Soal dan Solusi UTS Kalkulus III 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Hitung panjang busur dari lintasan $\phi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan sebagai

$$\phi(t) = \begin{cases} (2\cos(t), t, 2\sin(t)), & \text{untuk} \quad t \in [0, 2\pi] \\ (2t, t, t - 2\pi), & \text{untuk} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}.$$

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $2\cos(t), t, 2\sin(t) 2t$, dan $t - 2\pi$ merupakan fungsi polinom, fungsi sinus, dan fungsi cosinus yang terdiferensial di mana-mana. Dari sini diperoleh

$$\phi'(t) = \begin{cases} (-2\sin(t), 1, 2\cos(t)), & \text{untuk} \quad t \in [0, 2\pi] \\ (2, 1, 1), & \text{untuk} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}.$$

Maka panjang busur dari lintasan ϕ di interval $[0, 2\pi]$ adalah

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|\phi'(t)\| \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \|\phi'(t)\| \, dt &= \int_0^{2\pi} \|(-2\sin(t), 1, 2\cos(t))\| \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \|(2, 1, 1)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin(t))^2 + 1 + (2\cos(t))^2} \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(t) + 1 + 4\cos^2(t)} \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{6} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{5} \, dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sqrt{6} \, dt \\ &= \left[t\sqrt{5}\right]_0^{2\pi} + \left[\sqrt{6}\right]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{5} + 2\pi\sqrt{6}. \end{aligned}$$

▼

Question 2

Selesaikan soal di bawah ini.

(a). Misalkan $f(x,y,z) = \left(3x^2 - y^2 - 2z, -x^2 + y^2\right)$. Tentukan matriks Jacobi di titik $(1,2,-1)$.

(b). Jika $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} f(x,y,z) = A$ di mana $f(x,y,z) = (2x+3z, 2y+z, x+y)$, tentukan A.

(c). Diketahui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dan $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, masing-masing mempunyai rumus

$$f(x,y,z) = (x, y, y\cos(x), z\sin(y)) \quad \text{dan} \quad g(u,v,w,p) = (u + 2v + wp, p + u).$$

Buatlah rumus fungsi $(g \circ f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Penyelesaian.

(a). Tinjau $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, maka matriks Jacobi dari f memiliki ordo 2×3. Tulis $f_1(x,y,z) = 3x^2 - y^2 - 2z$ dan $f_2(x,y,z) = -x^2 + y^2$. Tinjau bahwa f_1 dan f_2 masing-masing merupakan fungsi polinom yang terdiferensial di mana-mana, maka f_1 dan f_2 masing-masing memiliki turunan parsial. Perhatikan bahwa matriks Jacobi dari $f(x,y,z)$ adalah

$$(\mathbf{D}f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -2y & -2 \\ -2x & 2y & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari sini, diperoleh matriks Jacobi f di titik $(1,2,-1)$ adalah

$$(\mathbf{D}f)(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 6(1) & -2(2) & -2 \\ -2(1) & 2(2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b). Perhatikan bahwa $2x+3z$, $2y+z$, dan $x+y$ masing-masing fungsi polinom yang berarti limitnya ada di sebarang titik. Diperoleh

$$\begin{aligned} A &= \lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} (2x+3z, 2y+z, x+y) \\ &= \left(\lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} (2x+3z), \lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} (2y+z), \lim_{(x,y,z)\to(1,2,-1)} (x+y) \right) \\ &= (2(1) + 3(-1), 2(2) + (-1), 1 + 2) \\ &= (-1, 3, 3). \end{aligned}$$

(c). Untuk setiap $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, diperoleh

$$g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x \\ y \\ y\cos(x) \\ z\sin(y) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + y\cos(x)z\sin(y) \\ z\sin(y) + x \end{bmatrix}.$$

Jadi, $(g \circ f)(x,y,z) = (x + 2y + yz\cos(x)\sin(y), x + z\sin(y))$.

▼

Question 3

Tinjau persamaan

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta),$$

di mana fungsi

$$f_1(r,\theta) = r\cos(\theta), \quad f_2(r,\theta) = r\sin(\theta).$$

Apa syaratnya agar $\frac{\partial r}{\partial x}$ ada?

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

Karena r, $\cos(\theta)$, dan $\sin(\theta)$ kontinu di sebarang titik, ini berarti f_1 dan f_2 memiliki turunan parsial yang kontinu. Selanjutnya,

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(r,\theta)}(r_0,\theta_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r_0,\theta_0) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r_0,\theta_0) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta_0) & -r_0\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & r_0\cos(\theta_0) \end{vmatrix} = r_0\cos^2(\theta_0) + r_0\sin^2(\theta_0) = r_0.$$

Asalkan $r_0 \neq 0$, maka terdapat persekitaran $U \subseteq \mathbb{R}^2$ dari (r_0,θ_0) dan persekitaran $V \subseteq \mathbb{R}^2$ dari (x_0,y_0) sedemikian sehingga terdapat tepat satu fungsi $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $x = g_1(r,\theta)$ dan $y = g_2(r,\theta)$ untuk setiap $(r,\theta) \in U$ dan $(x,y) \in V$. Dalam kasus ini, $\frac{\partial r}{\partial x}$ ada di mana

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(\mathbf{e}_1,\theta)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(r,\theta)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -r\sin(\theta) \\ 0 & r\cos(\theta) \end{vmatrix}}{r} = \frac{r\cos(\theta)}{r} = \cos(\theta).$$

Jadi, syarat yang menjamin $\frac{\partial r}{\partial x}$ ada adalah $r_0 \neq 0$. ▼

Question 4

Misalkan medan vektor $F(x, y, z) = \left(3x^2y, x^3 + y^3, 0\right)$.

(a). Tentukan fungsi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F = \nabla f$.

(b). Verivikasi bahwa curl $F = 0$.

Penyelesaian.

(a). Tulis $f := f(x, y, z)$. Diperoleh

$$\left(3x^2y, x^3 + y^3, 0\right) = F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Perhatikan bahwa $\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \implies f(x, y, z) = g(x, y)$. Karena $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y$, maka

$$3x^2y = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} \implies g(x, y) = x^3y + h(y) \implies f(x, y, z) = x^3y + h(y).$$

Dari $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y + y^3$, diperoleh

$$x^3 + y^3 = \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + h'(y) \implies h'(y) = y^3 \implies h(y) = \frac{y^4}{4} + C$$

di mana C suatu konstan. Jadi, $f(x, y, z) = x^3y + \frac{y^4}{4} + C$ di mana C suatu konstan. Dapat dicek ini memenuhi karena

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(3x^2y + 0 + 0, x^3 + y^3 + 0, 0 + 0 + 0\right) = \left(3x^2y, x^3 + y^3, 0\right) = F(x, y, z).$$

(b). Perhatikan bahwa

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & x^3 + y^3 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}x^3 + y^3\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial z}3x^2y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}x^3 + y^3 - \frac{\partial}{\partial y}3x^2y\right)\mathbf{k}$$

sehingga diperoleh curl $F = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0} - \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

▼