Soal dan Solusi UAS Fungsi Kompleks II 2024

Wildan Bagus Wicaksono

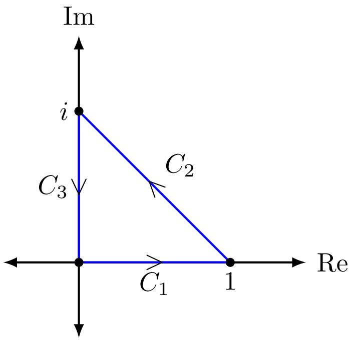
Matematika 2022

Question 1

Gambarlah lintasan C suatu segitiga dari $z = 0$ ke $z = 1$ ke $z = i$ dan kembali ke $z = 0$. Selanjutnya, hitunglah $\int\limits_C \operatorname{Re}\left(8\overline{z}^2 + 2i\right)$.

Penyelesaian.

Misalkan C_1 lintasan $z = 0$ ke $z = 1$, C_2 lintasan $z = 1$ ke $z = i$, dan C_3 lintasan $z = i$ ke $z = 0$. Maka $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ sehingga $\int\limits_C f(z)\ dz = \int\limits_{C_1} f(z)\ dz + \int\limits_{C_2} f(z)\ dz + \int\limits_{C_3} f(z)\ dz = \sum\limits_{i=1}^{3} \int\limits_{C_i} f(z)\ dz$.



Perhatikan bahwa

$$\operatorname{Re}\left(8\overline{z}^2 + 2i\right) = \operatorname{Re}\left(9\overline{z}^2\right) + \operatorname{Re}(2i) = 8\operatorname{Re}\left(\overline{z}^2\right).$$

Misalkan $z = x + iy$ di mana $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$\overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy \implies 8\operatorname{Re}\left(\overline{z}^2\right) = 8\left(x^2 - y^2\right)$$

Ini berarti

$$\int\limits_C \operatorname{Re}\left(8\overline{z}^2 + 2i\right)\ dz = \int\limits_C 8\left(x^2 - y^2\right)\ dz = 8\int\limits_C \left(x^2 - y^2\right)\ dz = 8\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{C_i} \left(x^2 - y^2\right)\ dz.$$

Pada lintasan C_1, parameterisasi $z = t$ di mana $0 \le t \le 1$, diperoleh $(x, y) = (t, 0)$ dan $dz = dt$. Ini berarti

$$\int\limits_{C_1} \left(x^2 - y^2\right)\ dz = \int_0^1 t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}.$$

Pada lintasan C_2, parameterisasi $z - 1 = t(i - 1) \implies z = 1 + (i - 1)t = (1 - t) + it$ di mana $0 \le t \le 1$. Diperoleh $(x, y) = (1 - t, t)$ dan $dz = i\ dt$ sehingga

$$\int\limits_{C_2} \left(x^2 - y^2\right)\ dz = \int_0^1 \left((1 - t)^2 - t^2\right) \cdot i\ dt = i\int_0^1 (1 - 2t)\ dt = i\left[t - t^2\right]_{t=0}^{t=1} = 0.$$

Pada lintasan C_3, parameterisasi $z = (1-t)i$ di mana $0 \le t \le 1$. Maka $(x,y) = (0, 1-t)$ dan $dz = -i\ dt$ sehingga

$$\int\limits_{C_3} \left(x^2 - y^2\right)\ dz = \int\limits_0^1 -(1-t)^2(-i\ dt) = i\int\limits_0^1 \left(1 - 2t + t^2\right)\ dt = i\left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{i}{3}.$$

Jadi,

$$\int\limits_C \mathrm{Re}\left(8\overline{z}^2 + 2i\right) = 8\sum_{i=1}^{3}\int\limits_{C_i} \left(x^2 - y^2\right)\ dz = 8\left(\frac{1}{3} + 0 + \frac{i}{3}\right) = \frac{8+8i}{3}.$$

▼

Question 2

Hitunglah $\int\limits_C f(z)\,dz$ jika

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

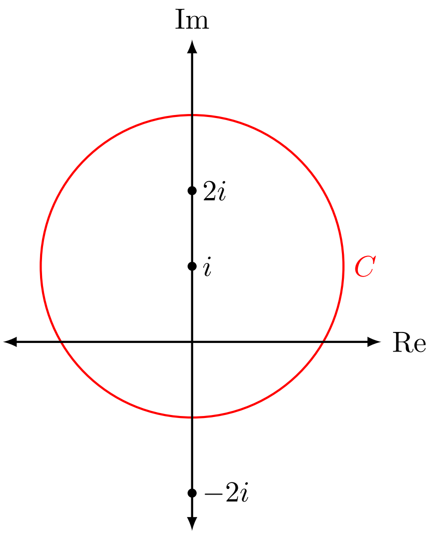
sepanjang lengkungan $C : |z - i| = 2$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

memiliki titik singular $z = -2i$ dan $z = 2i$, terlebih lagi keduanya titik singular terisolasi (sehingga memiliki ekspansi deret Laurent di sekitar $z = -2i$ dan $z = 2i$). Menurut Teorema Residu, $\int\limits_C f(z)\,dz = \pm 2\pi i \cdot \text{Res}(f(z), 2i)$ di mana $+$ saat C berorientasi positif, dan $-$ saat C berorientasi negatif.



Perhatikan bahwa $f(z) = \frac{1/(z+2i)^2}{(z-2i)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z-2i)^2}$ di mana $\varphi(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$. Karena $\varphi(2i) \neq 0$ dan $\varphi(z)$ analitik di $z = 2i$, maka $z = 2i$ merupakan *pole* (titik kutub) dari $f(z)$ dengan order 2. Akibatnya,

$$\text{Res}(f(z), 2i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}(z-2i)^2 f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+2i)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{1}{32i}.$$

Jadi,

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \pm 2\pi \cdot \frac{1}{32i} = \pm \frac{\pi}{16},$$

di mana $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif. ▼

Question 3

Tentukan jari-jari dan cakram konvergensi dari deret pangkat

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{2^k z^{2k}}{k^2+k}.$$

Penyelesaian.

Misalkan $a_k = \frac{2^k z^{2k}}{k(k+1)}$ dan $S = \sum\limits_{k=11}^{\infty} a_k$, maka

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}z^{2n+2}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2^n z^{2n}}{n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|2z^2 \cdot \frac{n}{n+2}\right| = \left|2z^2\right| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 2|z|^2.$$

Jika $L < 1$, maka S konvergen mutlak, akibatnya S konvergen. Jika $L > 1$, maka S divergen. Jika $S = 1$, maka $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sehingga

$$\sum_{k=11}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=11}^{\infty} \left|\frac{\left(2z^2\right)^k}{k(k+1)}\right| = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{\left|2z^2\right|^k}{k(k+1)} = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=11}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Hasil terakhir senilai dengan $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{11}$ yang mana konvergen. Karena $\sum |a_k|$ konvergen, ini berarti $\sum a_k$ juga konvergen. Jadi, cakram konvergensinya adalah $\left\{z : |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ dan radius konvergensinya adalah $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ▼

Question 4

Tentukan bagian utama dan bagian reguler dari

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

untuk $z \neq 0, 1, 2$.

Komentar. Sepertinya soal tidak lengkap, harusnya diberikan pusat deret Laurent yang ditinjau. Di sini akan diberikan semua kemungkinan pusatnya. Terlebih lagi, dari masing-masing pusat memiliki kemungkinan ekspresi ekspansi deret Laurent yang berbeda-beda, tergantung daerah konvergensi yang diinginkan (di soal tidak ada juga).

Penyelesaian.

Misalkan

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{p}{z} + \frac{q}{z-1} + \frac{r}{z-2}.$$

Ini berarti

$$1 = p(z-1)(z-2) + qz(z-2) + rz(z-1) = (p+q+r)z^2 - (3p+2q+r)z + 2p.$$

Ini berarti $p+q+r = 0 = 3p+2q+r$ dan $1 = 2p$. Diperoleh $(p,q,r) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ yang berarti

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2(z-2)} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2z}.$$

Kasus 1. Akan ditinjau ekspansi di sekitar $z = t$ di mana $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-c)+(c-2)} = \frac{1}{c-2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-c}{c-2}\right)} = \frac{1}{c-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-c}{c-2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(c-2)^{n+1}}(z-c)^n$$

dengan $0 < \left|-\frac{z-c}{c-2}\right| < 1 \iff 0 < |z-c| < |c-2|$. Lalu,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-c)+(c-1)} = \frac{1}{c-1} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-c}{c-1}\right)} = \frac{1}{c-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-c}{c-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(c-1)^{n+1}}(z-c)^n$$

dengan $0 < \left|-\frac{z-c}{c-1}\right| < 1 \iff 0 < |z-c| < |c-1|$. Terakhir,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-c)+c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z-c}{c}\right)} = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-c}{c}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n+1}}$$

dengan $0 < \left|-\frac{z-c}{c}\right| < 1 \iff 0 < |z-c| < |c|$. Jadi,

$$f(z) = \underbrace{0}_{\text{bag. utama}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2(c-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n}{(c-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2c^{n+1}}\right](z-c)^n}_{\text{bag. reguler}}, \quad 0 < |z-c| < \min\{|c-2|, |c-1|, |c|\}.$$

Kasus 2. Akan ditinjau ekspansi di sekitar $z = 0$. Karena $z = 0$ titik singular terisolasi, maka $f(z)$ memiliki ekspansi deret Laurent di sekitar $z = 0$. Tinjau

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < |z| < 2.$$

Lalu,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} -z^n, \quad 0 < |z| < 1.$$

Ini berarti

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2z}}_{\text{bag. utama}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n}_{\text{bag. reguler}}, \quad 0 < |z| < 1$$

Kasus 3. Akan ditinjau ekspansi di sekitar $z = 1$. Karena $z = 1$ titik singular terisolasi, maka $f(z)$ memiliki ekspansi deret Laurent di sekitar $z = 1$. Tinjau

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Lalu,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{1-[-(z-1)]} = \sum_{n=0}^{\infty}[-(z-1)]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Ini berarti

$$f(z) = \underbrace{-\frac{1}{z-1}}_{\text{bag. utama}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{2}(z-1)^n}_{\text{bag. reguler}}, \quad 0 < |z| < 1.$$

Kasus 4. Akan ditinjau ekspansi di sekitar $z = 2$. Karena $z = 1$ titik singular terisolasi, maka $f(z)$ memiliki ekspansi deret Laurent di sekitar $z = 2$. Tinjau

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{1-[-(z-2)]} = \sum_{n=0}^{\infty}[-(z-2)]^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1.$$

Lalu,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left[-\frac{z-2}{2}\right]} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 2$$

Ini berarti

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2(z-2)}}_{\text{bag. utama}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(-(-1)^n + \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\right)(z-2)^n}_{\text{bag. reguler}}, \quad 0 < |z-2| < 1.$$

▼

Question 5

Dengan menggunakan Teorema Residu, buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{e}.$$

Penyelesaian.

Cauchy Principal Value Theorem. Misalkan $f(x)$ fungsi bernilai real yang kontinu di $(-\infty,\infty)$ dan merupakan fungsi genap. Jika $PV\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen, maka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ juga konvergen yang nilainya

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = PV\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

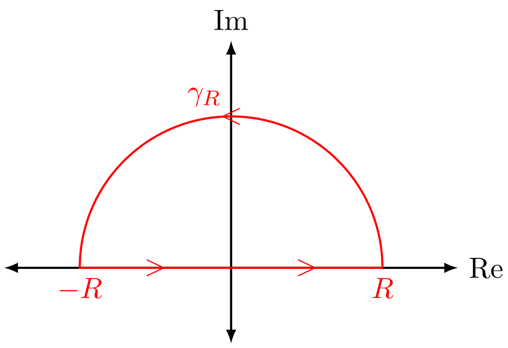
Tinjau $\frac{\cos(t)}{t^2+1}$ fungsi genap dan

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt.$$

Pandang $\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$ di mana C_R adalah setengah lingkaran bagian atas yang berpusat di $z=0$ dan berjari-jari R, berorientasi positif. Maka

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$$

di mana γ_R adalah lintasan lengkung (busur) setengah lingkaran C_R tersebut.



Perhatikan bahwa $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ memiliki titik singular $z=i$ dan $z=-i$, terlebih lagi juga merupakan pole (titik kutub) dengan order 1 (masing-masing). Menurut Teorema Residu,

$$\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname{Res}(f(z),i) = 2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = 0$. Parameterisasi $z = Re^{ik}$ di mana $0\le k\le \pi$, maka $dz = iRe^{ik}\,dk$ dan

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{ik}}iRe^{ik}}{R^2e^{2ik}+1}\,dk = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(k)-R\sin(k)}iRe^{ik}}{R^2e^{2ik}+1}\,dk = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(k)}ie^{ik}\cdot Re^{-R\sin(k)}}{R^2e^{2ik}+1}\,dk.$$

Menggunakan sifat ketaksamaan dalam integral,

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{iR\cos(k)}ie^{ik}\cdot Re^{-R\sin(k)}}{R^2e^{2ik}+1}\right| \leq \int_0^{\pi}\left|\frac{e^{iR\cos(k)}ie^{ik}Re^{-R\sin(k)}}{R^2e^{2ik+1}}\right|\,dk.$$

Menggunakan fakta $\left|e^{ip}\right| = 1$ untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dan $|ab| = |a||b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{C}$, diperoleh

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| &\leq \int_0^{\pi}\left|\frac{e^{iR\cos(k)}ie^{ik}Re^{-R\sin(k)}}{R^2e^{2ik+1}}\right|\,dk \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\left|e^{iR\cos(k)}\right||i|\left|e^{ik}\right||R|\left|e^{-R\sin(k)}\right|}{|R^2e^{2ik}+1|}\,dk \\ &= \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\sin(k)}}{|R^2e^{2ik}+1|}\,dk.\end{aligned}$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga $|a+b| \geq ||a|-|b||$,

$$\left|R^2e^{2ik}+1\right| \geq \left|\left|R^2e^{2ik}\right|-|1|\right| = \left|\left|R^2\right|\left|e^{2ik}\right|-1\right| = \left|R^2-1\right| = R^2-1.$$

Diperoleh

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\sin(k)}}{|R^2e^{2ik}+1|}\,dk \leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\sin(k)}}{R^2-1}\,dk.$$

Perhatikan bahwa untuk $0 \leq k \leq \pi$ berlaku $0 \leq \sin(k) \leq 1$. Ini berakibat

$$\frac{Re^{-R}}{R^2-1} \leq \frac{Re^{-R\sin(k)}}{R^2-1} \leq \frac{R}{R^2-1}.$$

Karena $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{Re^{-R}}{R^2-1} = 0 = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-1}$, menurut Teorema Apit berlaku $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{Re^{-R\sin(k)}}{R^2-1} = 0$. Jadi, untuk $R \to \infty$ berlaku

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{Re^{-R\sin(k)}}{R^2-1}\,dk \to 0 \implies \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz \to 0.$$

Hal ini memberikan

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$$

Jadi,

$$\frac{\pi}{e} = PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = PV\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(z)}{z^2+1}\,dz\right].$$

Dengan meninjau komponen real pada kedua ruas,

$$\frac{\pi}{e} = PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(z)}{z^2+1}\,dz = PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt.$$

Berdasarkan Cauchy Principal Value Theorem, dapat disimpulkan $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{e}$ seperti yang ingin dibuktikan. ▼