

Soal dan Solusi UAS Matematika Diskret 2023

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Tentukan penyelesaian relasi rekursif

$$a_n = a_{n-1} + 8a_{n-2} - 12a_{n-3} + 2^n$$

dengan $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_2 = -1$.

Penyelesaian.

Tulis $2^n = a_n - a_{n-1} - 8a_{n-2} + 12a_{n-3}$. Tinjau solusi homogen relasi rekursif tersebut adalah

$$0 = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3).$$

Diperoleh $x_1 = x_2 = 2$ dan $x_3 = -3$. Jadi, solusi homogenya adalah $a_n^h = a \cdot 2^n + bn \cdot 2^n + c \cdot (-3)^n$. Akan ditentukan solusi parsial relasi rekursif tersebut. Karena 2^n berasosiasi dengan solusi homogen, haruslah solusi parsialnya $a_n^p = dn^2 \cdot 2^n$. Substitusikan solusi parsial ke hal yang diberikan di soal,

$$2^n = dn^2 \cdot 2^n - d(n-1)^2 \cdot 2^{n-1} - 8 \cdot d(n-2)^2 \cdot 2^{n-2} + 12d(n-3)^2 \cdot 2^{n-3}.$$

Bagi kedua ruas dengan 2^{n-3} , maka

$$8 = 8dn^2 - 4d(n-1)^2 - 16d(n-2)^2 + 12d(n-3)^2 = 40d \implies d = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

Jadi, solusi rekursifnya adalah

$$a_n = a_n^h + a_n^p = a \cdot 2^n + bn \cdot 2^n + c \cdot (-3)^n + \frac{2^n n^2}{5}.$$

Karena $a_0 = 0, a_1 = 1$, dan $a_2 = -1$, diperoleh

$$0 = a \cdot 2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 + c \cdot (-3)^0 + \frac{2^0 \cdot 0^2}{5} \implies 0 = a + c. \quad (1)$$

$$1 = a \cdot 2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 + c \cdot (-3)^1 + \frac{2^1 \cdot 1^2}{5} \implies \frac{3}{5} = 2a + 2b + c. \quad (2)$$

$$-1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 \cdot 2^2 + c \cdot (-3)^2 + \frac{2^2 \cdot 2^2}{5} \implies -\frac{21}{5} = 4a + 8b + 9c. \quad (3)$$

Dari (1), diperoleh $c = -a$. Substitusikan ke persamaan (2) dan (3), maka $\frac{3}{5} = 5a + 2b$ dan $-\frac{21}{5} = 8b - 5a$. Jumlahkan kedua persamaan yang baru diperoleh, maka $\frac{-18}{5} = 10b \iff b = -\frac{9}{25}$. Dari sini, diperoleh $\frac{3}{5} = 5a + 2b \iff a = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{5} - 2b \right) = \frac{33}{125}$ dan $c = -a = -\frac{33}{125}$. Jadi,

$$a_n = \frac{33 \cdot 2^n}{125} - \frac{9n \cdot 2^n}{25} - \frac{33 \cdot (-3)^n}{125} + \frac{2^n \cdot n^2}{5}.$$



Question 2

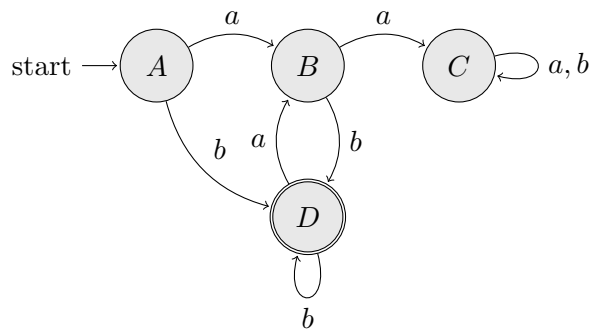
Diberikan matriks transisi DFA sebagai berikut, di mana A sebagai state initial dan D sebagai state final.

State\Input	a	b
A	B	D
B	C	D
C	C	C
D	B	D

- Gambarlah graf berarah yang mendeskripsikan DFA (*Deterministic Finite Automata*).
- Tentukan grammar G dari bahasa yang diterima oleh DFA dengan matriks transisi di atas.

Penyelesaian.

- Graf DFA di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



- Grammar $G = (N, T, A, P)$ dengan

$$N = \{A, B, C, D\}$$

$$T = \{a, b\}$$

$$P = \{A \rightarrow aB, A \rightarrow bD, B \rightarrow aC, B \rightarrow bD, C \rightarrow aC, C \rightarrow bC, D \rightarrow aB, D \rightarrow bD, D \rightarrow \lambda\}$$



Question 3

Dekripsikan chipertext LNGIHGYBVRENJYQO dengan menggunakan Hill-2 chiper, jika empat plaintext terakhirnya merupakan ATOM.

Catatan: konversi hurufnya $A = 1, B = 2, \dots$, dan $Z = 0$.

Penyelesaian.

Misalkan matriks Hill-2 chiper yang dimaksud adalah $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Misalkan dekripsi dari L, N, G, I, H, G, dan seterusnya sebagai $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, dan seterusnya sebagaimana tabel berikut.

Dekripsi	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	A	T	O	M
Bilangan	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	1	20	15	13
Enkripsi	L	N	G	I	H	G	Y	B	V	R	G	N	J	Y	Q	O
Bilangan	12	14	7	9	8	7	25	2	22	18	5	11	10	25	17	15

Entri-entri pada matriks akan dikerjakan dalam modulo 26. Karena ATOM dienkrpsi sebagai JYQO, maka

$$A \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 20 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 25 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -6 & 13 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13 - 66} \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-53} \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} \left(- \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -76 & -101 \\ 79 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}.$$

Maka invers dari matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 22 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 22 - 3 \cdot 1} \begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 22 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154 & -21 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa proses enkripsi yang dilakukan adalah

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & 1 & 15 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & 20 & 13 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & a_{11} & 1 & 15 \\ a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_{10} & a_{12} & 20 & 13 \end{bmatrix} &= A^{-1} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 24 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 7 & 8 & 25 & 22 & 5 & 10 & 17 \\ 14 & 9 & 7 & 2 & 18 & 11 & 25 & 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 46 & 31 & 19 & 12 & -32 & 60 & 105 & 41 \\ 112 & 77 & 42 & 35 & -84 & 161 & 280 & 91 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 5 & 19 & 12 & 20 & 8 & 1 & 15 \\ 8 & 25 & 16 & 9 & 20 & 5 & 20 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jadi, pesan dekripsinya adalah THEYSPLITTHEATOM. ▼

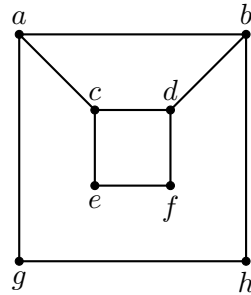
Question 4

Diberikan graf G dalam diagram berikut.

(a). Buktikan bahwa pada graf G berlaku

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|.$$

(b). Tentukan subgraf $G - d$ dan $G - c$, kemudian selidiki apakah kedua graf tersebut saling isomorfik dan berikan penjelasannya.



Penyelesaian.

(a). Tinjau

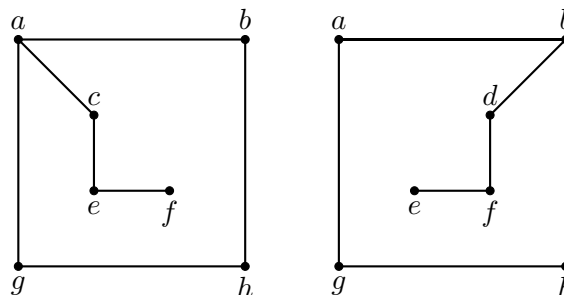
$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) + \deg(f) + \deg(g) + \deg(h) = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20.$$

Di sisi lain,

$$E(G) = \{ab, ac, ag, bh, bd, cd, ce, df, fe, gh\} \implies |E(G)| = 10.$$

Diperoleh $\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2|E(G)|$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b). Subgraf $G - d$ dan subgraf $G - c$ disajikan pada gambar berikut (kiri ke kanan).



Tinjau pemetaan $\varphi : G - d \rightarrow G - c$ dengan $\varphi(a) = b, \varphi(b) = a, \varphi(c) = d, \varphi(d) = c, \varphi(e) = f, \varphi(f) = e, \varphi(g) = h$, dan $\varphi(h) = g$. Dapat diperiksa bahwa untuk setiap $x, y \in G - d$ dengan x dan y bertetangga jika dan hanya jika $\varphi(x)$ bertetangga dengan $\varphi(y)$ (diserahkan kepada pembaca). Hal ini menunjukkan graf $G - d$ dan $G - c$ isomorfik.

