



Departemen Matematika

Ujian Tengah Semester

Fungsi Kompleks II

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

- 1 Gambarlah lintasan dari

$$g(t) = \frac{-2t}{1+t^2} + i \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

untuk $t \in [-1, 1]$.

- 2 Hitunglah $\int_C z e^{z^2} dz$ dengan C lintasan berupa lingkaran.

- 3 Hitunglah $\int_C f(z) dz$ jika

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$$

sepanjang lengkungan $C : |z - i| = 2$.

- 4 Hitunglah $\int_C f(z) dz$ jika

$$f(z) = \frac{e^{2z} - z^2}{(z - 2)^3}$$

dan $C : |z - 1| = 3$.

Gambarlah lintasan dari

$$g(t) = \frac{-2t}{1+t^2} + i \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

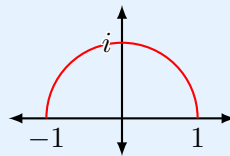
untuk $t \in [-1, 1]$.

Solusi:

Misalkan $u(t) = \operatorname{Re} g(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$ dan $v(t) = \operatorname{Im} g(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Karena

$$u(t)^2 + v(t)^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1.$$

Ini menunjukkan bahwa lintasan tersebut bagian lingkaran yang berpusat di $z = 0$ dan jari-jari 1. Tinjau bahwa $g(-1) = \frac{2}{2} + 0 = 1$, $g(0) = 0 + i \cdot \frac{1}{1} = i$, dan $g(1) = \frac{-2}{2} + 0 = -1$. Diperoleh lintasan $g(t)$ sebagai berikut.



Hitunglah $\int_C z e^{z^2} dz$ dengan C lintasan berupa lingkaran.

Solusi:

Perhatikan bahwa fungsi eksponensial e^z , fungsi polinom z dan z^2 masing-masing entire. Akibatnya, komposisi fungsi z^2 dan e^z , yaitu e^{z^2} , juga merupakan fungsi entire. Selain itu, hasil kali fungsi z dan e^{z^2} , yaitu ze^{z^2} , juga merupakan fungsi entire. Misalkan C sebarang lintasan berupa lingkaran, maka C tertutup sederhana. Karena ze^{z^2} entire, menurut Cauchy-Goursat, berlaku $\int_C z e^{z^2} dz = \boxed{0}$ untuk sebarang lintasan lingkaran C .

Hitunglah $\int_C f(z) dz$ jika

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$$

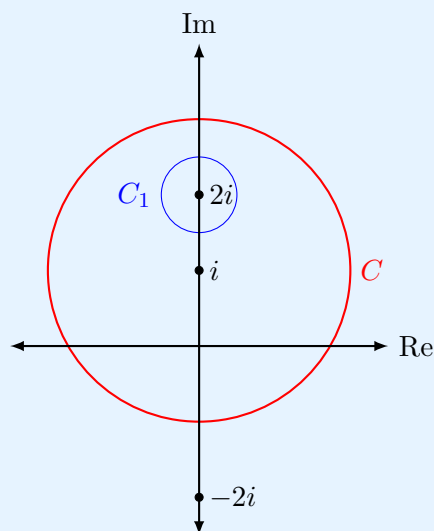
sepanjang lengkungan $C : |z - i| = 2$.

Solusi:

Tinjau bahwa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z + 2i)^2(z - 2i)^2}$$

yang berarti titik singular $f(z)$ adalah $z = \pm 2i$.



Misalkan C_1 adalah lintasan lingkaran yang berpusat di $z = 2i$ sedemikian sehingga $\text{int}(C_1) \subseteq \text{int}(C)$ serta berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam). Tinjau $f(z)$ analitik di $C \setminus C_1$, dari sini akan berakibat $\int_C f(z) dz = \pm \int_{C_1} f(z) dz$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif

dan $-$ saat berorientasi negatif. Kemudian, dari Cauchy berlaku

$$\int_{C_1} f(z) \, dz = \int_{C_1} \frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2} = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+2i)^2} \, dz}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} g'(2i)$$

di mana $g(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \implies g'(z) = -\frac{2}{(z+2i)^3}$ dan diperoleh $g'(2i) = -\frac{2}{(4i)^3} = -\frac{2}{-64i} = \frac{1}{32i}$. Dari sini diperoleh

$$\int_{C_1} f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$$

Jadi, $\int_C f(z) \, dz = \boxed{\pm \frac{\pi}{16}}$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif.

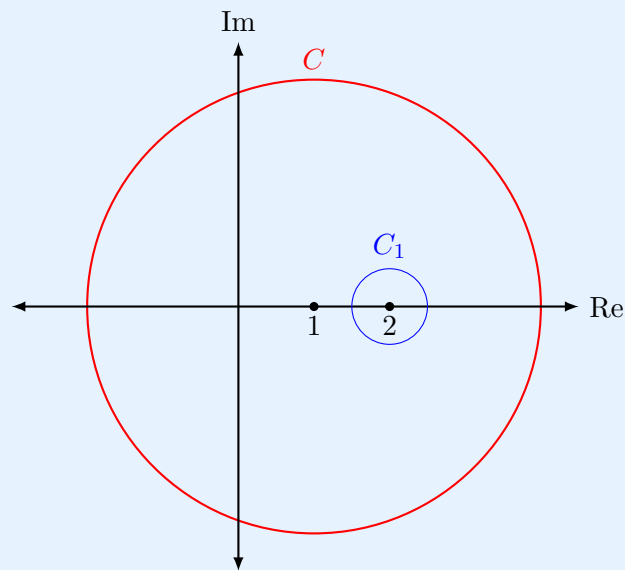
Hitunglah $\int_C f(z) dz$ jika

$$f(z) = \frac{e^{2z} - z^2}{(z - 2)^3}$$

dan $C : |z - 1| = 3$.

Solusi:

Perhatikan bahwa $z = 2$ merupakan titik singular dari $f(z)$.



Misalkan C_1 lintasan lingkaran berpusat di $z = 2$ sedemikian sehingga $\text{int}(C_1) \subseteq \text{int}(C)$ serta berorientasi positif. Ini berakibat $\int_C f(z) dz = \pm \int_{C_1} f(z) dz$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif. Kemudian, dari Cauchy berlaku

$$\int_{C_1} \frac{e^{2z} - z^2}{(z - 2)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} g''(2) = \pi i g''(2), \quad g(z) = e^{2z} - z^2.$$

Diperoleh $g'(z) = 2e^{2z} - 2z \implies g''(z) = 4e^{2z} - 2$ dan diperoleh $g''(2) = 4e^4 - 2$. Jadi,

$$\int_C f(z) \, dz = \pm \pi i (4e^4 - 2) = \boxed{\pm 2\pi i (2e^4 - 1)}$$

di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif.