Soal dan Solusi UAS Pengantar Peluang 2023

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ merupakan variabel acak yang saling independen dan $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Manakah dari kalimat berikut merupakan pernyataan yang salah?

(A) Jika X_i berdistribusi Binomial $Bin(m_i, p)$ maka Y bertdistribusi Binomial $Bin\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i, p\right)$.

(B) Jika X_i berdistribusi Poisson $Poi(\lambda_i)$ maka Y berdistribusi Poisson $Poi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i, p\right)$.

(C) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i, p\right)$.

(D) Jika X_i berdistribusi Negatif Binomial $NB(r_i, p)$ maka Y berdistribusi Negatif Binomial $NB\left(\sum\limits_{i=1}^{n} r_i, p\right)$.

(E) Jika X_i berdistribusi Geometrik $Geo(p)$ maka Y berdistribusi Geometrik $Geo(np)$.

Penyelesaian.

Akan diperiksa masing-masing pernyataan menggunakan FPM. Karena $X_1, X_2, \cdots, X_n$ saling bebas, maka berlaku

$$M_Y(t) = M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t).$$

(A) Karena $X_i \sim Bin(m_i, p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = \left(pe^t + q\right)^{m_i}$ di mana $q = 1 - p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = \left(pe^t + q\right)^{m_1}\left(pe^t + q\right)^{m_2}\cdots\left(pe^t + q\right)^{m_n} = \left(pe^t + q\right)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

Ini menunjukkan $Y \sim Bin\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n, p\right)$ sehingga pernyataan ini benar.

(B) Karena $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = e^{\lambda_i\left(e^t-1\right)}$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)}e^{\lambda_2\left(e^t-1\right)}\cdots e^{\lambda_n\left(e^t-1\right)} = e^{\lambda_1\left(e^t-1\right)+\lambda_2\left(e^t-1\right)+\cdots+\lambda_n\left(e^t-1\right)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\left(e^t-1\right)}.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ sehingga pernyataan ini benar.

(C) Karena $X_i \sim NB(r_i, p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_i}$ di mana $q = 1-p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_1}\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_2}\cdots\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_n} = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{r_1+r_2+\cdots+r_n}.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim NB(r_1 + r_2 + \cdots + r_n, p)$ sehingga pernyataan ini benar.

(D) Sebagaimana pada C.

(E) Karena $X_i \sim Geo(p)$, maka FPM dari X_i adalah $M_{X_i}(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$ di mana $q = 1-p$. Dari sini diperoleh

$$M_Y(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\cdots\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^n.$$

Ini menunjukkan bahwa $Y \sim NB(n, p)$ sehingga pernyataan ini salah.

Jadi, jawaban yang tepat adalah $\boxed{\textbf{E}}$. ▼

Question 2

Jika Y_1 dan Y_2 variabel acak bebas stokastik yang berdistribusi eksponensial dengan FKP gabungan

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(y_1+y_2)}, & y_1 > 0, y_2 > 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Jacobian dari transformasi $X_1 = Y_1 + Y_2$ dan $X_2 = e^{Y_1}$ adalah . . . .

(A) $|J| = X_1$

(B) $|J| = \frac{X_2}{X_1}$

(C) $|J| = \frac{1}{X_2}$

(D) $|J| = \frac{1}{X_2^2}$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $Y_1 = \ln(X_2)$ dan $Y_2 = X_1 - Y_1 = X_1 - \ln(X_2)$ serta $X_2 = e^{Y_1} > 1 \implies X_2 > 1$. Jacobian dari transformasi tersebut adalah

$$|J| = \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{X_2} \\ 1 & -\frac{1}{X_2} \end{bmatrix} \right| = \left| 0 - \frac{1}{X_2} \right| = \frac{1}{X_2}$$

karena $X_2 > 0$. Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{C}}$. ▼

Question 3

Tes diagnostik untuk mengetahui adanya suatu penyakit mempunyai dua kemungkinan hasil: 1 untuk ada penyakit dan 0 untuk tidak ada penyakit. Misalkan X menunjukkan keadaan penyakit pasien, dan Y menunjukkan keadaan penyakit pasien, dan Y menunjukkan hasil tes diagnostik. Fungsi probabilitas dari X dan Y diberikan sebagai berikut:

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0{,}800, \qquad \mathbb{P}(X=1,Y=0)=0{,}050$$
$$\mathbb{P}(X=0,Y=1)=0{,}025, \qquad \mathbb{P}(X=1,Y=1)=0{,}125$$

Hitung $Var(Y \mid X=1)$.

(A) 0,13 **(B)** 0,15 **(C)** 0,20 **(D)** 0,51 **(E)** 0,71

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$$Var(Y \mid X=1)=\mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=1\right]-\mathbb{E}\left[Y \mid X=1\right]^2.$$

Akan ditentukan

$$\mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=1\right]=0^2\cdot\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)+1^2\cdot\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)=\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1).$$

Akan ditentukan

$$\mathbb{E}\left[Y \mid X=1\right]=0\cdot\mathbb{P}(Y=0 \mid X=1)+1\cdot\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)=\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1).$$

Tinjau fungsi peluang marginal X saat $X=1$ adalah

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)=0{,}050+0{,}125=0{,}175.$$

Dari sini diperoleh

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)=\frac{\mathbb{P}(X=1,Y=1)}{\mathbb{P}(X=1)}=\frac{0{,}125}{0{,}175}=\frac{5}{7}.$$

Oleh karena itu, $\mathbb{E}\left[Y^2 \mid X=1\right]=\frac{5}{7}$ dan $\mathbb{E}\left[Y \mid X=1\right]=\frac{5}{7}$ sehingga diperoleh $Var(Y \mid X=1)=\frac{5}{7}-\frac{25}{49}=\frac{10}{49}\approx 0{,}20$. Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{C}}$. ▼

Question 4

Diketahui variabel acak $X \sim N(0,1)$. Dengan menggunakan teknik fungsi pembangkit momen, dapatkan distribusi dari transformasi $Y = aX - b$.

(A) $Y \sim N\left(a, b^2\right)$

(B) $Y \sim N\left(-b, a^2\right)$

(C) $Y \sim N\left(-a, b^2\right)$

(D) $Y \sim N\left(-b, a\right)$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa FPM dari suatu variabel random $A \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ mempunyai FPM $M_A(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$. Oleh karena itu, FPM dari X adalah $M_X(t) = e^{0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$. Maka FPM dari Y adalah

$$M_Y(t) = M_{aX-b}(t) = e^{-bt} M_{aX}(t) = e^{-bt} e^{\frac{1}{2}(at)^2} = e^{-bt + \frac{1}{2}a^2 t^2}$$

yang menunjukkan bahwa $\mu_Y = -b$ dan $\sigma_Y^2 = a^2$. Jadi, $Y \sim N\left(-b, a^2\right)$ sehingga jawaban yang benar adalah $\boxed{\mathbf{B}}$. ▼

Question 5

Diberikan fungsi probabilitas gabungan dari X dan Y sebagai berikut:

		Y		
		0	**1**	**4**
X	**1**	0,10	0,05	0,15
	3	0,05	0,20	0,25
	5	0,15	0,00	0,05

Manakah dari pernyataan berikut adalah benar?

(A) Nilai fungsi marjinal X untuk $X = 3$ adalah 0,45

(B) X dan Y independen

(C) $\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = 0{,}67$

(D) $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

(E) $\mathbb{E}[X \mid Y = 4] \approx 2{,}44$

Penyelesaian.

Akan diperiksa masing-masing pernyataan.

(A) Nilai fungsi marjinal X untuk $X = 3$ adalah

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) = 0{,}05 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}5$$

sehingga pernyataan ini salah.

(B) Perhatikan bahwa fungsi peluang marjinal Y untuk $Y = 0$ adalah

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 0) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}3.$$

Karena $\mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}15 \neq 0{,}05 = \mathbb{P}(X = 3, Y = 0) \implies \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 3, Y = 0)$, ini menunjukkan bahwa X dan Y dependen. Jadi, pernyataan ini salah.

(C) Perhatikan bahwa

$$\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X < 5, Y = 4)}{\mathbb{P}(Y = 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4)}{\mathbb{P}(Y = 4)}.$$

Tinjau fungsi peluang marjinal Y saat $Y = 4$ adalah

$$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 4) + \mathbb{P}(X = 5, Y = 4) = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}45.$$

Jadi, $\mathbb{P}(X < 5 \mid Y = 4) = \frac{0{,}15+0{,}25}{0{,}45} = \frac{0{,}40}{0{,}45} = \frac{8}{9} \approx 0{,}88$. Jadi, pernyataan ini salah.

(D) Karena X dan Y dependen, maka berlaku $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ sehingga pernyataan ini benar.

(E) Tinjau

$$\mathbb{E}[X \mid Y = 4] = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 4) + 3 \cdot \mathbb{P}(X = 3 \mid Y = 4) + 5 \cdot \mathbb{P}(X = 5 \mid Y = 4).$$

Perhatikan bahwa $\mathbb{P}(X = x \mid Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=4)}{0{,}45}$. Dari sini diperoleh

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 4) = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{15}{45}, \quad \mathbb{P}(X = 3 \mid Y = 4) = \frac{0{,}25}{0{,}45} = \frac{25}{45}, \quad \mathbb{P}(X = 5 \mid Y = 4) = \frac{0{,}05}{0{,}45} = \frac{5}{45}.$$

Jadi,

$$\mathbb{E}[X \mid Y = 4] = \frac{15}{45} + 3 \cdot \frac{25}{45} + 5 \cdot \frac{5}{45} = \frac{15 + 75 + 25}{45} = \frac{115}{45} = \frac{23}{9} \approx 2{,}55.$$

Jadi, pernyataan ini salah.

Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{D}}$. ▼

Question 6

X_1, X_2, dan X_3 merupakan variabel acak yang memiliki varians sama, namun memiliki koefisien korelasi $\rho_{12} = 0{,}3$, $\rho_{13} = 0{,}5$, dan $\rho_{23} = 0{,}2$. Dapatkan koefisien korelasi dari fungsi linier $Y = X_1 + X_2$ dan $Z = X_2 + X_3$.

(A) 0,50 **(B)** 0,60 **(C)** 0,70 **(D)** 0,80 **(E)** 0,90

Penyelesaian.

Misalkan $Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = \sigma^2$. Tinjau

$$0{,}3 = \rho_{12} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sigma^2} \implies Cov(X_1, X_2) = 0{,}3\sigma^2.$$

Dengan cara yang sama, $Cov(X_1, X_3) = 0{,}5\sigma^2$ dan $Cov(X_2, X_3) = 0{,}2\sigma^2$. Perhatikan bahwa kovarians dari Y dan Z adalah

$$\begin{aligned}
&Cov(Y, Z)\\
&= Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3)\\
&= \mathbb{E}\left[(X_1 + X_2)(X_2 + X_3)\right] - \mathbb{E}[X_1 + X_2]\mathbb{E}[X_2 + X_3]\\
&= \mathbb{E}\left[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2^2 + X_2X_3\right] - (\mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2])(\mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3])\\
&= \mathbb{E}[X_1X_2] + \mathbb{E}[X_1X_3] + \mathbb{E}\left[X_2^2\right] + \mathbb{E}[X_2X_3] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_3] - \mathbb{E}[X_2]^2 - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3]\\
&= (\mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]) + (\mathbb{E}[X_1X_3] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_3]) + \left(\mathbb{E}[X_2^2] - \mathbb{E}[X_2]^2\right) + (\mathbb{E}[X_2X_3] - \mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[X_3])\\
&= Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) + Var(X_2) + Cov(X_2, X_3)\\
&= 0{,}3\sigma^2 + 0{,}5\sigma^2 + \sigma^2 + 0{,}2\sigma^2\\
&= 2\sigma^2.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa varians dari Y adalah

$$\sigma_Y^2 = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \cdot 0{,}3\sigma^2 = 2{,}6\sigma^2.$$

Perhatikan bahwa varians dari Z adalah

$$\sigma_Z^2 = Var(X_2 + X_3) = Var(X_2) + Var(X_3) + 2Cov(X_2, X_3) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \cdot 0{,}2\sigma^2 = 2{,}4\sigma^2.$$

Maka koefisien korelasi dari Y dan Z adalah

$$\rho_{YZ} = \frac{Cov(Y, Z)}{\sigma_Y\sigma_Z} = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2{,}6}\sigma \cdot \sqrt{2{,}4}\sigma} \approx 0{,}80.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{A}}$. ▼

Question 7

Diketahui X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & 0 \le x < y < \infty \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Tentukan FKP marjinal dari Y.

(A) $f(y) = 2e^{-2y}\left(1 - e^{-y}\right)$, $y > 0$

(B) $f(y) = 2e^{-2y}\left(1 - e^{-2y}\right)$, $y > 0$

(C) $f(y) = 2e^{-2y}$, $y > 0$

(D) $f(y) = e^{-y}\left(1 - e^{-y}\right)$, $y > 0$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

FKP marginal dari Y adalah

$$f(y) = \int_0^y 2e^{-(x+y)}\,dy = \left[-2e^{-(x+y)}\right]_{x=0}^{x=y} = -\left(-2e^{-2y} - 2e^{-y}\right) = 2e^{-y} - 2e^{-2y}$$

di mana $y > 0$. Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{E}}$. ▼

Question 8

Asumsikan bahwa X dan Y adalah variabel acak yang **bebas stokastik** dan diketahui $X \sim UNIFORM(-1, 1)$ dan $Y \sim UNIFORM(0, 1)$. Peluang bahwa persamaan kuadrat $t^2 + 2Xt + Y = 0$ mempunyai solusi bilangan real adalah . . . .

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

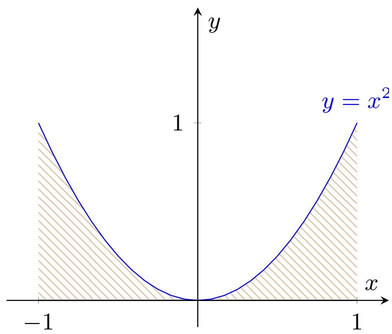
Diperoleh bahwa FKP dari X dan Y berturut-turut adalah

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases} \quad \text{dan} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Karena X dan Y bebas stokastik maka berlaku $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ yang berarti

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Tinjau $t^2 + 2Xt + Y = 0$ memiliki solusi real apabila $(2X)^2 - 4(1)(Y) \geq 0 \iff X^2 \geq Y$. Himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi $x^2 \geq y$ di mana $(x, y) \in (-1, 1) \times (0, 1)$ dinyatakan sebagai daerah yang diarsir berikut.



Maka peluang yang diminta menggunakan pengintegralan $dy\ dx$ adalah

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} \frac{1}{2}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{x=-1}^{x=1} \frac{1^3 - (-1)^3}{6}$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{A}}$.

Question 9

X dan Y merupakan variabel acak dengan fungsi peluang gabungan $f(x,y) = \frac{ay}{x^2}$, $x \geq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Tentukan nilai harapan Y bersyarat X, $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Karena $f(x,y)$ merupakan fungsi peluang, maka

$$1 = \int_1^\infty \int_0^1 \frac{ay}{x^2}\, dy\, dx = \int_1^\infty \left[\frac{ay^2}{2x^2}\right]_0^1 dx = \int_1^\infty \frac{a}{2x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{a}{2x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{a}{2x}\right]_1^n = -\left(0 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

sehingga $a = 2$. Ini berarti $f(x,y) = \frac{2y}{x^2}$ dan fungsi peluang marjinal X adalah

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\, dy = \int_0^1 \frac{2y}{x^2}\, dy = \left[\frac{y^2}{x^2}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2}.$$

Ini berarti

$$f(y \mid x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2y}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 2y.$$

Maka

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = \int_0^1 y f(y \mid x) = \int_0^1 2y^2\, dy = \left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Jadi, jawaban yang benar adalah $\boxed{\mathbf{C}}$. ▼

Question 10

Pandang X_1 dan X_2 sebagai variabel acak independen. Selanjutnya, X_1 dan $Y = X_1 + X_2$ masing-masing berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas r_1 dan r, di mana $r_1 < r$. Tentukan distribusi dari X_2.

(A) $\chi^2_{(r-r_1)}$

(B) $\chi^2_{(r_1/r)}$

(C) $\chi^2_{(r/r_1)}$

(D) $\chi^2_{(r_1+r)}$

(E) Semua jawaban salah

Penyelesaian.

Akan diselesaikan menggunakan FPM. Perhatikan bahwa FPM dari X_1 dan Y berturut-turut adalah

$$M_{X_1}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r_1/2}} \quad \text{dan} \quad M_Y(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}}.$$

Karena X_1 dan X_2 independen, maka

$$\frac{1}{(1-2t)^{r/2}} = M_Y(t) = M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r_1/2}}M_{X_2}(t)$$

yang memberikan $M_{X_2}(t) = \frac{1}{(1-2t)^{(r-r_1)/2}}$. Ini menunjukkan $X_2 \sim \chi^2_{(r-r_1)}$ sehingga jawaban yang benar adalah $\boxed{\textbf{A}}$. ▼