



# NASKAH SOAL

# PEMNAS

## Pekan Matematika Nasional 2024



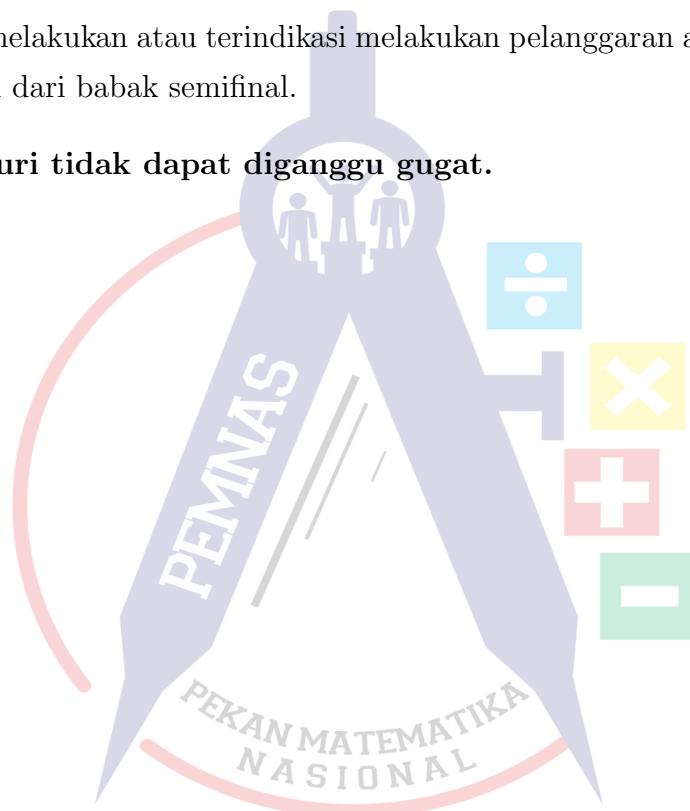
Babak Semifinal  
Jenjang SMA/MA/SEDERAJAT

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA DAN ILMU AKTUARIA (HIMATIKA)  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

## Peraturan Babak Semifinal Jenjang SMA/MA/Sederajat

1. Peserta babak semifinal merupakan peserta yang dinyatakan lolos dari babak penyisihan.
2. Terdiri dari 4 soal uraian yang dikerjakan dalam waktu 90 menit tanpa istirahat.
3. Tuliskan identitas pada setiap lembar jawaban seperti nama lengkap, asal sekolah, nomor peserta, nomor soal, dan jenjang. Lembar jawaban yang identitasnya tidak tertera dianggap tidak sah dan tidak dinilai.
4. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **langkah-langkah hingga hasil akhir** pada lembar jawaban. Setiap soal memiliki bobot 7 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab.
5. Peserta yang berhak lolos ke tahap final adalah 5 peserta.
6. Ketentuan pemeringkatan:
  - (a). Diurutkan berdasarkan poin tertinggi peserta.
  - (b). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang memiliki poin sama setelah poin (a) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan banyaknya soal yang dijawab sempurna.
  - (c). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang masih memiliki poin sama setelah poin (b) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan jenjang kelas dengan mengutamakan kelas yang lebih muda.
  - (d). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang masih memiliki poin sama setelah poin (c) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan umur dengan mengutamakan umur yang lebih muda.
7. Peserta dilarang membuka catatan atau menggunakan alat bantu hitung lainnya seperti kalkulator, tabel matematika, busur derajat, atau penggaris siku. Penggaris lurus dan jangka boleh digunakan.
8. Peserta tidak diperbolehkan mengganggu atau berdiskusi dengan peserta lain saat pengerjaan soal berlangsung.

9. Peserta wajib menulis jawaban menggunakan bolpoin hitam. Pensil hanya diperkenankan untuk keperluan menggambar ilustrasi.
10. Peserta dilarang menggunakan penghapus cair atau *correction tape* untuk menghapus jawaban. Jawaban yang salah cukup dicoret dengan satu coretan saja.
11. Apabila lembar jawaban tidak cukup, peserta diperbolehkan menuliskan jawaban di halaman baliknya atau meminta kepada pengawas. Peserta diperbolehkan meminta kertas buram tambahan kepada pengawas.
12. Peserta yang melakukan atau terindikasi melakukan pelanggaran atau kecurangan akan didiskualifikasi dari babak semifinal.
13. Keputusan juri tidak dapat diganggu gugat.



**LEMBAR SOAL BABAK SEMIFINAL PEMNAS TAHUN 2024**  
**JENJANG SMA/MA/SEDERAJAT**

90 menit

**Soal 1.** Misalkan dua bilangan asli  $P$  dan  $Q$  tertulis pada sebuah papan. Pada setiap langkah, Pepem mengganti salah satu bilangan pada papan, misalkan  $x$  dan  $y$ , menjadi  $x+y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$  (asalkan  $\frac{x}{y}$  bilangan bulat), atau  $\frac{y}{x}$  (asalkan  $\frac{y}{x}$  bilangan bulat). Buktikan bahwa berapapun nilai  $P$  dan  $Q$ , Pepem pasti dapat menuliskan bilangan 2024 pada papan dalam berhingga langkah.

**Soal 2.** Tentukan semua bilangan bulat tak negatif  $k$  sedemikian sehingga terdapat bilangan bulat  $x$  dan  $y$  yang memenuhi

$$2^k = (x^2 - 4y + 1)(y^2 - 4x + 1).$$

**Soal 3.** Diberikan segitiga  $ABC$  di mana  $G$  adalah perpotongan garis berat segitiga  $ABC$ . Titik  $D$ ,  $E$ , dan  $F$  berturut-turut merupakan titik tengah sisi  $BC$ ,  $CA$ , dan  $AB$ . Titik  $D_1$ ,  $E_1$ , dan  $F_1$  berturut-turut merupakan titik tengah  $AG$ ,  $BG$ , dan  $CG$ . Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga  $D_1EF$ ,  $DE_1F$ , dan  $DEF_1$  berpotongan di satu titik.

**Soal 4.** Diberikan barisan bilangan real  $a_1, a_2, a_3, \dots$  dan  $b_1, b_2, b_3, \dots$  sehingga untuk setiap bilangan asli  $n$  berlaku

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}, \\ b_{n+2} &= a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n. \end{aligned}$$

(a) Jika terdapat bilangan asli  $K$  yang memenuhi  $a_K = b_K = 0$ , buktikan bahwa  $a_n = b_n = 0$  untuk setiap bilangan asli  $n \geq 3$ .

(b) Asumsikan  $b_k \neq 0$  untuk setiap bilangan asli  $k$ . Barisan  $c_1, c_2, c_3, \dots$  diperoleh dari persamaan polinomial

$$\left(X - \frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}\right) \left(X - \frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right) \cdots \left(X - \frac{a_{2n+4}}{b_{2n+4}}\right) = X^6 + c_{2n-1}X^5 + c_{2n}X^4 + \cdots + c_{2n+4}$$

untuk setiap bilangan asli  $n$ . Buktikan bahwa  $c_{2n-1} + c_{2n+3} = c_{2n+1}$  untuk setiap bilangan asli  $n$ .