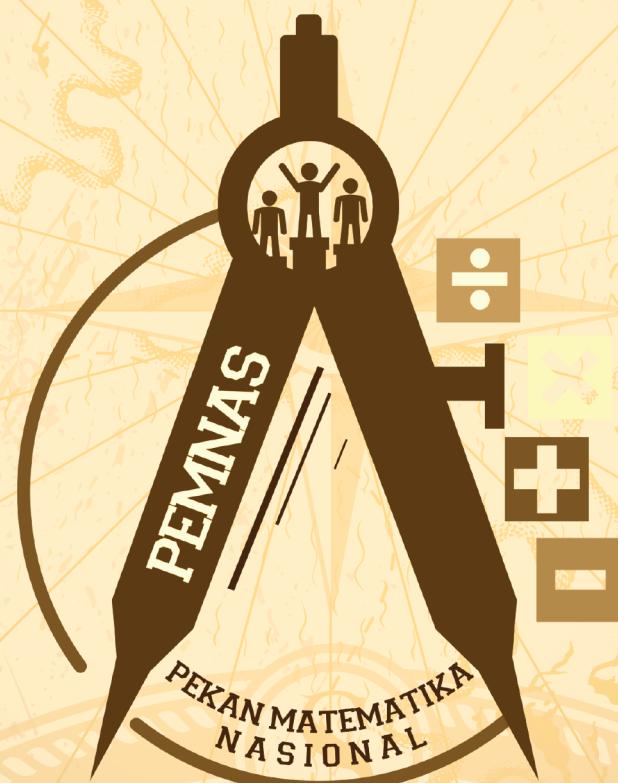




# Raskah Soal PEMNAS

Pekan Matematika Rasional 2023



Babak Penyisihan  
Jenjang SMA/MA/SMK/Sederajat

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA DAN ILMU AKTUARIA (HIMATIKA)  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

## Peraturan Babak Penyisihan Jenjang SMA/MA/Sederajat

1. Babak penyisihan akan dilaksanakan pada Sabtu, 4 November 2023.
2. Babak penyisihan PEMNAS 2023 terdiri dari 25 soal isian singkat dengan rincian 10 soal kategori mudah, 10 soal kategori sedang, dan 5 soal kategori sulit dengan waktu pengerjaan selama 75 menit.
3. Pengerjaan soal dilakukan melalui website oleh setiap peserta di [ujian.pemnas.com](http://ujian.pemnas.com). Pengerjaan dilaksanakan menggunakan PC (komputer atau laptop) dengan daya baterai yang cukup dan koneksi internet yang stabil.
4. Banyak peserta yang berhak lolos ke tahap semifinal adalah 50 peserta, di mana sebanyak 25 peserta dalam peringkat nasional dan 25 peserta lainnya merupakan perwakilan masing-masing rayon.
5. Peserta hanya menjawab dengan mengetikkan jawaban akhir berupa angka, tanpa menggunakan satuan, tanda titik (.), tanda koma (,), dan lain-lain. Jawaban dipastikan bilangan bulat non negatif.
6. Bobot penilaian pada babak penyisihan:
  - (a). Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin untuk soal mudah, 3 poin untuk soal sedang, dan 4 poin untuk soal sulit.
  - (b). Setiap soal yang dijawab salah bernilai  $-1$  poin.
  - (c). Setiap soal yang tidak dijawab (kosong) bernilai 0 poin.
7. Hal-hal yang diperbolehkan:
  - (a). Bertanya teknis hanya kepada CS.
  - (b). Menyediakan kertas kosong sebagai alat bantu menghitung.
  - (c). Menggunakan penggaris lurus dan jangka.
  - (d). Minum saat lomba berlangsung.
8. Hal-hal yang dilarang:
  - (a). Berbuat curang dengan cara apapun.
  - (b). Membuka handphone termasuk membuka sosial media.
  - (c). Membuka catatan, buku rumus, *cheat sheet*, dan sebagainya.
  - (d). Tidak bekerja mandiri seperti menggunakan bantuan orang di sekitar dan joki.

- (e). Menggunakan alat bantu hitung apapun, seperti kalkulator, handphone, tabel matematika, dan sebagainya
  - (f). Dilarang menggunakan busur derajat atau segitiga siku-siku. Namun, penggaris lurus atau jangka diperbolehkan.
  - (g). Makan dan minum kecuali meminum air putih.
9. Kesalahan peserta dalam mengoperasikan aplikasi saat kompetisi bukan tanggung jawab panitia.
10. Periksalah kembali jawaban sebelum dikumpulkan dan pastikan sudah klik "Save".
11. Peserta tidak dapat mengerjakan kembali jika telah menyelesaikan ujian.
12. Apabila ditemukan pelanggaran, maka peserta akan diberikan sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku.
13. Keputusan Panitia PEMNAS 2023 tidak dapat diganggu gugat.

**LEMBAR SOAL BABAK PENYISIHAN PEMNAS TAHUN 2023**  
**JENJANG SMA/MA/SEDERAJAT**

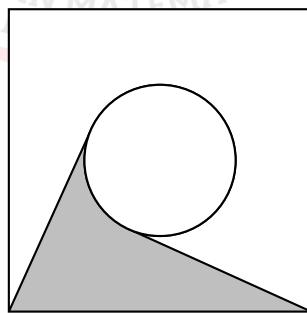
1. Banyak pasangan bilangan asli  $(a, b)$  yang memenuhi  $3a + 2b = 2023$  adalah . . . .
2. Dalam sebuah kotak berisi 3 bola berwarna merah, 4 bola berwarna hijau, dan 5 bola berwarna coklat. Pepem akan mengambil tiga bola sekaligus secara acak dalam kotak tersebut. Dari ketiga bola yang telah terambil, peluang bahwa terdapat dua bola yang berwarna sama dapat dinyatakan sebagai  $\frac{a}{b}$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $2a + b$  adalah . . . .
3. Banyak pasangan bilangan real  $(a, b)$  sedemikian sehingga sistem persamaan

$$ax + b = 2$$

$$a + bx = 4$$

memiliki tak berhingga banyaknya solusi untuk  $x$  adalah . . . .

4. Diberikan persegi  $ABCD$  dengan panjang sisi 2024 satuan. Titik  $E$  dan  $F$  masing-masing terletak pada sisi  $CD$  sedemikian sehingga panjang  $DF = FC$  dan  $FE = EC$ . Jika  $AE$  dan  $BF$  berpotongan di titik  $G$ , maka panjang dari  $GE$  adalah . . . .
5. Diketahui bahwa  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2023} + 1}{1 - x^2} = \frac{a}{b}$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $a + 3b$  adalah . . . .
6. Diberikan persegi dengan panjang sisi  $10\sqrt{\pi}$  satuan dan sebuah lingkaran yang berpusat di perpotongan diagonalnya dan berjari-jari 2 satuan. Dari dua titik sudut persegi ditarik garis singgung lingkaran sebagaimana pada gambar. Jika daerah yang diarsir dapat dinyatakan sebagai  $a\pi$ , nilai dari  $5a$  adalah . . . .



7. Diketahui suatu fungsi  $f(a, b)$  yang terdefinisi untuk setiap dua bilangan real  $a$  dan  $b$  yang tak nol, memenuhi

$$f(a, b) = -f\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), \quad f(a+1, b) = f(a, b) + a, \quad f(a, b+1) = f(a, b) - b.$$

Nilai dari  $10 \times f\left(5, -\frac{1}{3}\right)$  adalah . . . .

8. Nilai dari

$$\int_1^3 \frac{x^2 + (x+1)^2}{(x+x^2)^2} dx = \frac{a}{b}$$

di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $2a + 3b$  adalah . . . .

9. Banyak pasangan bilangan bulat  $(m, n)$  yang memenuhi

$$2n + 3m = m^2 + n^2$$

adalah . . . .

10. Misalkan  $a, b$ , dan  $c$  suatu bilangan real tak nol yang memenuhi persamaan

$$a+b+c=6, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 23, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7.$$

Nilai dari  $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$  adalah . . . .

11. Sebuah papan berukuran  $3 \times 3$ , setiap petaknya akan diisi dengan tepat satu bilangan yang dipilih dari himpunan  $\{-1, 0, 1\}$ . Pepem mengisi petak tersebut dengan menuliskan bilangan-bilangan yang diperbolehkan secara acak. Peluang bahwa Pepem akan mendapatkan papan dengan ketentuan setiap jumlah dua bilangan dari petak yang bersebelahan adalah  $-1$  atau  $1$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{a}{3^b}$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli serta  $a$  tidak habis dibagi  $3$ . Nilai dari  $a + b$  adalah . . . .

**Catatan.** Dua petak dikatakan **bersebelahan** jika kedua petak tersebut memiliki sisi persekutuan.

12. Diketahui nilai dari

$$\sum_{k=2}^{2023} \frac{k^2(-1)^k}{k!} = \frac{2^2}{2!} - \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} - \frac{5^2}{5!} + \cdots + \frac{2022^2}{2022!} - \frac{2023^2}{2023!}$$

dapat dinyatakan sebagai  $\frac{a}{b}$  di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Bilangan asli terbesar  $k$  yang memenuhi  $11^k$  membagi  $b$  adalah . . . .

13. Diberikan fungsi  $f_1(x) = \sin(x)$  yang berlaku untuk setiap bilangan real  $x$ . Untuk setiap bilangan asli  $n$ , definisikan  $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$  dan  $g(x) = f_{2023}(x)$  untuk setiap bilangan real  $x$ . Jika  $g'(\pi) = (-1)^a b$  di mana  $a \in \{1, 2\}$  dan  $b$  bilangan real positif, nilai dari  $a + 2b$  adalah . . . .

14. Pada papan dituliskan

$$1 * 1 * 1 * 2 * 2 * 3 * 3 * 3.$$

Tanda \* dapat dihapus, kemudian dapat tidak diisi atau diisi dengan operasi jumlah (+). Sebagai contoh,  $11 + 122 + 23 + 3 + 3$  adalah salah satu cara mengisi atau tidak mengisi setelah menghapus tanda \*. Jika Pepem menghapus, kemudian tidak mengisi atau mengisi tanda \* secara acak, peluang hasil yang diperoleh habis dibagi 18 dapat dinyatakan sebagai  $\frac{x}{y}$  di mana  $x$  dan  $y$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $x + y$  adalah . . . .

15. Diberikan segitiga siku-siku  $ABC$  di mana  $\angle BAC = 90^\circ$ . Titik  $M$  dan  $N$  berturut-turut terletak pada sisi  $AB$  dan sisi  $BC$  sedemikian sehingga panjang  $AM = MB = 10$  satuan. Diketahui  $AN$  tegak lurus garis bagi  $\angle ABC$  dan  $MN$  memotong garis bagi  $\angle ABC$  di titik  $P$ . Jika panjang  $BP = \frac{32}{3}$  satuan, maka panjang  $AC$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{x}{y}$  satuan di mana  $x$  dan  $y$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $x + 2y$  adalah . . . .
16. Bilangan asli terbesar yang tidak dapat dituliskan dalam bentuk  $5x + 11y + 13z$  di mana  $x, y$ , dan  $z$  bilangan asli adalah . . . .

17. Untuk setiap bilangan real positif  $x$ , definisikan  $\{x\}$  menyatakan bagian desimal dari  $x$ . Sebagai contoh,  $\{2,542\} = 0,542$ ,  $\{0,2341\} = 0,2341$ , dan  $\{4\} = 0$ . Jika

$$\int_1^{2023} 4^{\{x\}} dx = \frac{a}{\ln(b)}$$

di mana  $a$  dan  $b$  adalah dua bilangan asli di mana  $b$  tidak habis dibagi bilangan kuadrat apapun selain 1, nilai dari  $a + b$  adalah . . . .

18. Diketahui  $a, b, c, d$ , dan  $e$  adalah lima bilangan real positif yang memenuhi

$$8a^4 + 4a^3 + 3a = 10b^2,$$

$$8b^4 + 4b^3 + 3b = 10c^2,$$

$$8c^4 + 4c^3 + 3c = 10d^2,$$

$$8d^4 + 4d^3 + 3d = 10e^2,$$

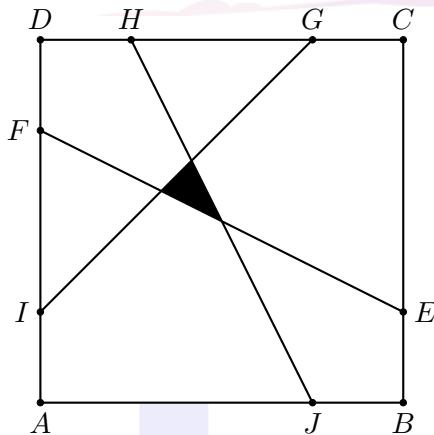
$$8e^4 + 4e^3 + 3e = 10a^2.$$

Banyaknya tuplet  $(a, b, c, d, e)$  yang memenuhi sistem persamaan di atas adalah . . . .

19. Diberikan persegi  $ABCD$  dengan panjang sisi 1 dan titik-titik  $D, E, F, G, H$ , dan  $I$  terletak pada sisi-sisi persegi sebagaimana gambar berikut dan berlaku perbandingan panjang

$$AJ : JB = CE : EB = 3 : 1 \quad \text{dan} \quad AI : IF : FD = DH : HG : GC = 1 : 2 : 1.$$

Luas segitiga yang dibatasi oleh garis-garis  $EF$ ,  $GI$ , dan  $HJ$  sebagaimana yang ditunjukkan pada luas daerah diarsir dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}$  di mana  $p$  dan  $q$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $p + q$  adalah . . . .



20. Pepem sedang berada di pojok bawah kiri dari grid  $6 \times 6$  titik letis, yaitu  $(0, 0)$ . Grid tersebut memiliki suatu alat teleportasi yang hanya dapat digunakan sekali di titik  $(2, 2)$  dan  $(3, 3)$ ; pertama kali Pepem berpindah pada titik tersebut dia otomatis berpindah ke titik lain, dan peralatan tersebut akan menghilang. Sebagai contoh, apabila Pepem berada di  $(2, 2)$  maka dia akan berpindah ke  $(3, 3)$ , begitu juga sebaliknya. Jika dia hanya dapat berjalan arah ke atas atau ke kanan, banyak rute yang mungkin agar dia mencapai titik  $(5, 5)$  adalah . . . .

**Catatan.** Titik  $(x, y)$  disebut titik letis apabila  $x, y$  bilangan bulat. Grid titik letis  $6 \times 6$  di soal mengandung titik-titik  $(i, j)$  untuk setiap bilangan bulat  $i, j$  di mana  $0 \leq i, j \leq 5$ .

21. Suatu bilangan asli  $c$  memenuhi syarat berikut: terdapat bilangan bulat tak negatif  $a$  yang memenuhi  $a+1, a+2, a+3, \dots, a+10$  masing-masing merupakan faktor positif dari  $c$ . Bilangan asli terkecil  $c$  yang memenuhi adalah . . . .

22. Misalkan  $S$  menyatakan himpunan semua pasangan bilangan asli  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $a^2 + b^2 = c^2$ , sedangkan  $T$  adalah himpunan semua kemungkinan nilai dari  $abc(a+b+c)$  untuk setiap  $(a, b, c) \in S$ . Bilangan asli terbesar yang selalu habis membagi semua anggota  $T$  adalah . . . .

23. Nilai dari  $\lfloor 2S \rfloor$  di mana

$$S = \int_{-1}^1 \left( e^x \sec^2(x) - \frac{\tan^2(x)}{e^x} \right) dx$$

adalah . . . .

**Catatan.** Untuk setiap bilangan real  $x$ , definisikan  $\lfloor x \rfloor$  sebagai bilangan bulat real terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan  $x$ .

24. Misalkan  $a, b, c$ , dan  $d$  adalah akar-akar dari persamaan

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Jika

$$S = (abc)^7 + (abd)^7 + (acd)^7 + (bcd)^7,$$

maka nilai dari  $\lfloor 100S \rfloor$  adalah . . . .

**Catatan.** Untuk setiap bilangan real  $x$ , definisikan  $\lfloor x \rfloor$  sebagai bilangan bulat real terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan  $x$ .

25. Pada segitiga  $ABC$ , misalkan  $A_1$  menyatakan titik pusat lingkaran yang menyinggung perpanjangan sisi  $AB$ , perpanjangan sisi  $AC$ , dan segmen  $BC$ . Definisikan  $B_1$  dan  $C_1$  dengan cara yang serupa. Misalkan  $O$  dan  $O_1$  berturut-turut menyatakan pusat lingkaran luar dari segitiga  $ABC$  dan segitiga  $A_1B_1C_1$ . Sedangkan, titik  $I$  merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga  $ABC$ . Jika panjang  $IC_1 = 7$ ,  $OC_1 = 2\sqrt{14}$ , dan  $O_1C_1 = 9$ , maka panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga  $ABC$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}$  di mana  $p$  dan  $q$  adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $p + q$  adalah . . . .