wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSK SMA 2025

Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2025

Bagian I – Soal

1. Kemampuan Dasar

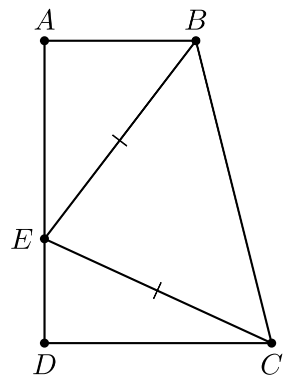
Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

. . . .

1 Diketahui $n^2 + 4n + 3 = 16m$. Banyak bilangan bulat n di mana $1 \leq n \leq 110$ dan m bilangan bulat adalah . . . .

2 Bilangan bulat positif terkecil n sehingga $n!$ habis dibagi 1430 adalah . . . .

3 Perhatikan gambar berikut.



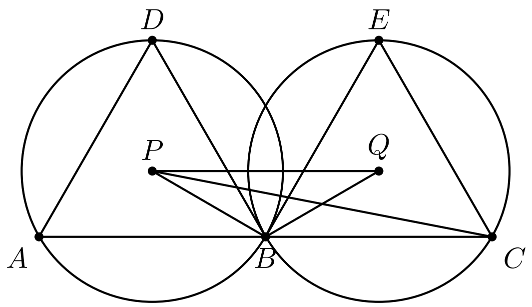
Diketahui $ABCD$ adalah sebuah trapesium dengan $AB \parallel CD$ dan $\angle ADC = 90°$. Titik E pada ruas garis AD sehingga $BE = EC$. Jika $AB = 22, CD = 27$, dan $BC = 25\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah . . . .

4 Banyaknya himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ yang memuat himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ atau $\{4, 5, 6\}$ adalah . . . .

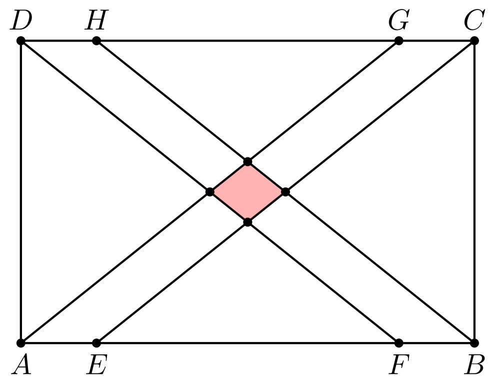
5 Afif menuliskan sembilan bilangan bulat positif berbeda yang lebih kecil dari 18. Ia memastikan bahwa penjumlahan dua bilangan mana pun di antara sembilan bilangan tersebut tidak sama dengan 18. Bilangan positif yang pasti ditulis Afif adalah . . . .

6 Koefisien suku x^2 dari penjabaran $(x + 3)^n$ adalah $81k$ untuk suatu bilangan asli k. Bilangan asli k terkecil yang memenuhi syarat tersebut adalah . . . .

7 Perhatikan gambar berikut. Diketahui dua segitiga sama sisi ABD dan BCE dengan panjang sisi yang sama dan titik A, B, dan C kolinear. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABD dan titik pusat lingkaran luar segitiga BCE. Jika luas lingkaran luar segitiga BPC adalah 126, maka luas lingkaran luar segitiga BPQ adalah . . . .



8 Perhatikan gambar berikut.



Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan titik E, F pada AB dan G, H pada BC sehingga $AF = BE = DG = CH = 54$. Jika $AD = 68$ dan $AB = 27$, maka luas daerah yang dibatasi oleh AG, CE, BF, dan DH adalah . . . .

9 Diketahui polinomial $P\left(5^b + 1\right) = 5^{5b} + 4$ untuk semua bilangan asli b. Nilai dari $P(3)$ adalah . . . .

10 Banyaknya bilangan bulat m sehingga memenuhi persaman kuadrat

$$x^2 + mx + 37 = m$$

tidak mempunyai akar real adalah . . . .

2. Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, soal yang dijawab salah bernilai -1 poin, dan soal yang tidak dijawab bernilai 0 poin.

. . . .

11 Jika

$$\text{FPB}\left(1+2+\cdots+n, 1^2+2^2+\cdots+n^2\right) < 100,$$

maka nilai maksimum dari n adalah . . . .

12 Diketahui sebuah lingkaran pusat titik O dan jari-jari 65. Titik A, B, C merupakan tiga titik berbeda pada lingkaran tersebut dan titik D, E, F berturut-turut merupakan titik tengah BC, CA, AB. Jika dua ruas garis OD, OE, OF memiliki panjang 25 dan 39, maka panjang ruas garis yang ketiga adalah . . . .

13 Digit-digit dari bilangan $6, 7, 8, \cdots, n$ dituliskan dari kiri ke kanan membentuk suatu bilangan baru k. Nilai n terkecil sehingga k habis dibagi 7 adalah . . . .

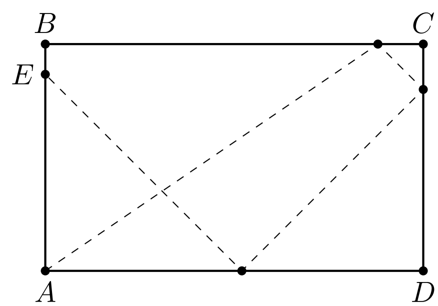
14 Misalkan x, y, dan z bilangan real positif dengan

$$\frac{1}{1+x+y}+\frac{1}{1+y+z}+\frac{1}{1+z+x}=\frac{1}{4}.$$

Jika nilai minimum dari $3x+5y+6z$ adalah $A\sqrt{2}+B$ dengan A dan B bilangan asli, maka nilai dari $A+B$ adalah . . . .

15 Banyak bilangan bulat berbeda $\left\lfloor\frac{579}{1}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{579}{3}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{579}{5}\right\rfloor, \cdots, \left\lfloor\frac{579}{579}\right\rfloor$ adalah . . .

16 Diketahui persegi panjang $ABCD$ dan E suatu titik pada sisi AB. Suatu benda bergerak dari titik A dan berturut-turut menyentuh sisi BC, CD, AD dan sampai titik E. Berikut diberikan sebuah contoh lintasan dari benda tersebut.



Jika diketahui $AB = 60$, $AD = 85$, dan jarak terpendek yang ditempuh oleh benda tersebut adalah $170\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah . . . .

17 Banyaknya peemtaan $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ yang memenuhi persamaan $f(f(x)) = f(x)$ untuk setap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah . . . .

18 Suatu percobaan mengundi suatu dadu beberapa kali dan percobaan berhenti setelah muncul mata dadu 5 sebanyak dua kali. Banyak kemungkinan percobaan berhenti pada pengundian ke-5 atau sebelumnya adalah . . . .

19 Hasil penjumlahan semua bilangan asli n sehingga sistem persamaan

$$\begin{aligned} nx + y &= 85, \\ 2x + (n+1)y &= 30 \end{aligned}$$

memiliki solusi bilangan bulat (x, y) adalah . . . .

20 Sebuah tabel terdiri atas dua baris dan 29 kolom. Tiap petak dicat hitam atau putih dengan aturan:

(a) Dua kolom bersebelahan tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.

(b) Dua bujur sangkar 2×2 yang tumpang-tindih pada satu kolom tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.

Banyaknya cara pewarnaan papan yang memenuhi aturan tersebut adalah . . . .

Bagian II – Solusi

3. Solusi Kemampuan Dasar

1 Diketahui $n^2 + 4n + 3 = 16m$. Banyak bilangan bulat n di mana $1 \leq n \leq 110$ dan m bilangan bulat adalah . . . .

Jawab: 27

Perhatikan bahwa $m = \frac{n^2+4n+3}{16} = \frac{(n+1)(n+3)}{16}$ sehingga haruslah n ganjil. Tulis $n = 2t - 1$ dengan t bilangan asli, maka $m = \frac{2t \cdot (2t+2)}{16} = \frac{t(t+1)}{4}$. Karena t dan $t + 1$ berbeda paritas, maka haruslah $4 \mid t$ atau $4 \mid t + 1$ sehingga $t \equiv 0, 3 \pmod 4$. Ini berarti n berbentuk $2(4k) - 1 = 8k - 1$ atau $2(4k-1)-1 = 8k-3$ di mana k bilangan asli. Karena $1 \leq n \leq 110$, untuk $n = 8k-1$ memberikan $1 \leq k \leq 13$ dan untuk $n = 8k - 3$ memberikan $1 \leq k \leq 14$. Jadi, ada $13 + 14 = \boxed{27}$ solusi.

. . . .

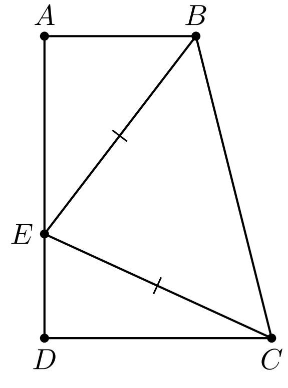
2 Bilangan bulat positif terkecil n sehingga $n!$ habis dibagi 1430 adalah . . . .

Jawab: 13

Perhatikan bahwa $1430 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ sehingga haruslah $n \geq 13$. Di sini mudah diverivikasi $n = \boxed{13}$ memenuhi karena $13!$ mengandung bentuk perkalian $2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.

. . . .

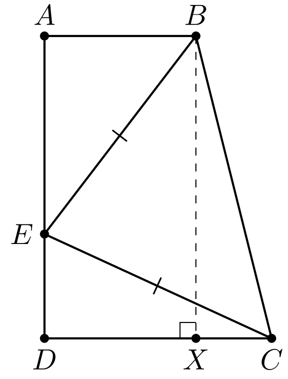
3 Perhatikan gambar berikut.



Diketahui $ABCD$ adalah sebuah trapesium dengan $AB \parallel CD$ dan $\angle ADC = 90°$. Titik E pada ruas garis AD sehingga $BE = EC$. Jika $AB = 22, CD = 27$, dan $BC = 25\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah . . . .

Jawab: 21

Misalkan X pada DC sehingga $BX \perp CD$, ini berarti $CX = CD - DC = CD - AB = 27 - 22 = 5$. Dari Teorema Pythagoras BXC, $BX = AD = \sqrt{BC^2 - CX^2} = \sqrt{25^2 \cdot 2 - 5^2} = 5\sqrt{5^2 \cdot 2 - 1} = 35$.



Misalkan panjang $AE = x$, maka $ED = 35 - x$. Dari Teorema Pythagoras ABE, EDC,

$$\begin{aligned} EC^2 &= EB^2 \\ ED^2 + DC^2 &= AE^2 + AB^2 \\ (35 - x)^2 + 27^2 &= x^2 + 22^2 \\ 27^2 - 22^2 &= x^2 - (35 - x)^2 \\ (27 + 22)(27 - 22) &= (x + 35 - x)(x - (35 - x)) \\ 49 \cdot 5 &= 35 \cdot (2x - 35) \end{aligned}$$

sehingga $2x - 35 = \frac{49 \cdot 5}{35} = 7$ yang berarti $x = \frac{7+35}{2} = \boxed{21}$.

. . . .

4 Banyaknya himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ yang memuat himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ atau $\{4, 5, 6\}$ adalah . . . .

Jawab: 18

Misalkan $S = \{1, 2, \cdots, 7\}$. Misalkan A menyatakan banyaknya himpunan bagian dari S yang memuat $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sedangkan B menyatakan banyaknya himpunan bagian dari S yang memuat $\{4, 5, 6\}$. Dari soal ingin ditentukan $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

- Akan ditentukan $|A|$, ini berarti himpunan bagian tersebut harus berbentuk $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup X$ di mana $X \subseteq \{6, 7\}$. Di sini diperoleh $|A| = 2^2 = 4$ kemungkinan.
- Akan ditentukan $|B|$, ini berarti himpunan bagian tersebut berbentuk $\{4, 5, 6\} \cup Y$ di mana $Y \subseteq \{1, 2, 3, 7\}$. Di sini diperoleh $|B| = 2^4 = 16$.

- Akan ditentukan $|A \cap B|$, ini berarti himpunan bagian tersebut haruslah berbentuk $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup Z$ di mana $Z \subseteq \{7\}$. Di sini diperoleh $|A \cap B| = 2^1 = 2$.

Jadi, jawabannya adalah $4 + 16 - 2 = \boxed{18}$.

....

5 Afif menuliskan sembilan bilangan bulat positif berbeda yang lebih kecil dari 18. Ia memastikan bahwa penjumlahan dua bilangan mana pun di antara sembilan bilangan tersebut tidak sama dengan 18. Bilangan positif yang pasti ditulis Afif adalah . . . .

Jawab: 9

Tinjau pasangan dua bilangan yang jumlahnya 18 adalah $(1, 17), (2, 16), (3, 15), (4, 14), (5, 13), (6, 12), (7, 11), (8, 10), (9, 9)$. Andaikan 9 tidak tertulis, dari Pigeon Hole Principle terdapat dua bilangan yang keduanya berada di salah satu pasangan $(1, 17), (2, 16), (3, 15), (4, 14), (5, 13), (6, 12), (7, 11), (8, 10)$ sehingga tidak mungkin. Jadi, bilangan yang pasti ditulis Afif adalah $\boxed{9}$.

....

6 Koefisien suku x^2 dari penjabaran $(x + 3)^n$ adalah $81k$ untuk suatu bilangan asli k. Bilangan asli k terkecil yang memenuhi syarat tersebut adalah . . . .

Jawab: 15

Perhatikan koefisien dari x^2 adalah

$$\binom{n}{2}3^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = \frac{n(n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2}.$$

Akan ditentukan bilangan asli terkecil n agar $81 \mid \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2}$ agar k sekecil mungkin. Ini berarti $81 \cdot 2 \mid n(n-1) \cdot 3^{n-2}$atau $3^4 \cdot 2 \mid n(n-1) \cdot 3^{n-2}$. Agar $k > 0$, tentu $n > 2$.

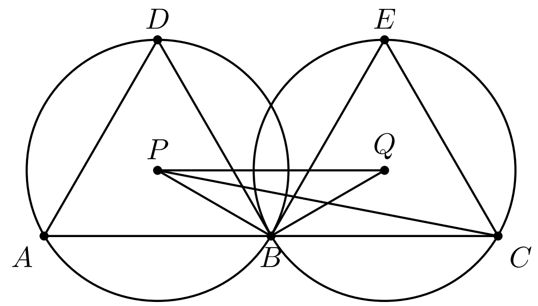
- Untuk $n = 3$, $n(n-1) \cdot 3^{n-2} = 6 \cdot 3 = 18$ yang mana tidak memenuhi.
- Untuk $n = 4$, $n(n-1) \cdot 3^{n-2} = 4 \cdot 3 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^3$ yang mana juga tidak memenuhi.
- Untuk $n = 5$, $n(n-1) \cdot 3^{n-2} = 5 \cdot 4 \cdot 3^3 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3^3$ yang mana tidak memenuhi.
- Untuk $n = 6$, $n(n-1) \cdot 3^{n-2} = 6 \cdot 5 \cdot 3^4 = 2 \cdot 3^5 \cdot 5$ yang mana terpenuhi.

Dari sini diperoleh k minimal adalah

$$k = \frac{1}{81} \cdot \binom{6}{2}3^{6-2} = \frac{1}{81} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3^4 = \frac{1}{81} \cdot 15 \cdot 3^4 = \boxed{15}.$$

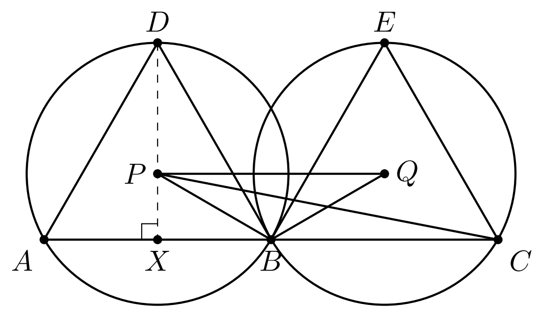
....

7 Perhatikan gambar berikut. Diketahui dua segitiga sama sisi ABD dan BCE dengan panjang sisi yang sama dan titik A, B, dan C kolinear. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABD dan titik pusat lingkaran luar segitiga BCE. Jika luas lingkaran luar segitiga BPC adalah 126, maka luas lingkaran luar segitiga BPQ adalah . . . .



Jawab: 18

Perhatikan bahwa pada segitiga sama sisi akan berlaku BP garis bagi $\angle ABD$, ini berarti $\angle PBC = 180^\circ - \angle ABP = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Karena luas lingkaran luar BPC adalah 126, maka $\pi R^2 = 126$ sehingga $R = \sqrt{\frac{126}{\pi}}$ di mana R panjang jari-jari lingkaran luar BPC.



Dari aturan sinus segitiga PBC,

$$PC = 2R \sin \angle PBC = 2 \cdot \sqrt{\frac{126}{\pi}} \cdot \sin 150^\circ = 2 \cdot \sqrt{\frac{126}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{126}{\pi}}.$$

Misalkan panjang sisi segitiga sama sisi adalah $2s$, maka $AX = XB = s$. Karena $\angle XBP = 30^\circ$, dari sifat segitiga $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ maka $PX = \frac{s}{\sqrt{3}}$ dan $PB = \frac{2s}{\sqrt{3}}$. Demikian juga $BQ = PB = \frac{2s}{\sqrt{3}}$. Di sisi lain, dari segitiga PCX berlaku

$$\frac{126}{\pi} = PC^2 = PX^2 + XC^2 = \frac{s^2}{3} + 9s^2 = \frac{28}{3}s^2$$

sehingga $s^2 = \frac{3}{28} \cdot \frac{126}{\pi} = \frac{27}{2\pi}$. Tinjau $\angle PBQ = 180^\circ - \angle ABP - \angle CBQ = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$. Karena $BP = BQ$ maka $\angle BQP = \angle BPQ = 30^\circ$. Dari aturan sinus BPQ dan r sebagai jari-jari lingakaran luarnya,

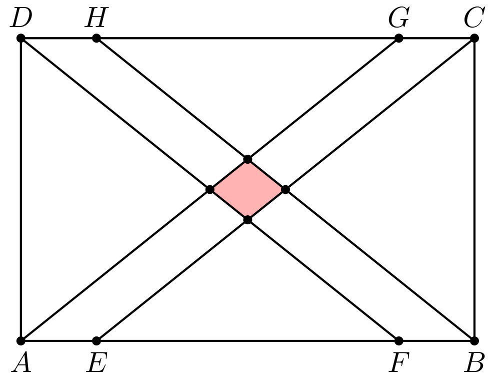
$$r = \frac{PB}{2\sin\angle BQP} = \frac{2s/\sqrt{3}}{2\cdot\sin 30^\circ} = \frac{2s/\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2s}{\sqrt{3}}.$$

Jadi, luas lingkaran luar PBQ adalah

$$\pi r^2 = \pi\cdot\frac{4s^2}{3} = \pi\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{27}{2\pi} = \boxed{18}.$$

. . . .

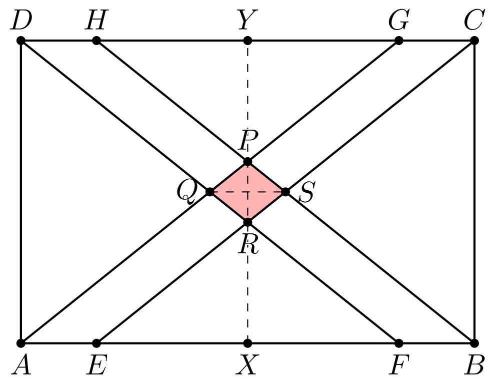
8 Perhatikan gambar berikut.



Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan titik E, F pada AB dan G, H pada BC sehingga $AF = BE = DG = CH = 54$. Jika $AB = 68$ dan $AD = 27$, maka luas daerah yang dibatasi oleh AG, CE, BF, dan DH adalah . . . .

Jawab: 49

Perhatikan bahwa $AE = FB = CG = DH = 68 - 54 = 14$ sehingga diperoleh pula $EF = GH = 68 - 14 - 14 = 40$. Karena panjang $AE = GC$ dan $AE \parallel GC$, maka $AECG$ jajargenjang. Secara analog, $DHBF$ jajargenjang. Buat garis yang melalui PR yang memotong AB, CD berturut-turut di X, Y. Dari kesimetrian akan diperoleh XY tegak lurus AB, CD.



Karena $RE \parallel PA$ dan $RF \parallel PB$, maka $\triangle REF \sim \triangle PAB$ sehingga $\frac{RX}{PX} = \frac{EF}{AB} = \frac{40}{68} = \frac{10}{17}$. Misalkan $PX = 17t$ dan $RX = 10t$, maka $PR = 7t$. Dari kesimetrian, $PY = RX = 13t$ sehingga $27 = AD = XY = 17t + 10t = 27t$ dan diperoleh $t = 1$. Dari kesimetrian, diperoleh pula jarak P, R ke QS masing-masing $\frac{PR}{2} = \frac{7t}{2}$. Karena $\triangle PSQ \sim \triangle PBA$ (karena $QS \parallel AB$), maka $\frac{QS}{AB} = \frac{7t/2}{17t} = \frac{7}{34}$ yang berarti $QS = \frac{7}{34}AB = 14$. Jadi, luas segiempat $PQRS$ adalah

$$[PQRS] = 2[PQS] = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7t}{2} \cdot 14 = \frac{7}{2} \cdot 1 \cdot 14 = \boxed{49}.$$

. . . .

9 Diketahui polinomial $P\left(5^b + 1\right) = 5^{5b} + 4$ untuk semua bilangan asli b. Nilai dari $P(3)$ adalah . . . .

Jawab: 36

Misalkan $Q(x) = (x-1)^5 + 4$ untuk setiap bilangan real x dan konstruksi $R(x) = P(x) - Q(x)$. Perhatikan bahwa untuk $x = 5^b + 1$ berlaku

$$R\left(5^b+1\right) = P\left(5^b+1\right) - Q\left(5^b+1\right) = 5^{5b} + 4 - \left(5^b + 1 - 1\right)^5 - 4 = 0$$

untuk setiap bilangan asli b. Ini berarti $5^b + 1$ merupakan akar dari $R(x)$ untuk setiap bilangan asli x yang menunjukkan R punya tak berhingga banyaknya akar.

Teorema Fundamental Aljabar
Diberikan polinom $A(x)$ berderajat $n \geq 1$. Maka $A(x) = 0$ memiliki tepat n akar bilangan kompleks.

Sebagai konsekuensi dari Teorema Fundamental Aljabar, maka R haruslah polinom konstan, tulis $R(x) = c$ untuk setiap bilanga nreal x. Dari $x = 6$ (atau $b = 1$), maka $c = R(6) = 0$ sehingga $R(x) = 0$ untuk setiap bilangan real x. Jadi, $P(x) = Q(x)$ untuk setiap bilangan real x sehingga $P(3) = Q(3) = 2^5 + 4 = \boxed{36}$.

. . . .

10 Banyaknya bilangan bulat m sehingga memenuhi persaman kuadrat

$$x^2 + mx + 37 = m$$

tidak mempunyai akar real adalah . . . .

Jawab: 25

Tulis ulang $x^2+mx+(37-m)=0$. Agar tidak memiliki akar real, diskriminannya harus memenuhi $D<0$, yaitu

$$0 > D = m^2 - 4(1)(37-m) = m^2 + 4m - 148 = (m+2)^2 - 152$$

sehingga $(m+2)^2 < 152$. Ini berarti $-\sqrt{152} < m+2 < \sqrt{152}$ atau $-\sqrt{152}-2 < m < \sqrt{152}-2$. Ini berarti $-14 \leq m \leq 10$. Jadi, banyaknya ada $14+1+10 = \boxed{25}$.

4. Solusi Kemampuan Lanjut

11 Jika

$$\text{FPB}\left(1+2+\cdots+n, 1^2+2^2+\cdots+n^2\right) < 100,$$

maka nilai maksimum dari n adalah . . . .

Jawab: 23

Sifat FPB

Jika a, b, c bilangan asli, maka $\text{FPB}(ac, bc) = c \cdot \text{FPB}(a, b)$.

Perhatikan bahwa

$$100 > \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}\right).$$

Kita bagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: $3 \nmid 2n+1$

Ini berarti $3 \mid \frac{n(n+1)}{2}$ atau $\frac{n(n+1)}{6}$ merupakan bilangan asli. Ini berarti

$$\begin{aligned} 100 &> \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}\right) \\ &= \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{6} \cdot 3, \frac{n(n+1)}{6} \cdot (2n+1)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \cdot \text{FPB}(3, 2n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

sehingga haruslah $n \leq 23$. Cek $n = 23$,

$$\text{FPB}\left(\frac{23 \cdot 24}{2}, \frac{23 \cdot 24 \cdot 47}{6}\right) = \text{FPB}(23 \cdot 12, 23 \cdot 4 \cdot 47) = 23 \cdot 4 = 92 < 100.$$

Jadi, n terbesar adalah $n = 23$ dalam kasus ini.

Kasus 2: $3 \mid 2n+1$

Ini berarti

$$\begin{aligned} 100 &> \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}\right) \\ &= \text{FPB}\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \text{FPB}\left(1, \frac{2n+1}{3}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mengingat $100 > \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n(n+1)}{6}$, tentu solusi dari kasus sebelumnya akan diperoleh lebih besar.

Jadi, nilai n maksimal adalah $n = \boxed{23}$.

. . . .

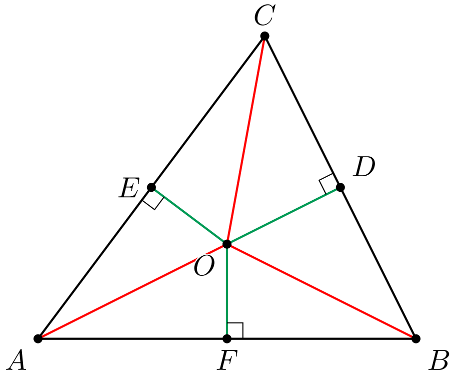
12 Diketahui sebuah lingkaran pusat titik O dan jari-jari 65. Titik A, B, C merupakan tiga titik berbeda pada lingkaran tersebut dan titik D, E, F berturut-turut merupakan titik tengah BC, CA, AB. Jika dua ruas garis OD, OE, OF memiliki panjang 25 dan 39, maka panjang ruas garis yang ketiga adalah . . . .

Jawab: 33 atau 63

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $OD = 39$ dan $OE = 25$, akan ditentukan OF. Karena D, E, F titik tengah, maka $OD \perp BC$, $OE \perp AC$, dan $OF \perp AB$. Dari Teorema Pythagoras ODC memberikan $DB = DC = \sqrt{65^2 - 39^2} = 52$. Dari Teorema Pythagoras OEC berlaku $AE = EC = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$. Misalkan $\angle OCD = x$ dan $\angle OCE = y$. Karena $OD > OE$, maka ada tiga kemungkian: ABC lancip, ABC tumpul di B, atau ABC tumpul di C.

Kasus 1: ABC lancip

Titik O terletak di dalam segitiga ABC.



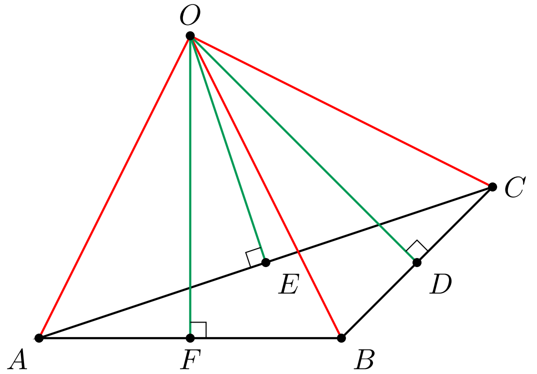
Dari sudut pusat-sudut keliling berlaku $\angle AOB = 2\angle ACB = 2(x+y) = 2x + 2y$. Karena $OA = OB$, maka $\angle AOF = \angle BOF = x + y$. Dari segitiga AOF berlaku $\cos(x+y) = \frac{OF}{OA} = \frac{OF}{65}$ sehingga $OF = 65\cos(x+y)$. Dari segitiga OCD, OEC akan diperoleh $\sin x = \frac{39}{65} = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$, dan $\cos y = \frac{12}{13}$. Ini berarti

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48-15}{65} = \frac{33}{65}$$

dan diperoleh $OF = 65\cos(x+y) = \boxed{33}$.

Kasus 2: ABC tumpul di B

Titik O terletak di luar segitiga ABC yang berlawanan dengan B terhadap garis AC.

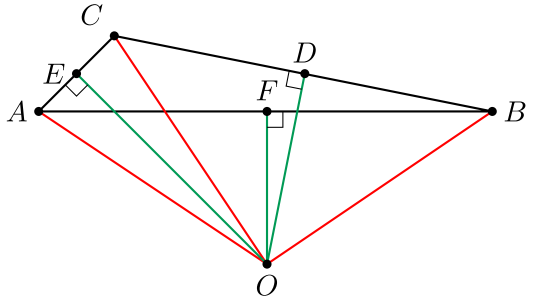


Perhatikan bahwa $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = (180° - 2y) - (180° - 2x) = 2x - 2y$ sehingga $\angle AOF = \angle FOB = x - y$. Tinjau bahwa $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, dan $\cos y = \frac{12}{13}$. Ini berarti $\cos(x-y) = \cos\angle AOF = \frac{OF}{65}$ sehingga

$$OF = 65(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 65\left(\frac{48}{65} + \frac{15}{65}\right) = \boxed{63}.$$

Kasus 3: ABC tumpul di C

Titik O terletak di luar segitiga ABC yang berlawanan dengan C terhadap garis AB.



Perhatikan bahwa $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = (180° - 2y) + (180° - 2x) = 360° - 2x - 2y$ sehingga $\angle AOF = \angle FOB = 180° - x - y$. Tinjau bahwa $\sin x = \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, dan $\cos y = \frac{12}{13}$. Namun, $\cos C = \cos(x+y) = \frac{63}{65} > 0$ sehingga tidak mungkin.

Komentar. Kemungkinan kunci yang digunakan adalah 33. Perbedaan jawaban ini disebabkan oleh kurangnya informasi pada soal.

. . . .

13 Digit-digit dari bilangan $6, 7, 8, \cdots, n$ dituliskan dari kiri ke kanan membentuk suatu bilangan baru k. Nilai n terkecil sehingga k habis dibagi 7 adalah . . . .

Jawab: 15

Kita kuli saja :) Sebenarnya bisa kuli manual atau memanfaatkan kriteria habis dibagi 7 seperti berikut. Kita bagi digit-digit dari k mulai dari kanan sebanyak 3-3, lalu jumlah-kurang dilakukan selang-seling. Sebagai conbtoh,

$$123.456 \equiv 456 - 123 \equiv 333 \equiv 4 \pmod 7$$
$$12.542.121 \equiv 121 - 542 + 12 \equiv -409 \equiv 4 \pmod 7.$$

Di tas memanfaatkan fakta $10^3 \equiv -1 \pmod 7$. Perhitungan dilakukan pada tabel berikut.

n	Perhitungan $k \pmod 7$	$k \pmod 7$
6	6	6
7	67	4
8	678	6
9	$-6 + 789$	6
10	$-678 + 910$	1
11	$67 - 891 + 011$	6
12	$6 + 789 - 101 + 112$	3
13	$678 + 910 - 111 + 213$	5
14	$67 - 891 + 011 - 121 + 314$	3
15	$6 + 789 - 101 + 112 - 131 + 415$	0

Jadi, nilai terkecil n adalah $\boxed{15}$.

. . . .

14 Misalkan x, y, dan z bilangan real positif dengan

$$\frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} = \frac{1}{4}.$$

Jika nilai minimum dari $3x + 5y + 6z$ adalah $A\sqrt{2} + B$ dengan A dan B bilangan asli, maka nilai dari $A + B$ adalah . . . .

Jawab: 61

Cauchy Schwarz-Engel

Diberikan bilangan real $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ dengan $b_1, b_2, \cdots, b_n > 0$. Maka berlaku

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Dari Cauchy Schwarz-Engel,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= \frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} \\
&= \frac{1}{1+x+y} + \frac{4}{4+4y+4z} + \frac{2}{2+2z+2x} \\
&= \frac{1^2}{1+x+y} + \frac{2^2}{4+4y+4z} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2+2z+2x} \\
&\geq \frac{\left(1+2+\sqrt{2}\right)^2}{(1+x+y)+4(1+y+z)+2(1+z+x)} \\
&= \frac{11+6\sqrt{2}}{7+3x+5y+6z}
\end{aligned}$$

yang berarti

$$3x + 5y + 6z \geq 44 + 24\sqrt{2} - 7 = 37 + 24\sqrt{2}.$$

Jadi, $A = 24$ dan $B = 37$ sehingga $A + B = \boxed{61}$.

. . . .

15 Banyak bilangan bulat berbeda $\left\lfloor \frac{579}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{5} \right\rfloor, \cdots, \left\lfloor \frac{579}{579} \right\rfloor$ adalah . . . .

Jawab: 33

Akan digunakan sifat floor $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ dan misalkan $f(n) = \left\lfloor \frac{579}{2n-1} \right\rfloor$ untuk $1 \leq n \leq 290$. Perhatikan bahwa

$$f(n+1) - f(n) > \left(\frac{579}{2n+1} - 1\right) - \frac{579}{2n-1} = \frac{579(2n+1) - 579(2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} - 1 = \frac{1158}{4n^2-1} - 1.$$

Ini berarti untuk $n \leq 17$,

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1158}{4n^2-1} - 1 \geq \frac{1158}{4 \cdot 17^2 - 1} - 1 = \frac{1}{385} > 0.$$

Ini berarti $f(1), f(2), \cdots, f(17)$ memiliki nilai yang berbeda. Di sisi lain, untuk $n \geq 18$ berlaku

$$f(n+1) - f(n) < \frac{579}{2n+1} - \left(\frac{579}{2n-1} - 1\right) = -\frac{1158}{4n^2-1} + 1 \leq -\frac{1158}{4 \cdot 18^2 - 1} + 1 < 1$$

sehingga $f(n+1) - f(n) \le 0$ atau $f(n+1) \le f(n)$. Dengan kata lain, $16 = f(18) \ge f(19) \ge \cdots \ge f(290) = 1$.

Akan dibuktikan untuk setiap bilangan bulat $1 \le k \le 16$ terdapat m yang memenuhi $f(m) = k$. Ini ekivalen dengan

$$\left\lfloor \frac{579}{2m-1} \right\rfloor = k \iff k \le \frac{579}{2m-1} < k+1.$$

Ini berarti $k \le \frac{579}{2m-1}$ sehingga $m \le \frac{579+k}{2k}$. Di sisi lain, $\frac{579}{2m-1} < k+1$ memberikan $\frac{580+k}{2(k+1)} < m$. Jadi, $\frac{580+k}{2(k+1)} < m \le \frac{579+2k}{2k}$. Pilih $m = \left\lceil \frac{580+k}{2(k+1)} \right\rceil$. Menggunakan sifat ceiling $\lceil x \rceil < x+1$, tinjau

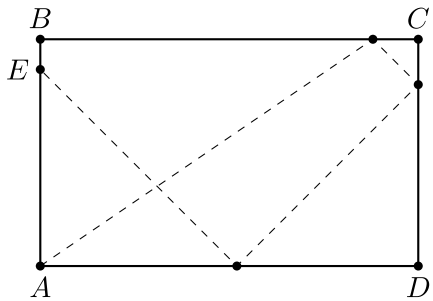
$$m - \frac{579+2k}{2k} < \frac{580+k}{2(k+1)} + 1 - \frac{579+2k}{2k} = \frac{580+k}{2(k+1)} - \frac{579}{2k} = \frac{k+k^2-579}{2k(k+1)} < 0$$

sehingga $m < \frac{579+2k}{2k}$ yang mana memenuhi syarat. Jadi, $f(18), f(19), \cdots, f(290)$ mencakup bilangan asli dari 1 hingga 16.

Jadi, totalnya ada $17 + 16 = \boxed{33}$.

....

16 Diketahui persegi panjang $ABCD$ dan E suatu titik pada sisi AB. Suatu benda bergerak dari titik A dan berturut-turut memantul terhadap sisi BC, CD, AD dan sampai titik E. Berikut diberikan sebuah contoh lintasan dari benda tersebut.



Jika diketahui $AB = 60, AD = 85$, dan jarak terpendek yang ditempuh oleh benda tersebut adalah $170\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah . . . .

Jawab: 50

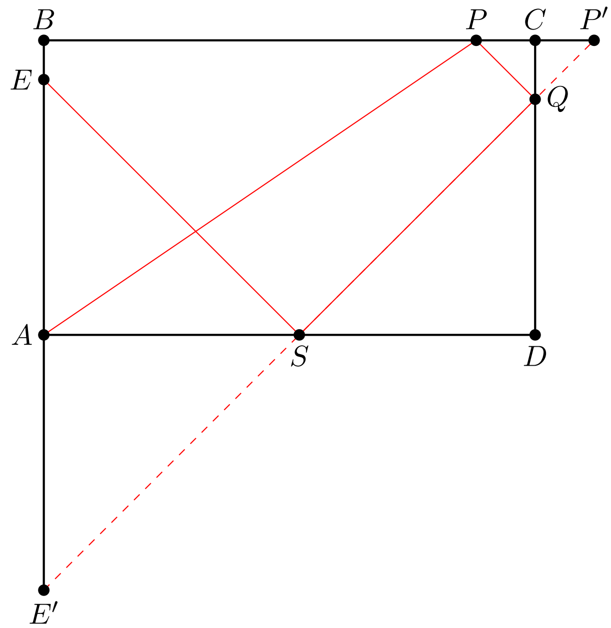
Definisikan titik P, Q, S sebagai titik 'singgah' benda di BC, CD, DA. Definisikan P' sebagai refleksi P terhadap CD dan E' refleksi E terhadap DA.

Menggunakan ketaksamaan segitiga,

$$PQ + QS + SE = QP' + SQ + SE' \ge P'S + SE' \ge P'E'$$

di mana kesamaan terjadi jika dan hanya jika P', Q, S kolinear dan Q, S, E' kolinear, yaitu P', Q, S, E' kolinear. Jadi, $AP + PQ + QS + SE \geq AP + P'E'$ di mana kesamaan saat P', Q, S, E' kolinear. Misalkan $BP = x$, maka $CP = CP' = 85 - x$. Misalkan pula $AE = AE' = y$ dan akan ditentukan nilai y. Dari Teorema Pythagoras,

$$AP + E'P' = \sqrt{60^2 + (85-x)^2} + \sqrt{(60+y)^2 + (85+x)^2}. = \sqrt{60^2 + (x-85)^2} + \sqrt{(60+y)^2 + (85+x)^2}.$$



Minkowski Inequality

Diberikan bilangan real $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ dan $p \geq 1$. Maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Khususnya, jika $a_i, b_i > 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $p = 2$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2}.$$

Dari Minkowski Inequality,

$$\begin{aligned}\sqrt{60^2 + (x-85)^2} + \sqrt{(60+y)^2 + (85+x)^2} &\geq \sqrt{(60+60+y)^2 + (x-85+x+85)^2} \\ &= \sqrt{(120+y)^2 + 170^2}.\end{aligned}$$

Karena nilai minimimum lintasan adalah $170\sqrt{2}$, dengan meninjau

$$170\sqrt{2} = \sqrt{(120+y)^2 + 170^2} \iff 170^2 \cdot 2 = (120+y)^2 + 170^2$$

sehingga $(120+y)^2 = 170^2$. Jadi, $y = \boxed{50}$ di mana nilai minimum tercapai saat $x = 25$.

....

17 Banyaknya pemetaan $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ yang memenuhi persamaan $f(f(x)) = f(x)$ untuk setap $x \in \{1,2,3,4,5\}$ adalah . . . .

Jawab: 196

Misalkan $A = \{1,2,3,4,5,5\}$. Kita sebut $x \in A$ sebagai *fixed point* dari f apabila $f(x) = x$. Perhatikan bahwa jika $f(x) = y$, maka haruslah $y = f(x) = f(f(x)) = f(y)$ yang berarti y harus fixed point.

Misalkan ada n fixed point dengan $0 \le n \le 5$, maka banyak pemilihan anggota dari A yang merupakan fixed point adalah $\binom{5}{n}$. Untuk $(5-n)$ anggota selainnya harus terpetakan ke anggota yang merupakan fixed point, yaitu ada sebanyak n^{5-n} karena setiap anggota tersebut memiliki n pilihan. Jadi, jawabannya adalah

$$\sum_{n=0}^{5} \binom{5}{n} n^{5-n} = \binom{5}{0}0^5 + \binom{5}{1}1^4 + \binom{5}{2}2^3 + \binom{5}{3}3^2 + \binom{5}{4}4^1 + \binom{5}{5}5^0 = \boxed{196}.$$

....

18 Suatu percobaan mengundi suatu dadu beberapa kali dan percobaan berhenti setelah muncul mata dadu lebih kecil dari 5 sebanyak dua kali. Banyak kemungkinan percobaan berhenti pada pengundian ke-5 atau sebelumnya adalah . . . .

Jawab: 784

Akan dibagi menjadi beberapa kasus. Misalkan B menyatakan kejadian saat muncul angka lebih kecil dari 5 dan G jika tidak.

Kasus 1: Permainan berhenti pada lemparan kedua

Pada masing-masing lemparan harus muncul angka kurang dari 5. Di sini ada $4 \cdot 4 = 16$ kemungkinan.

Kasus 2: Permainan berhenti pada lemparan ketiga

Kemungkinan kejadiannya adalah GBB atau BGB. Di sini untuk dua lemparan sebelumnya harus tepat satu B dan G, ada $2(4 \cdot 2 \cdot 4) = 64$.

Kasus 3: Permainan berhenti pada lemparan keempat

Kemungkinan kejadiannya adalah $\boxed{***}B$ di mana pada blok pertama memiliki sebuah B dan dua buah G, yang mana ada $\frac{3!}{2!1!} = 3$ permutasi. Kemungkinan angka yang muncul ada $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Jadi, total ada $3 \cdot 64 = 192$ kemungkinan.

Kasus 4: Permainan berhenti pada lemparan kelima

Kemungkinan kejadiannya adalah $\boxed{****}B$ di mana pada blok pertama memiliki sebuah B dan dua buah G, yang mana ada $\frac{4!}{3!1!} = 4$ permutasi. Kemungkinan angka yang muncul ada $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 128$. Jadi, total ada $4 \cdot 128 = 512$ kemungkinan.

Total ada $16 + 64 + 192 + 512 = \boxed{784}$.

. . . .

19 Hasil penjumlahan semua bilangan asli n sehingga sistem persamaan

$$nx + y = 85,$$
$$2x + (n+1)y = 30$$

memiliki solusi bilangan bulat (x, y) adalah . . . .

Jawab: 24

Jumlahkan kedua persamaan, maka

$$115 = (n+2)x + (n+2)y = (n+2)(x+y) \iff x + y = \frac{115}{n+2}$$

sehingga haruslah $n+2$ faktor dari 115. Jadi, $n+2 \in \{5, 23, 115\}$ sehingga $n \in \{3, 21, 113\}$. Di sisi lain,

$$85 - \frac{115}{n+2} = (nx+y) - (x+y) = (n-1)x \iff x = \frac{85n+55}{(n+2)(n-1)}.$$

Ini berarti haruslah $(n-1) \mid 85n + 55 = 85(n-1) + 140$ sehingga haruslah $(n-1) \mid 140$. Dari sini diperoleh $n \in \{3, 21\}$.

- Jika $n = 3$, maka $x + y = \frac{115}{5} = 23$ dan $3x + y = 85$ yang memberikan $(x, y) = (31, -8)$. Dapat dicek $2x + 4y = 62 - 32 = 30$ yang mana memenuhi.
- Jika $n = 21$, maka $x + y = \frac{115}{23} = 5$ dan $21x + y = 85$ sehingga $(x, y) = (4, 1)$. Dapat dicek bahwa $2x + 22y = 8 + 22 = 30$ yang mana memenuhi.

Jadi, jumlahan semua nilai n yang memenuhi $3 + 21 = \boxed{24}$.

. . . .

20 Sebuah tabel terdiri atas dua baris dan 29 kolom. Tiap petak dicat hitam atau putih dengan aturan:

(a) Dua kolom bersebelahan tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.

(b) Dua bujur sangkar 2×2 yang tumpang-tindih pada satu kolom tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.

Banyaknya cara pewarnaan papan yang memenuhi aturan tersebut adalah . . . .

Jawab: 5120

Pernyataan (b) ekivalen dengan kolom ke-n dan ke-$(n+2)$ memiliki petak hitam yang berbeda. Dari poin (a) pula, ini menunjukkan tiga kolom berurutan (ke-n hingga ke-$(n+2)$) harus memiliki hitam yang banyaknya saling berbeda. Ini artinya jika kolom ke-n dan ke-$(n+1)$, maka kolom ke-$(n+2)$ akan memiliki 1 atau 2 cara (bergantung kolom ke-n atau kolom ke-$(n+1)$). Akan ditentukan pola ini secara rekursif. Kita sebut kolom tersebut bertipe P jika keduanya putih, H jika keduanya hitam, dan C jika hitam-putih. Perhatikan bahwa jika kedua kolom n dan $n+1$ telah diketahui tipenya maka kolom ke-$(n+2)$ akan menggunakan tipe yang tersisa. Tinjau urutan kombinasi tiap kolomnya:

- Jika kedua kolom pertama berupa $P \to H$, maka kolom selanjutnya akan berakibat
$$P \to H \to \boxed{C \to P \to H \to C \to \cdots \to C \to P \to H}.$$
Tinjau untuk $P \to C$ atau $H \to C$ masing-masing ada dua cara, namun untuk selainnya 1 cara. Jadi, total ada 2^9. Secara analog, untuk $H \to P$ juga akan memberikan ada 2^9 cara (tinggal tukar urutan P dan H) sehingga ada $2^9 + 2^9 = 1024$ cara.

- Jika kedua kolom pertama berupa $C \to H$, maka kolom selanjutnya akan berakibat
$$C \to H \to \boxed{P \to C \to H \to P \to \cdots \to P \to C \to H}$$
sehingga ada 2^{10} cara. Secara analog untuk $C \to P$ (tinggal tukar urutan H dan P) juga ada 2^{10} cara sehingga total ada $2^{10} + 2^{10} = 2048$.

- Jika kedua kolom pertama berupa $H \to C$, maka kolom selanjutnya akan berakibat
$$H \to C \to \boxed{P \to H \to C \to P \to \cdots \to P \to H \to C}$$
sehingga ada 2^{10} cara. Secara analog untuk $P \to C$ (tinggal tukar urutan P dan H) juga ada 2^{10} cara. Jadi, ada $2^{10} + 2^{10} = 2048$ cara.

Jadi, jawabannya adalah $1024 + 2048 + 2048 = \boxed{5120}$.