

TUGAS II — STRUKTUR ALJABAR

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

Kerjakan setiap soal berikut dengan menyertakan proses pengerjaan Anda hingga mendapatkan jawaban akhir. Kerjakan setiap soal pada lembar folio bergaris yang berbeda dan diperkenankan setiap soal terdiri dari lebih satu halaman. Bobot setiap soal dicantumkan pada soal yang bersangkutan. Waktu pengerjaan hingga 11 November 2024 dan dikumpulkan di Google Classroom, sedangkan tanggal 12 November 2024 dikumpulkan saat pelaksanaan responsi.

1 Diberikan ring $\mathbb{Z}_2[x]$ dan $I := \langle x^2 + 1 \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}_2[x]$.

- (a) Tentukan semua elemen di $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$.
- (b) Buat tabel penjumlahan dan perkalian dari elemen-elemen $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$.
- (c) Tentukan semua pembagi nol sejati dari ring faktor $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$.

[20 poin]

2 Misalkan R ring komutatif serta I dan J adalah ideal dari R .

- (a) Buktikan bahwa $I \cap J$ ideal dari R .
- (b) Buktikan bahwa ring faktor $\frac{R}{I \cap J}$ komutatif jika dan hanya jika masing-masing ring faktor $\frac{R}{I}$ dan $\frac{R}{J}$ juga komutatif.

[25 poin]

3 Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dan ring $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$, kemudian dibentuk pemetaan $f : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_{10}$ dengan $f(x) := 5x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$.

- (a) Buktikan bahwa f merupakan homomorfisma ring, namun bukan epimorfisma.
- (b) Tentukan $\ker(f)$.

[25 poin]

4 (a) Diberikan ring $A := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ dan $I := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$ ideal dari A .
Buktikan bahwa $A/I \cong \mathbb{Q}$.

- (b) Diberikan ring \mathbb{Z}_{40} , \mathbb{Z}_4 , dan \mathbb{Z}_{10} . Buktikan bahwa \mathbb{Z}_{40} tidak isomorfik ring dengan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

[30 poin]