



UJIAN TENGAH RESPONSI SEMESTER GANJIL 2024/2025

Mata Kuliah	: Struktur Aljabar II	Batas Waktu	: Sabtu, 5 Oktober 2024
Program Studi	: S1 Matematika		
Kelas	: C		
Asisten Responsi	: Nayaka Reswara Nararya H. Nazra Arta Mevia Agustian Wildan Bagus Wicaksono		

SOAL

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan singkat, padat, dan jelas. Anda diperbolehkan membuka catatan, namun tidak diperkenankan untuk bekerja sama satu sama lain dan menggunakan solver seperti menggunakan AI. Pihak yang terindikasi bekerja sama atau menggunakan AI mendapatkan nilai 0. Setiap soal memiliki bobot 25 poin.

1. Diberikan $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{x + y\sqrt{-3} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ dan didefinisikan operasi $*$ dan \cdot sebagai berikut.

$$(a + b\sqrt{-3}) * (c + d\sqrt{-3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-3}$$

$$(a + b\sqrt{-3}) \cdot (c + d\sqrt{-3}) = (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3}$$

di mana $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Periksa apakah $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ merupakan ring, daerah integral, atau field.

2. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ di mana $+$ dan \cdot didefinisikan sebagai

$$(a, b, c) + (x, y, z) = (a +_6 x, b +_{10} y, c +_3 z), \quad (a, b, c)(x, y, z) = (a \cdot_6 x, b \cdot_{10} y, c \cdot_3 z)$$

untuk setiap $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$.

- (a) Tentukan $\text{char}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3)$.
(b) Tentukan tiga ideal non-trivial dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$.
(c) Dari (b), periksa apakah ideal yang Anda tuliskan merupakan ideal pokok atau bukan.
3. Diberikan field $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, kemudian $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ dengan

$$f(x) = \bar{2}x^5 + x^4 + x^3 + \bar{3}x^2 - x - \bar{1}, \quad g(x) = \bar{2}x^3 - \bar{2}x^2 + \bar{2}x + 1.$$

- (a) Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $f(x)$ jika dibagi $g(x)$.
(b) Tentukan faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$.
4. Tentukan semua $c \in \mathbb{Z}_7$ sedemikian sehingga $\frac{\mathbb{Z}_7[x]}{\langle x^3 - x^2 + c \rangle}$ merupakan field di mana $\langle x^3 - x^2 + c \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}_7[x]$.

SELAMAT MENGERJAKAN