Soal dan Solusi UTS Fungsi Kompleks II 2024

Wildan Bagus Wicaksono

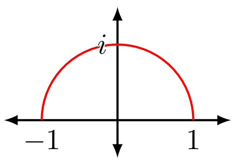
MATEMATIKA 2022

Question 1

Gambarlah lintasan dari
$$g(t) = \frac{-2t}{1+t^2} + i\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
untuk $t \in [-1, 1]$.

Penyelesaian.

Misalkan $u(t) = \text{Re } g(t) = -\frac{2t}{1+t^2}$ dan $v(t) = \text{Im } g(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Karena
$$u(t)^2 + v(t)^2 = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1.$$
Ini menunjukkan bahwa lintasan tersebut bagian lingkaran yang berpusat di $z = 0$ dan jari-jari 1. Tinjau bahwa $g(-1) = \frac{2}{2} + 0 = 1$, $g(0) = 0 + i \cdot \frac{1}{1} = i$, dan $g(1) = \frac{-2}{2} + 0 = -1$. Diperoleh lintasan $g(t)$ sebagai berikut.



▼

Question 2

Hitunglah $\int\limits_C ze^{z^2}\, dz$ dengan C lintasan berupa lingkaran.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa fungsi eksponensial e^z, fungsi polinom z dan z^2 masing-masing entire. Akibatnya, komposisi fungsi z^2 dan e^z, yaitu e^{z^2}, juga merupakan fungsi entire. Selain itu, hasil kali fungsi z dan e^{z^2}, yaitu ze^{z^2}, juga merupakan fungsi entire.

Misalkan C sebarang lintasan berupa lingkaran, maka C tertutup sederhana. Karena ze^{z^2} entire, menurut Cauchy-Goursat, berlaku $\int\limits_C ze^{z^2} = 0$ untuk sebarang lintasan lingkaran C. ▼

Question 3

Hitunglah $\int_C f(z)\, dz$ jika

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

sepanjang lengkungan $C : |z - i| = 2$.

Penyelesaian.

Tinjau bahwa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

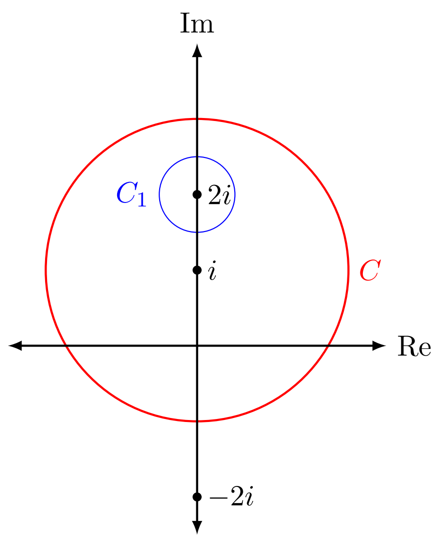
yang berarti titik singular $f(z)$ adalah $z = \pm 2i$. Misalkan C_1 adalah lintasan lingkaran yang berpusat di $z = 2i$ sedemikian sehingga $int(C_1) \subseteq int(C)$ serta berorientasi positif (berlawanan arah jarum jam). Tinjau $f(z)$ analitik di $C \setminus C_1$, dari sini akan berakibat $\int_C f(z)\, dz = \pm \int_{C_1} f(z)\, dz$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat berorientasi negatif. Kemudian, dari Cauchy berlaku

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_1} \frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2} = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} g'(2i)$$

di mana $g(z) = \frac{1}{(z+2i)^2} \implies g'(z) = -\frac{2}{(z+2i)^3}$ dan diperoleh $g'(2i) = -\frac{2}{(4i)^3} = -\frac{2}{-64i} = \frac{1}{32i}$. Dari sini diperoleh

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$$

Jadi, $\int_C f(z)\, dz = \pm\frac{\pi}{16}$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif.



Question 4

Hitunglah $\int\limits_C f(z)\, dz$ jika
$$f(z) = \frac{e^{2z} - z^2}{(z-2)^3}$$
dan $C : |z-1| = 3$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $z = 2$ merupakan titik singular dari $f(z)$. Misalkan C_1 lintasan lingkaran berpusat di $z = 2$ sedemikian sehingga $int(C_1) \subseteq int(C)$ serta berorientasi positif. Ini berakibat $\int\limits_C f(z)\, dz = \pm \int\limits_{C_1} f(z)\, dz$ di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif. Kemudian, dari Cauchy berlaku
$$\int\limits_{C_1} \frac{e^{2z} - z^2}{(z-2)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} g''(2) = \pi i g''(2), \quad g(z) = e^{2z} - z^2.$$
Diperoleh $g'(z) = 2e^{2z} - 2z \implies g''(z) = 4e^{2z} - 2$ dan diperoleh $g''(2) = 4e^4 - 2$. Jadi,
$$\int\limits_C f(z)\, dz = \pm\pi i \left(4e^4 - 2\right) = \pm 2\pi i \left(2e^4 - 1\right)$$
di mana tanda $+$ saat C berorientasi positif dan $-$ saat C berorientasi negatif.