Soal dan Solusi UAS Kalkulus III 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Diketahui kurva berupa lingkaran di $\mathbb{R}^2$ dengan jari-jari sama dengan 1 dan berpusat di titik $(0,0)$.

(a). Cari dua lintasan ϕ_1 dan ϕ_2 yang merepresentasikan lingkaran tersebut. Buktikan bahwa dua lintasan yang Anda cari ekivalen.

(b). Diketahui $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$. Hitung $\int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dan $\int\limits_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Penyelesaian.

(a). Tinjau $\phi_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dan $\phi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$\phi_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{dan} \quad \phi_2(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Akan dibuktikan bahwa ϕ_1 dan ϕ_2 ekivalen. Pandang $f : [0,1] \to [0,2\pi]$ dengan $f(t) = 2\pi t$. Akan dibuktikan f *well-defined*. Ambil sebarang $t_1, t_2 \in [0,1]$ sedemikian sehingga $t_1 = t_2$, tinjau

$$f(t_1) = 2\pi t_1 = 2\pi t_2 = f(t_2) \implies f(t_1) = f(t_2).$$

Perhatikan bahwa $f'(t) = 2\pi > 0$ untuk setiap $t \in (0,1)$, ini artinya f monoton naik tegas di interval $[0,1]$ yang menunjukkan bahwa f injektif di interval tersebut. Karena f' ada di setiap $t \in [0,1]$, maka f kontinu di $[0,1]$ yang menunjukkan f surjektif di interval tersebut. Kemudian, $\phi_1 \circ t : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dan untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku

$$(\phi_1 \circ f)(t) = \phi_1(f(t)) = \phi_1(2\pi t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \phi_2(t).$$

Karena berlaku untuk sebarang $t \in [0,1]$, maka $\phi_1 \circ t = \phi_2$. Jadi, terbukti ϕ_1 dan ϕ_2 ekuivalen.

(b). Tinjau $f'(t) > 0$ (sebagaimana pada bagian a) yang berarti ϕ_1 dan ϕ_2 lintasan ekivalen dengan orientasi searah, hal ini berakibat

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{F}(\phi_1(t)) \cdot \phi_1'(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

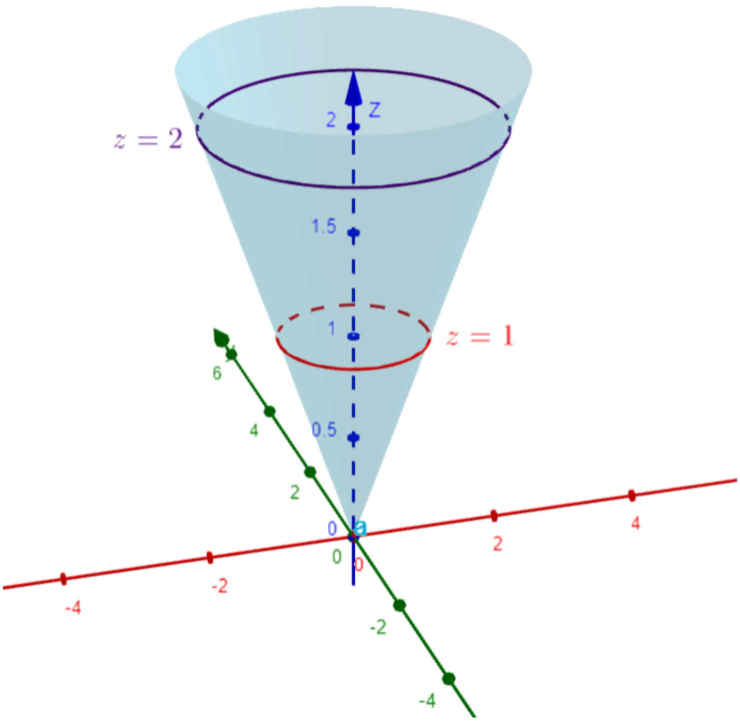
Catatan. Hasil pada bagian (b) diperoleh bergantung pada lintasan yang dibuat dan hasilnya 2π atau -2π. Apabila parameterisasi lintasan ϕ_1 dan ϕ_2 ekivalen namun memiliki orientasi yang berbeda, maka hasil yang diperoleh 2π dan yang lainnya -2π. Kemungkinan lainnya, jika ϕ_1 dan ϕ_2 memiliki orientasi yang searah memungkinkan juga memberikan jawaban -2π.

▼

Question 2

Diketahui fungsi $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ dan permukaan S merupakan bagian kerucut $z^2 = x^2+y^2$ yang dibatasi oleh $z=1$ dan $z=2$ dengan vektor normal mengarah keluar dari kerucut. Hitunglah $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

Penyelesaian.



Untuk setiap $(x,y,z)\in S$, parameterisasi titik-titik tersebut dengan

$$(x,y,z) = \phi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u), \quad \phi : [1,2]\times[0,2\pi].$$

Perhatikan bahwa

$$\mathbf{t}_u = (\cos(v), \sin(v), 1) \quad \text{dan} \quad \mathbf{t}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0).$$

Dari sini diperoleh

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 1 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \left(-u\cos(v), -u\sin(v), u\cos^2(v)+u\sin^2(v)\right) = (-u\cos(v), -u\sin(v), u).$$

Oleh karena itu, vektor normal satuan dari permukaan tersebut berdasarkan parameterisasi tersebut adalah

$$\frac{\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|} = \frac{(-u\cos(v), -u\sin(v), u)}{\sqrt{u^2\cos^2(v)+u^2\sin^2(v)+u^2}} = \left(-\frac{\cos(v)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(v)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

yang berarti mengarah ke dalam kerucut. Karena vektor normal S mengarah keluar dari kerucut, maka $\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\int_\phi \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Didapatkan

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= -\int_\phi \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\phi(u,v))\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v)\ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{F}\left(u\cos(v), u\sin(v), u\right)\cdot(-u\cos(v), -u\sin(v), u)\ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(u^2\cos^2(v), u^2\sin^2(v), u^2\right)\cdot(-u\cos(v), -u\sin(v), u)\ \ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 -u^3\cos^3(v) - u^3\sin^3(v) + u^3\ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\left[-\frac{u^4}{4}\cos^3(v) - \frac{u^4}{4}\sin^3(v) + \frac{u^4}{4}\right]_{u=1}^{u=2}\ dv \\
&= -\frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\cos^3(v) - \sin^3(v) + 1\right)\ dv.
\end{aligned}$$

Akan ditentukan $\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv$ dan $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv$. Tinjau $\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv + \int_\pi^{2\pi}\cos^3(v)\ dv$. Misalkan $v = a+\pi \iff y = v-\pi$, maka $dv = da$ sehingga diperoleh

$$\int_\pi^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(a+\pi)\ da = \int_0^{\pi}(-\cos(a))^3\ dy = -\int_0^{\pi}\cos^3(a)\ da = -\int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv.$$

Ini berarti

$$\int_0^{2\pi}\cos^3(v) = \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv + \int_\pi^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(v) - \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv = 0.$$

Akan ditentukan $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\sin^3(v)\ dv + \int_\pi^{2\pi}\sin^3(v)\ dv$. Dengan cara yang sama sebagaimana sebelumnya,

$$\int_\pi^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\sin^3(b+\pi)\ d(b+\pi) = \int_0^{\pi}(-\sin(b))^3\ db = -\int_0^{\pi}\sin^3(b)\ db = -\int_0^{\pi}\sin^3(v)\ dv$$

sehingga dapat diperoleh $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = 0$. Jadi,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{15}{4}\left(-\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv - \int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv + \int_0^{2\pi}\ dv\right) = -\frac{15}{4}(-0-0+2\pi) = -\frac{15\pi}{2}.$$

Alternatif Solusi. Nilai dari $\int\limits_0^{2\pi} \cos^3(v)\ dv$ dan $\int\limits_0^{2\pi} \sin^3(v)\ dv$ dapat ditentukan dengan menentukan $\int \cos^3(v)\ dv$ dan $\int \sin^3(v)\ dv$ menggunakan identitas berikut:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) &\iff \cos^3(x) = \frac{3\cos(x) + \cos(3x)}{4} \\
\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) &\iff \sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}.
\end{aligned}$$

Identitas tersebut dapat dibuktikan sebagaimana berikut:

$$\begin{aligned}
\cos(3x) = \cos(2x + x) &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) \cdot \sin(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1 - \cos^2(x)\right)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x) \\
&= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan untuk $\sin(3x)$. ▼

Question 3

Diketahui sebuah permukaan dengan permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$.

(a). Carilah parameterisasi dari permukaan tersebut.

(b). Gunakan jawaban nomor a untuk mencari luas permukaannya.

Penyelesaian.

(a). Tinjau untuk

$$(x, y, z) = \phi(u, v) = (3\cos(u)\sin(v), 3\sin(u)\sin(v), 3\cos(v)), \quad \phi : [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

merupakan parameterisasi untuk permukaan tersebut karena

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9\cos^2(u)\sin^2(v) + 9\sin^2(u)\sin^2(v) + 9\cos^2(v) \\ &= 9\sin^2(v)\left(\cos^2(u) + \sin^2(u)\right) + 9\cos^2(v) \\ &= 9\sin^2(v) + 9\cos^2(v) \\ &= 9. \end{aligned}$$

(b). Tinjau

$$\mathbf{t}_u = (-3\sin(u)\sin(v), 3\cos(u)\sin(v), 0) \quad \text{dan} \quad \mathbf{t}_v = (3\cos(u)\cos(v), 3\sin(u)\cos(v), -3\sin(v)).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u)\sin(v) & 3\cos(u)\sin(v) & 0 \\ 3\cos(u)\cos(v) & 3\sin(u)\cos(v) & -3\sin(v) \end{vmatrix} \\ &= \left(-9\cos(u)\sin^2(v), -9\sin(u)\sin^2(v), -9\sin^2(u)\sin(v)\cos(v) - 9\cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\right) \\ &= (-9\cos(u)\sin^2(v), -9\sin(u)\sin^2(v), -9\sin(v)\cos(v)). \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| &= \sqrt{81\cos^2(u)\sin^4(v) + 81\sin^2(u)\sin^4(v) + 81\sin^2(v)\cos^2(v)} \\ &= 9\sqrt{\sin^4(v)\left(\cos^2(u) + \sin^2(u)\right) + \sin^2(v)\cos^2(v)} \\ &= 9\sqrt{\sin^4(v) + \sin^2(v)\cos^2(v)} \\ &= 9\sqrt{\sin^2(v)\left(\sin^2(v) + \cos^2(v)\right)} \\ &= 9\sqrt{\sin^2(v)} \\ &= 9|\sin(v)| = 9\sin(v) \end{aligned}$$

karena untuk setiap $v \in [0, \pi]$ berlaku $\sin(v) \geq 0$. Diperoleh luas permukaannya adalah

$$\int_S d\mathbf{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| \, du \, dv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 9\sin(v) \, du \, dv = \int_0^{\pi} 18\pi\sin(v) \, dv = 18\pi[-\cos(v)]_{v=0}^{v=\pi}$$

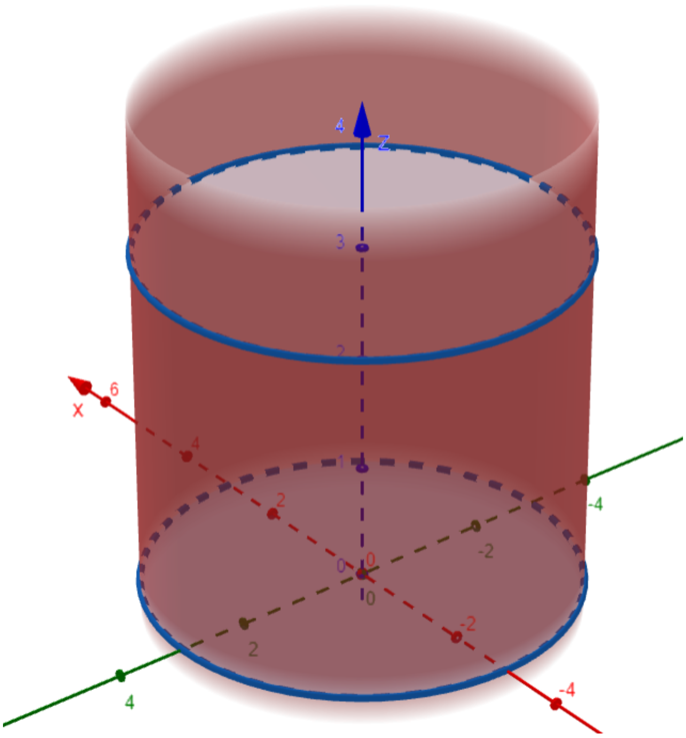
sehingga diperoleh hasilnya $18\pi(-\cos(\pi) + \cos(0)) = 18\pi(1 + 1) = 36\pi$.

▼

Question 4

Verivikasi teorema Gauss jika diketahui $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ dan V adalah daerah yang dibatasi oleh silinder $x^2+y^2=9$ dan bidang $z=0, z=3$.

Penyelesaian.



Misalkan:

- S_1 merupakan permukaan alas silinder, yaitu $x^2+y^2=9$ di bidang $z=0$,
- S_2 merupakan selimut silinder yang dibatasi oleh $z=0$ dan $z=3$,
- S_3 merupakan permukaan tutup slinider, yaitu $x^2+y^2=9$ di bidang $z=3$.

Asumsikan vektor normal masing-masing permukaan S_1, S_2, S_3 mengarah keluar, akan dibuktikan bahwa $\int\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$ di mana $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Tinjau $\int\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

- Akan ditentukan $\int\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x,y,z) \in S_1$, parameterisasi $(x,y,z) = \phi_1(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), 0)$ di mana $\phi_1 : [0,3]\times[0,2\pi]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u = (\cos(v), \sin(v), 0)$ dan $\mathbf{t}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$, maka

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, u\cos^2(v) + u\sin^2(v)\right) = (0,0,u)$$

sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = \frac{(0,0,u)}{\sqrt{0^2+0^2+u^2}} = \frac{(0,0,u)}{\sqrt{u^2}} = \frac{(0,0,u)}{|u|} = (0,0,1)$$

karena $|u| = u$ untuk $u \in [0,3]$. Jadi, vektor normalnya mengarah ke dalam silinder. Maka

$$\begin{aligned}\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\int_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_0^{2\pi}\int_0^3 \mathbf{F}(\phi_1(u,v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)\, du\, dv \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 (u\cos(v), u\sin(v), 0) \cdot (0,0,u)\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^3 0+0+0\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 0\, du\, dv = 0.\end{aligned}$$

- Akan ditentukan $\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x,y,z) \in S_2$, parameterisasi $(x,y,z) = \phi_2(u,v) = (3\cos(u), 3\sin(u), v)$ dengan $\phi_2 : [0,2\pi] \times [0,3]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u = (-3\sin(u), 3\cos(u), 0)$ dan $\mathbf{t}_v = (0,0,1)$ sehingga

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3\cos(u), 3\sin(u), 0)$$

sehingga diperoleh $\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = \frac{(3\cos(u),3\sin(u),0)}{\sqrt{9\cos^2(u)+9\sin^2(u)+0}} = (\cos(u), \sin(u), 0)$ yang berarti vektor normalnya mengarah keluar silinder. Maka

$$\begin{aligned}\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \mathbf{F}(\phi_2(u,v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (3\cos(u), 3\sin(u), v) \cdot (3\cos(u), 3\sin(u), 0)\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 9\cos^2(u) + 9\sin^2(u) + 0\, du\, dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 9\, du\, dv \\ &= 9(2\pi)(3) = 54\pi.\end{aligned}$$

- Akan ditentukan $\int_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x,y,z) \in S_3$, parameterisasi $(x,y,z) = \phi_3(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), 3)$ dengan $\phi_3 : [0,3] \times [0,2\pi]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u = (\cos(v), \sin(v), 0)$ dan $\mathbf{t}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$, maka

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \big(0, 0, u\cos^2(v) + u\sin^2(v)\big) = (0,0,u)$$

sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = \frac{(0,0,u)}{\sqrt{0^2+0^2+u^2}} = \frac{(0,0,u)}{\sqrt{u^2}} = \frac{(0,0,u)}{|u|} = (0,0,1)$$

karena $|u| = u$ untuk $u \in [0, 3]$. Jadi, vektor normalnya mengarah ke luar silinder. Maka

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\int\limits_{\phi_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 \mathbf{F}(\phi_3(u,v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)\, du\, dv \\
&= -\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 (u\cos(v), u\sin(v), 3) \cdot (0, 0, u)\, du\, dv = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 0 + 0 + 3u\, du\, dv \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 3u\, du\, dv = \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{3u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=3} dv \\
&= 2\pi \cdot \frac{27}{2} = 27\pi.
\end{aligned}$$

Diperoleh bahwa $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 54\pi + 27\pi = 81\pi$. Karena vektor normal masing-masing permukaan, menurut teorema Gauss berlaku

$$\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right) dV = 3\iiint\limits_V dV = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi$$

yang mana sesuai. Nilai dari $\iiint\limits_V dV$ menyatakan volume silinder dengan tinggi 3 dan jari-jari alas 3. Apabila vektor normal masing-masing permukaan mengarah ke dalam silinder, dengan parameterisasi yang sama berlaku

$$\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_{\phi_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

sehingga $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 - 54\pi - 27\pi = -81\pi$. Karena masing-masing permukaan mengarah ke dalam silinder, menurut teorema Gauss berlaku

$$\int\limits_S \mathbf{F} = -\iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = -\iiint 3\, dV = -3\iiint dV = -81\pi$$

yang mana juga sesuai. ▼

Catatan. Peninjauan vektor normal setiap permukaan sangat penting mengingat syarat berlaku teorema Gauss, yaitu vektor normal mengarah keluar permukaan.