



Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Kalkulus III

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2024

Soal

- [1] Tentukan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F = \nabla f$ di mana $F(x, y) = (x, -y)$.
- [2] Diberikan fungsi $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, misalkan C_1 dan C_2 merupakan lintasan garis lurus pada \mathbb{R}^2 dengan C_1 merupakan segmen garis dari $(0, 0)$ ke $(2, 0)$ dan C_2 merupakan segmen garis lintasan tertutup $(1, 0)$ ke $(1, 1)$ ke $(0, 1)$ ke $(1, 0)$. Hitunglah

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

- [3] Diketahui medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ dan S merupakan bagian setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dengan $z \geq 0$, serta vektor normal menjauh titik asal. Hitunglah

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

- [4] Diberikan fungsi $P(x, y) = -y, Q(x, y) = x$ dengan daerah $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Lakukan verifikasi Teorema Green pada fungsi dan daerah yang diberikan.

Tentukan fungsi $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $F = \nabla f$ di mana $F(x, y) = (x, -y)$.

Solusi:

Perhatikan bahwa

$$(x, -y) = F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

sehingga $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ dan $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$. Dari $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ memberikan $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + C(y)$. Substitusikan pada $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$, maka

$$-y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + C'(y) \implies C(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C$$

dengan C suatu konstan. Jadi, $f(x, y) = \boxed{\frac{x^2 - y^2}{2} + C}$ dengan C konstan.

Diberikan fungsi $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, misalkan C_1 dan C_2 merupakan lintasan garis lurus pada \mathbb{R}^2 dengan C_1 merupakan segmen garis dari $(0, 0)$ ke $(2, 0)$ dan C_2 merupakan segmen garis lintasan tertutup $(1, 0)$ ke $(1, 1)$ ke $(0, 1)$ ke $(1, 0)$. Hitunglah

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds.$$

Solusi:

Akan ditentukan $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds$. Parameterisasi lintasan C_1 dengan $(x, y) = \phi(t) = (t, 0)$ untuk $0 \leq t \leq 2$. Ini berarti $\phi'(t) = (1, 0)$ sehingga

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds = \int_0^2 \mathbf{F}(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_0^2 (t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_0^2 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2.$$

Akan ditentukan $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds$. Misalkan D adalah daerah yang dibatasi oleh lintasan C_2 yang mana berorientasi positif. Perhatikan bahwa

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{C_2} x dx + y dy$$

yang mana $P(x, y) = x$ dan $Q(x, y) = y$. Dari Teorema Green,

$$\int_{C_2} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (0 - 0) dA = 0.$$

Jadi,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot ds + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot ds = 2 + 0 = \boxed{2}.$$

Diketahui medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ dan S merupakan bagian setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dengan $z \geq 0$, serta vektor normal menjauh titik asal. Hitunglah

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Solusi:

Parameterisasi

$$(x, y, z) = \Phi(u, v) = (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)), \quad 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ini berarti

$$\mathbf{t}_u = (-\sin(u) \sin(v), \cos(u) \sin(v), 0), \quad \mathbf{t}_v = (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), -\sin(v)).$$

Diperoleh

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin(u) \sin(v) & \cos(u) \sin(v) & 0 \\ \cos(u) \cos(v) & \sin(u) \cos(v) & -\sin(v) \end{vmatrix} = (-\cos(u) \sin^2(v), -\sin(u) \sin^2(v), \sin(v) \cos(v)).$$

Didapatkan $\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| = \sin(v)$ sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = (-\cos(u) \sin(v), -\sin(u) \sin(v), \cos(v))$$

yang mana vektor tersebut menjauhi titik asal. Jadi,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v) \, dv \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [-\cos^2(u) \sin^3(v) - \sin^2(u) \sin^3(v) + \sin(v) \cos^2(v)] \, dv \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [-\sin^3(v) + \sin(v) \cos^2(v)] \, dv \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(v) [\cos^2(v) - \sin^2(v)] \, dv \, du \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(v) \cos(2v) \, dv \, du \\
&= \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin(v) \cos(2v) \, dv \\
&= 2\pi \int_0^\pi \sin(v) \cos(2v) \, dv.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, oleh karena itu

$$\sin(v) \cos(2v) = \frac{\sin(v+2v) - \sin(v-2v)}{2} = \frac{\sin(3v) - \sin(-v)}{2} = \frac{\sin(3v) + \sin(v)}{2}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(v) \cos(2v) \, dv &= \int_0^\pi \left[\frac{\sin(3v) + \sin(v)}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos(3v) - \cos(v) \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos(3\pi) - \cos(\pi) + \frac{1}{3} \cos(0) + \cos(0) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 \right] \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}\pi}.$$

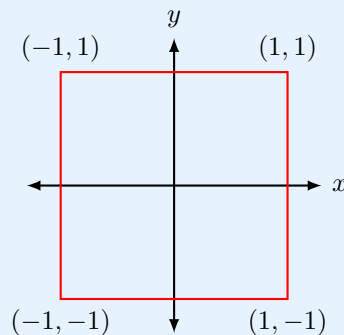
Diberikan fungsi $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ dengan daerah $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Lakukan verifikasi Teorema Green pada fungsi dan daerah yang diberikan.

Solusi:

Perhatikan gambar berikut. Misalkan C_1, C_2, C_3, C_4 berturut-turut menyatakan lintasan segmen garis dari $(-1, -1)$ ke $(-1, 1)$, $(-1, 1)$ ke $(1, 1)$, $(1, 1)$ ke $(1, -1)$, dan $(1, -1)$ ke $(-1, -1)$. Tulis $C := C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Akan diverifikasi hasil dari

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_C (-y) \, dx + x \, dy = \int_C (-y, x) \cdot ds.$$

dengan dua cara.



Perhatikan bahwa

$$\int_C -y \, dx + x \, dy = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} (-y \, dx + x \, dy).$$

Parameterisasi lintasan C_1 dengan $(x, y) = \phi_1(t) = (-1 + 2t, -1)$ dengan $0 \leq t \leq 1$, maka $\phi_1'(t) = (2, 0)$. Ini berarti

$$\int_{C_1} (-y, x) \cdot ds = \int_0^1 (1, -1 + 2t) \cdot (2, 0) \, dt = \int_0^1 2 \, dt = [2t]_0^1 = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_2 dengan $(x, y) = \phi_2(t) = (1, -1 + 2t)$ dengan $0 \leq t \leq 1$, maka $\phi_2'(t) = (0, 2)$. Ini berarti

$$\int_{C_2} (-y, x) \cdot ds = \int_0^1 (1 - 2t, 1) \cdot (0, 2) dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_3 dengan $\phi_3(t) = (1 - 2t, 1)$ dengan $0 \leq t \leq 1$, maka $\phi_3'(t) = (-2, 0)$. Ini berarti

$$\int_{C_3} (-y, x) \cdot ds = \int_0^1 (-1, 1 - 2t) \cdot (-2, 0) dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

Parameterisasi lintasan C_4 dengan $(x, y) = \phi_4(t) = (-1, 1 - 2t)$ dengan $0 \leq t \leq 1$, maka $\phi_4'(t) = (0, -2)$. Ini berarti

$$\int_{C_4} (-y, x) \cdot ds = \int_0^1 (2t - 1, -1) \cdot (0, -2) dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

Jadi, $\int_C (-y, x) \cdot ds = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

Akan diverifikasi dengan Teorema Green. Misalkan D menyatakan daerah yang dibatasi C , yaitu persegi dengan panjang sisi 2. Maka

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_D (1 - (-1)) dA = 2 \iint_D dA = 2 \cdot \text{luas } D = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Terbukti nilainya sama.