

Soal dan Solusi UAS Fungsi Khusus 2024

Wildan Bagus Wicaksono

MATEMATIKA 2022

Question 1

Relasi rekurensi dari polinom Bessel adalah

$$B_n(x) = 2(n-1)B_{n-1}(x) - x^2B_{n-2}(x)$$

dengan $B_1(x) = x + 1$ dan $B_2(x) = x^2 + 3x + 3$.

- (a) Tentukan polinom Bessel $B_3(x)$.
- (b) Hitung $\int x^{p+3} dx$ jika berlaku identitas integral polinom Bessel

$$\int x^{p+1} B_p(x) dx = x^{p+1} B_{p+1}(x) + C.$$

Penyelesaian.

- (a) Perhatikan bahwa

$$B_3(x) = 2(2)B_2(x) - x^2B_1(x) = 4x^2 + 12x + 12 - x^3 - x^2 = -x^3 + 3x^2 + 12x + 12.$$

- (b) Soal tidak jelas, sepertinya ada kesalahan dalam soal.



Question 2

Polinom Chebyshev didefinisikan dengan

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x)) \quad \text{ekivalen} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

(a) Buktikan $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

(b) Tunjukkan

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}.$$

Penyelesaian.

(a) Substitusi $x = \cos \theta$, maka

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n+1)\theta \\ &= \cos(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - (\cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta)) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos(n\theta - \theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos(n-1)\theta \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

(b) Untuk $m = n = 0$, perhatikan bahwa $T_0(x) = \cos(0) = 1$. Ini berarti

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_0(x) T_0(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Substitusi $x = \cos(\theta) \implies dx = -\sin(\theta) d\theta$, maka

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^0 \frac{-\sin(\theta) d\theta}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta) d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta)}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\theta) d\theta}{\sin(\theta)} = \int_0^{\pi} d\theta = \pi$$

karena $\sin(\theta) \geq 0$ untuk $0 \leq \theta \leq \pi$, terbukti.

Akan ditinjau untuk $m \neq n$, substitusikan $x = \cos(\theta) \implies dx = -\sin(\theta) d\theta$. Secara analog diperoleh

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(m\theta) \cos(n\theta)}{\sin(\theta)} \cdot (-\sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta.$$

Karena $\cos(m\theta) \cos(n\theta) = \frac{\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta}{2} = \frac{\cos(m+n)\theta}{2} + \frac{\cos(m-n)\theta}{2}$, diperoleh

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\frac{\sin(m+n)\theta}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)\theta}{2(m-n)} \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0$$

karena $\sin(k\pi) = 0$ untuk setiap bilangan bulat k . Terbukti.



Question 3

Relasi rekursif untuk polinom Laguerre adalah

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

dengan $L_0(x) = 1$ dan $L_1(x) = 1 - x$.

- (a) Tentukan polinom Laguerre $L_4(x)$.
- (b) Verifikasi untuk nilai $n = 2$ dan $n = 3$ polinom Laguerre ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x} .

Penyelesaian.

- (a) Perhatikan bahwa $L_n(x) = \frac{(2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(3-x)L_1(x) - L_0(x)}{2} = \frac{(3-x)(1-x) - 1}{2} = \frac{x^2 - 4x + 2}{2}, \\ L_3(x) &= \frac{(5-x)L_2(x) - 2L_1(x)}{3} = \frac{(5-x) \cdot \frac{x^2-4x+2}{2} - 2 + 2x}{3} = \frac{-x^3 + 9x^2 - 18x + 6}{6}, \\ L_4(x) &= \frac{(7-x)L_3(x) - 3L_2(x)}{4} = \frac{(7-x) \cdot \frac{-x^3+9x^2-18x+6}{6} - 3 \cdot \frac{x^2-4x+2}{2}}{4} = \frac{x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24}{24}. \end{aligned}$$

- (b) Akan dibuktikan $\int_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x} dx = 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x} dx &= \int_0^\infty \frac{(x^2 - 4x + 2)(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)}{12} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^\infty (-x^5 + 13x^4 - 56x^3 + 96x^2 - 60x + 12) e^{-x} dx \\ &= \frac{-\Gamma(6) + 13\Gamma(5) - 56\Gamma(4) + 96\Gamma(3) - 60\Gamma(2) + 12\Gamma(1)}{12} \end{aligned}$$

karena $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. Karena $\Gamma(n) = (n-1)!$ untuk setiap bilangan asli n , maka

$$\int_0^\infty L_2(x)L_3(x)e^{-x} dx = \frac{-5! + 13 \cdot 4! - 56 \cdot 3! + 96 \cdot 2! - 60 \cdot 1! + 12 \cdot 0!}{12} = 0,$$

terbukti. ▼

Question 4

Representasi Rodrigues untuk polinom Hermite adalah

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

- (a) Tentukan polinom Hermite $H_2(x)$ dan $H_3(x)$.
- (b) Tunjukkan $H_2(x)$ dan $H_3(x)$ adalah ortogonal terhadap fungsi bobot e^{-x^2} .

Penyelesaian.

- (a) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} H_2(x) &= (-1)^2 e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \cdot (-2x) \right) = e^{x^2} \left(-2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot (-2x) \right) \\ &= -2 + 4x^2, \\ H_3(x) &= (-1)^3 e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{x^2} \frac{d}{dx} \left(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} \right) \\ &= -e^{x^2} \left(-2e^{-x^2}(-2x) + 4(2x)e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}(-2x) \right) \\ &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

- (b) Akan dibuktikan bahwa $\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)H_3(x)e^{-x^2} dx = 0$. Misalkan

$$f(x) = H_2(x)H_3(x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)(8x^3 - 12x)e^{-x^2}.$$

Karena

$$f(-x) = (4x^2 - 2)(-8x^3 + 12x)e^{-x^2} = -(4x^2 - 2)(8x^3 - 12x)e^{-x^2} = -f(x),$$

maka f fungsi ganjil dan berakibat $\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)H_3(x)e^{-x^2} dx = 0$.

