



wildan-wicaksono.github.io

# Solusi OSP SMA 2025

## *Bidang Matematika*

WILDAN BAGUS WICAKSONO

2025



Bagian I – Soal



## 1. Isian Singkat

Terdiri dari 8 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

.....

- 1** Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 3, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah . . . .

- 2** Misalkan  $u_1, u_2, u_3, \dots$  adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots = 31 \quad \text{dan} \quad u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149.$$

Nilai  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$  adalah . . . .

- 3** Diberikan segitiga lancip  $ABC$  dengan titik  $P$  dan  $Q$  pada sisi  $BC$ , titik  $R$  pada sisi  $AB$  sehingga

$$|PB| = |PQ| = |PR| \quad \text{dan} \quad |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa  $ACPR$  merupakan segiempat talibusur. Jika  $\angle APR = 54^\circ$ , maka besar  $\angle ABC$  adalah . . . .

**Catatan.** Notasi  $|XY|$  menyatakan panjang ruas garis  $XY$ .

- 4** Misalkan bilangan asli  $a, b, c, d$  memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika  $a + b + c + d \leq 500$ , maka nilai terbesar yang mungkin dari  $d$  adalah . . . .

- 5** Misalkan  $f$  suatu polinomial monik berderajat 5 sehingga

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 12, \quad f(4) = 19, \quad f(5) = 28.$$

Nilai dari  $f(6)$  adalah . . . .

**Catatan.** Polinomial  $P(x)$  berderajat  $n$  disebut *polinomial monik* jika koefisien  $x^n$  adalah 1.

- 6** Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah . . . .

**Catatan.**

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat tersebut adalah 11211 dan 21222.

- 7** Diberikan segiempat konveks  $ABCD$  dengan luas 288,  $AC$  tegak lurus  $BD$ , dan  $AB$  tidak sejajar  $CD$ . Misalkan  $P$  suatu titik di dalam segiempat  $ABCD$ . Selanjutnya, misalkan  $Q$  dan  $R$  berturut-turut merupakan proyeksi titik  $P$  pada sisi  $AC$  dan  $BD$ . Jika  $|AQ| : |QC| = 5 : 3$  dan  $|BR| : |DR| = 7 : 2$ , maka selisih luas segitiga  $ABP$  dengan luas segitiga  $CDP$  adalah . . . .

**Catatan.** Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak di dalam segiempat.
- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari  $180^\circ$ .

- 8** Banyaknya bilangan asli  $(a, b)$  di mana  $1 \leq a, b \leq 19^2$  sehingga

$$a^4 + b^3 \text{ habis dibagi } 19^2$$

adalah . . . .

## 2. Uraian

Terdiri dari 4 soal uraian. Setiap soal dijawab dengan menuliskan jawaban beserta langkah pengerjaan dan argumentasi yang lengkap untuk mendukung jawaban Anda. Setiap soal maksimal bernilai 7 poin dan nilai parsial dapat diberikan.

.....

- 1** Tentukan banyaknya bilangan asli  $n \geq 2$  sedemikian sehingga terdapat  $n$  bilangan **bulat** berurutan yang jumlahnya 2025.
- 2** Misalkan  $S$  adalah himpunan semua tripel bilangan real positif  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $a + b + c = ab + bc + ca$ .

(a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a + b, b + c, c + a\} > 1$$

berlaku untuk setiap  $(a, b, c) \in S$ .

(b) Apakah terdapat tripel  $(a, b, c) \in S$  sehingga

$$\min\{a + b, b + c, c + a\} < 1 + \frac{1}{20^{25}}?$$

**Catatan.** Notasi  $\min\{x, y, z\}$  menyatakan bilangan terkecil di antara  $x, y, z$ .

- 3** Pada segitiga  $ABC$ , misalkan  $D$  titik tengah ruas garis  $AB$  dan  $E$  titik pada sisi  $BC$ . Misalkan garis yang melalui  $E$  dan sejajar  $AB$  memotong garis bagi  $\angle ACB$  di titik  $P$ . Misalkan juga  $I$  titik pusat lingkaran dalam  $ABC$  dan  $J$  pusat lingkaran singgung luar dari segitiga  $ABC$  yang menyinggung sisi  $CA$  (**bukan** perpanjangan sisi  $CA$ ). Garis  $DJ$  memotong sisi  $CA$  di titik  $F$ .
- (a) Buktikan bahwa garis  $IF$  sejajar dengan  $AB$ .
- (b) Buktikan bahwa garis  $AP$ ,  $BJ$ , dan  $EF$  berpotongan di satu titik.

- 4** Diberikan suatu segitiga pada bidang- $xy$  dengan ketiga titik sudutnya bukan merupakan titik kisi dan ketiga sisinya tidak melalui titik kisi. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik kisi di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik kisi di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

**Catatan.** Pada bidang- $xy$ , titik *kisi* adalah titik berbentuk  $(a, b)$  dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat.



Bagian II – Solusi



### 3. Solusi Isian Singkat

- 1 Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 3, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah . . . .

**Jawab: 8**

Untuk yang berjumlah 3 atau 5 tidak mungkin, sedangkan sisanya cukup diselesaikan dengan kuli:

$$8 = 3 + 5 = 5 + 3, \quad 13 = 5 + 8 = 8 + 5, \quad 21 = 13 + 8 = 8 + 13, \quad 34 = 13 + 21 = 21 + 13.$$

Jadi, ada 8 kemungkinan kombinasi mata dadu yang muncul pada kedua lemparan tersebut.

.....

- 2 Misalkan  $u_1, u_2, u_3, \dots$  adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots = 31 \quad \text{dan} \quad u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149.$$

Nilai  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$  adalah . . . .

**Jawab: 186**

Misalkan  $u_1 = a$  dan rasio barisan geometri sebagai  $r$ , maka  $149 = u_1 + \frac{u_2}{u_1} = a + r$  dan

$$31 = u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots = ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \dots = \frac{ar}{1 - r^2}.$$

Substitusi  $a = 149 - r$ , maka

$$31 - 31r^2 = ar = (149 - r)r = 149r - r^2 \implies 0 = 30r^2 + 149r - 31 = (5r - 1)(6r + 31).$$

Ini berarti  $r = \frac{1}{5}$  atau  $r = -\frac{31}{6}$ . Namun, deret  $u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots$  konvergen (nilainya ada) apabila  $|r| < 1$  sehingga haruslah  $r = \frac{1}{5}$ .

Di sini, akan ditentukan

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1 - r} = \frac{149 - r}{1 - r}.$$

Ini berarti

$$\frac{149 - r}{1 - r} = \frac{148 + (1 - r)}{1 - r} = \frac{148}{1 - r} + 1 = \frac{148}{1 - \frac{1}{5}} + 1 = \frac{148}{\frac{4}{5}} + 1 = \boxed{186}.$$

.....

- 3 Diberikan segitiga lancip  $ABC$  dengan titik  $P$  dan  $Q$  pada sisi  $BC$ , titik  $R$  pada sisi  $AB$  sehingga

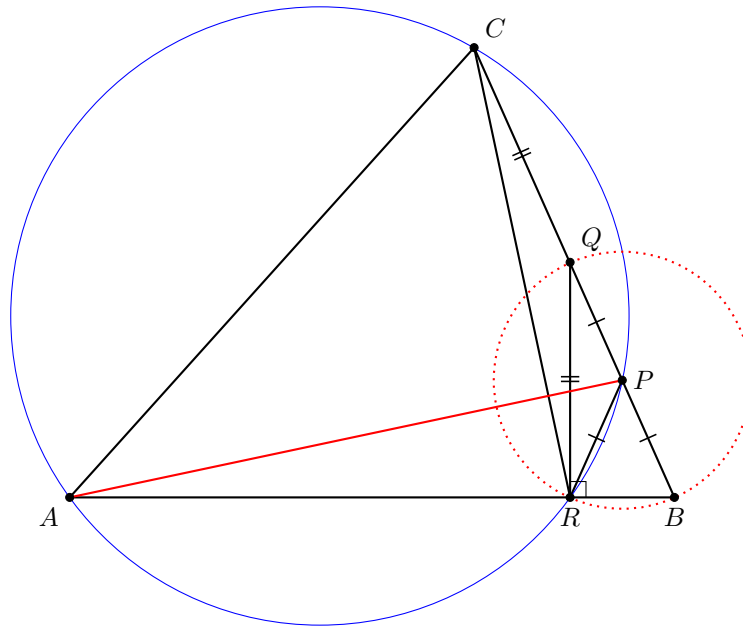
$$|PB| = |PQ| = |PR| \quad \text{dan} \quad |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa  $ACPR$  merupakan segiempat talibusur. Jika  $\angle APR = 54^\circ$ , maka besar  $\angle ABC$  adalah . . . .

**Catatan.** Notasi  $|XY|$  menyatakan panjang ruas garis  $XY$ .

**Jawab:**  $66^\circ$

Perhatikan bahwa panjang  $PB = PR = PQ$ , maka  $P$  titik pusat lingkaran luar  $RBQ$ . Ini artinya lingkaran tersebut memiliki diameter  $\overline{BQ}$  sehingga berakibat  $\angle BRQ = 90^\circ$ .



Misalkan  $\angle ABC = x$ . Karena  $PB = PR$ , diperoleh  $\angle PRB = \angle PBR = x$  sehingga diperoleh

$$\angle ARC = \angle APC = 180^\circ - \angle APR - \angle RPB = 180^\circ - 54^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x - 54^\circ.$$

Dari sudut pusat-sudut keliling,

$$\angle CQR = 180^\circ - \angle RQB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle RPB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2x) = 90^\circ + x.$$

Karena panjang  $QR = QC$ , diperoleh  $\angle QRC = \angle QCR = \frac{180^\circ - \angle RQC}{2} = 45^\circ - \frac{x}{2}$ . Dari sini diperoleh

$$90^\circ = \angle ARQ = \angle ARC + \angle CRQ = 2x - 54^\circ + 45^\circ - \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} - 9^\circ$$

sehingga  $\angle ABC = x = \frac{2}{3}(90^\circ + 9^\circ) = \frac{2}{3} \cdot 99^\circ = \boxed{66^\circ}$ .

.....



- 4 Misalkan bilangan asli  $a, b, c, d$  memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika  $a + b + c + d \leq 500$ , maka nilai terbesar yang mungkin dari  $d$  adalah . . . .

**Jawab: 72**

Karena  $a, b, c$  simetris, tanpa mengurangi keumuman misalkan  $a \geq b \geq c$ . Tulis persamaan sebagai  $2^c (2^{a-c} + 2^{b-c} + 1) = 4^d$ . Jika  $b > c$ , maka  $2^{a-c} + 2^{b-c} + 1$  merupakan bilangan ganjil sehingga  $2^c (2^{a-c} + 2^{b-c} + 1)$  memiliki faktor prima ganjil, kontradiksi. Ini haruslah  $b = c$  sehingga diperoleh  $4^d = 2^c (2^{a-c} + 2)$ . Jika  $a \geq c + 2$ , perhatikan bahwa  $4^d = 2^{c+1} (2^{a-c-1} + 1)$  yang mana  $2^{a-c-1} + 1$  bilangan ganjil yang berakibat  $2^{c+1} (2^{a-c-1} + 1)$  akan memiliki faktor prima ganjil, kontradiksi. Ini berarti  $a = c$  atau  $a = c + 1$ .

Jika  $a = c$ , maka  $4^d = 2^c \cdot 3$  yang mana tidak mungkin. Jika  $a = c + 1$ , maka  $4^d = 2^c \cdot 4 = 2^{c+2}$ . Mengingat  $4^d = 2^{2d}$ , maka  $2d = c + 2$  sehingga haruslah  $c$  genap. Tulis  $c = 2t$  dengan  $t$  bilangan asli sehingga diperoleh  $(a, b, c, d) = (2t + 1, 2t, 2t, t + 1)$ . Karena  $a + b + c + d \leq 500$ , diperoleh

$$500 \geq a + b + c + d = (2t + 1) + 2t + 2t + (t + 1) = 7t + 2 \implies 71 \geq t.$$

Diperoleh  $d = t + 1 \leq 72$  sehingga nilai terbesar untuk  $d$  adalah 72 yang dapat tercapai untuk  $(a, b, c, d) = (143, 142, 142, 72)$ .

.....

- 5 Misalkan  $f$  suatu polinomial monik berderajat 5 sehingga

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 12, \quad f(4) = 19, \quad f(5) = 28.$$

Nilai dari  $f(6)$  adalah . . . .

**Catatan.** Polinomial  $P(x)$  berderajat  $n$  disebut *polinomial monik* jika koefisien  $x^n$  adalah 1.

**Jawab: 159**

Misalkan

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + ax^2 + bx + c.$$

Di sini akan diperoleh sistem persamaan

$$4 = a + b + c$$

$$7 = 4a + 2b + c$$

$$12 = 9a + 3b + c$$

$$19 = 16a + 4b + c$$

$$28 = 25a + 5b + c.$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan ini, akan diselesaikan saja untuk tiga persamaan pertama karena merupakan sistem persamaan tiga variabel:

$$4 = a + b + c \quad (1)$$

$$7 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$12 = 9a + 3b + c. \quad (3)$$

Dari (2) – (1) dan (3) – (2) berturut-turut memberikan  $3 = 3a + b$  dan  $5 = 5a + b$ . Kurangkan kedua persamaan ini memberikan

$$2 = (5a + b) - (3a + b) = 2a \implies a = 1$$

sehingga diperoleh  $b = 3 - 3a = 0$ . Dari sini diperoleh  $c = 4 - (a + b) = 4 - 1 = 3$ . Dapat dicek bahwa solusi  $(a, b, c) = (1, 0, 3)$  dapat terpenuhi ke semua sistem persamaan tersebut. Ini berarti

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2 + 3$$

sehingga  $f(6) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6^2 + 3 = \boxed{159}$ .

**Komentar.** Permisalan  $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax^2 + bx + c$  dilakukan dengan sedikit coba-coba. Semisal, pada awalnya dimisalkan  $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + a$  untuk suatu konstan  $a$ , namun ini tidak memberikan solusi untuk  $a$ . Kemudian, dimisalkan  $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax + b$  untuk suatu konstan  $a$  dan  $b$ , namun ini juga tidak memberikan solusi untuk  $a$  dan  $b$ . Hingga pada permisalan  $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax^2 + bx + c$  untuk suatu konstan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  akan memiliki solusi.

- .....
- 6** Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah . . . .

**Catatan.**

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat tersebut adalah 11211 dan 21222.

**Jawab: 68**

Definisikan  $f(n)$  sebagai banyaknya bilangan  $n$  digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212. Akan ditentukan formula rekursif dari  $f(n)$ . Lalu, definisikan pula:

- $A(n)$  sebagai banyaknya bilangan  $n$  digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212, di mana digit terakhirnya 1.
- $B(n)$  sebagai banyaknya bilangan  $n$  digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212, di mana digit terakhirnya 2.

Ini berarti  $f(n) = A(n) + B(n)$ .

Akan ditentukan untuk  $A(n)$ , yaitu bilangan berbentuk  $\underbrace{**\cdots*}_{n-1}1$ . Apabila digit ke- $(n-1)$  adalah 1, yaitu  $\underbrace{**\cdots*}_{n-2}11$ , maka ada  $A(n-1)$  kemungkinan. Apabila digit ke- $(n-1)$  adalah 2, yaitu  $\underbrace{**\cdots*}_{n-2}21$ , maka haruslah digit ke- $(n-2)$  harus bernilai 2 sehingga berbentuk  $\underbrace{**\cdots*}_{n-3}221$ . Dalam hal ini, ada  $B(n-2)$  kemungkinan. Jadi,  $A(n) = A(n-1) + B(n-2)$ .

Secara analog (dari kesimetrian), dapat diperoleh pula  $B(n) = B(n-1) + A(n-2)$ . Jumlahkan keduanya,

$$A(n) + B(n) = A(n-1) + B(n-2) + B(n-1) + A(n-2) \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

untuk setiap bilangan asli  $n \geq 3$ . Mudah diperoleh bahwa  $f(1) = 2$  karena kemungkinannya hanyalah 1 atau 2, sedangkan  $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$  (syarat larangan adanya 121 atau 212 dapat diabaikan). Dari sini diperoleh

$$f(3) = 4 + 2 = 6, \quad f(4) = 6 + 4 = 10, \quad f(5) = 10 + 6 = 16, \quad f(6) = 16 + 10 = 26,$$

$$f(7) = 26 + 16 = 42, \quad f(8) = 42 + 26 = 68.$$

Jadi, ada 68 bilangan 8 digit yang memenuhi syarat yang diminta.

.....

- 7** Diberikan segiempat konveks  $ABCD$  dengan luas 288,  $AC$  tegak lurus  $BD$ , dan  $AB$  tidak sejajar  $CD$ . Misalkan  $P$  suatu titik di dalam segiempat  $ABCD$ . Selanjutnya, misalkan  $Q$  dan  $R$  berturut-turut merupakan proyeksi titik  $P$  pada sisi  $AC$  dan  $BD$ . Jika  $|AQ| : |QC| = 5 : 3$  dan  $|BR| : |DR| = 7 : 2$ , maka selisih luas segitiga  $ABP$  dengan luas segitiga  $CDP$  adalah . . . .

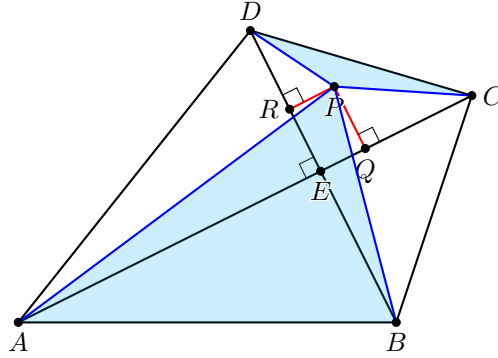
**Catatan.** Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak di dalam segiempat.

- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari  $180^\circ$ .

**Jawab: 116**

Misalkan  $AC$  dan  $BD$  berpotongan di  $E$ . Perhatikan bahwa  $PREQ$  merupakan persegi panjang sehingga diperoleh  $PQ = RE$  dan  $QE = PR$ .



Perhatikan bahwa

$$[APB] - [CPD] = ([APB] + [BCP]) - ([CPD] + [BCP]) = [ABCP] - [BCDP].$$

Misalkan panjang  $AQ = 5x$ ,  $QC = 3x$ ,  $BR = 7y$ , dan  $RD = 2y$ . Ini berarti

$$288 = [ABCD] = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8x \cdot 9y}{2} = 36xy \implies xy = 8.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} [ABCP] - [BCDP] &= [APC] + [ABC] - ([BCD] - [BPD]) \\ &= \frac{PQ \cdot AC}{2} + \frac{BE \cdot AC}{2} - \left( \frac{CE \cdot BD}{2} - \frac{PR \cdot BD}{2} \right) \\ &= \frac{AC}{2}(PQ + BE) - \frac{BD}{2}(CE - PR) \\ &= \frac{8x}{2}(RE + BE) - \frac{9y}{2}(CE - QE) \\ &= 4x \cdot BR - \frac{9y}{2} \cdot CQ \\ &= 4x \cdot 7y - \frac{9y}{2} \cdot 3x \\ &= \frac{29xy}{2} \\ &= \boxed{116}. \end{aligned}$$

- 8 Banyaknya bilangan asli  $(a, b)$  di mana  $1 \leq a, b \leq 19^2$  sehingga

$$a^4 + b^3 \text{ habis dibagi } 19^2$$

adalah . . . .

**Jawab: 703**

**Kasus 1:  $19 \mid a$  atau  $19 \mid b$**

Perhatikan bahwa jika  $19 \mid a$ , maka  $19^2 \mid a^4$  sehingga dari  $19^2 \mid a^4 + b^3$  memberikan  $19^2 \mid b^3$ . Ini menunjukkan bahwa  $19 \mid b^3$  dan karena 19 prima, maka  $19 \mid b$  yang tentu ini juga pasti memenuhi  $19^2 \mid b^3$ . Demikian juga jika asumsi  $19 \mid b$  berlaku akan berakibat  $19 \mid a$ . Jadi, sebarang solusi  $(a, b)$  dengan  $19 \mid a, b$  pasti memenuhi. Karena ada sebanyak 19 bilangan asli yang habis dibagi 19, maka banyaknya pasangan  $(a, b)$  yang mungkin adalah  $19 \cdot 19 = 361$  pada kasus ini.

**Kasus 2:  $19 \nmid a, b$**

#### Lemma 1

Jika bilangan bulat  $u$  dan  $v$  dengan  $19 \nmid u, v$  memenuhi  $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$ , maka  $u \equiv \pm v \pmod{361}$ .

*Bukti.* Perhatikan bahwa  $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$  memberikan  $19^2 \mid u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ . Jika  $19 \mid u + v, u - v$ , diperoleh

$$19 \mid (u + v) + (u - v) = 2u \implies 19 \mid u$$

karena  $\text{FPB}(2, 19) = 1$  sehingga kontradiksi. Ini berarti hanya salah satu dari  $u + v, u - v$  yang habis dibagi 19, berakibat  $19^2 \mid u - v$  atau  $19^2 \mid u + v$ , memberikan  $u \equiv \pm v \pmod{361}$ .  $\square$

#### Lemma 2

Jika bilangan bulat  $u$  dan  $v$  dengan  $19 \nmid u, v$  memenuhi  $u^4 \equiv v^4 \pmod{361}$ , maka  $u \equiv \pm v \pmod{361}$ .

*Bukti.* Dari Lemma 1 berlaku  $u^2 \equiv \pm v^2 \pmod{361}$ . Andaikan  $u^2 \equiv -v^2 \pmod{361}$ , maka berlaku  $(u \cdot v^{-1})^2 \equiv -1 \pmod{361}$ . Akan dibuktikan bahwa  $-1$  merupakan non-QR dalam modulo 361. Andaikan ada bilangan bulat  $y$  yang memenuhi  $y^2 \equiv -1 \pmod{361} \implies 361 \mid y^2 + 1$  yang berarti  $19 \mid y^2 + 1 \implies y^2 \equiv -1 \pmod{19}$ . Ini berarti  $y^{18} \equiv (-1)^9 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{19}$  yang kontradiksi dengan Fermat Little Theorem. Ini berarti tidak mungkin  $u^2 \equiv -v^2 \pmod{361}$  sehingga haruslah  $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$ . Dari Lemma 1, berlaku  $u \equiv \pm v \pmod{361}$ .  $\square$

Perhatikan bahwa  $\varphi(19^2) = 18 \cdot 19$ . Ini berarti  $\text{FPB}(a, 361) = \text{FPB}(b, 361) = 1$  sehingga  $a^{-1}, b^{-1} \pmod{361}$  ada. Perhatikan bahwa

$$a^4 + b^3 \equiv 0 \pmod{361} \implies a^4 \equiv -b^3 \pmod{361} \implies (ab^{-1})^4 \equiv -b^{-1} \pmod{361}.$$

Misalkan  $b^{-1} \equiv -x \pmod{361}$ , tulis ulang menjadi  $(-ax)^4 \equiv x \pmod{361} \implies (ax)^4 \equiv x \pmod{361}$ .

### Lemma 3

Banyaknya bilangan bulat tak nol  $y$  dalam modulo 361 sehingga  $t^4 \equiv y \pmod{361}$  memiliki solusi adalah 171 kemungkinan.

*Bukti.* Karena  $y \neq 0$ , tentu  $19 \nmid t$ . Misalkan  $r$  primitive root dari modulo 361. Tinjau

$$S = \{r^{4k} : k \leq 18 \cdot 19, k \in \mathbb{N}\} \pmod{361} = \{r^{4k \bmod 18 \cdot 19} : k \leq 18 \cdot 19, k \in \mathbb{N}\} \pmod{361}.$$

Sekarang, tinjau himpunan  $T = \{4k : k \leq 18 \cdot 19\} \pmod{18 \cdot 19}$ . Akan ditentukan kardinalitas dari  $T$  menggunakan Chinese Remainder Theorem, sebelumnya tinjau  $18 \cdot 19 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$ . Perhatikan bahwa hanya ada 1 kemungkinan semua nilai  $4k$  dalam modulo 2. Dengan kuli, mudah diperoleh pula  $\{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 9\} \equiv \{0, 1, \dots, 8\} \pmod{9}$  sehingga ada 9 kemungkinan semua nilai  $4k$  dalam modulo 9. Selanjutnya, akan dibuktikan  $\{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 19\} \equiv \{0, 1, \dots, 18\} \pmod{19}$ . Andaikan ada  $1 \leq i < j \leq 19$  sehingga  $4i \equiv 4j \pmod{19}$ , maka  $19 \mid 4j - 4i = 4(j - i)$  sehingga  $19 \mid j - i$  karena  $\text{FPB}(4, 19) = 1$ . Namun, kita tahu  $1 \leq j - i \leq 18$  sehingga kontradiksi bahwa  $19 \mid j - i$ . Oleh karena itu, ada 19 kemungkinan semua nilai  $4k$  dalam modulo 19. Maka banyaknya kemungkinan nilai  $4k$  dalam modulo 361 adalah  $1 \cdot 9 \cdot 19 = 171$ . Akibatnya,  $|S| = 171$ .  $\square$

Tetapkan  $x_0$ , tulis  $x_0 \equiv y_0^4 \pmod{361}$  untuk suatu bilangan bulat  $y_0$ . Menggunakan Lemma 2 berlaku

$$(ay_0^4)^4 \equiv y_0^4 \pmod{361} \implies ay_0^4 \equiv \pm y_0 \pmod{361} \implies a \equiv \pm y_0^{-3} \pmod{361}.$$

Ini berarti ada dua kemungkinan nilai untuk  $a$ , jadi dalam kasus ini ada  $2 \cdot 171 = 342$  solusi.

Secara keseluruhan, ada  $361 + 342 = \boxed{703}$  solusi.

**Komentar.** Untuk mengetahui tentang primitive root dapat merujuk pada salah satu tulisan saya yang berjudul [Order dari Sebuah Elemen](#).

## 4. Solusi Uraian

- 1** Tentukan banyaknya bilangan asli  $n \geq 2$  sedemikian sehingga terdapat  $n$  bilangan **bulat** berurutan yang jumlahnya 2025.

**Jawab: 29**

Misalkan  $n$  bilangan bulat tersebut sebagai  $a, a + 1, \dots, a + n - 1$  yang memenuhi

$$2025 = a + (a + 1) + \dots + (a + n - 1) = \frac{n}{2}(2a + n - 1) \implies 4050 = n(2a + n - 1)$$

menggunakan deret aritmetika dengan beda 1. Perhatikan bahwa  $4050 = 2 \cdot 2025 = 2 \cdot 45^2$ .

**Kasus 1:  $n$  ganjil**

Jika  $n$  ganjil, maka  $2a + n - 1$  genap. Mengingat  $n \mid n(2a + n - 1) = 4050 \implies n \mid 4050$  serta  $n$  ganjil, maka  $n \mid 2025$ . Untuk semua  $n$  yang memenuhi  $n \mid 2025$ , tinjau

$$4050 = n(2a + n - 1) \iff 2a = \frac{4050}{n} - n + 1 \iff a = \frac{1}{2} \left( \frac{4050}{n} - n + 1 \right).$$

Mengingat  $n$  ganjil, maka  $\frac{4050}{n} - n + 1$  genap sehingga pasti  $a$  bilangan bulat. Dalam kasus ini, banyaknya nilai  $n \geq 2$  sama saja dengan banyak faktor positif dari 2025 kecuali 1, yaitu sebanyak

$$\tau(2025) - 1 = \tau(3^4 \cdot 5^2) - 1 = (4 + 1)(2 + 1) - 1 = 14.$$

**Kasus 2:  $n$  genap**

Jika  $n$  genap, maka  $2a + n - 1$  ganjil. Perhatikan bahwa  $n \mid n(2a + n - 1) \implies n \mid 4050$ . Untuk semua  $n$  genap yang memenuhi  $n \mid 4050$ , tinjau  $a = \frac{1}{2} \left( \frac{4050}{n} - n + 1 \right)$ . Mengingat  $n$  genap, maka  $\frac{4050}{n}$  ganjil sehingga  $\frac{4050}{n} - n + 1$  genap, ini berarti  $a$  pasti bilangan bulat. Tulis  $n = 2t$  di mana  $t$  bilangan asli, tinjau  $n = 2t \mid 4050 \iff t \mid 2025$ . Ini berarti banyaknya kemungkinan nilai  $n$  sama saja dengan banyak faktor positif dari 2025, yaitu

$$\tau(2025) = \tau(3^4 \cdot 5^2) = (4 + 1)(2 + 1) = 15.$$

Dari kedua kasus ini, dapat disimpulkan bahwa banyaknya bilangan asli  $n \geq 2$  yang memenuhi adalah  $14 + 15 = \boxed{29}$ .

- 2 Misalkan  $S$  adalah himpunan semua tripel bilangan real positif  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $a + b + c = ab + bc + ca$ .

(a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a + b, b + c, c + a\} > 1$$

berlaku untuk setiap  $(a, b, c) \in S$ .

(b) Apakah terdapat tripel  $(a, b, c) \in S$  sehingga

$$\min\{a + b, b + c, c + a\} < 1 + \frac{1}{20^{25}}?$$

**Catatan.** Notasi  $\min\{x, y, z\}$  menyatakan bilangan terkecil di antara  $x, y, z$ .

*Proposed by Valentio Iverson*

**Jawab: (b) Ada**

Karena  $a, b$ , dan  $c$  bersifat simetris, tanpa mengurangi keumuman misalkan  $a \geq b \geq c$ . Ini berarti  $a + b \geq a + c \geq b + c$  sehingga diperoleh  $\min\{a + b, b + c, c + a\} = b + c$ .

(a) Andaikan ada  $(a, b, c) \in S$  yang memenuhi  $b + c \leq 1$ , ini berarti  $b, c < 1$ . Ingat bahwa ketaksamaan yang *well-known*, yaitu  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  atau setara dengan

$$a + b + c = ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \implies 0 \leq \frac{(a + b + c)(a + b + c - 3)}{3}.$$

Jadi,  $a + b + c \geq 3$ . Karena  $b + c \leq 1$ , maka  $a \geq 3 - b - c \geq 2$ . Namun, ini memberikan

$$a - bc = ab + ac - (b + c) = a(b + c) - (b + c) = (a - 1)(b + c) \leq a - 1$$

sehingga  $1 \leq bc$ , kontradiksi karena  $b, c < 1$  berakibat  $bc < 1$ . Jadi, terbukti bahwa  $\min\{a + b, b + c, c + a\} = b + c > 1$ .

(b) Jawabannya adalah ada. Tinjau

$$a = 20^{26}, \quad b = 1, \quad c = \frac{1}{20^{26}}$$

memenuhi

$$a + b + c = 20^{26} + 1 + \frac{1}{20^{26}}, \quad ab + bc + ca = 20^{26} + \frac{1}{20^{26}} + 1$$

yang menunjukkan  $a + b + c = ab + bc + ca$ . Jadi,  $(a, b, c) \in S$ . Ini memberikan

$$\min\{a + b, b + c, c + a\} = b + c = 1 + \frac{1}{20^{26}} < 1 + \frac{1}{20^{25}},$$

mengingat  $\frac{1}{20^{26}} < \frac{1}{20^{25}}$ .



**Komentar.** Konstanta  $\frac{1}{20^{25}}$  dapat diganti sebagai sebarang konstanta  $\varepsilon > 0$ . Ini dapat dijamin berdasarkan sifat Archimedes, yaitu terdapat bilangan asli  $N$  yang memenuhi  $\frac{1}{\varepsilon} < N$  yang ekuivalen dengan  $\frac{1}{N} < \varepsilon$ . Dengan memilih  $(a, b, c) = \left(N, 1, \frac{1}{N}\right)$ , diperoleh  $b + c = 1 + \frac{1}{N} < 1 + \varepsilon$ .

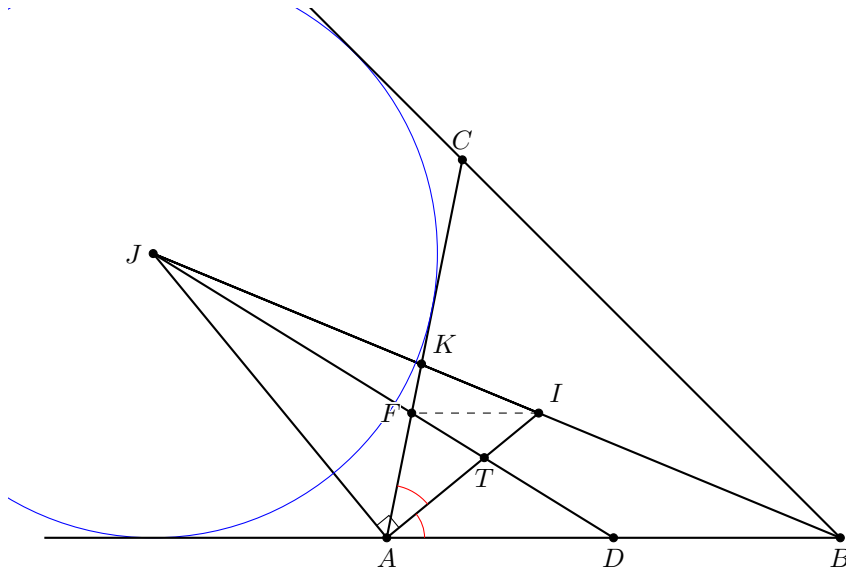
- 3** Pada segitiga  $ABC$ , misalkan  $D$  titik tengah ruas garis  $AB$  dan  $E$  titik pada sisi  $BC$ . Misalkan garis yang melalui  $E$  dan sejajar  $AB$  memotong garis bagi  $\angle ACB$  di titik  $P$ . Misalkan juga  $I$  titik pusat lingkaran dalam  $ABC$  dan  $J$  pusat lingkaran singgung luar dari segitiga  $ABC$  yang menyinggung sisi  $CA$  (**bukan** perpanjangan sisi  $CA$ ). Garis  $DJ$  memotong sisi  $CA$  di titik  $F$ .

- (a) Buktikan bahwa garis  $IF$  sejajar dengan  $AB$ .  
 (b) Buktikan bahwa garis  $AP$ ,  $BJ$ , dan  $EF$  berpotongan di satu titik.

*Proposed by Wildan Bagus Wicaksono*

**Bukti.**

- (a) Misalkan  $BJ$  memotong  $AC$  di  $K$ . Tentu  $B$ ,  $I$ ,  $J$  segaris karena  $I$  perpotongan ketiga garis bagi dalam, sedangkan  $J$  perpotongan dua garis bagi luar  $\angle C$  dan  $\angle A$  serta garis bagi dalam  $\angle B$ . Definisikan  $T$  sebagai perpotongan  $AI$  dan  $DJ$ .



Selanjutnya akan diberikan empat pendekatan yang berbeda dalam menyelesaikan soal ini.

**Solusi 1 (Owen Raphael Wijaya).** Dengan menelaus segitiga  $AKB$  transversal  $\overline{JFD}$ , maka

$$1 = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \implies \frac{FA}{KF} = \frac{BJ}{JK}.$$

Karena  $JA$  garis bagi luar  $\angle BAK$ , dari teorema garis bagi luar berlaku  $\frac{BJ}{JK} = \frac{AB}{AK}$ . Karena  $AI$  garis bagi  $\angle BAK$ , dari teorema garis bagi sekali lagi berlaku  $\frac{AB}{AK} = \frac{IB}{IK}$ . Ini memberikan

$$\frac{FA}{KF} = \frac{BJ}{JK} = \frac{AB}{AK} = \frac{IB}{IK} \implies \frac{FA}{KF} = \frac{IB}{IK}.$$

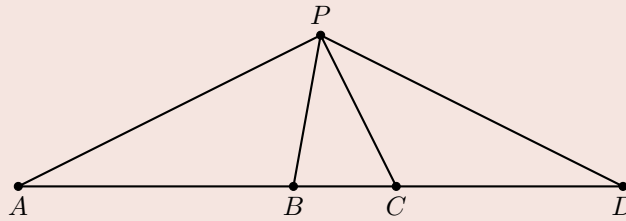
Tambahkan kedua ruas dengan 1 berlaku  $\frac{KA}{KF} = \frac{KB}{KI}$ . Mengingat  $\angle FKI = \angle AKB$ , maka  $\triangle KFI \sim \triangle KAB$  (SAS) sehingga berlaku  $IF \parallel AB$ .

**Solusi 2 (Sedikit Projekatif).** Diberikan titik-titik segaris  $A, B, C$ , dan  $D$ . Didefinisikan bundle  $(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}}$  sebagai harmonik apabila  $(A, B; C, D) = -1$  (di sini digunakan *directed length*). Akan digunakan lemma berikut.

**Lemma 1: Projective**

Diberikan tiga titik  $A, B, C$ , dan  $D$  segaris dalam urutan tersebut dan suatu titik  $P$ . Maka jika dua kondisi berikut berlaku, kondisi sisanya juga berlaku.

- (a)  $\angle APC = 90^\circ$ .
- (b)  $PC$  garis bagi  $\angle BPD$ .
- (c)  $(A, C; B, D)$  harmonik.



*Bukti.* Di sini hanya akan dibuktikan jika (a) dan (b) berlaku maka (c) berlaku, selainnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Diketahui  $\angle APC = 90^\circ$  dan  $\angle BPC = \angle DPC$ , akan dibuktikan bahwa

$$-1 = (A, C; B, D) = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}} = \left(-\frac{BA}{BC}\right) \div \frac{DA}{DC} = -\left(\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC}\right)$$

atau setara dengan membuktikan  $\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC} = 1$ , di mana rasio  $\frac{BA}{BC}, \frac{DA}{DC}$  tanpa mengasumsikan arah segmen tersebut. Misalkan  $\angle BPC = \angle CPD = x$ , maka  $\angle APB = 90^\circ - x$ . Dari aturan sinus segitiga  $PBC$  dan  $PAB$ ,

$$\frac{BA}{BC} = \frac{PB \sin \angle APB / \sin \angle PAB}{PB \sin \angle CPB / \sin \angle PCB} = \frac{\sin \angle PCB}{\sin \angle PAB} \cdot \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin(x)} = \frac{\sin \angle PCB}{\sin \angle PAB} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Dari aturan sinus  $PAC$  dan  $PCD$ ,

$$\frac{DA}{DC} = \frac{PD \sin \angle APD / \sin \angle PAD}{PD \sin \angle DPC / \sin \angle PCD} = \frac{\sin(90^\circ + x)}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin \angle PAD}{\sin \angle PCD} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin \angle PCD}{\sin \angle PAD}.$$

Perhatikan bahwa  $\sin \angle PCB = \sin \angle PCD$  karena berperlurus, sedangkan  $\sin \angle PAB = \sin \angle PAD$  karena kedua sudutnya sama besar. Maka diperoleh  $\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC} = 1$ .  $\square$

Berdasarkan sifat excircle,  $AJ$  merupakan garis bagi luar  $\angle BAC$  sehingga diperoleh

$$\angle JAI = \angle JAC + \angle CAI = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ.$$

Karena  $AI$  garis bagi  $BAK$ , dari lemma berlaku  $(B, K; I, J)$  harmonic, atau setara dengan  $\frac{IB}{IK} = \frac{JB}{JK}$ . Dari menelaus segitiga  $ABK$  transversal  $\overline{JFD}$ ,

$$1 = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{IB}{IK} \cdot \frac{KF}{FA} \implies \frac{KF}{FA} = \frac{KI}{IB}.$$

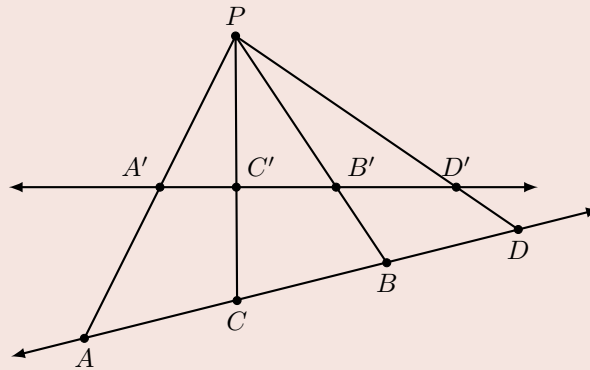
Ini setara dengan  $\frac{KF}{KA} = \frac{KI}{KB}$  dan mengingat  $\angle FKI = \angle AKB$ , maka  $\triangle KFI \sim \triangle KAB$  sehingga  $IF \parallel AB$ .

**Solusi 3 (Lebih Jauh Projektif).** Di sini akan digunakan lemma tambahan.

**Lemma 2: Projective Under Perspective**

Diberikan dua garis  $l$  dan  $g$  serta titik  $P$ . Dibuat garis  $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$  yang memotong  $l$  dan  $g$  berturut-turut di  $A$  dan  $A'$ ,  $B$  dan  $B'$ ,  $C$  dan  $C'$ ,  $D$  dan  $D'$ . Maka berlaku

$$(A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (A', B'; C', D').$$

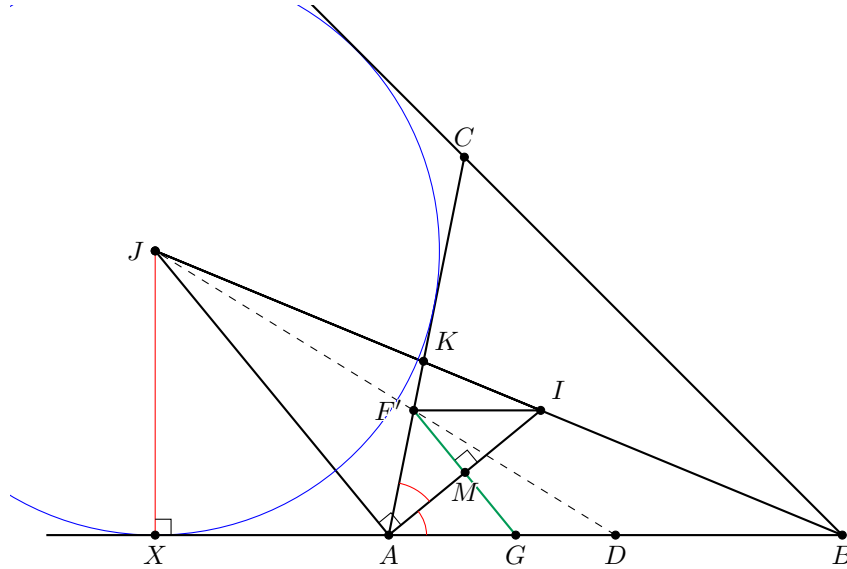


Perhatikan bahwa dari lemma 1 berlaku  $(D, F; T, J) = -1$ . Tinjau garis  $\overline{DTFJ}$  dengan  $\overline{BAD}$ ,

$$-1 = (D, F; T, J) \stackrel{I}{=} (D, IF \cap AB; A, B) \implies (D, IF \cap AB; A, B) = -1.$$

Karena  $D$  titik tengah, maka haruslah  $IF \cap AB = \infty_{AB}$  yang membuktikan  $IF \parallel AB$ .

**Solusi 4 (Muhammad Ridho).** Misalkan garis sumbu  $\overline{AI}$  memotong  $AC$ ,  $AI$ , dan  $AB$  berturut-turut di  $F'$ ,  $M$ , dan  $G$ . Misalkan pula  $X$  titik singgung excircle dengan perpanjangan  $AB$ .



Ini berarti  $M$  merupakan titik tengah  $AI$ . Tinjau bahwa  $\angle MAG = \angle MAF'$  dan  $\angle AMG = 90^\circ$ , maka  $AG = AF'$ . Karena  $FG$  dan  $JA$  masing-masing tegak lurus  $AI$ , maka  $FG \parallel AJ$  sehingga  $\angle DGF' = \angle DAJ$ . Misalkan panjang  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $r$  panjang jari-jari lingkaran dalam  $ABC$ ,  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

Akan dibuktikan bahwa  $\triangle DGF' \sim \triangle DAJ$  yang ekuivalen dengan membuktikan  $\frac{DG}{GF'} = \frac{DA}{AJ}$ . Tinjau bahwa dari segitiga  $AGM$  berlaku  $\tan \angle GAM = \frac{GM}{AM}$  sehingga

$$GM = AM \tan \angle GAM = \frac{AI}{2} \tan \frac{A}{2} = \frac{r/\sin \frac{A}{2}}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{r}{2 \cos \frac{A}{2}}.$$

Ini berarti  $GF' = 2GM = \frac{r}{\cos \frac{A}{2}}$ . Tinjau bahwa

$$DG = \frac{AB}{2} - AG = \frac{c}{2} - \frac{GM}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{c}{2} - \frac{r}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{c}{2} - \frac{r}{\sin A} = \frac{1}{2} \left( c - \frac{2r}{\sin A} \right).$$

Perhatikan bahwa panjang  $BX = s$ , maka  $AX = s - AB = s - c$ . Karena  $\angle JAX = 90^\circ - \frac{A}{2}$ , maka

$$AJ = \frac{AX}{\cos \angle JAX} = \frac{s - c}{\cos \left( 90^\circ - \frac{A}{2} \right)} = \frac{s - c}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Buat proyeksi dari  $I$  ke  $AB$ , misalkan  $Y$ , maka  $AY = s - a$  sehingga

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{IY}{AY} = \frac{r}{s - a} = \frac{[ABC]/s}{s - a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s(s-a)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Karena  $\sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = 1$ ,

$$1 = \cos^2 \frac{A}{2} \left( \tan^2 \frac{A}{2} + 1 \right) = \cos^2 \frac{A}{2} \left( \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} + 1 \right) = \cos^2 \frac{A}{2} \cdot \frac{(s-b)(s-c) + s(s-a)}{s(s-a)}.$$

Karena  $s = \frac{a+b+c}{2}$ , maka

$$(s-b)(s-c) + s(s-a) = \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} + \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} = bc.$$

Ini berarti  $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$  karena  $\frac{A}{2} < 90^\circ$ . Dengan cara yang sama, diperoleh  $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ . Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} \iff \frac{GF'}{AJ} &= \frac{DG}{DA} \\ \iff \frac{r/\cos \frac{A}{2}}{(s-c)/\sin \frac{A}{2}} &= \frac{\frac{1}{2} \left( c - \frac{2r}{\sin A} \right)}{c/2} \\ \iff \frac{r \sin \frac{A}{2}}{(s-c) \cos \frac{A}{2}} &= \frac{c \sin A - 2r}{c \sin A} \\ \iff rc \sin \frac{A}{2} \sin A &= (s-c)(c \sin A - 2r) \cos \frac{A}{2} \\ \iff rc \sin \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= (s-c)(c \sin A - 2r) \cos \frac{A}{2} \\ \iff 2rc \sin^2 \frac{A}{2} &= (s-c)(2c \sin A - 2r) \\ \iff 2c \cdot \frac{[ABC]}{s} \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{bc} &= (s-c) \left( \frac{2c}{bc} \cdot [ABC] - \frac{2[ABC]}{s} \right) \\ \iff \frac{s-b}{sb} &= \frac{1}{b} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

yang mana baris terakhir jelas kebenarannya. Ini membuktikan  $\triangle DGF' \sim \triangle DAJ$  (SAS) sehingga terdapat homothety pusat  $D$  yang memetakan  $GF'$  ke  $AJ$ . Ini artinya  $D, F', J$  segaris. Jadi,  $F = F'$ .

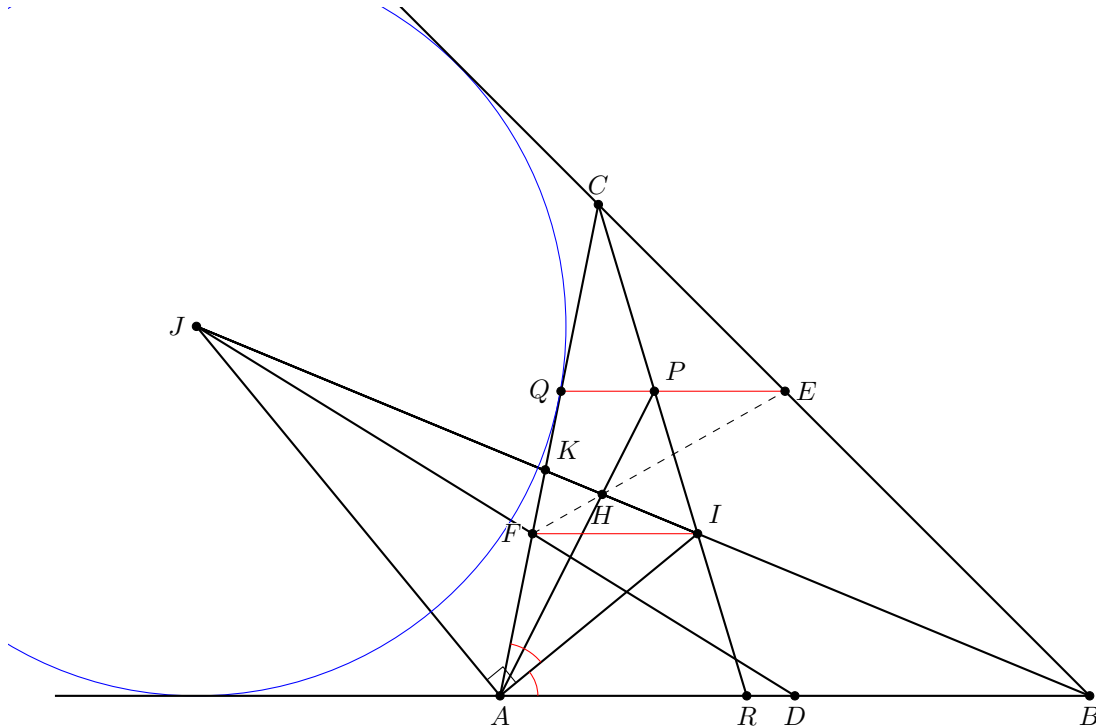
Sekarang, akan dibuktikan bahwa  $IF \parallel AB$ , tinjau bahwa panjang  $IF = FA$  sehingga  $\angle FAI = \angle FIA$  yang berarti  $\angle AFI = 180^\circ - 2\angle'AI$ . Ini berarti

$$\angle FAB = 2\angle FAI = 180^\circ - \angle AFI \implies \angle AFI + \angle FAB = 180^\circ$$

yang membuktikan  $IF \parallel AB$ .

(b) Akan diberikan tiga pendekatan berbeda.

**Solusi 1 (Owen Raphael Wijaya).** Misalkan  $PE$  memotong  $AC$  di  $Q, H$  sebagai perpotongan  $AP$  dengan  $BK$ , dan  $R$  perpotongan  $CI$  dan  $AB$ . Akan dibuktikan bahwa  $E, H$ , dan  $F$  segaris.



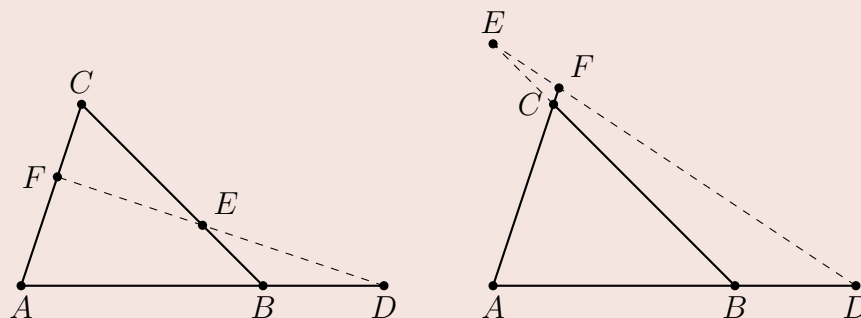
## Teorema Menelaus

Diberikan segitiga  $ABC$ . Titik  $D, E, F$  berturut-turut terletak pada garis  $AB, BC, CA$  yang memenuhi salah satu kondisi berikut:

- Tepat satu titik dari  $D, E, F$  berada di perpanjangan sisi segitiga (lainnya di sisi segitiga).
- Ketiga titik dari  $D, E, F$  berada di perpanjangan sisi segitiga.

Maka  $D, E, F$  segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$



Dari konvers Teorema Menelaus dari segitiga  $QAP$ , ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa

$$\frac{QE}{EP} \cdot \frac{PH}{HA} \cdot \frac{AF}{FQ} = 1.$$

Perhatikan bahwa  $QE \parallel AB$ , maka terhadap homothety  $\mathcal{H}$  dengan pusat  $A$  yang memetakan  $Q, P, E$  ke  $A, R, B$  secara berturut-turut. Ini berarti  $\frac{QE}{PE} = \frac{AB}{RD}$ . Dari Teorema Menelaus segitiga  $ABH$  transversal  $\overline{PTR}$ , berlaku

$$1 = \frac{AB}{BR} \cdot \frac{RI}{IP} \cdot \frac{PH}{HA} \implies \frac{IP}{IR} = \frac{QE}{PE} \cdot \frac{PH}{HA}.$$

Di sisi lain, tinjau bahwa  $PQ \parallel IF \parallel AR$  sehingga  $\triangle CPQ \sim \triangle CIF \sim \triangle CRA$ . Ini berarti

$$\frac{PI}{QF} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CI}{CF} = \frac{IR}{FA} \implies \frac{PI}{QF} = \frac{IR}{FA}.$$

Ini berarti  $\frac{PI}{IR} = \frac{QF}{FA}$  sehingga

$$\frac{QE}{EP} \cdot \frac{PH}{HA} \cdot \frac{AF}{FQ} = \frac{IP}{IR} \cdot \frac{PI}{IR} = 1$$

seperti yang ingin dibuktikan.

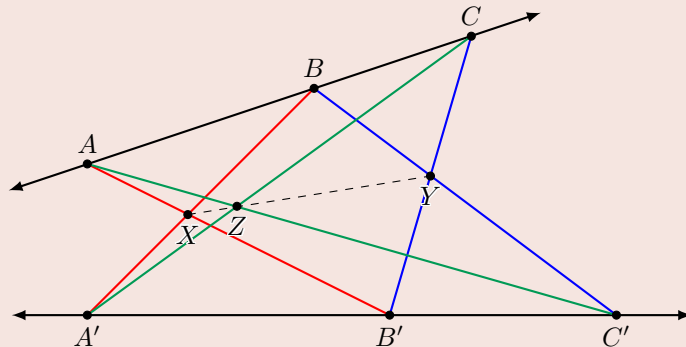
**Solusi 2.** Akan digunakan Pappus Theorem.

### Pappus Theorem

Diberikan tiga titik segaris  $A, B, C$  (tidak harus dalam urutan tersebut), dan tiga titik segaris  $A', B', C'$  (tidak harus dalam urutan tersebut). Dari tripel  $(A, B, C)$  dan  $(A', B', C')$ , berlaku titik-titik

$$AB' \cap BA' = X, \quad BC' \cap CB' = Y, \quad AC' \cap CA' = Z$$

segaris.







Tinjau pula  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{B}{2}$ . Dari aturan sinus segitiga  $CAI$  dan  $AKI$ ,

$$\frac{CA}{AK} = \frac{AI \sin \angle AIC / \sin \angle ACI}{AI \sin \angle AIK / \sin \angle AKI} = \frac{\sin \left(90^\circ + \frac{B}{2}\right) / \sin \frac{C}{2}}{\sin \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) / \sin \left(180^\circ - A - \frac{B}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Misalkan  $\angle TFI = \gamma$  dan  $\angle TFK = \theta$ . Karena  $IF \parallel AB$ , maka  $\angle TIF = \angle TBA = \frac{B}{2}$ . Perhatikan bahwa dari aturan sinus  $KTF$  dan  $TFI$  berlaku

$$\frac{KT}{TI} = \frac{FT \sin \angle KFT / \sin \angle FKT}{FT \sin \angle TFI / \sin \angle TIK} = \frac{\sin \theta / \sin \left(180^\circ - A - \frac{B}{2}\right)}{\sin \gamma / \sin \frac{B}{2}} = \frac{\sin \theta \sin \frac{B}{2}}{\sin \gamma \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}.$$

Dari aturan sinus  $CEF$  dan  $EFX$ ,

$$\frac{\sin \theta}{\sin \gamma} = \frac{CE \sin \angle FCE / EF}{EX \sin \angle FXE / EF} = \frac{CE \sin C}{EX \sin B}.$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{KT}{TI} = \frac{CE \sin C \sin \frac{B}{2}}{EX \sin B \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}.$$

Di sisi lain,  $EP \parallel XI$  diperoleh  $\triangle CEP \sim \triangle EXI$  berlaku  $\frac{IP}{PC} = \frac{EX}{CE}$ . Ini berarti

$$\begin{aligned} \frac{CA}{AK} \cdot \frac{KT}{TI} \cdot \frac{IP}{PC} &= \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \cdot \frac{CE \sin C \sin \frac{B}{2}}{\sin B \sin \left(A + \frac{B}{2}\right)} \cdot \frac{EX}{CE} \\ &= \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin B}{\sin B} \cdot \frac{\sin C}{\frac{1}{2} \sin C} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Terbukti.

- 4 Diberikan suatu segitiga pada bidang- $xy$  dengan ketiga titik sudutnya bukan merupakan titik katis dan ketiga sisinya tidak melalui titik katis. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik katis di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik katis di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

**Catatan.** Pada bidang- $xy$ , titik *latis* adalah titik berbentuk  $(a, b)$  dengan  $a$  dan  $b$  bilangan bulat.

**Bukti.**

Akan dinotasikan  $(a, b) \pmod{3}$  sebagai  $(a \pmod{3}, b \pmod{3})$  di mana  $a$  dan  $b$  bilangan bulat. Perhatikan bahwa ada  $3^2 = 9$  kemungkinan titik  $(a, b)$  dengan tiap komponennya dalam modulo 3 ( $a$  dan  $b$  bilangan bulat). Ini menunjukkan bahwa terdapat dua titik katis berbeda  $(a, b), (p, q)$  di dalam segitiga yang memenuhi  $(a, b) \equiv (p, q) \pmod{3}$ . Tulis  $(p, q) = (a + 3u, b + 3v)$  untuk suatu bilangan bulat  $u$  dan  $v$  dengan  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Kemudian, tinjau titik-titik

$$(a, b), \quad (a + u, b + v), \quad (a + 2u, b + 2v), \quad (a + 3u, b + 3v)$$

terletak segaris. Mengingat segitiga merupakan poligon konveks, maka setiap titik di segmen yang menghubungkan  $(a, b)$  dan  $(a + 3u, b + 3v)$  juga terletak di dalam segitiga.

