

# Soal dan Solusi UTS Fungsi Kompleks I 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022


## Question 1

Carilah solusi dari  $x^4 + i = 0$ .

### Penyelesaian.

Tulis  $x = |x|\text{cis}(\theta)$  di mana  $\theta \in \mathbb{R}$ . Tinjau bahwa persamaan ekuivalen dengan  $x^4 = -i$ , maka  $1 = |-i| = |x^4| = |x|^4$  sehingga  $|x| = 1$ . Dari sini diperoleh  $x = \text{cis}(\theta)$ , maka  $-i = x^4 = (\text{cis}(\theta))^4 = \text{cis}(4\theta)$ . Tinjau  $-i = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ , ini berarti  $\text{cis}(4\theta) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ , maka

$$4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \implies \theta = \frac{3 + 4k}{8}\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Diperoleh semua solusinya adalah  $x \in \left\{ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{7\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{11\pi}{8}\right), \text{cis}\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right\}$ . 

**Question 2**

Carilah bilangan kompleks  $z$  yang memenuhi  $z^n = 1$  jika  $n$  bilangan asli.

**Penyelesaian.**

Misalkan  $z = |z|\text{cis}(\theta)$  di mana  $\theta \in \mathbb{R}$ . Perhatikan bahwa  $1 = |1| = |z^n| = |z|^n$  sehingga diperoleh  $|z| = 1$ . Tulis ulang  $z = \text{cis}(\theta)$ , maka  $1 = z^n = (\text{cis}(\theta))^n = \text{cis}(n\theta)$ . Tinjau bahwa  $\text{cis}(0) = 1$ , maka  $\text{cis}(0) = \text{cis}(n\theta)$  sehingga

$$n\theta = 0 + 2\pi k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \iff \theta = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Jadi, semua solusinya adalah  $\left\{ z = \frac{2\pi k}{n} : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$ .



**Question 3**

Tentukan hasil transformasi bidang kompleks  $z$  oleh fungsi linier  $w = z + 1 - 2i$ .

**Penyelesaian.**

Misalkan hasil transformasinya adalah  $w = u(x, y) + iv(x, y)$  di mana  $u, v \in \mathbb{R}$  dan  $z = x + iy$  di mana  $x, y \in \mathbb{R}$ . Maka

$$u + iv = (x + iy) + 1 - 2i = (x + 1) + (y - 2)i \implies u = x + 1, \quad v = y - 2.$$

Dari sini diperoleh bahwa apabila titik  $(x_0, y_0)$  di bidang  $z$  ditransformasikan oleh  $w = z + 1 - 2i$  menjadi  $(x_0 + 1, y_0 - 2)$ . Dengan kata lain, hasil transformasi diperoleh dari translasi dari bidang  $z$  sejauh 1 satuan ke arah kanan dan 2 satuan ke arah bawah. ▼