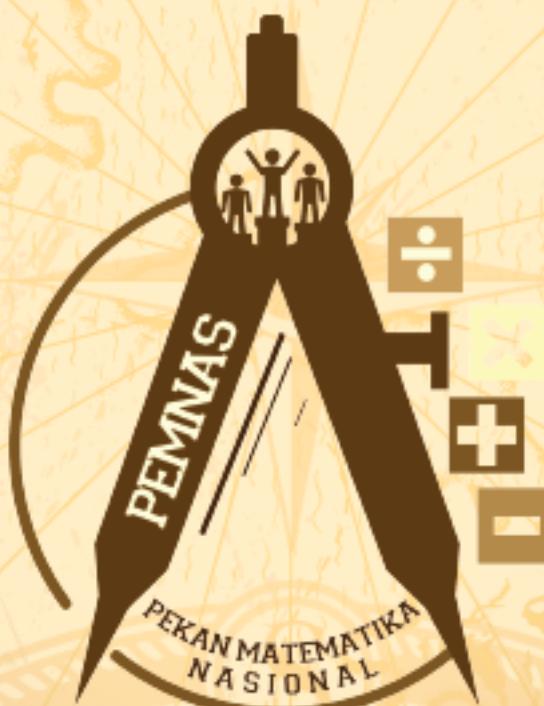




Raskah Soal **PEMNAS**

Pekan Matematika Rasional 2023



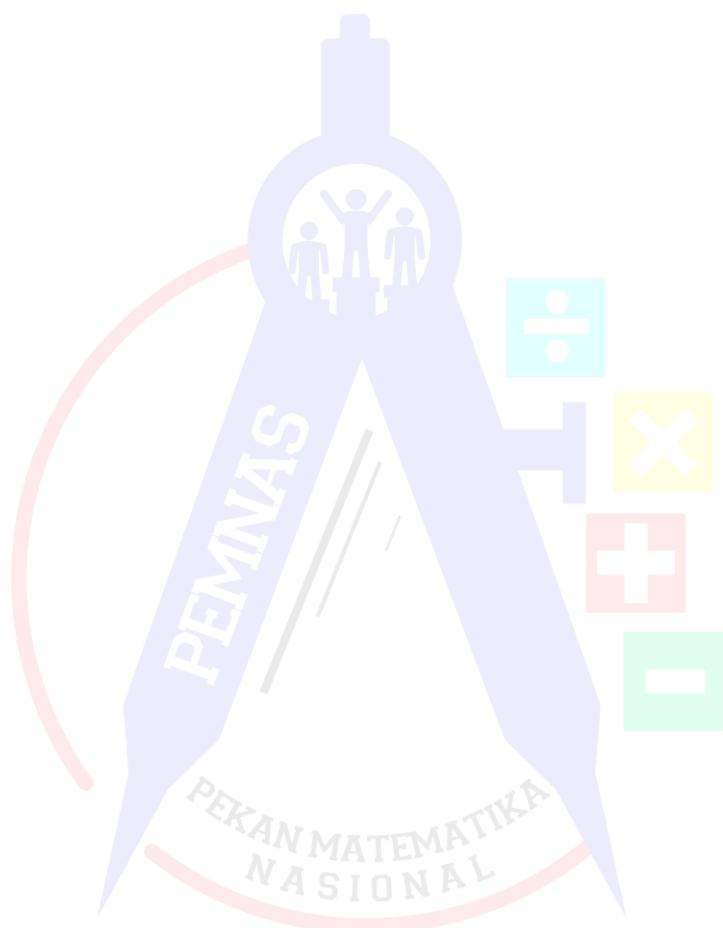
**Babak Semifinal
Jenjang SMP/MTs/Sederajat**

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA DAN ILMU AKTUARIA (HIMATIKA)
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Peraturan Babak Semifinal Jenjang SMA/MA/Sederajat

1. Peserta babak semifinal merupakan peserta yang dinyatakan lolos dari babak penyisihan.
2. Terdiri dari 4 soal uraian yang dikerjakan dalam waktu 90 menit tanpa istirahat.
3. Tuliskan identitas pada setiap lembar jawaban seperti nama lengkap, asal sekolah, nomor peserta, nomor soal, dan jenjang. Lembar jawaban yang identitasnya tidak tertera dianggap tidak sah dan tidak dinilai.
4. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **langkah-langkah hingga hasil akhir** pada lembar jawaban. Setiap soal memiliki bobot 7 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab.
5. Peserta yang berhak lolos ke tahap final adalah 5 peserta.
6. Ketentuan pemeringkatan:
 - (a). Diurutkan berdasarkan poin tertinggi peserta.
 - (b). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang memiliki poin sama setelah poin (a) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan banyaknya soal yang dijawab sempurna.
 - (c). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang masih memiliki poin sama setelah poin (b) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan jenjang kelas dengan mengutamakan kelas yang lebih muda.
 - (d). Jika terdapat dua peserta atau lebih yang masih memiliki poin sama setelah poin (c) dipertimbangkan, maka diurutkan berdasarkan umur dengan mengutamakan umur yang lebih muda.
7. Peserta dilarang membuka catatan atau menggunakan alat bantu hitung lainnya seperti kalkulator, tabel matematika, busur derajat, atau penggaris siku. Penggaris lurus dan jangka boleh digunakan.
8. Peserta tidak diperbolehkan mengganggu atau berdiskusi dengan peserta lain saat pelaksanaan soal berlangsung.
9. Peserta wajib menulis jawaban menggunakan bolpoin hitam. Pensil hanya diperkenankan untuk keperluan menggambar ilustrasi.
10. Peserta dilarang menggunakan penghapus cair atau *correction tape* untuk menghapus jawaban. Jawaban yang salah cukup dicoret dengan satu coretan saja.

11. Apabila lembar jawaban tidak cukup, peserta diperbolehkan menuliskan jawaban di halaman baliknya atau meminta kepada pengawas. Peserta diperbolehkan meminta kertas buram tambahan kepada pengawas.
12. Peserta yang melakukan atau terindikasi melakukan pelanggaran atau kecurangan akan didiskualifikasi dari babak semifinal.
13. **Keputusan juri tidak dapat diganggu gugat.**



LEMBAR SOAL BABAK SEMIFINAL PEMNAS TAHUN 2023
JENJANG SMA/MA/SEDERAJAT
90 menit

Soal 1. Pada papan dituliskan bilangan $2, \sqrt{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{5}}$. Pepem akan melakukan sebuah permainan, di mana setiap langkahnya mengikuti urutan berikut:

1. Pepem memilih dua bilangan pada papan, misalkan a dan b yang memenuhi syarat $ab > 1$.
2. Kedua bilangan yang dipilih dihapus, kemudian menuliskan dua bilangan baru pada papan, yaitu $a - \frac{1}{b}$ dan $b + \frac{1}{a}$.

Jika pada suatu kondisi langkah di atas tidak dapat dilakukan, maka permainan dihentikan. Apakah mungkin permainan berhenti dengan bilangan yang tertulis pada papan adalah $1, 1, 1, 1$?

Soal 2. Definisikan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ sebagai himpunan semua bilangan asli. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$(f(x))^3 + 3x^2 f(y) + 3x f(y^2) + y^3$$

merupakan bilangan kubik sempurna untuk setiap bilangan asli x dan y .

Catatan. Suatu bilangan bulat n dikatakan *kubik sempurna* apabila terdapat bilangan bulat a yang memenuhi $n = a^3$.

Soal 3. Untuk setiap tiga bilangan real positif a, b , dan c yang memenuhi $(a+b)(b+c)(c+a) = 8a^2b^2c^2$, maka buktikan bahwa

$$\frac{a^5 + b^5}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} + \frac{b^5 + c^5}{(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} + \frac{c^5 + a^5}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \geq \frac{3}{2}(abc)^{\frac{2}{3}}.$$

Tentukan kapan kondisi kesamaan terjadi.

Soal 4. Diberikan segitiga ABC yang tidak sama kaki dan ℓ merupakan garis singgung lingkaran luar segitiga ABC yang melalui titik C . Titik D dan E berturut-turut merupakan titik tengah segmen BC dan CA , kemudian garis AD dan garis BE memotong ℓ berturut-turut di titik A_1 dan B_1 . Garis AB_1 dan garis BA_1 memotong lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di titik X dan Y . Buktiakan bahwa X, Y, D , dan E terletak pada satu lingkaran.