wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSK SMA 2023

Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2023

Bagian I – Soal

1. Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

....

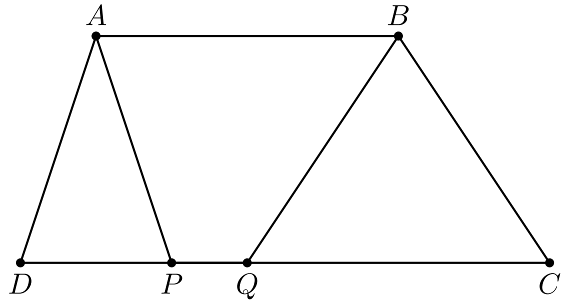
1 Hasil penjumlahan semua solusi persamaan bilangan riil x yang memenuhi

$$|x - |2x + 3|| = 99$$

adalah . . . .

2 Di dalam suatu laci terdapat 7 pasang kaos kaki yang setiap pasangnya berbeda dengan pasangan lain. Diambil 5 kaos kaki sekaligus secara acak. Banyak cara pengambilan sehingga diantara yang terambil terdapat **tepat** sepasang kaos kaki yang berpasangan adalah . . . .

3 Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB = 14$, $CD = 19$, AB sejajar CD, serta besar masing-masing $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ kurang dari $90°$. Jika P dan Q adalah titik pada sisi CD sehingga $AD = AP$ dan $BC = BQ$, panjang dari PQ adalah . . . .



4 Suatu bilangan empat digit $7ab9$ merupakan suatu bilangan kuadrat. Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

5 Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang memenuhi $f(5) = 25$ dan $f(6) = 36$. Jika $a \neq 1$, nilai dari $\frac{c-b}{a-1}$ adalah . . . .

6 Dua tim A dan B bertanding sepak bola sebanyak 15 kali. Tiap pertandingan, tim yang berhasil mencetak 4 gol pertama adalah pemenang dan tidak ada pertandingan yang berakhir seri. Selama 15 pertandingan, Tim A menang lebih banyak dari B, sedangkan gol tim B lebih banyak dari tim A. Selisih total gol terbesar antara kedua tim tersebut adalah . . . .

7 Diberikan segitiga lancip ABC dengan panjang $AB = 12$ dan $AC = 10$. D adalah suatu titik di BC. E dan F adalah titik berat segitiga ABD dan ACD berturut-turut. Jika luas dari segitiga DEF adalah 4, dan panjang $BC = \sqrt{n}$, nilai dari n adalah . . . .

8 Sisa pembagian dari $5^{2022} + 11^{2022}$ oleh 64 adalah . . . .

9 Diberikan suku banyak dengan koefisien bilangan bulat $P(x)$. Jika

$$P(r_1) = P(r_2) = 200$$

dengan r_1 dan r_2 merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + x - 23 = 0$. Maka, sisa pembagian $P(1)$ oleh 21 adalah . . . .

10 Banyak bilangan 4 digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6 adalah . . . .

2. Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 4 poin, soal yang dijawab salah bernilai -1 poin, dan soal yang tidak dijawab bernilai 0 poin.

....

11 Diberikan segiempat $ABCD$ siklis dengan lingkaran luarnya adalah ω. Panjang $BC = CD$, AC memotong BD di titik E, $BE = 7$, dan $DE = 5$. Garis singgung ω di titik A memotong BD di titik P. Jika $\frac{PD}{PB}$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n adalah bilangan asli yang saling relatif prima, nilai dari $m + n$ adalah . . . .

12 Jika bilangan asli x dan y memenuhi

$$x(x - y) = 5y - 6$$

Nilai dari $x + y$ adalah . . . .

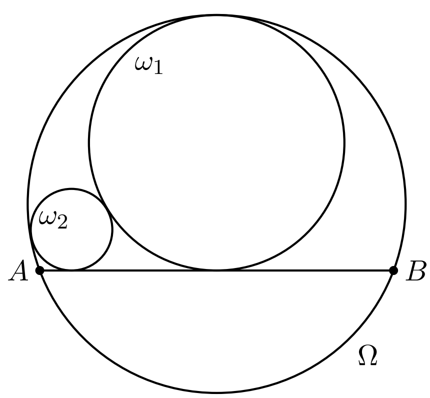
13 Misalkan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suatu barisan yang memenuhi persamaan

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = \frac{n+1}{6}$$

untuk setiap bilangan asli n. Jika $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$, nilai dari a_{2023} adalah . . . .

14 Diberikan himpunan $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Akan dipilih dua subhimpunan dari S yang gabungannya adalah S. Subhimpunan yang dipilih tidak harus berbeda, misalnya keduanya boleh sama dengan S. Urutan dari subhimpunan tidak diperhatikan, sebagai contoh pasangan subhimpunan $(\{a, b, c\}, \{c, d, e, f\})$ sama dengan pasangan $(\{c, d, e, f\}, \{a, b, c\})$. Banyak cara melakukan pemilihan adalah . . . .

15 Diberikan lingkaran Ω dan AB merupakan tali busur dari Ω.



Lingkaran ω_1 menyinggung Ω secara internal dan menyinggung AB pada titik tengahnya. Lingkaran ω_2 menyinggung Ω secara internal, dan ω_1 secara eksternal serta menyinggung AB. Jika jari-jari dari ω_1 adalah 35 dan jari-jari dari ω_2 adalah 7, panjang dari AB adalah . . . .

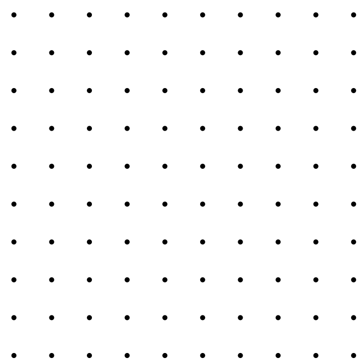
16 Misal $n = 2^a \cdot 3^b$ dengan a, b bilangan asli. Jika hasil kali semua faktor positif dari n adalah 12^{90}, maka nilai ab adalah . . . .

17 Nilai minimum dari

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-25}}$$

adalah . . . .

18 Diberikan 100 titik seperti gambar berikut.



Banyak persegi yang semua titik sudutnya adalah 4 titik di antara titik-titik pada gambar tersebut adalah . . . .

19 Diberikan segitiga ABC. Misal titik D, E, F terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF berpotongan di satu titik. Diketahui bahwa $\angle EDF = 54^\circ$. Jika $\angle ADB = 90^\circ$ dan $AF = FB$, maka besar $\angle ABC$ adalah . . . .

20 Misal p dan n adalah dua bilangan asli dengan p prima sehingga p membagi n^2+4 dan n membagi p^2+4. Jika $p < 200$, nilai terbesar yang mungkin dari n adalah . . . .

Bagian II – Solusi

3. Solusi Kemampuan Dasar

1 Hasil penjumlahan semua solusi persamaan bilangan riil x yang memenuhi

$$|x - |2x+3|| = 99$$

adalah . . . .

Jawab: 58

Kita bagi kasus.

Kasus 1: $x \geq |2x+3|$

Untuk $x \geq |2x+3|$, karena $|2x+3| \geq 0$ maka $x \geq |2x+3| \geq 0 \implies x \geq 0 \implies 2x+3 > 0$. Selain itu, diperoleh

$$99 = |x - |2x+3|| = x - |2x+3| = x - (2x+3) = -x - 3$$

dan didapatkan $x = -102$, kontradiksi.

Kasus 2: $x < |2x+3|$

Untuk $x < |2x+3|$, maka

$$99 = |x - |2x+3|| = -(x - |2x+3|) = -x + |2x+3|.$$

Jika $2x+3 \geq 0 \iff x \geq -\frac{3}{2}$, maka $99 = -x + 2x + 3 = x + 3 \iff x = 96$ yang mana memenuhi syarat $x < |2x+3|$ dan $x \geq -\frac{3}{2}$. Jika $2x+3 < 0 \iff x < -\frac{3}{2}$, maka $99 = -x + (-(2x+3)) = -3x - 3 \iff x = -34$ yang mana memenuhi syarat $x < |2x+3|$ dan $x < -\frac{3}{2}$ (alternatifnya dapat dicek langsung ke persamaan soal).
Jadi, jumlah semua solusinya adalah $96 + (-34) = \boxed{62}$.

. . . .

2 Di dalam suatu laci terdapat 7 pasang kaos kaki yang setiap pasangnya berbeda dengan pasangan lain. Diambil 5 kaos kaki sekaligus secara acak. Banyak cara pengambilan sehingga diantara yang terambil terdapat **tepat** sepasang kaos kaki yang berpasangan adalah . . . .

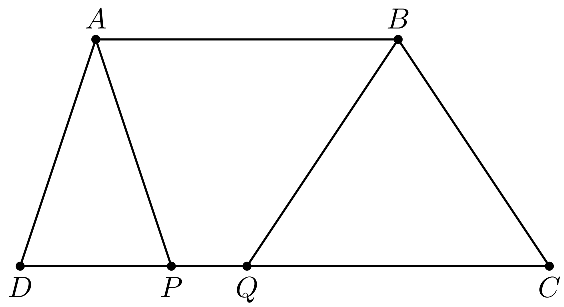
Jawab: 105

Banyak cara untuk mengambil dua kaos kaki yang sepasang dari tujuh pasang yang tersedia adalah $\binom{7}{1} = 7$ cara. Sedangkan, jenis kaos kaki lain hanya diambil paling banyak 1 kaos kaki serta ada

2 pemilihan dari pemilihan setiap jenis ini. Sehingga banyak cara mengambil 3 kaos kaki lain dengan jenis berbeda adalah $\binom{6}{3}2^3 = 160$. Jadi, totalnya adalah $7 \cdot 160 = \boxed{1120}$.

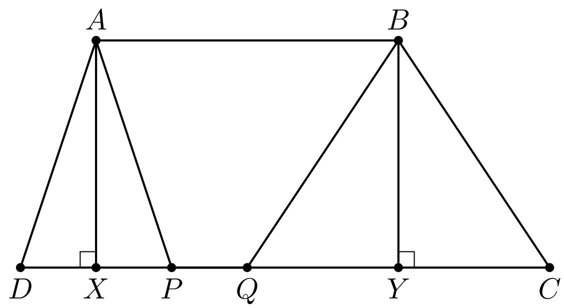
. . . .

3 Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB = 14$, $CD = 19$, AB sejajar CD, serta besar masing-masing $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ kurang dari $90°$. Jika P dan Q adalah titik pada sisi CD sehingga $AD = AP$ dan $BC = BQ$, panjang dari PQ adalah . . . .



Jawab: 9

Misalkan titik X dan Y pada segmen CD sedemikian sehingga AX dan BY masing-masing tegak lurus CD.



Karena panjang $AP = AD$, menurut Teorema Pythagoras berlaku

$$DX = \sqrt{AD^2 - AX^2} = \sqrt{AP^2 - AX^2} = PX \implies DX = PX.$$

Dengan cara yang sama, diperoleh $XP = YQ$. Misalkan panjang $DX = XP = d, YC = YQ = c$, dan $PQ = p$. Diperoleh panjang $AB = XP + PQ + QY = p + d + c \implies 14 = p + d + c$ dan $CD = DP + PQ + QC = 2d + p + 2c \implies 19 = 2d + p + 2c$. Karena $c + d = 13 - p$, maka

$$19 = 2d + p + 2c = 2(c + d) + p = 2(14 - p) + p = 28 - 2p + p = 28 - p$$

dan diperoleh panjang $PQ = p = \boxed{9}$.

. . . .

4 Suatu bilangan empat digit $7ab9$ merupakan suatu bilangan kuadrat. Nilai dari $a+b$ adalah . . . .

Jawab: 11

Misalkan $n^2 = 7ab9$ untuk suatu bilangan asli n. Karena angka satuan $7ab9$ adalah 9, kemungkinan angka satuan dari n adalah 3 atau 7. Di sisi lain, tinjau $7000 < 7ab9 < 8000$ yang memberikan $84 \leq n \leq 89$. Oleh karena itu, haruslah $n = 87$ yang mana $87^2 = 7569$. Jadi, $a = 5$ dan $b = 6$ sehingga $a + b = \boxed{11}$.

. . . .

5 Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang memenuhi $f(5) = 25$ dan $f(6) = 36$. Jika $a \neq 1$, nilai dari $\frac{c-b}{a-1}$ adalah . . . .

Jawab: 39

Kita punya $25 = 25a + 5b + c$ dan $36 = 36a + 6b + c$. Pandang

$$36x - 25y = (36a + 6b + c)x - (25a + 5b + c)y = (36x - 25y)a + (6x - 5y)b + (x - y)c$$

atau dapat ditulis ulang sebagai

$$(y - x)c - (6x - 5y)b = (36x - 25y)(a - 1) \iff \frac{(y - x)c - (6x - 5y)b}{a - 1} = 36x - 25y.$$

Agar mendapatkan $\frac{c-b}{a-1}$, ambil suatu solusi (x, y) sedemikian sehingga $y - x = 1$ dan $6x - 5y = 1$ yang mana memberikan $(x, y) = (6, 7)$. Diperoleh

$$\frac{c - b}{a - 1} = 36(6) - 25(7) = \boxed{41}.$$

. . . .

6 Dua tim A dan B bertanding sepak bola sebanyak 15 kali. Tiap pertandingan, tim yang berhasil mencetak 4 gol pertama adalah pemenang dan tidak ada pertandingan yang berakhir seri. Selama 15 pertandingan, tim A menang lebih banyak dari tim B, sedangkan gol tim B lebih banyak dari tim A. Selisih total gol terbesar antara kedua tim tersebut adalah . . . .

Jawab: 20

Misalkan a_i, b_i berturut-turut banyak gol yang diperoleh A dan B pada pertandingan ke-i. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan A menang pada pertandingan ke-1 hingga ke-n dan sisanya dimenangkan oleh B. Karena tim A menang lebih banyak daripada tim B, maka $n \geq 8$. Dengan kata lain, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 4$ dan $b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = b_{15} = 4$. Dari sini haruslah $0 \leq a_i \leq 3$

untuk setiap $i > n$ dan $0 \leq b_j \leq 3$ untuk setiap $j \leq n$. Diperoleh total gol tim A adalah $T_A = 4n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{15}$ dan total gol tim B adalah $T_B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + 4(15 - n) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + 60 - 4n$. Ini selisihnya adalah

$$T_B - T_A = 60 - 8n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n - a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots - a_{15}.$$

Agar selisih ini semaksimum mungkin, maka dipilih $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 3$ dan $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{15} = 0$. Diperoleh

$$T_B - T_A \leq 60 - 8n + 3n - 0 \cdot (15 - n) = 60 - 5n \leq 60 - 5(8) = 20.$$

Jadi, selisih gol terbesarnya adalah $\boxed{20}$ yang dapat tercapai dengan skema:'

- 8 pertandingan pertama dimenangkan oleh A dengan ketentuan A mencetak 4 gol dan B mencetak 3 gol setiap pertandingannya,
- 7 pertandingan selanjutnya dimenangkan oleh B dengan ketentuan B mencetak 4 gol dan A mencetak 0 gol setiap pertandingannya.

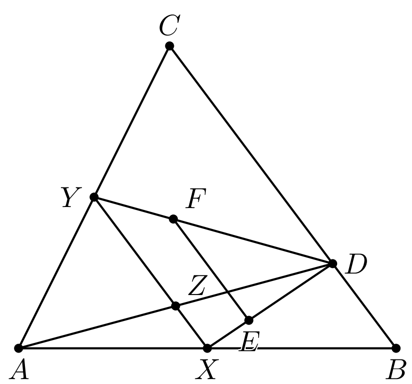
	Skor															Total
A	4	4	4	4	4	4	4	4	0	0	0	0	0	0	0	32
B	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	52

....

7 Diberikan segitiga lancip ABC dengan panjang $AB = 12$ dan $AC = 10$. D adalah suatu titik di BC. E dan F adalah titik berat segitiga ABD dan ACD berturut-turut. Jika luas dari segitiga DEF adalah 4, dan panjang $BC = \sqrt{n}$, nilai dari n adalah . . . .

Jawab: 52

Misalkan X dan Y berturut-turut titik tengah dari AB dan AC, kita punya D, E, X segaris dan D, F, Y segaris. Selain itu, misalkan Z titik potong XY dengan AD.



Perhatikan bahwa

$$\frac{[DXY]}{[DEF]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot DX \cdot DY \cdot \sin \angle XDY}{\frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot \sin \angle EDF} = \frac{DX}{DE} \cdot \frac{DY}{DF} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

Karena $[DEF] = 4$, maka $[DXY] = 9$. Perhatikan bahwa homothety (dilatasi) $\mathcal{A}$ berpusat di A dengan rasio 2 memetakan XY ke BC. Ini berarti $\mathcal{H}$ memetakan Z ke D yang berarti berlaku $2AZ = AD$, atau $AZ = ZD$. Tarik garis tinggi dari Y ke AD dan misalkan panjangnya t, maka

$$\frac{[AYZ]}{[YZD]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot t \cdot AZ}{\frac{1}{2} \cdot t \cdot ZD} = 1 \implies [AYZ] = [YZD].$$

Secara analog, $[AXZ] = [XZD]$ sehingga diperoleh

$$[AXY] = [AXZ] + [AYZ] = [DXZ] + [DYZ] = [DXY] = 9.$$

Ini berarti

$$9 = [AXY] = \frac{1}{2} \cdot AY \cdot AX \cdot \sin \angle BAC = 15 \sin \angle BAC$$

sehingga $\sin BAC = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ dan $\cos \angle BAC = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \frac{4}{5}$. Jadi,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \angle BAC} = \sqrt{144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{52}$$

sehingga $n = \boxed{52}$.

8 Sisa pembagian dari $5^{2021} + 11^{2022}$ oleh 64 adalah . . . .

Jawab: 50

Euler Totient

Didefinisikan $\varphi(n)$ sebagai banyaknya bilangan asli yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n.

(a) Jika $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ faktorisasi prima dari n, maka

$$\varphi(n) = p\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

(b) Jika a dan n relatif prima, maka

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Perhatikan bahwa $64 = 2^5$ sehingga $\varphi(64) = 64\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 32$. Ini berarti $5^{32}, 11^{32} \equiv 1 \pmod{64}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} 5^{2022} + 11^{2022} &\equiv 5^{2021 \mod 32} + 11^{2022 \mod 32} \pmod{64} \\ &\equiv 5^6 + 11^6 \pmod{64} \\ &\equiv \left(5^3\right)^2 + \left(11^2\right)^3 \pmod{64} \\ &\equiv (-3)^2 + (-7)^3 \pmod{64} \\ &\equiv 9 - 343 \pmod{64} \\ &\equiv -14 \pmod{64} \\ &\equiv 50 \pmod{64}. \end{aligned}$$

Jadi, sisanya adalah $\boxed{50}$.

9 Diberikan suku banyak dengan koefisien bilangan bulat $P(x)$. Jika

$$P(r_1) = P(r_2) = 200$$

dengan r_1 dan r_2 merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + x - 23 = 0$. Maka, sisa pembagian $P(1)$ oleh 21 adalah . . . .

Jawab: 11

Misalkan $P(x) = (x^2 + x - 23)\,Q(x) + ax + b$ di mana a, b bilangan bulat dan $Q(x)$ polinom berkoefisien bulat. Karena r_i akar dari $x^2 + x - 23 = 0$, maka $(r_i)^2 + r_i - 23 = 0$ sehingga

$$200 = P(r_i) = \left((r_i)^2 + r_i - 23\right) Q(r_i) + ar_i + b = 0 \cdot Q(r_i) + ar_i + b = ar_i + b.$$

Ini berarti $ar_1 + b = ar_2 + b = 200$. Dari sini diperoleh $ar_1 + b = ar_2 + b$ atau $a(r_1 - r_2) = 0$. Karena $r_1 \neq r_2$, maka $a = 0$. Di sisi lain, $400 = (ar_1 + b) + (ar_2 + b) = b + b = 2b$ yang mana $b = 200$. Jadi,

$$P(1) = (1 + 1 - 23)Q(1) + a + b = -21Q(1) + 0 + 200 \equiv 200 \equiv 11 \pmod{21}.$$

Jadi, sisanya adalah $\boxed{11}$.

Komentar. Soal ini memiliki kelemahan karena mudah 'dicurangi', cukup pilih $P(x) = x^2 + x - 23 + 200 = x^2 + x + 177$ yang mana memenuhi kondisi soal.

10 Banyak bilangan 4 digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6 adalah . . . .

Jawab: 1056

Solusi 1: Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Diberikan himpunan $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Maka

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|.$$

Misalkan A_n menyatakan banyaknya bilangan empat digit habis dibagi 3 yang digit ke-n adalah angka 6 untuk setiap $1 \leq n \leq 4$. Dari Prinsip Inklusi-Eksklusi, maka banyak 4 bilangan digit yang dimaksud adalah

$$\sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

- Akan ditentukan $|A_1|$, yaitu jika angka 6 di digit pertama. Tulis $3 \mid \overline{6bcd}$ sehingga $3 \mid \overline{bcd}$. Ini berarti ekivalen dengan menentukan banyaknya bilangan bulat tak negatif kurang dari 1000 yang habis dibagi 3 (karena b, c, d boleh 0). Jadi, $\left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor + 1 = 334$.
  Akan ditentukan $|A_2|$, tulis $3 \mid \overline{a6cd}$. Ini berarti $3 \mid \overline{acd}$ yang ekivalen dengan menentukan banyaknya bilangan 3 digit habis dibagi 3 (ingat $a > 0$). Jadi, $|A_2| = \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor = 300$.
  Dengan cara yang sama, $|A_3| = |A_4| = 300$.
  Ini berarti $\sum |A_i| = 334 + 300 \cdot 3 = 1234$.
- Akan ditentukan $|A_1 \cap A_2|$, lalu $|A_1 \cap A_i|$ untuk $i = 3, 4$ ditentukan dengan cara yang sama. Tulis $3 \mid \overline{66cd}$ sehingga $3 \mid \overline{cd}$. Ini ekivalen dengan menentukan banyak bilangan bulat tak negatif kurang dari 100 habis dibagi 3, yaitu $\left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor + 1 = 34$. Jadi, $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = 34$.
  Akan ditentukan $|A_2 \cap A_3|$, lalu untuk $|A_2 \cap A_4|, |A_3 \cap A_4|$ ditentukan dengan cara yang sama. Perhatikan bahwa $3 \mid \overline{a66b}$ sehingga $3 \mid \overline{ab}$ yang ekivalen dengan menentukan banyak bilangan dua digit yang habis dibagi 3, yaitu $\left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 30$. Jadi, $|A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = 30$.
  Ini berarti $\sum |A_i \cap A_j| = 34 \cdot 3 + 30 \cdot 3 = 192$.
- Akan ditentukan $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, lalu $|A_1 \cap A_i \cap A_j|$ untuk $2 \leq i < j \leq 4$ ditentukan dengan cara yang sama. Tulis $3 \mid \overline{666d}$ sehingga haruslah $3 \mid 4$ yang berarti ada 4 kemungkinan. Jadi, $|A_1 \cap A_i \cap A_j| = 4$ untuk $2 \leq i < j \leq 4$.
  Akan ditentuan $|A_2 \cap A_3 \cap A_4|$, tulis $3 \mid \overline{a666}$ sehingga $3 \mid a$. Jadi, ada 3 kemungkinan yang berarti $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 3$.
  Ini berarti $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k| = 4 \cdot 3 + 3 = 15$.

- Terakhir $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$ karena 6666 sebagai satu-satunya kemungkinan.

Jadi, jawabannya adalah $1234 - 192 + 15 - 1 = \boxed{1056}$.

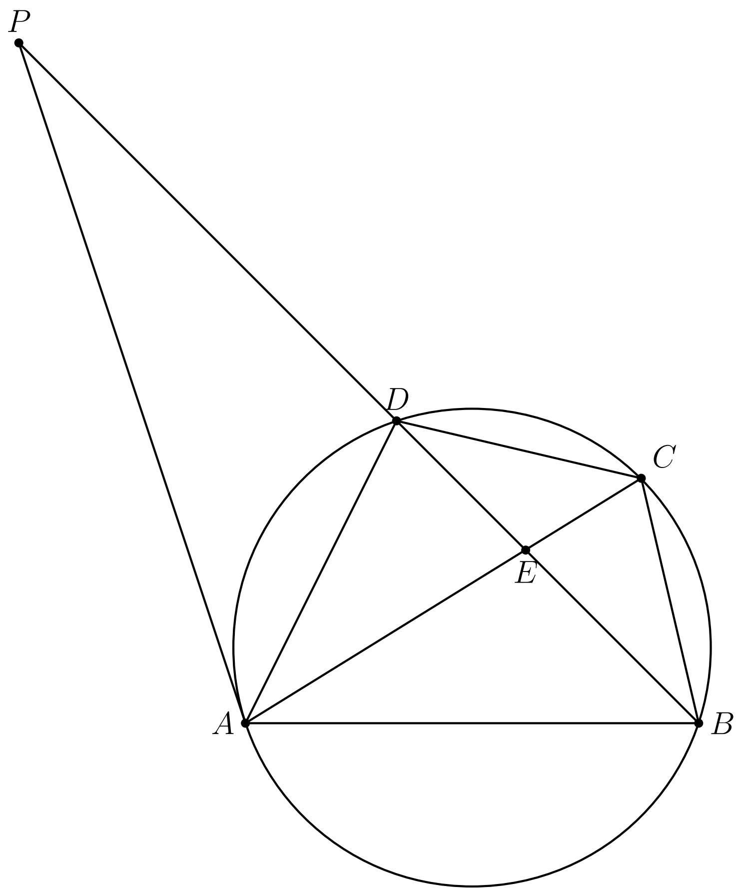
Solusi 2: Aturan Perkalian-Penjumlahan

Akan ditinjau komplemennya, yaitu akan ditentukan banyak bilangan empat digit yang habis dibagi 3 namun tidak memiliki angka 6. Banyak blangan empat digit yabng habis dibagi 3 adalah $\left\lfloor \frac{9999}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{999}{3} \right\rfloor = 1000$. Perhatikan himpunan-himpunan digit yang dikelompokkan berdasarkan sisa baginya jika dibagi 3: $S_0 = \{0, 3, 9\}$, $S_1 = \{1, 4, 7\}$, dan $S_= \{2, 5, 8\}$. Di sini $3 \mid \overline{abcd}$ yang mana haruslah berlaku $3 \mid a + b + c + d$ berdasarkan sifat keterbagian 3. Kita dapat memilih tiga tiga digit a, b, c secara sebarang, kemudian nilai d pasti akan berada di salah satu S_0, S_1, S_2 (pilih d yang memenuhi $d \equiv -(a + b + c) \pmod 3$). Sebagai contoh, untuk $a = 2, b = 3, c = 5$, maka $d \equiv -10 \equiv 2 \pmod 3$ sehingga d dapat dipilih dari S_2. Banyak cara membentuk tiga digit $\overline{abc}$ adalah $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Digit d dipiilih dari salah satu S_0, S_1, S_2 yang mana masing-masing juga memiliki 3 pilihan. Jadi, banyaknya bilangan empat digit kelipatan 3 yang tidak memiliki digit 6 adalah $648 \cdot 3 = 1944$. Jadi, jawabannya adalah $3000 - 1944 = \boxed{1056}$.

4. Solusi Kemampuan Lanjut

11 Diberikan segiempat $ABCD$ siklis dengan lingkaran luarnya adalah ω. Panjang $BC = CD$, AC memotong BD di titik E, $BE = 7$, dan $DE = 5$. Garis singgung ω di titik A memotong BD di titik P. Jika $\frac{PD}{PB}$ dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dengan m dan n adalah bilangan asli yang saling relatif prima, nilai dari $m + n$ adalah . . . .

Jawab: 74



Karena panjang $CB = CD$, maka $\angle CBD = \angle CDB$ sehingga berlaku $\angle DAC = \angle CBD = \angle CDB = \angle CAB$. Jadi, AC garis bagi $\angle BAD$ sehingga dari teorema garis bagi berlaku $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = \frac{5}{7}$.

Alternate Segment Theorem

Diberikan segitiga ABC dan P di luar ABC. Maka PA menyinggung lingkaran luar ABC jika dan hanya jika $\angle PAB = \angle ACB$.

Karena di soal PA menyinggung BD, maka $\angle PAD = \angle ABD$. Mengingat $\angle DAP = \angle APB$, maka $\triangle ABP \sim \triangle DAP$ (AA). Ini berarti

$$\frac{7}{5} = \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{DP} = \frac{BP}{AP}.$$

Misalkan $BP = 7x$, dari $\frac{BP}{AP} = \frac{7}{5}$ maka $AP = 5x$. Di sisi lain, $\frac{7}{5} = \frac{AP}{DP} = \frac{5x}{DP}$ sehingga $DP = \frac{25x}{7}$. Jadi, $\frac{PD}{PB} = \frac{25x/7}{7x} = \frac{25}{49}$ sehingga $m = 16$ dan $n = 49$. Jadi, $m + n = \boxed{74}$.

. . . .

12 Jika bilangan asli x dan y memenuhi

$$x(x - y) = 5y - 6$$

Nilai dari $x + y$ adalah . . . .

Jawab: 48

Solusi 1: Menggunakan Diskriminan

Tulis ulang $x^2 - xy + (6 - 5y) = 0$. Karena persamaan kuadrat (dalam x) memiliki solusi bilangan bulat, maka diskriminan $D = (-y)^2 - 4(1)(6 - 5y) = y^2 + 20y - 24$ merupakan bilangan kuadrat. Tulis $k^2 = y^2 + 20y - 24$ di mana k bilangan bulat tak negatif. Perhatikan bahwa

$$k^2 = y^2 + 20y - 24 = (y + 10)^2 - 124 \iff 124 = (y + 10)^2 - k^2 = (y + k + 10)(y + 10 - k).$$

Perhatikan bahwa $y + k + 10 \geq 11$ dan $y + k + 10 > y + 10 - k$. Karena $y + k + 10, y + 10 - k$ berparitas sama (keduanya ganjil atau keduanya genap), ini berarti $(y+k+10, y+10-k) = (62, 2)$ sehingga $y = 22$ dan $k = 30$. Jadi, $0 = x^2 - 22x - 114 = (x - 26)(x + 4)$ sehingga $x = 26$. Jadi, $x + y = \boxed{48}$.

Solusi 2: Menggunakan Sifat Keterbagian

Perhatikan bahwa $x^2 - xy = 5y - 6$ dapat ditulis ulang menjadi

$$x^2 + 6 = xy + 5y = y(x + 5) \iff y = \frac{x^2 + 6}{x + 5}.$$

Karena $x \equiv -5 \pmod{x + 5}$, maka $x^2 + 6 \equiv (-5)^2 + 6 \equiv 31 \pmod{x + 5}$. Karena haruslah $x^2 + 6 \equiv 0 \pmod{x + 5}$, maka $31 \equiv 0 \pmod{x + 5}$ yang berarti $x + 5 \mid 31$. Karena $x + 5 > 1$, maka $x + 5 = 31$ sehingga $x = 26$. Diperoleh $y = 22$ sehingga $x + y = \boxed{48}$.

. . . .

13 Misalkan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ suatu barisan yang memenuhi persamaan

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = \frac{n+1}{6}$$

untuk setiap bilangan asli n. Jika $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$, nilai dari a_{2023} adalah . . . .

Jawab: 338

Misalkan $a_n = (-1)^n b_n$, maka

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+2} b_{n+2} - (-1)^{n+1} b_{n+1} + (-1)^n b_n = (-1)^n (b_{n+2} + b_{n+1} + b_n).$$

Ini berarti $b_n + b_{n+1} + b_{n+2} = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{6}$ untuk setiap bilangan asli n. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(b_{n+3} + b_{n+2} + b_{n+1}) - (b_{n+2} + b_{n+1} + b_n) &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{6} - (-1)^n \cdot \frac{n+1}{6} \\ b_{n+3} - b_n &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+3}{6}\end{aligned}$$

untuk setiap bilangan asli n dengan $b_1 = -1$ dan $b_2 = 2$. Untuk $n = 3t - 2$ dengan t bilangan asli, maka

$$b_{3t+1} - b_{3t-2} = (-1)^{3t-1} \cdot \frac{2(3t-2)+3}{6} = (-1)^{t-1} \cdot \frac{6t-1}{6} = (-1)^{t-1} \left(t - \frac{1}{6}\right)$$

karena $(-1)^{3t-1} = (-1)^{2t} \cdot (-1)^{t-1}$. Tinjau

$$\begin{aligned}b_{2023} - b_{2020} &= -674 + \frac{1}{6} \\ b_{2020} - b_{2017} &= 673 - \frac{1}{6} \\ b_{2017} - b_{2014} &= -672 + \frac{1}{6} \\ b_{2014} - b_{2011} &= 671 - \frac{1}{6} \\ &\vdots \\ b_7 - b_4 &= -2 + \frac{1}{6} \\ b_4 - b_1 &= 1 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Jumlahkan semuanya,

$$b_{2023} - b_1 = \underbrace{(-1) + (-1) + \cdots + (-1)}_{337} = -337$$

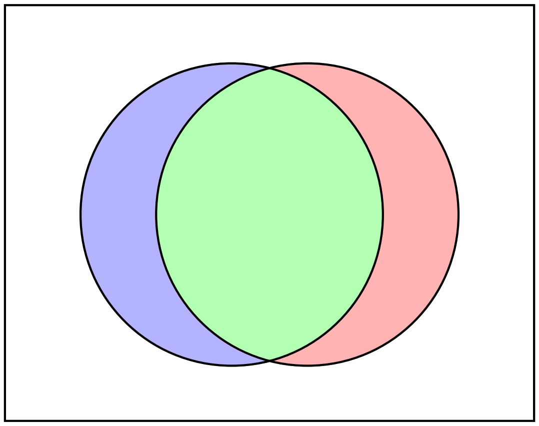
sehingga $b_{2023} = -337 + b_1 = -338$. Jadi, $a_{2023} = (-1)^{2023} b_{2023} = \boxed{338}$.

. . . .

14 Diberikan himpunan $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Akan dipilih dua subhimpunan dari S yang gabungannya adalah S. Subhimpunan yang dipilih tidak harus berbeda, misalnya keduanya boleh sama dengan S. Urutan dari subhimpunan tidak diperhatikan, sebagai contoh pasangan subhimpunan $(\{a, b, c\}, \{c, d, e, f\})$ sama dengan pasangan $(\{c, d, e, f\}, \{a, b, c\})$. Banyak cara melakukan pemilihan adalah . . . .

Jawab: 365

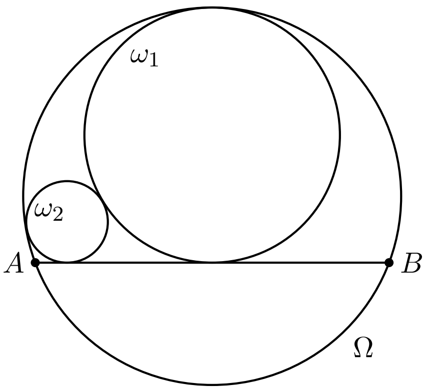
Perhatikan ilustrasi diagram venn berikut.



Akan ditentukan banyak pasangan terurut (A, B) (artinya $(A, B), (B, A)$ dianggap berbeda). Perhatikan bahwa setiap anggota S harus masuk di daerah biru, hijau, atau merah yang berarti ada 3 cara. Ini berarti ada $3^6 = 729$ pasangan terurut (A, B). Perhatikan bahwa $A = B$ yang memenuhi $A \cup B = S$ jika dan hanya jika $A = B = S$ yang berarti 1 kemungkinan. Ini berarti ada $729 - 1 = 728$ pasangan terurut dengan ketentuan $A \neq B$. Karena $(A, B), (B, A)$ dianggap sama, maka ada $\frac{728}{2} = 364$ pasangan (A, B) yang urutannya tidak diperhatikan. Jadi, banyaknya pasangan seluruhnya adalah $364 + 1 = \boxed{365}$.

. . . .

15 Diberikan lingkaran Ω dan AB merupakan tali busur dari Ω.



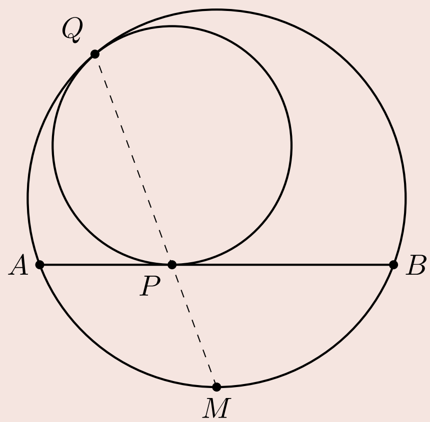
Lingkaran ω_1 menyinggung Ω secara internal dan menyinggung AB pada titik tengahnya. Lingkaran ω_2 menyinggung Ω secara internal, dan ω_1 secara eksternal serta menyinggung AB. Jika jari-jari dari ω_1 adalah 35 dan jari-jari dari ω_2 adalah 7, panjang dari AB adalah . . . .

Jawab: 70

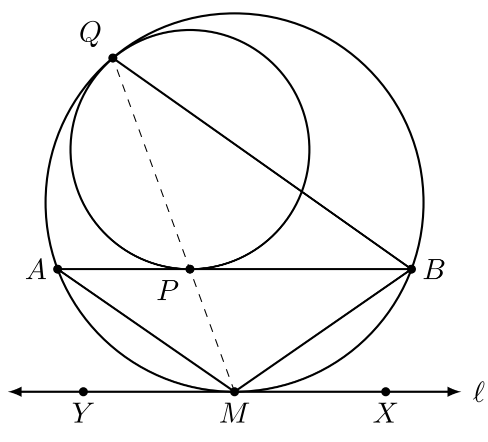
Untuk mempermudah perhitungan, kita lakukan 'rescale' sebesar $\frac{1}{7}$, nanti hasil akhir dikalikan dengan 7. Di sini panjang jari-jari ω_2 adalah 1 dan panjang jari-jari ω_1 adalah 5. Misalkan ω_1 dan ω_2 berturut-turut berpusat P dan Q, serta menyinggung AB di C dan D, menyinggung Ω di E dan F. Akan digunakan lemma berikut.

Lemma

Misalkan $\overline{AB}$ tali busur dari lingkaran Ω. Lingkaran ω merupakan lingkaran yang menyinggung $\overline{AB}$ dan Ω berturut-turut di P dan Q. Jika M titik tengah busur AB yang tidak mengandung titik Q, maka P, Q, M segaris dan $\text{Pow}_\omega(M) = MA^2$.

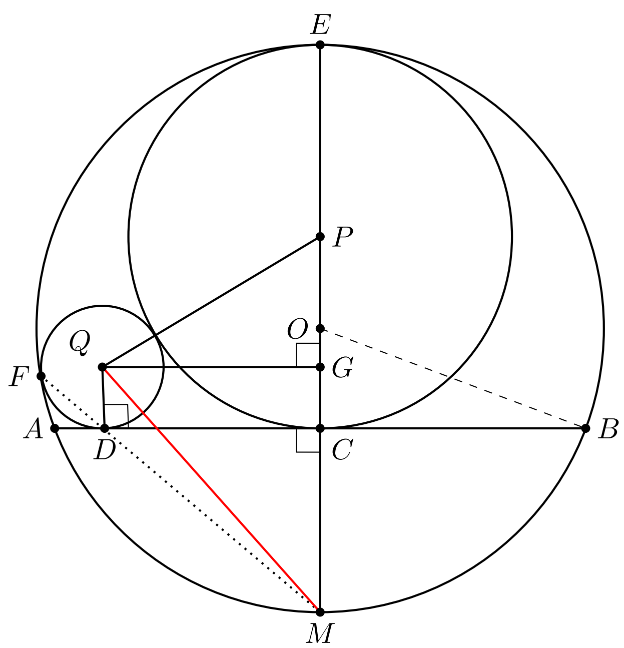


Bukti. Karena ω dan Ω bersinggungan di Q, maka terdapat homothety $\mathcal{H}$ berpusat di Q yang memetakan ω ke Ω. Misalkan ℓ garis singgung Ω di M, kemudian X dan Y pada ℓ seperti gambar berikut.



Karena XM menyinggung Ω, dari Alternate Segment Theorem (lihat soal 11) berlaku $\angle XMB = \angle MQB = \angle MAB = \angle MBA$. Ini berarti $\angle XMB = \angle MBA$ sehingga $\ell \parallel AB$. Karena AB menyinggung ω dan ℓ menyinggung Ω, artinya $\mathcal{H}$ memetakan AB ke garis ℓ. Karena ω menyinggung AB di ℓ dan Ω menyinggung ℓ di M, maka Q, P, M segaris. Selain itu, tinjau $\angle MBA = \angle MAB = \angle MQB$ sehingga dari Alternate Segment Theorem berlaku MB menyinggung lingkaran luar PQB. Dari Power of Point, maka $MA^2 = MB^2 = MP \cdot MQ = \text{Pow}_\omega(M)$. $\square$

Dari lemma, $\text{Pow}_{\omega_1}(M) = MA^2 = \text{Pow}_{\omega_2}(M)$, E, C, M kolinear, dan F, D, M kolinear. Di sisi lain, $\text{Pow}_{\omega_1}(M) = MQ^2 - r_1^2 = MQ^2 - 1$ dan $\text{Pow}_{\omega_2}(M) = MP^2 - r_2^2 = MP^2 - 25$.



Misalkan panjang jari-jari Ω adalah R, maka $MP = ME - EP = 2R - 5$. Perhatikan bahwa $GC = QD = 1$. Dari teorema Pythagoras MQG dan QGP,

$$\begin{aligned} MQ^2 &= MG^2 + QG^2 \\ &= (2R-5-4)^2 + PQ^2 - PG^2 \\ &= (2R-9)^2 + 6^2 - (5-1)^2 \\ &= (2R-9)^2 + 20. \end{aligned}$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} \text{Pow}_{\omega_1}(M) &= \text{Pow}_{\omega_2}(M) \\ (2R-9)^2 + 20 - 1 &= (2R-5)^2 - 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}44 &= (2R-5)^2-(2R-9)^2\\ &= (2R-5+2R-9)(2R-5-2R+9)\\ &= (4R-14)(4)\end{aligned}$$

sehingga $R=\frac{25}{4}$. Misalkan O pusat Ω, maka $OC = EC - R = 10 - R$ sehingga

$$BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{R^2-(10-R)^2}=\sqrt{10(2R-10)}=\sqrt{10\cdot\frac{5}{2}}=5$$

sehingga $AB = 2BC = 10$. Karena ini dilakukan rescale di awal sebesar $\frac{1}{7}$, maka panjang sebenarnya $10\cdot 7=\boxed{70}$.

. . . .

16 Misal $n = 2^a\cdot 3^b$ dengan a, b bilangan asli. Jika hasil kali semua faktor positif dari n adalah 12^{90}, maka nilai ab adalah . . . .

Jawab: 32

> **Lemma**
> Hasil perkalian semua faktor positif dari n adalah $n^{\tau(n)/2}$.

Bukti. Misalkan $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_k = n$ menyatakan semua faktor positif dari n dengan $k = \tau(n)$. Ini berarti $d_i d_{k+1-i} = n$ untuk setiap $1 \le i \le k$. Perhatikan bahwa

$$S = d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\ldots\cdot d_k$$
$$S = d_k\cdot d_{k-1}\cdot d_{k-2}\cdot\ldots\cdot d_1$$

Kalikan keduanya,

$$S^2 = d_1d_k\cdot d_2d_{k-1}\cdot d_3d_{k-2}\cdot\ldots\cdot d_kd_1 = n^{\tau(n)}$$

sehingga $S = n^{\tau(n)/2}$. $\square$

Dari soal, tinjau $\tau(n) = (a+1)(b+1)$. Ini berarti

$$2^{180}\cdot 3^{90} = 12^{90} = n^{\tau(n)/2} = \left(2^a\cdot 3^b\right)^{\frac{(a+1)(b+1)}{2}} = 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}}\cdot 3^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}}.$$

Ini berarti $\frac{a(a+1)(b+1)}{2}=180$ dan $\frac{b(a+1)(b+1)}{2}=90$ sehingga $a(a+1)(b+1) = 36$ dan $b(a+1)(b+1) = 180$. Ini berarti

$$0 = a(a+1)(b+1) - 2b(a+1)(b+1) = (a-2b)(a+1)(b+1)$$

sehingga $a = 2b$. Substitusi, $b(2b+1)(b+1) = 180 = 4\cdot 9\cdot 5$ yang berarti $b = 4$. Lalu, $a = 2b = 8$ sehingga $ab = \boxed{32}$.

. . . .

17 Nilai minimum dari

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-25}}$$

adalah . . . .

Jawab: 18

Di sini akan diasumsikan x, y yang dimaksud adalah real positif dengan $x > 3, y > 4$. Jika tidak, maka jawabannya adalah 0 namun tidak sesuai dengan kunci yang beredar.

Di sini $x > 3$ dan $y > 4$. Misalkan $x^2 - 9 = a^2$ dan $y^2 - 16 = b^2$ dengan $a, b > 0$, maka $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-25} = a + b$ dan $x + y = \sqrt{a^2+16}+\sqrt{y^2+25}$.

Minkowski Inequality

Diberikan bilangan real $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ dan $p \geq 1$. Maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Khususnya, jika $a_i, b_i > 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $p = 2$ maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2}.$$

Dari Minkowski Inequality berlaku

$$\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+25} \geq \sqrt{(a+b)^2+(4+5)^2} \implies (x+y)^2 \geq (a+b)^2 + 81.$$

Jadi,

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{a^2-16}+\sqrt{y^2-25}} \geq \frac{(a+b)^2+81}{a+b} = a+b+\frac{81}{a+b}.$$

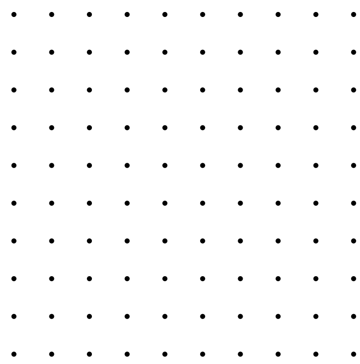
Dari AM-GM, diperoleh

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-6}+\sqrt{y^2-25}} \geq a+b+\frac{81}{a+b} \geq 2\sqrt{(a+b)\cdot\frac{81}{a+b}} = 18.$$

Kesamaan dapat terjadi saat $x = 4\sqrt{2}$ dan $y = 5\sqrt{2}$. Jadi, nilai minimumnya adalah $\boxed{18}$.

. . . .

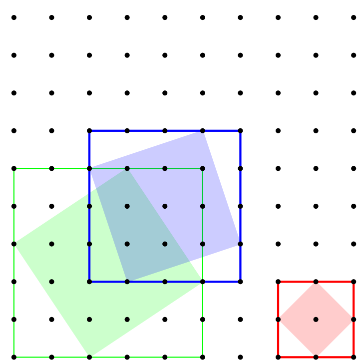
18 Diberikan 100 titik seperti gambar berikut.



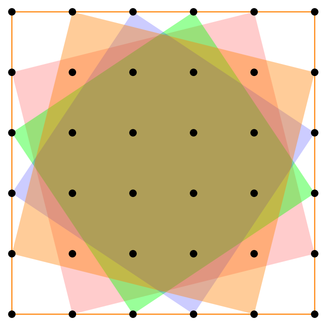
Banyak persegi yang semua titik sudutnya adalah 4 titik di antara titik-titik pada gambar tersebut adalah . . . .

Jawab: 825

Akan dilakukan perhitungan dengan meninjau subgrid $k \times k$, lalu dihitung banyak persegi yang titik sudutnya berada di tepi subgrid tersebut.



Tinjau pada subgrid $k \times k$ terdapat k persegi yang dapat dibuat.



Perhatikan bahwa subgrid $k \times k$ yang dapat dibentuk dari persegi 10×10 adalah $(10-k)^2$ untuk $1 \le k \le 9$. Jadi, totalnya adalah

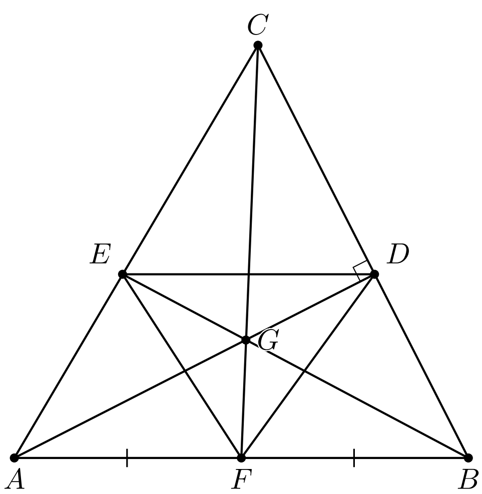
$$\sum_{k=1}^{9} k \cdot (10-k)^2 = 1 \cdot 9^2 + 2 \cdot 8^2 + \cdots + 9 \cdot 1^2$$

$$
\begin{aligned}
&= 1^2 \cdot 9 + 2^2 \cdot 8 + \cdots + 9^2 \cdot 1 \\
&= \sum_{k=1}^{9} k^2(10-k) \\
&= \sum_{k=1}^{9} \left(10k^2 - k^3\right) \\
&= 10\sum_{k=1}^{9} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^3 \\
&= 10 \cdot \frac{9(9+1)(2\cdot 9+1)}{6} - \left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)^2 \\
&= \boxed{825}.
\end{aligned}
$$

. . . .

19 Diberikan segitiga ABC. Misal titik D, E, F terletak pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF berpotongan di satu titik. Diketahui bahwa $\angle EDF = 54^\circ$. Jika $\angle ADB = 90^\circ$ dan $AF = FB$, maka besar $\angle ABC$ adalah . . . .

Jawab: 63°



Karena AD, BE, CF berpotongan di satu titik,

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \implies \frac{BD}{DC} = \frac{EA}{CE}.$$

Tambahkan kedua ruas dengan 1, diperoleh

$$\frac{BD}{DC} + 1 = \frac{EA}{CE} + 1 \iff \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{CE}.$$

Karena $\angle DCE = \angle BCA$, maka $\triangle DCE \sim \triangle BCA$ (SAS). Ini berarti $\angle CDE = \angle CBA$ sehingga $DE \parallel AB$ yang berarti $\angle BFD = \angle DF = 54^\circ$. Karena $\angle ADB = 90^\circ$, maka ABD diameter lingkaran luar $\triangle ADB$ sehingga titik pusatnya merupakan titik tengah AB. Jadi, F titik pusat ADB sehingga panjang $FD = FB$. Ini berarti $\angle FBD = \angle FDB$, $\angle FBD = \angle FDB = \frac{180^\circ - \angle BFD}{2} = \frac{126^\circ}{2} = \boxed{63^\circ}$.

. . . .

20 Misal p dan n adalah dua bilangan asli dengan p prima sehingga p membagi n^2+4 dan n membagi p^2+4. Jika $p < 200$, nilai terbesar yang mungkin dari n adalah . . . .

Jawab: 169

Jika $p = 2$, maka $n \mid p^2 + 4 = 8$ sehingga $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ sehingga n terbesar adalah $n = 8$.

Jika p ganjil, tinjau bahwa $n \mid p^2 + 4$ yang mana $p^2 + 4$ ganjil sehingga haruslah n ganjil. Jika

$$pn \mid \left(p^2+4\right)\left(n^2+4\right) = p^2n^2 + 4p^2 + 4n^2 + 16 \implies pn \mid 4p^2 + 4n^2 + 16 = 4\left(p^2 + n^2 + 4\right).$$

Karena $\text{FPB}(pn, 4) = 1$, maka $pn \mid p^2 + n^2 + 4$. Akan ditentukan semua bilangan asli x, y yang memenuhi $xy \mid x^2 + y^2 + 4$. Misalkan $A = \frac{x^2+y^2+4}{xy}$ yang dapat ditulis ulang menjadi $x^2 - (Ay)x + (y^2 + 4) = 0$. Di sini $(x, y) = (1, 1)$ merupakan salah satu solusinya dengan $A = 6$. Tetapkan nilai A, pandang (x, y) merupakan solusinya dengan $x + y$ seminimal mungkin. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x \geq y$.

Klaim

Jika (x, y) adalah solusi, maka $\left(\frac{y^2+4}{x}, y\right)$ juga solusi.

Bukti. Misalkan $f(X) = X^2 - (Ay)X + (y^2 + 4)$. Perhatikan bahwa $f(x) = x^2 - (Ay)x + (y^2 + 4) = 0$ sehingga x akar dari $f(X)$. Misalkan x' akar lain dari $f(X) = 0$, dari Teorema Vieta berlaku $x + x' = Ay$ dan $xx' = y^2 + 4$. Ini berarti $x' = Ay - x$ yang berarti x' bilangan bulat, di sisi lain $x' = \frac{y^2+4}{x} > 0$ sehingga x' merupakan bilangan asli. Artinya, $(x, y) = (x', y) = \left(\frac{y^2+4}{x}, y\right)$ juga solusi. □

Dengan asumsi $x + y$ seminimal mungkin, maka

$$x' + y \geq x + y \implies \frac{y^2+4}{x} \geq x \implies 4 \geq x^2 - y^2.$$

Andaikan $x \geq y + 2$, maka

$$x^2 - y^2 \geq (y+2)^2 - y^2 = 4y + 4 \geq 4 + 4 = 8 > 4$$

sehingga tidak mungkin. Jadi, $x = y$ atau $x = y + 1$.

- Jika $x = y$, diperoleh $A = \frac{2x^2+4}{x^2} = 2 + \frac{4}{x^2}$ sehingga $x = y = 1$ sebagai solusi minimalnya dengan $A = 6$. Menggunakan klaim dan (x, y) solusi jika dan hanya jika (y, x) solusi, dapat diperoleh

  $$(1,1) \to (5,1) \to (1,5) \to (29,5) \to (5,29) \to (169,29) \to (29,169) \to (985,169) \to \cdots.$$

  Dengan melakukan hal ini, dapat dituliskan

  $$(1,1) \to (1,5) \to (5,29) \to (29,169) \to (169,985) \to (5741,169) \to \cdots.$$

  Dengan ketentuan $x = p < 200$ prima dan $b = n$ bilangan prima, diperoleh $(p, n) = (5,1), (29,5), (5,29), (169,29), (29,169)$.

- Jika $x = y + 1$, maka

  $$A = \frac{(y+1)^2 + y^2 + 4}{(y+1)y} = \frac{2y^2 + 2y + 5}{y^2 + y} = 2 + \frac{5}{y^2 + y}.$$

  Di sini diperoleh tidak ada solusi karena $y^2 + y$ selalu genap.

Jadi, nilai terbesar n adalah $\boxed{169}$ dengan $p = 29$.

> **Komentar.** Metode ini disebut sebagai **Vieta Jumping** yang pertama kali muncul pada soal legenda IMO 1988/6. Metode ini dapat menggenerate semua solusi menggunakan solusi terkecilnya seperti solusi di atas.