Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Analisis Real II

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

$\boxed{1}$ Diberikan suatu fungsi identitas $f(x) = x$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Buktikan bahwa fungsi identitas f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

$\boxed{2}$ Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}, \quad 0 \leq x < \infty$$

untuk setiap bilangan asli n.

$\boxed{3}$ Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{untuk } 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Apakah integral $\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{d}g(x)$ atau $\int_{-1}^{1} g(x)\, \mathrm{d}f(x)$ ada? Jika keduanya ada, apakah sama nilainya?

Soal Nomor

1

Diberikan suatu fungsi identitas $f(x) = x$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Buktikan bahwa fungsi identitas f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Solusi:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Dari Archimedes, terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{(b-a)^2}{\varepsilon} < N$. Karena $\varepsilon > 0$, maka $\frac{(b-a)^2}{N} < \varepsilon$. Pilih partisi $P := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \in \mathcal{P}[a, b]$ dengan $x_k = a + \frac{b-a}{N}k$ untuk setiap $k = 0, 1, \ldots, N$. Dari sini diperoleh

$$M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq t \leq x_k} f(t) = x_k, \quad m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \leq t \leq x_k} f(t) = x_{k-1},$$

serta

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = a + \frac{k}{N}(b-a) - \left[a + \frac{k-1}{N}(b-a)\right] = \frac{b-a}{N}.$$

Dari sini diperoleh $M_k(f) - m_k(f) = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N}$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{k=1}^{N} (M_k(f) - m_k(f)) \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{b-a}{N} \cdot \frac{b-a}{N} \\
&= N \cdot \frac{(b-a)^2}{N^2} \\
&= \frac{(b-a)^2}{N} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi, f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Soal Nomor

2

Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad 0 \leq x < \infty$$

untuk setiap bilangan asli n.

Solusi:

Akan dibuktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \geq 0$ dengan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Jika $x = 0$, maka $f_n(x) = 0$ untuk setiap bilangan asli n dan tentu $\langle f_n(0) \rangle$ konvergen ke 0. Akan ditinjau untuk $x > 0$, ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Dari Archimedes, terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon} < N$. Karena $x\varepsilon > 0$, maka $x - \varepsilon < Nx\varepsilon$ yang ekivalen dengan $x < \varepsilon(1 + Nx)$. Karena $1 + Nx > 0$, maka $\frac{x}{1+Nx} < \varepsilon$. Untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{x}{1+Nx} < \varepsilon.$$

Jadi, $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen ke 0. Terbukti bahwa $\boxed{f(x) = 0}$ untuk setiap $x \geq 0$.

Soal Nomor 2

Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dan

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{untuk } 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

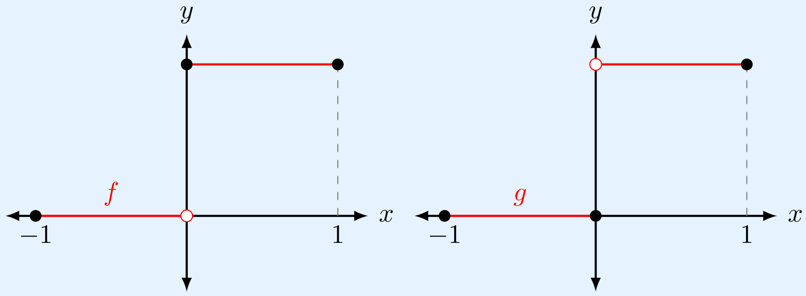
Apakah integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ atau $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}f(x)$ ada? Jika keduanya ada, apakah sama nilainya?

Solusi:

Misalkan $n \geq 2024$ bilangan asli. Pilih partisi

$$P_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\} \in \mathcal{P}[-1, 1], \quad x_k = -1 + \frac{k}{n}$$

untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, 2n$ yang berarti $x_n = 0$.



Akan dibuktikan bahwa $\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}g$ ada dan $\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}g = 1$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq n-1$, $M_i(f) = 0 = m_i(f)$ mengingat $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [x_0, x_{n-1}]$. Selain itu, untuk setiap $n+1 \leq j \leq 2n$ berlaku $M_j(f) = 1 = m_j(f)$ karena $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [x_n, x_{2n}]$. Ini berarti

$$U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)\Delta g_i + M_n(f)\Delta g_n + \sum_{j=n+1}^{2n} M_j(f)\Delta g_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1}(0)\Delta g_i + (M_n(f) - m_n(f))\Delta g_n + \sum_{j=n+1}^{2n}(1)\Delta g_j \\
&= 0 + (1-0)\Delta g_n + \sum_{j=n+1}^{2n}\Delta g_j \\
&= \Delta g_n + \Delta g_{n+1} + \Delta g_{n+2} + \ldots + \Delta g_{2n}.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa $\Delta g_n = g(x_n) - g(x_{n-1}) = 0 - 0 = 0$ dan $\Delta g_{n+1} = g(x_{n+1}) - g(x_n) = 1 - 0 = 1$. Di sisi lain, untuk setiap $j \geq n+2$ berlaku $\Delta g_j = g(x_j) - g(x_{j-1}) = 1 - 1 = 0$ karena $g(x) = 1$ untuk setiap $x \in [x_{n+1}, x_{2n}]$. Oleh karena itu, $U(f, P_n) = 1$. Dengan cara yang sama,

$$
\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)\Delta g_i + m_n(f)\Delta g_n + \sum_{j=n+1}^{2n} m_j(f)\Delta g_j \\
&= m_n(f)\Delta g_n + m_{n+1}(f)\Delta g_{n+1} + m_{n+2}(f)\Delta g_{n+2} + \ldots + m_{2n}(f)\Delta g_{2n} \\
&= 0 \cdot \Delta g_n + 1 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, $U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0 < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Oleh karena itu, f terintegral Riemann-Stieltjes terhadap g di $[-1, 1]$. Misalkan $\mathcal{S} := \{P_n : n \geq 2024\} \subseteq \mathcal{P}[-1, 1]$. Akibatnya,

$$
\int_{-1}^{1} f \, \mathrm{d}g = \overline{\int_{-1}^{1}} f \, \mathrm{d}g = \inf_{P \in \mathcal{P}[-1,1]} U(f, P) \leq \inf_{P_n \in \mathcal{S}} U(f, P) = \inf_{n \geq 2024} 1 = 1.
$$

Di sisi lain,

$$
\int_{-1}^{1} f \, \mathrm{d}g = \underline{\int_{-1}^{1}} g \, \mathrm{d}f = \sup_{P \in \mathcal{P}[-1,1]} L(f, P) \geq \sup_{P_n \in \mathcal{S}} L(f, P_n) = \sup_{n \geq 2024} 1 = 1.
$$

Karena $1 \leq \int_{-1}^{1} f \, \mathrm{d}g \leq 1$, ini menunjukkan $\int_{-1}^{1} f \, \mathrm{d}g = 1$.

Akan dibuktikan bahwa $\int_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}f$ ada dan $\int_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}f = 0$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $1 \leq i \leq n$, $M_i(g) = 0 = m_i(g)$ mengingat $g(x) = 0$ untuk setiap $x \in [x_0, x_n]$. Selain itu, untuk setiap $n+2 \leq j \leq 2n$ berlaku $M_i(g) = 1 = m_i(g)$ karena $g(x) = 1$ untuk setiap $x \in [x_{n+1}, x_{2n}]$. Ini berarti

$$
\begin{aligned}
U(g, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(g)\Delta f_i + M_{n+1}(g)\Delta f_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{2n} M_j(g)\Delta f_j \\
&= 0 + (1)(g)\Delta f_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{2n}(1)\Delta f_j \\
&= \Delta f_{n+1} + \Delta f_{n+2} + \ldots + \Delta f_{2n}.
\end{aligned}
$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $i \geq n+1$, $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = 1 - 1 = 0$ karena $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [x_n, x_{n+1}]$. Jadi, $U(g, P_n) = 0$. Selain itu,

$$\begin{aligned} L(g, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(g)\Delta f_i + m_{n+1}\Delta f_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{2n} m_i(g)\Delta f_i \\ &= 0 + (0)\Delta f_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{2n} (1)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $U(f, P_n) - L(f, P_n) = 0 < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, diperoleh $\int\limits_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}f = 0$.

Jadi, terbukti bahwa $\int\limits_{-1}^{1} f \, \mathrm{d}g$ dan $\int\limits_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}f$ masing-masiong ada, namun nilainya berbeda.