x^2 + \bar{2}, g(x) = x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

8. Untuk masing-masing $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$ berikut, carilah FPB dari $f(x)$ dan $g(x)$.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + \bar{2}x + \bar{2}, g(x) = x^4 + \bar{2}x^2 + x + \bar{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(b) $f(x) = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{4}x + \bar{5}, g(x) = \bar{3}x^2 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[x]$.

(c) $f(x) = \bar{4}x^4 + \bar{2}x^3 + \bar{6}x^2 + \bar{4}x + \bar{5}, g(x) = \bar{3}x^3 + \bar{5}x^2 + \bar{6}x \in \mathbb{Z}_7[x]$.