wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSP SMA 2025
Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2025

Bagian I – Soal

1. Isian Singkat

Terdiri dari 8 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

1 Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 3, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah . . . .

2 Misalkan u_1, u_2, u_3, . . . adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \cdots = 31 \quad \text{dan} \quad u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149.$$

Nilai $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$ adalah . . . .

3 Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik P dan Q pada sisi BC, titik R pada sisi AB sehingga

$$|PB| = |PQ| = |PR| \quad \text{dan} \quad |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa $ACPR$ merupakan segiempat talibusur. Jika $\angle APR = 54^\circ$, maka besar $\angle ABC$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $|XY|$ menyatakan panjang ruas garis XY.

4 Misalkan bilangan asli a, b, c, d memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika $a + b + c + d \leqslant 500$, maka nilai terbesar yang mungkin dari d adalah . . . .

5 Misalkan f suatu polinomial monik berderajat 5 sehingga

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 12, \quad f(4) = 19, \quad f(5) = 28.$$

Nilai dari $f(6)$ adalah . . . .

Catatan. Polinomial $P(x)$ berderajat n disebut *polinomial monik* jika koefisien x^n adalah 1.

6 Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah . . . .

Catatan.

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat tersebut adalah 11211 dan 21222.

7 Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan luas 288, AC tegak lurus BD, dan AB tidak sejajar CD. Misalkan P suatu titik di dalam segiempat $ABCD$. Selanjutnya, misalkan Q dan R berturut-turut merupakan proyeksi titik P pada sisi AC dan BD. Jika $|AQ| : |QC| = 5 : 3$ dan $|BR| : |DR| = 7 : 2$, maka selisih luas segitiga ABP dengan luas segitiga CDP adalah . . . .

Catatan. Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak di dalam segiempat.
- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari $180°$.

8 Banyaknya bilangan asli (a, b) di mana $1 \leqslant a, b \leqslant 19^2$ sehingga

$$a^4 + b^3 \quad \text{habis dibagi} \quad 19^2$$

adalah . . . .

2. Uraian

Terdiri dari 4 soal uraian. Setiap soal dijawab dengan menuliskan jawaban beserta langkah pengerjaan dan argumentasi yang lengkap untuk mendukung jawaban Anda. Setiap soal maksimal bernilai 7 poin dan nilai parsial dapat diberikan.

. . . .

1 Tentukan banyaknya bilangan asli $n \geqslant 2$ sedemikian sehingga terdapat n bilangan **bulat** berurutan yang jumlahnya 2025.

2 Misalkan S adalah himpunan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi $a+b+c = ab + bc + ca$.

(a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} > 1$$

berlaku untuk setiap $(a, b, c) \in S$.

(b) Apakah terdapat tripel $(a, b, c) \in S$ sehingga

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} < 1 + \frac{1}{2025}?$$

Catatan. Notasi $\min\{x, y, z\}$ menyatakan bilangan terkecil di antara x, y, z.

3 Pada segitiga ABC, misalkan D titik tengah ruas garis AB dan E titik pada sisi BC. Misalkan garis yang melalui E dan sejajar AB memotong garis bagi $\angle ACB$ di titik P. Misalkan juga I titik pusat lingkaran dalam ABC dan J pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (**bukan** perpanjangan sisi CA). Garis DJ memotong sisi CA di titik F.

(a) Buktikan bahwa garis IF sejajar dengan AB.

(b) Buktikan bahwa garis AP, BJ, dan EF berpotongan di satu titik.

4 Diberikan suatu segitiga pada bidang-xy dengan ketiga titik sudutnya bukan merupakan titik latis dan ketiga sisinya tidak melalui titik latis. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik latis di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik latis di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

Catatan. Pada bidang-xy, titik *latis* adalah titik berbentuk (a, b) dengan a dan b bilangan bulat.

Bagian II – Solusi

3. Solusi Isian Singkat

1 Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 3, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah . . . .

Jawab: 8

Untuk yang berjumlah 3 atau 5 tidak mungkin, sedangkan sisanya cukup diselesaikan dengan kuli:

$$8 = 3 + 5 = 5 + 3, \quad 13 = 5 + 8 = 8 + 5, \quad 21 = 13 + 8 = 8 + 13, \quad 34 = 13 + 21 = 21 + 13.$$

Jadi, ada $\boxed{8}$ kemungkinan kombinasi mata dadu yang muncul pada kedua lemparan tersebut.

. . . .

2 Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \cdots = 31 \quad \text{dan} \quad u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149.$$

Nilai $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots$ adalah . . . .

Jawab: 186

Misalkan $u_1 = a$ dan rasio barisan geometri sebagai r, maka $149 = u_1 + \frac{u_2}{u_1} = a + r$ dan

$$31 = u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \cdots = ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \cdots = \frac{ar}{1 - r^2}.$$

Substitusi $a = 149 - r$, maka

$$31 - 31r^2 = ar = (149 - r)r = 149r - r^2 \implies 0 = 30r^2 + 149r - 31 = (5r - 1)(6r + 31).$$

Ini berarti $r = \frac{1}{5}$ atau $r = -\frac{31}{6}$. Namun, deret $u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \cdots$ konvergen (nilainya ada) apabila $|r| < 1$ sehingga haruslah $r = \frac{1}{5}$.

Di sini, akan ditentukan

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1 - r} = \frac{149 - r}{1 - r}.$$

Ini berarti

$$\frac{149 - r}{1 - r} = \frac{148 + (1 - r)}{1 - r} = \frac{148}{1 - r} + 1 = \frac{148}{1 - \frac{1}{5}} + 1 = \frac{148}{\frac{4}{5}} + 1 = \boxed{186}.$$

. . . .

3 Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik P dan Q pada sisi BC, titik R pada sisi AB sehingga

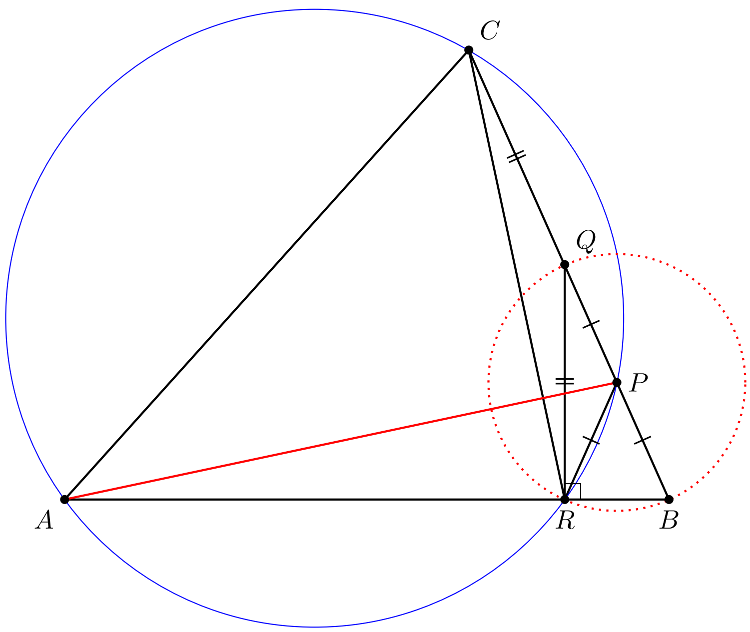
$$|PB| = |PQ| = |PR| \quad \text{dan} \quad |QC| = |QR|.$$

Diketahui bahwa $ACPR$ merupakan segiempat talibusur. Jika $\angle APR = 54^\circ$, maka besar $\angle ABC$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $|XY|$ menyatakan panjang ruas garis XY.

Jawab: 66°

Perhatikan bahwa panjang $PB = PR = PQ$, maka P titik pusat lingkaran luar RBQ. Ini artinya lingkaran tersebut memiliki diameter $\overline{BQ}$ sehingga berakibat $\angle BRQ = 90^\circ$.



Misalkan $\angle ABC = x$. Karena $PB = PR$, diperoleh $\angle PRB = \angle PBR = x$ sehingga diperoleh

$$\angle ARC = \angle APC = 180^\circ - \angle APR - \angle RPB = 180^\circ - 54^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x - 54^\circ.$$

Dari sudut pusat-sudut keliling,

$$\angle CQR = 180^\circ - \angle RQB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle RPB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2x) = 90^\circ + x.$$

Karena panjang $QR = QC$, diperoleh $\angle QRC = \angle QCR = \frac{180^\circ - \angle RQC}{2} = 45^\circ - \frac{x}{2}$. Dari sini diperoleh

$$90^\circ = \angle ARQ = \angle ARC + \angle CRQ = 2x - 54^\circ + 45^\circ - \frac{x}{2} = \frac{3x}{2} - 9^\circ$$

sehingga $\angle ABC = x = \frac{2}{3}(90^\circ + 9^\circ) = \frac{2}{3} \cdot 99^\circ = \boxed{66^\circ}$.

. . . .

4 Misalkan bilangan asli a, b, c, d memenuhi persamaan

$$2^a + 2^b + 2^c = 4^d.$$

Jika $a + b + c + d \leqslant 500$, maka nilai terbesar yang mungkin dari d adalah . . . .

Jawab: 72

Karena a, b, c simetris, tanpa mengurangi keumuman misalkan $a \geqslant b \geqslant c$. Tulis persamaan sebagai $2^c\left(2^{a-c} + 2^{b-c} + 1\right) = 4^d$. Jika $b > c$, maka $2^{a-c} + 2^{b-c} + 1$ merupakan bilangan ganjil sehingga $2^c\left(2^{a-c} + 2^{b-c} + 1\right)$ memiliki faktor prima ganjil, kontradiksi. Ini haruslah $b = c$ sehingga diperoleh $4^d = 2^c\left(2^{a-c} + 2\right)$. Jika $a \geqslant c + 2$, perhatikan bahwa $4^d = 2^{c+1}\left(2^{a-c-1} + 1\right)$ yang mana $2^{a-c-1} + 1$ bilangan ganjil yang berakibat $2^{c+1}\left(2^{a-c-1} + 1\right)$ akan memiliki faktor prima ganjil, kontradiksi. Ini berarti $a = c$ atau $a = c + 1$.

Jika $a = c$, maka $4^d = 2^c \cdot 3$ yang mana tidak mungkin. Jika $a = c + 1$, maka $4^d = 2^c \cdot 4 = 2^{c+2}$. Mengingat $4^d = 2^{2d}$, maka $2d = c + 2$ sehingga haruslah c genap. Tulis $c = 2t$ dengan t bilangan asli sehingga diperoleh $(a, b, c, d) = (2t + 1, 2t, 2t, t + 1)$. Karena $a + b + c + d \leqslant 500$, diperoleh

$$500 \geqslant a + b + c + d = (2t + 1) + 2t + 2t + (t + 1) = 7t + 2 \implies 71 \geqslant t.$$

Diperoleh $d = t + 1 \leqslant 72$ sehingga nilai terbesar untuk d adalah $\boxed{72}$ yang dapat tercapai untuk $(a, b, c, d) = (143, 142, 142, 72)$.

. . . .

5 Misalkan f suatu polinomial monik berderajat 5 sehingga

$$f(1) = 4, \quad f(2) = 7, \quad f(3) = 12, \quad f(4) = 19, \quad f(5) = 28.$$

Nilai dari $f(6)$ adalah . . . .

Catatan. Polinomial $P(x)$ berderajat n disebut *polinomial monik* jika koefisien x^n adalah 1.

Jawab: 159

Misalkan

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + ax^2 + bx + c.$$

Di sini akan diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} 4 &= a + b + c \\ 7 &= 4a + 2b + c \\ 12 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

$$19 = 16a + 4b + c$$
$$28 = 25a + 5b + c.$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan ini, akan diselesaikan saja untuk tiga persamaan pertama karena merupakan sistem persamaan tiga variabel:

$$4 = a + b + c \tag{1}$$
$$7 = 4a + 2b + c \tag{2}$$
$$12 = 9a + 3b + c. \tag{3}$$

Dari $(2) - (1)$ dan $(3) - (2)$ berturut-turut memberikan $3 = 3a + b$ dan $5 = 5a + b$. Kurangkan kedua persamaan ini memberikan

$$2 = (5a + b) - (3a + b) = 2a \implies a = 1$$

sehingga diperoleh $b = 3 - 3a = 0$. Dari sini diperoleh $c = 4 - (a + b) = 4 - 1 = 3$. Dapat dicek bahwa solusi $(a, b, c) = (1, 0, 3)$ dapat terpenuhi ke semua sistem persamaan tersebut. Ini berarti

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5) + x^2 + 3$$

sehingga $f(6) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6^2 + 3 = \boxed{159}$.

Komentar. Permisalan $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax^2 + bx + c$ dilakukan dengan sedikit coba-coba. Semisal, pada awalnya dimisalkan $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + a$ untuk suatu konstan a, namun ini tidak memberikan solusi untuk a. Kemudian, dimisalkan $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax + b$ untuk suatu konstan a dan b, namun ini juga tidak memberikan solusi untuk a dan b. Hingga pada permisalan $f(x) = (x - 1) \cdots (x - 5) + ax^2 + bx + c$ untuk suatu konstan a, b, dan c akan memiliki solusi.

. . . .

6 Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah . . . .

Catatan.

- Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
- Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat tersebut adalah 11211 dan 21222.

Jawab: 68

Definisikan $f(n)$ sebagai banyaknya bilangan n digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212. Akan ditentukan formula rekursif dari $f(n)$. Lalu, definisikan pula:

- $A(n)$ sebagai banyaknya bilangan n digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212, di mana digit terakhirnya 1.
- $B(n)$ sebagai banyaknya bilangan n digit yang terdiri dari 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212, di mana digit terakhirnya 2.

Ini berarti $f(n) = A(n) + B(n)$.

Akan ditentukan untuk $A(n)$, yaitu bilangan berbentuk $\underbrace{**\cdots*}_{n-1}1$. Apabila digit ke-$(n-1)$ adalah 1, yaitu $\underbrace{**\cdots*}_{n-2}11$, maka ada $A(n-1)$ kemungkinan. Apabila digit ke-$(n-1)$ adalah 2, yaitu $\underbrace{**\cdots*}_{n-2}21$, maka haruslah digit ke-$(n-2)$ harus bernilai 2 sehingga berbentuk $\underbrace{**\cdots*}_{n-3}221$. Dalam hal ini, ada $B(n-2)$ kemungkinan. Jadi, $A(n) = A(n-1) + B(n-2)$.

Secara analog (dari kesimetrian), dapat diperoleh pula $B(n) = B(n-1) + A(n-2)$. Jumlahkan keduanya,

$$A(n) + B(n) = A(n-1) + B(n-2) + B(n-1) + A(n-2) \implies f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

untuk setiap bilangan asli $n \geqslant 3$. Mudah diperoleh bahwa $f(1) = 2$ karena kemungkinannya hanyalah 1 atau 2, sedangkan $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$ (syarat larangan adanya 121 atau 212 dapat diabaikan). Dari sini diperoleh

$$f(3) = 4 + 2 = 6, \quad f(4) = 6 + 4 = 10, \quad f(5) = 10 + 6 = 16, \quad f(6) = 16 + 10 = 26,$$

$$f(7) = 26 + 16 = 42, \quad f(8) = 42 + 26 = 68.$$

Jadi, ada $\boxed{68}$ bilangan 8 digit yang memenuhi syarat yang diminta.

. . . .

7 Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan luas 288, AC tegak lurus BD, dan AB tidak sejajar CD. Misalkan P suatu titik di dalam segiempat $ABCD$. Selanjutnya, misalkan Q dan R berturut-turut merupakan proyeksi titik P pada sisi AC dan BD. Jika $|AQ| : |QC| = 5 : 3$ dan $|BR| : |DR| = 7 : 2$, maka selisih luas segitiga ABP dengan luas segitiga CDP adalah . . . .

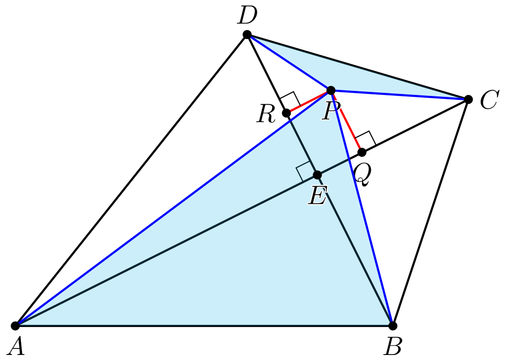
Catatan. Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:

- Perpotongan kedua diagonalnya terletak di dalam segiempat.

- Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari 180°.

Jawab: 116

Misalkan AC dan BD berpotongan di E. Perhatikan bahwa $PREQ$ merupakan persegi panjang sehingga diperoleh $PQ = RE$ dan $QE = PR$.



Perhatikan bahwa

$$[APB] - [CPD] = ([APB] + [BCP]) - ([CPD] + [BCP]) = [ABCP] - [BCDP].$$

Misalkan panjang $AQ = 5x$, $QC = 3x$, $BR = 7y$, dan $RD = 2y$. Ini berarti

$$288 = [ABCD] = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{8x \cdot 9y}{2} = 36xy \implies xy = 8.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
[ABCP] - [BCDP] &= [APC] + [ABC] - ([BCD] - [BPD]) \\
&= \frac{PQ \cdot AC}{2} + \frac{BE \cdot AC}{2} - \left(\frac{CE \cdot BD}{2} - \frac{PR \cdot BD}{2}\right) \\
&= \frac{AC}{2}(PQ + BE) - \frac{BD}{2}(CE - PR) \\
&= \frac{8x}{2}(RE + BE) - \frac{9y}{2}(CE - QE) \\
&= 4x \cdot BR - \frac{9y}{2} \cdot CQ \\
&= 4x \cdot 7y - \frac{9y}{2} \cdot 3x \\
&= \frac{29xy}{2} \\
&= \boxed{116}.
\end{aligned}$$

. . . .

$\boxed{8}$ Banyaknya bilangan asli (a, b) di mana $1 \leqslant a, b \leqslant 19^2$ sehingga

$$a^4 + b^3 \quad \text{habis dibagi} \quad 19^2$$

adalah . . . .

Jawab: 703

Kasus 1: 19 | *a* atau 19 | *b*

Perhatikan bahwa jika $19 \mid a$, maka $19^2 \mid a^4$ sehingga dari $19^2 \mid a^4 + b^3$ memberikan $19^2 \mid b^3$. Ini menunjukkan bahwa $19 \mid b^3$ dan karena 19 prima, maka $19 \mid b$ yang tentu ini juga pasti memenuhi $19^2 \mid b^3$. Demikian juga jika asumsi $19 \mid b$ berlaku akan berakibat $19 \mid a$. Jadi, sebrang solusi (a, b) dengan $19 \mid a, b$ pasti memenuhi. Karena ada sebanyak 19 bilangan asli yang habis dibagi 19, maka banyaknya pasangan (a, b) yang mungkin adalah $19 \cdot 19 = 361$ pada kasus ini.

Kasus 2: 19 ∤ *a*, *b*

Lemma 1

Jika bilangan bulat u dan v dengan $19 \nmid u, v$ memenuhi $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$, maka $u \equiv \pm v \pmod{361}$.

Bukti. Perhatikan bahwa $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$ memberikan $19^2 \mid u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$. Jika $19 \mid u + v, u - v$, diperoleh

$$19 \mid (u + v) + (u - v) = 2u \implies 19 \mid u$$

karena $\text{FPB}(2, 19) = 1$ sehingga kontradiksi. Ini berarti hanya salah satu dari $u + v, u - v$ yang habis dibagi 19, berakibat $19^2 \mid u - v$ atau $19^2 \mid u + v$, memberikan $u \equiv \pm v \pmod{361}$. □

Lemma 2

Jika bilangan bulat u dan v dengan $19 \nmid u, v$ memenuhi $u^4 \equiv v^4 \pmod{361}$, maka $u \equiv \pm v \pmod{361}$.

Bukti. Dari Lemma 1 berlaku $u^2 \equiv \pm v^2 \pmod{361}$. Andaikan $u^2 \equiv -v^2 \pmod{361}$, maka berlaku $(u \cdot v^{-1})^2 \equiv -1 \pmod{361}$. Akan dibuktikan bahwa -1 merupakan non-QR dalam modulo 361. Andaikan ada bilangan bulat y yang memenuhi $y^2 \equiv -1 \pmod{361} \implies 361 \mid y^2 + 1$ yang berarti $19 \mid y^2 + 1 \implies y^2 \equiv -1 \pmod{19}$. Ini berarti $y^{18} \equiv (-1)^9 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{19}$ yang kontradiksi dengan Fermat Little Theorem. Ini berarti tidak mungkin $u^2 \equiv -v^2 \pmod{361}$ sehingga haruslah $u^2 \equiv v^2 \pmod{361}$. Dari Lemma 1, berlaku $u \equiv \pm v \pmod{361}$. □

Perhatikan bahwa $\varphi(19^2) = 18 \cdot 19$. Ini berarti $\text{FPB}(a, 361) = \text{FPB}(b, 361)$ sehingga $a^{-1}, b^{-1} \pmod{361}$ ada. Perhatikan bahwa

$$a^4 + b^3 \equiv 0 \pmod{361} \implies a^4 \equiv -b^3 \pmod{361} \implies \left(ab^{-1}\right)^4 \equiv -b^{-1} \pmod{361}.$$

Misalkan $b^{-1} \equiv -x \pmod{361}$, tulis ulang menjadi $(-ax)^4 \equiv x \pmod{361} \implies (ax)^4 \equiv x \pmod{361}$.

Lemma 3

Banyaknya bilangan bulat tak nol y dalam modulo 361 sehingga $t^4 \equiv y \pmod{361}$ adalah 171 solusi.

Bukti. Karena $y \neq 0$, tentu $19 \nmid t$. Misalkan r primitive root dari modulo 361. Tinjau

$$S = \left\{r^{4k} : k \leqslant 18 \cdot 19, k \in \mathbb{N}\right\} \pmod{361} = \left\{r^{4k \mod 18 \cdot 19} : k \leqslant 18 \cdot 19, k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Sekarang, tinjau himpunan $T = \{4k : k \leqslant 18 \cdot 19\} \pmod{18 \cdot 19}$. Akan ditentukan kardinalitas dari T menggunakan Chinese Remainder Theorem, sebelumnya tinjau $18 \cdot 19 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$. Perhatikan bahwa hanya ada 1 kemungkinan semua nilai $4k$ dalam modulo 2. Dengan kuli, mudah diperoleh pula $\{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \cdots, 4 \cdot 9\} \equiv \{0, 1, \cdots, 8\} \pmod 9$ sehingga ada 9 kemungkinan semua nilai $4k$ dalam modulo 9. Selanjutnya, akan dibuktikan $\{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \cdots, 4 \cdot 19\} \equiv \{0, 1, \cdots, 18\} \pmod{19}$. Andaikan ada $1 \leqslant i < j \leqslant 19$ sehingga $4i \equiv 4j \pmod{19}$, maka $19 \mid 4j - 4i = 4(j - i)$ sehingga $19 \mid j - i$ karena $\text{FPB}(4, 19) = 1$. Namun, kita tahu $1 \leqslant j - i \leqslant 18$ sehingga kontradiksi bahwa $19 \mid j - i$. Oleh karena itu, ada 19 kemungkinan semua nilai $4k$ dalam modulo 19. Maka banyaknya kemungkinan nilai $4k$ dalam modulo 361 adalah $1 \cdot 9 \cdot 19 = 171$. Akibatnya, $|S| = 171$. $\square$

Tetapkan x_0, tulis $x_0 \equiv y_0^4 \pmod{361}$ untuk suatu bilangan bulat y_0. Menggunakan Lemma 2 berlaku

$$\left(ay_0^4\right)^4 \equiv y_0^4 \pmod{361} \implies ay_0^4 \equiv \pm y_0 \pmod{361} \implies a \equiv \pm y_0^{-3} \pmod{361}.$$

Ini berarti ada dua kemungkinan nilai untuk a, jadi dalam kasus ini ada $2 \cdot 171 = 342$ solusi.

Secara keseluruhan, ada $361 + 342 = \boxed{703}$ solusi.

Komentar. Untuk mengetahui tentang primitive root dapat merujuk pada salah satu tulisan saya yang berjudul Order dari Sebuah Elemen.

4. Solusi Uraian

1 Tentukan banyaknya bilangan asli $n \geqslant 2$ sedemikian sehingga terdapat n bilangan **bulat** berurutan yang jumlahnya 2025.

Jawab: 29

Misalkan n bilangan bulat tersebut sebagai a, $a+1$, $\cdots$, $a+n-1$ yang memenuhi

$$2025 = a + (a+1) + \cdots + (a+n-1) = \frac{n}{2}(2a+n-1) \implies 4050 = n(2a+n-1)$$

menggunakan deret aritmetika dengan beda 1. Perhatikan bahwa $4050 = 2 \cdot 2025 = 2 \cdot 45^2$.

Kasus 1: *n* ganjil

Jika n ganjil, maka $2a+n-1$ genap. Mengingat $n \mid n(2a+n-1) = 4050 \implies n \mid 4050$ serta n ganjil, maka $n \mid 2025$. Untuk semua n yang memenuhi $n \mid 2025$, tinjau

$$4050 = n(2a+n-1) \iff 2a = \frac{4050}{n} - n + 1 \iff a = \frac{1}{2}\left(\frac{4050}{n} - n + 1\right).$$

Mengingat n ganjil, maka $\frac{4050}{n} - n + 1$ genap sehingga pasti a bilangan bulat. Dalam kasus ini, banyaknya nilai $n \geqslant 2$ sama saja dengan banyak faktor positif dari 2025 kecuali 1, yaitu sebanyak

$$\tau(2025) - 1 = \tau\left(3^4 \cdot 5^2\right) - 1 = (4+1)(2+1) - 1 = 14.$$

Kasus 2: *n* genap

Jika n genap, maka $2a+n-1$ ganjil. Perhatikan bahwa $n \mid n(2a+n-1) \implies n \mid 4050$. Untuk semua n genap yang memenuhi $n \mid 4050$, tinjau $a = \frac{1}{2}\left(\frac{4050}{n} - n + 1\right)$. Mengingat n genap, maka $\frac{4050}{n}$ ganjil sehingga $\frac{4050}{n} - n + 1$ genap, ini berarti a pasti bilangan bulat. Tulis $n = 2t$ di mana t bilangan asli, tinjau $n = 2t \mid 4050 \iff t \mid 2025$. Ini berarti banyaknya kemungkinan nilai n sama saja dengan banyak faktor positif dari 2025, yaitu

$$\tau(2025) = \tau\left(3^4 \cdot 5^2\right) = (4+1)(2+1) = 15.$$

Dari kedua kasus ini, dapat disimpulkan bahwa banyaknya bilangan asli $n \geqslant 2$ yang memenuhi adalah $14 + 15 = \boxed{29}$.

$\boxed{2}$ Misalkan S adalah himpunan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi $a+b+c = ab+bc+ca$.

(a) Buktikan bahwa ketaksamaan

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} > 1$$

berlaku untuk setiap $(a, b, c) \in S$.

(b) Apakah terdapat tripel $(a, b, c) \in S$ sehingga

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} < 1 + \frac{1}{20^{25}}?$$

Catatan. Notasi $\min\{x, y, z\}$ menyatakan bilangan terkecil di antara x, y, z.

Proposed by Valentio Iverson

Jawab: (b) Ada

Karena a, b, dan c bersifat simetris, tanpa mengurangi keumuman misalkan $a \geqslant b \geqslant c$. Ini berarti $a+b \geqslant a+c \geqslant b+c$ sehingga diperoleh $\min\{a+b, b+c, c+a\} = b+c$.

(a) Andaikan ada $(a, b, c) \in S$ yang memenuhi $b+c \leqslant 1$, ini berarti $b, c < 1$. Ingat bahwa ketaksamaan yang *well-known*, yaitu $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ atau setara dengan

$$a+b+c = ab+bc+ca \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} \implies 0 \leqslant \frac{(a+b+c)(a+b+c-3)}{3}.$$

Jadi, $a+b+c \geqslant 3$. Karena $b+c \leqslant 1$, maka $a \geqslant 3-b-c \geqslant 2$. Namun, ini memberikan

$$a - bc = ab + ac - (b+c) = a(b+c) - (b+c) = (a-1)(b+c) \leqslant a-1$$

sehingga $1 \leqslant bc$, kontradiksi karena $b, c < 1$ berakibat $bc < 1$. Jadi, terbukti bahwa $\min\{a+b, b+c, c+a\} = b+c > 1$.

(b) Jawabannya adalah $\boxed{\text{ada}}$. Tinjau

$$a = 20^{26}, \quad b = 1, \quad c = \frac{1}{20^{26}}$$

memenuhi

$$a+b+c = 20^{26} + 1 + \frac{1}{20^{26}}, \quad ab+bc+ca = 20^{26} + \frac{1}{20^{26}} + 1$$

yang menunjukkan $a+b+c = ab+bc+ca$. Jadi, $(a, b, c) \in S$. Ini memberikan

$$\min\{a+b, b+c, c+a\} = b+c = 1 + \frac{1}{20^{26}} < 1 + \frac{1}{20^{25}},$$

mengingat $\frac{1}{20^{26}} < \frac{1}{20^{25}}$.

Komentar. Konstanta $\frac{1}{20^{25}}$ dapat diganti sebagai sebarang konstanta $\varepsilon > 0$. Ini dapat dijamin berdasarkan sifat Archimedes, yaitu terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{1}{\varepsilon} < N$ yang ekivalen dengan $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Dengan memilih $(a, b, c) = \left(N, 1, \frac{1}{N}\right)$, diperoleh $b + c = 1 + \frac{1}{N} < 1 + \varepsilon$.

3 Pada segitiga ABC, misalkan D titik tengah ruas garis AB dan E titik pada sisi BC. Misalkan garis yang melalui E dan sejajar AB memotong garis bagi $\angle ACB$ di titik P. Misalkan juga I titik pusat lingkaran dalam ABC dan J pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (**bukan** perpanjangan sisi CA). Garis DJ memotong sisi CA di titik F.

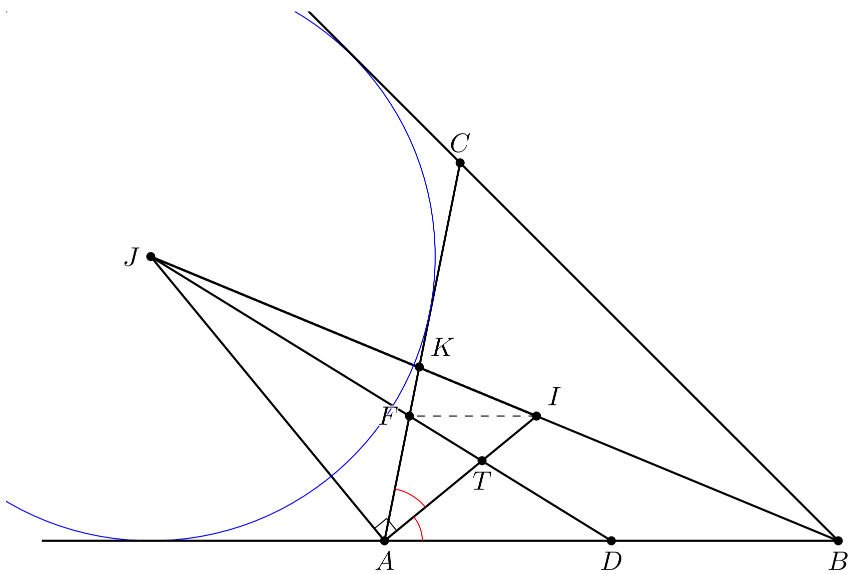
(a) Buktikan bahwa garis IF sejajar dengan AB.

(b) Buktikan bahwa garis AP, BJ, dan EF berpotongan di satu titik.

Proposed by Wildan Bagus Wicaksono

Bukti.

(a) Misalkan BJ memotong AC di K. Tentu B, I, J segaris karena I perpotongan ketiga garis bagi dalam, sedangkan J perpotongan dua garis bagi luar $\angle C$ dan $\angle A$ serta garis bagi dalam $\angle B$. Definisikan T sebagai perpotongan AI dan DJ.



Selanjutnya akan diberikan tiga pendekatan yang berbeda dalam menyelesaikan soal ini.

Solusi 1 (Owen Raphael Wijaya). Dengan menelaus segitiga AKB transversal $\overline{JFD}$, maka

$$1 = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \implies \frac{FA}{KF} = \frac{BJ}{JK}.$$

Karena JA garis bagi luar $\angle BAK$, dari teorema garis bagi luar berlaku $\frac{BJ}{JK} = \frac{AB}{AK}$. Karena AI garis bagi $\angle BAK$, dari teorema garis bagi sekali lagi berlaku $\frac{AB}{AK} = \frac{IB}{IK}$. Ini memberikan

$$\frac{FA}{KF} = \frac{BJ}{JK} = \frac{AB}{AK} = \frac{IB}{IK} \implies \frac{FA}{KF} = \frac{IB}{IK}.$$

Tambahkan kedua ruas dengan 1 berlaku $\frac{KA}{KF} = \frac{KB}{KI}$. Mengingat $\angle FKI = \angle AKB$, maka $\triangle KFI \sim \triangle KAB$ (SAS) sehingga berlaku $IF \parallel AB$.

. . . .

Solusi 2 (Sedikit Projektif). Diberikan titik-titik segaris A, B, C, dan D. Didefinisikan bundle $(A,B;C,D) = \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DA}}$ sebagai harmonik apabila $(A,B;C,D) = -1$ (di sini digunakan *directed length*). Akan digunakan lemma berikut.

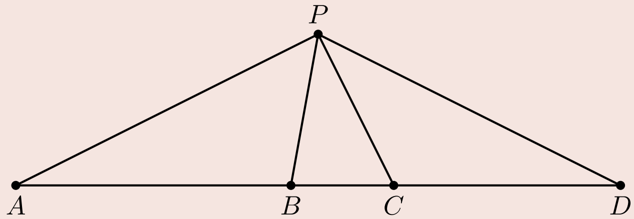
Lemma 1: Projective

Diberikan tiga titik A, B, C, dan D segaris dalam urutan tersebut dan suatu titik P. Maka jika dua kondisi berikut berlaku, kondisi sisanya juga berlaku.

(a) $\angle APC = 90°$.

(b) PC garis bagi $\angle BPD$.

(c) $(A,C;B,D)$ harmonik.



Bukti. Di sini hanya akan dibuktikan jika (a) dan (b) berlaku maka (c) berlaku, selainnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Diketahui $\angle APC = 90°$ dan $\angle BPC = \angle DPC$, akan dibuktikan bahwa

$$-1 = (A,C;B,D) = \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} \div \frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DC}} = \left(-\frac{BA}{BC}\right) \div \frac{DA}{DC} = -\left(\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC}\right)$$

atau setara dengan membuktikan $\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC} = 1$, di mana rasio $\frac{BA}{BC}, \frac{DA}{DC}$ tanpa mengasumsikan arah segmen tersebut. Misalkan $\angle BPC = \angle CPD = x$, maka $\angle APB = 90° - x$. Dari aturan sinus segitiga PBC dan PAB,

$$\frac{BA}{BC} = \frac{PB\sin\angle APB/\sin\angle PAB}{PB\sin\angle CPB/\sin\angle PCB} = \frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin(90° - x)}{\sin(x)} = \frac{\sin\angle PCB}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Dari aturan sinus PAC dan PCD,

$$\frac{DA}{DC} = \frac{PD\sin\angle APD/\sin\angle PAD}{PD\sin\angle DPC/\sin\angle PCD} = \frac{\sin(90° + x)}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin\angle PAD}{\sin\angle PCD} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin\angle PCD}{\sin\angle PAD}.$$

Perhatikan bahwa $\sin\angle PCB = \sin\angle PCD$ karena berperlurus, sedangkan $\sin\angle PAB = \sin\angle PAD$ karena kedua sudutnya sama besar. Maka diperoleh $\frac{BA}{BC} \div \frac{DA}{DC} = 1$. □

Berdasarkan sifat excircle, AJ merupakan garis bagi luar $\angle BAC$ sehingga diperoleh

$$\angle JAI = \angle JAC + \angle CAI = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ.$$

Karena AI garis bagi BAK, dari lemma berlaku $(B, K; I, J)$ harmonic, atau setara dengan $\frac{IB}{IK} = \frac{JB}{JK}$. Dari menelaus segitiga ABK transversal $\overline{JFD}$,

$$1 = \frac{BJ}{JK} \cdot \frac{KF}{FA} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{IB}{IK} \cdot \frac{KF}{FA} \implies \frac{KF}{FA} = \frac{KI}{IB}.$$

Ini setara dengan $\frac{KF}{KA} = \frac{KI}{KB}$ dan mengingat $\angle FKI = \angle AKB$, maka $\triangle KFI \sim \triangle KAB$ sehingga $IF \parallel AB$.

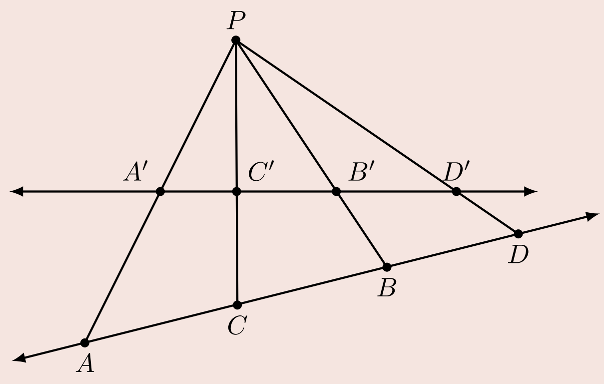
. . . .

Solusi 3 (Lebih Jauh Projektif). Di sini akan digunakan lemma tambahan.

Lemma 2: Projective Under Perspective

Diberikan dua garis l dan g serta titik P. Dibuat garis $\ell_A, \ell_B, \ell_C, \ell_D$ yang memotong l dan g berturut-turut di A dan A', B dan B', C dan C', D dan D'. Maka berlaku

$$(A, B; C, D) \stackrel{P}{=} (A', B'; C', D').$$



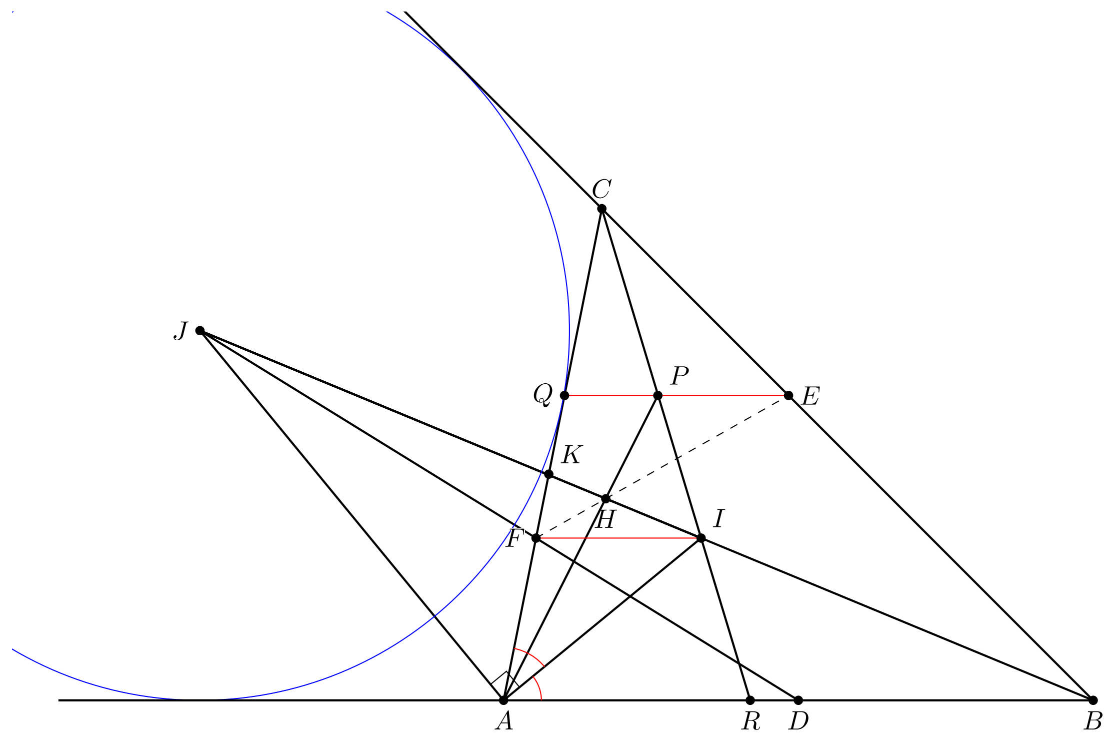
Perhatikan bahwa dari lemma 1 berlaku $(D, F; T, J) = -1$. Tinjau garis $\overline{DTFJ}$ dengan $\overline{BAD}$,

$$-1 = (D, F; T, J) \stackrel{I}{=} (D, IF \cap AB; A, B) \implies (D, IF \cap AB; A, B) = -1.$$

Karena D titik tengah, maka haruslah $IF \cap AB = \infty_{AB}$ yang membuktikan $IF \parallel AB$.

(b) Akan diberikan tiga pendekatan berbeda.

Solusi 1 (Owen Raphael Wijaya). Misalkan PE memotong AC di Q, H sebagai perpotongan AP dengan BK, dan R perpotongan CI dan AB. Akan dibuktikan bahwa E, H, dan F segaris.



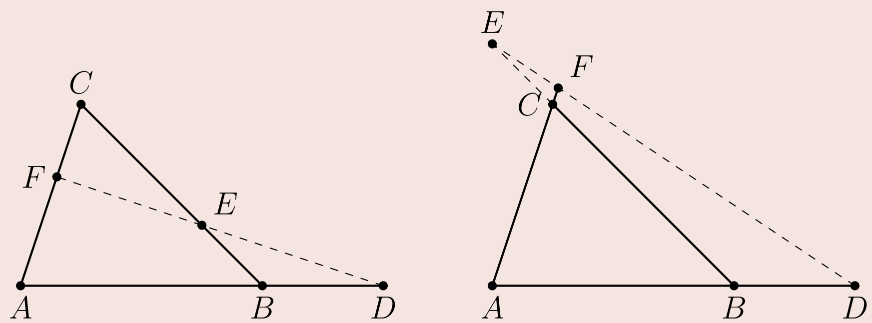
Teorema Menelaus

Diberikan segitiga ABC. Titik D, E, F berturut-turut terletak pada garis AB, BC, CA yang memenuhi salah satu kondisi berikut:

- Tepat satu titik dari D, E, F berada di perpanjangan sisi segitiga (lainnya di sisi segitiga).
- Ketiga titik dari D, E, F berada di perpanjangan sisi segitiga.

Maka D, E, F segaris jika dan hanya jika

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$



Dari konvers Teorema Menelaus dari segitiga QAP, ini ekivalen dengan membuktikan bahwa

$$\frac{QE}{EP} \cdot \frac{PH}{HA} \cdot \frac{AF}{FQ} = 1.$$

Perhatikan bahwa $QE \parallel AB$, maka terhadap homothety $\mathcal{H}$ dengan pusat A yang memetakan Q, P, E ke A, R, B secara berturut-turut. Ini berarti $\frac{QE}{PE} = \frac{AB}{RD}$. Dari Teorema Menelaus segitiga ABH transversal $\overline{PIR}$, berlaku

$$1 = \frac{AB}{BR} \cdot \frac{RI}{IP} \cdot \frac{PH}{HA} \implies \frac{IP}{IR} = \frac{QE}{PE} \cdot \frac{PH}{HA}.$$

Di sisi lain, tinjau bahwa $PQ \parallel IF \parallel AR$ sehingga $\triangle CPQ \sim \triangle CIF \sim \triangle CRA$. Ini berarti

$$\frac{PI}{QF} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CI}{CF} = \frac{IR}{FA} \implies \frac{PI}{QF} = \frac{IR}{FA}.$$

Ini berarti $\frac{PI}{IR} = \frac{QF}{FA}$ sehingga

$$\frac{QE}{EP} \cdot \frac{PH}{HA} \cdot \frac{AF}{FQ} = \frac{IP}{IR} \cdot \frac{PI}{IR} = 1$$

seperti yang ingin dibuktikan.

. . . .

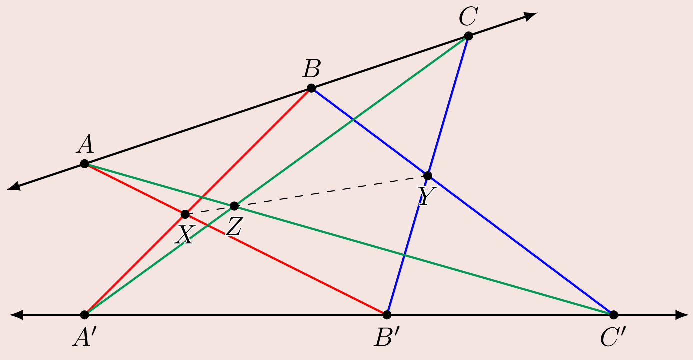
Solusi 2. Akan digunakan Pappus Theorem.

Pappus Theorem

Diberikan tiga titik segaris A, B, C (tidak harus dalam urutan tersebut), dan tiga titik segaris A', B', C' (tidak harus dalam urutan tersebut). Dari tripel (A, B, C) dan (A', B', C'), berlaku titik-titik

$$AB' \cap BA' = X, \quad BC' \cap CB' = Y, \quad AC' \cap CA' = Z$$

segaris.



Definisikan ∞_{AB} sebagai point at infinity dari garis AB, IF, dan EP (mengingat ketiganya saling sejajar). Tinjau tripel (A, F, C) dan (E, P, ∞_{AB}), dari Pappus Theorem memberikan

$$AP \cap FE, \quad F\infty_{AB} \cap PC = I, \quad A\infty_{AB} \cap CE = B$$

kolinear, dengan kata lain $AP \cap EF$ berada di garis BI. Ini membuktikan AP, EF, BI berpotongan di satu titik.

4 Diberikan suatu segitiga pada bidang-xy dengan ketiga titik sudutnya bukan merupakan titik latis dan ketiga sisinya tidak melalui titik latis. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik latis di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik latis di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

Catatan. Pada bidang-xy, titik *latis* adalah titik berbentuk (a, b) dengan a dan b bilangan bulat.

Bukti.

Akan dinotasikan $(a, b) \pmod 3$ sebagai $(a \mod 3, b \mod 3)$ di mana a dan b bilangan bulat. Perhatikan bahwa ada $3^2 = 9$ kemungkinan titik (a, b) dengan tiap komponennya dalam modulo 3 (a dan b bilangan bulat). Ini menunjukkan bahwa terdapat dua titik latis berebda (a, b), (p, q) di dalam segitiga yang memenuhi $(a, b) \equiv (p, q) \pmod 3$. Tulis $(p, q) = (a + 3u, b + 3v)$ untuk suatu bilangan bulat u dan v dengan $(u, v) \neq (0, 0)$. Kemudian, tinjau titik-titik

$$(a, b), \quad (a + u, b + v), \quad (a + 2u, b + 2v), \quad (a + 3u, b + 3v)$$

terletak segaris. Mengingat segitiga merupakan poligon konveks, maka setiap titik di segmen yang menghubungkan (a, b) dan $(a + 3u, b + 3v)$ juga terletak di dalam segitiga.