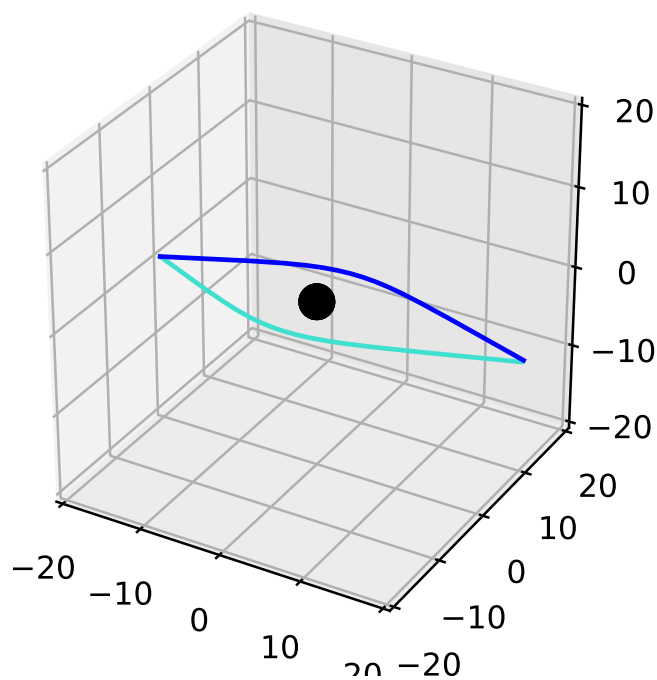


Renuka Singh Virk
Chemin de Ballègue 45C
1066 Epalinges
079/884.96.92
singhvirk.renuka@gmail.com

Kantonsschule Romanshorn
Klasse 3Mb
Maturaarbeit

Bewegung von Photonen in der Nähe eines schwarzen Lochs



Fach: Physik
Betreuungsperson: Dr. Andreas Schärer
Abgabetermin: 12. August 2019

Abstract

Der Zweck dieser Arbeit ist eine grafische Darstellung der Bewegung von Photonen in der Nähe eines Schwarzen Lochs zu entwickeln. Dafür benutzen wir *Hamilton'sche Gleichungen*, die die Bewegung der Photonen beschreiben. Die Gleichungen werden mit *Python* gelöst und grafisch dargestellt. Mithilfe der verschiedenen Orbits kann man den Einfluss jeder Koordinate verstehen und beschreiben.

Inhaltsverzeichnis

	Abstract	3
1	Einleitung	2
2	Hintergrundinformationen	4
2.1	Raum-Zeit	4
2.2	Zeitdilatation	4
2.3	Allgemeine Relativitätstheorie	6
3	Schwarze Löcher	9
3.1	Allgemeine Struktur	10
4	Arbeitsausführung	12
4.1	Hamilton Gleichungen	12
4.2	Code	14
5	Resultate	20
6	Diskussion	24
6.1	Geschlossene Kreisbahn	26
6.2	Schlussfolgerung	27
7	Literaturverzeichnis	29

1 Einleitung

“Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu’à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l’univers puissent, par cette cause, être invisibles.”

“Ein Leuchtkörper mit demselben Durchmesser wie die Erde, dessen Dichte zweihundertfünzfzigmal größer wäre als die der Sonne, würde aufgrund seiner Anziehungskraft keinen seiner Strahlen auf uns zukommen lassen.” – Pierre-Simon de Laplace, 18. Jh.¹

Schon seit dem 18. Jahrhundert hatte der Mensch die Möglichkeit eines schwarzen Lochs erdenkt. Zwar sind schwarze Löcher Objekte, von denen Licht sich nicht entfliehen kann, da die Fluchtgeschwindigkeit (d.h. die benötigte Geschwindigkeit um sich aus der

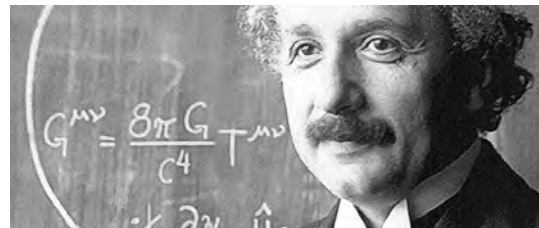


ABBILDUNG 1: ALBERT EINSTEIN (1879-1955)²

Gravitationskraft eines Gestirns zu befreien) zu gross ist (größer als die Lichtgeschwindigkeit c). Bereits mit der Theorie von Isaac Newton konnte Laplace (Laplace (1798)) diese Idee ausdrücken (Lazlo (2010)).

Mit der Zuleitung der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein am Anfang des 20. Jahrhunderts wurden schwarze Löcher mathematisch dargestellt und vorausgesagt.

¹Französischer Mathematiker, Astronomer und Physiker

²Quelle Bild: <https://www.einstein-inside.de>



ABBILDUNG 2: ERSTE AUFNAHME EINES SCHWARZEN LOCHS IM ZENTRUM DER 55 MILLIONEN ENTFERNTEN GALAXIE *Messier 87* IN 2019³

Schwarze Löcher stellen einen extremen Fall der allgemeinen Relativitätstheorie dar, da sie das Theater großartiger Spektakel sind, die die Gesetze der Relativitätstheorie auf die Spitze treiben. Vergehen der Zeit, kolossale Gravitation, Spaghettisierung sind Merkmale von schwarzen Löchern. Nämlich können die verrücktesten Ideen in der Nähe von schwarzen Löchern verwirklicht werden.

In dieser Arbeit untersuchen wir den Einfluss schwarzer Löcher auf Lichtteilchen, Photonen. Diese sind unsere einzige Chance, ein schwarzes Loch mit unseren Augen zu bemerken.

³Quelle Bild: <https://horizon-magazine.eu/article/astronomers-reveal-first-ever-image-black-hole.html>

2 Hintergrundinformationen

2.1 Raum-Zeit

Die Raum-Zeit ist eine mathematische Darstellung von Raum und Zeit, welche zwei untrennbare Begriffe sind. Sie beeinflussen sich gegenseitig. Diese Auffassung von Raum und Zeit ist eine der großen Umwälzungen des frühen 20. Jahrhunderts, insbesondere in der speziellen Relativitätstheorie. Was für das Verständnis dieser Arbeit sehr wichtig ist, ist dass der Raum die Zeit und umgekehrt beeinflusst.

Man denke zum Beispiel an einen Mann, der sich auf seinem Sofa befindet. Wenn er drei Stunden bewegungslos bleibt, würde man sagen, dass seine Koordinaten sich nicht verändert haben. Aber wenn man die Zeit dazu verbindet, bewegt sich der Mann in die Zeit. Seine x -, y -, z -Koordinaten bleiben also gleich, aber seine t -Koordinate wird grösser (Ellis & Williams (2000)).

Auf der Abbildung sieht man, dass der Mann (y-Achse) immer am gleichen Ort bleibt. Die rote Kurve beschreibt z.B. die Bewegung eines Mannes, der sich um den Mann dreht. In der Raum-Zeit ist nichts unbeweglich.

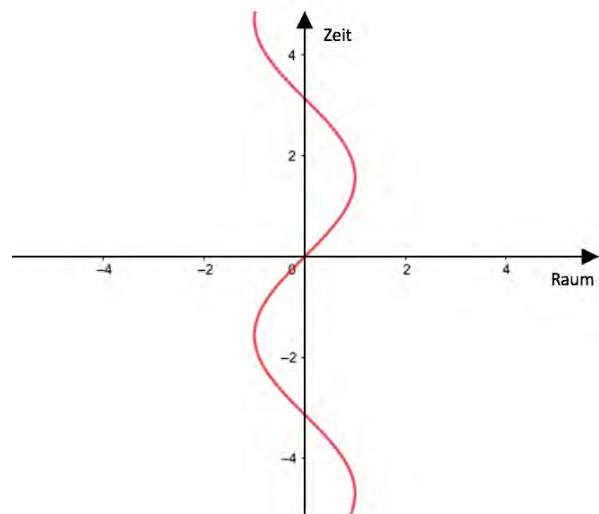


ABBILDUNG 3: BEWEGUNG EINES MANNES HERUM EINES ANDEREN MANNES, DER BEWEGUNGSLOS IST

2.2 Zeitdilatation

Das Konzept der Zeitdilatation wurde in der Relativitätstheorie eingeführt. Dies sagt aus, dass es keine absolute Zeit gibt, sondern dass jedes Objekt sein eigenes Bezugssystem hat. Ein einfaches Beispiel, um sich dieses Phänomen vorzustellen, ist das Beispiel eines bewegten Lasers.

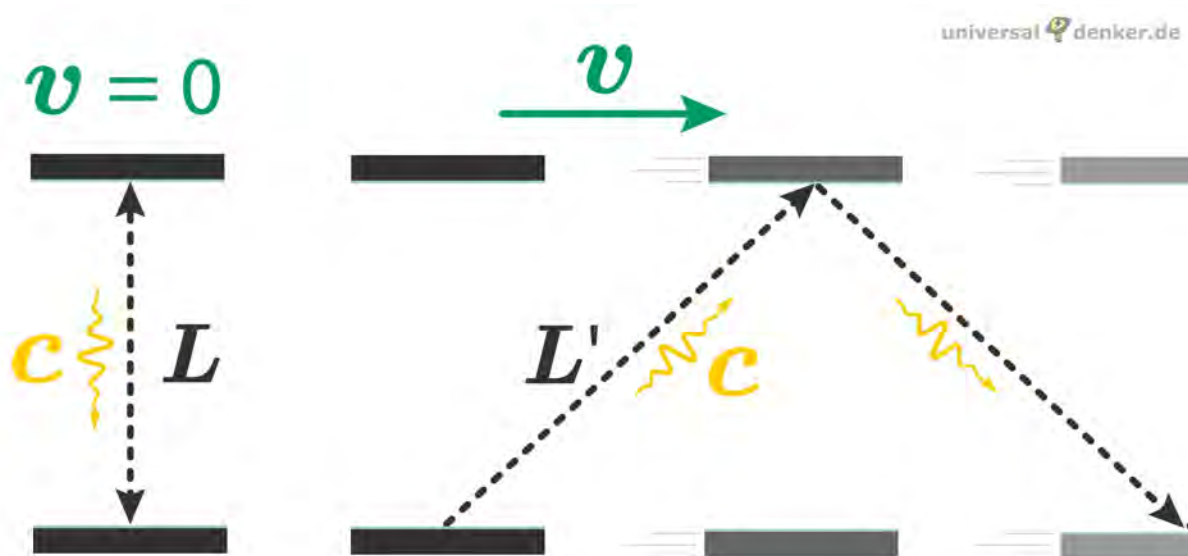


ABBILDUNG 4: BEWEGTE UND UNBEWEGTE LICHTUHR ⁴

Wenn ein sich Lichtstrahl zwischen zwei Spiegeln hindurchschlängelt, sieht ein Beobachter bewegungslos gegenüber den Spiegeln eine Zeitintervall $\Delta T = 2\frac{L}{c}$ (wo c die Lichtgeschwindigkeit ist), denn $v = \frac{d}{t}$. Wenn der Beobachter aber durch das Fenster eines Raumschiffs das gleiche Phänomen beobachtet, sieht er, dass der Strahl eine Strecke L' , welche länger als L ist, durchläuft. Das heisst also, dass aus der Sicht des Beobachters, der sich nicht im Raumschiff befindet, das Licht in Bewegung mehr Zeit braucht als das bewegungslos. Die Zeit verstreicht in dem Raumschiff langsamer (Schmüser (2011)).

Es wurde schon erwähnt, dass der Raum die Zeit beeinflusst. Das zeigt sich in diesem Beispiel, da der Ort wo man sich befindet unseres Bezugssystem definiert. Bei dem Beispiel des Lasers im Raumschiff ist das Bezugssystem des Beobachters im Raumschiff in Bewegung, folgt also, dass er die Bewegung des Lasers nicht bemerkt, da sie die gleiche Bewegung hinnehmen. Für den Beobachter auf der Erde ist es nicht der Fall.

⁴Quelle Bild: <https://universaldenker.de/illustrationen/269>

2.3 Allgemeine Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie ist eine Theorie der Gravitation. Am Anfang des 20. Jahrhunderts bemerkt Einstein etwas über das damalige klassische Gravitationsgesetz von Isaac Newton. Dieses beschreibt die Erdbeschleunigung unabhängig von der Masse auf dem sie wirkt. Mathematische Erklärung:

$$\vec{G} = \vec{F}_G \iff m \vec{g} = \frac{GMm}{r^2} \vec{u} \iff \vec{g} = \frac{GM}{r^2} \vec{u} \quad (1)$$

\vec{G} Gewichtskraft

\vec{F}_G Gravitationskraft

m Masse des beschleunigten Objekts

g Erdbeschleunigung

G Gravitationskonstante

M Masse des Gestirns

r Abstand vom Gestirn zum Objekt

\vec{u} Richtungsvektor

Dies bedeutet, dass die Beschleunigung der Schwerkraft für alle Objekte in der gleichen Entfernung eines Sterns (z. B. die Sonne) gleich ist, unabhängig von ihrer Masse. Mann könnte also diese Beschleunigungen geometrisch darstellen, ohne die Masse des beschleunigten Objekts zu kennen. Diese geometrische Darstellung nennt man ein Gravitationsfeld.

Einstein zieht davon also ab, dass die Gravitation als geometrisches Gesetz geschaut werden kann. Die Gravitation wäre also mehr eine geometrische Besonderheit als eine Kraft. In 1912, als er seine Theorie wieder entwickelt, stellt er fest, dass seine Theorie in einem euklidischen Raum nicht funktioniert. Das heisst also, dass seine Theorie in einem

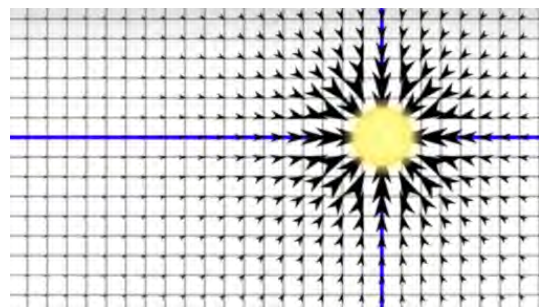


ABBILDUNG 5: GRAVITATIONSFELD ⁵

⁵Quelle Bild: <https://www.youtube.com/watch?v=6JLgWX9iq-go&t=833s>

Raum ohne Krümmung (Raum, wo zwei parallele Linien nie treffen) nicht funktioniert. Dies kann so begründet werden: Wenn der Raum keine Krümmung hätte, würde seine Theorie nicht erklären warum die Planeten sich um die Sonne drehen (Louapre (2011), Louapre (2018)).

Mit der Theorie von Einstein sind es nicht die Planeten, die sich um die Sonne drehen, sondern der Raum, der sich so krümmt, dass die Planeten sich in Orbits bewegen. Mit der Einführung der Krümmung der Raum-Zeit erklärt seine Theorie die Bewegung von Massen in der Nähe anderer Körpern. Wenn nämlich die Sonne verschwinden würde, würde die Erde eine gerade Umlaufbahn folgen (Gunn (2012)).

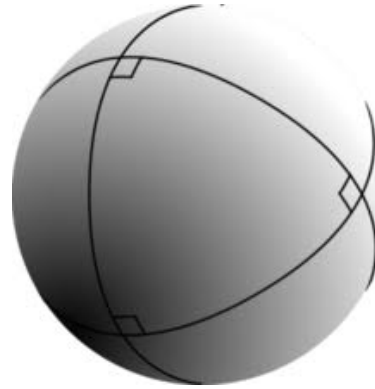


ABBILDUNG 6: BEISPIEL EINES NICHT EUKLIDISCHEN RAUMS ⁶

In 1915 prüft Albert Einstein seine Theorie und berechnet den Orbit des Merkurs sehr präzise, was die Theorie von Newton nicht geschafft hatte. Da die Idee der Raum-Zeit als geometrische Darstellung eingeführt war, konnte er die Eigenschaften seiner speziellen Relativitätstheorie einfügen und zwar spielt die Zeit-Dilatation eine besondere wichtige Rolle. Wie schon erwähnt krümmt die Materie die Raum-Zeit. Das bedeutet also, dass die räumlichen Eigenschaften verändert werden, aber auch, dass die Zeit verändert wird (da wenn die Längen grösser werden muss die Zeit "langsamer" vergehen, so dass c immer gleich bleibt).

Man liest manchmal in Science-Fiction Zeitungen, dass man in der Nähe eines Schwarzen Lochs "langsamer" vergeht. Zwar ist die Zeit in einem starken Gravitationsfeld nicht die gleiche wie im Weltall ohne Krümmung. Das heisst also, dass eine Uhr bei einem Schwarzen Loch, im Vergleich zu einer Uhr in einem Ort wo die Krümmung schwach ist, sich verspätet.

⁶Quelle Bild: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_\(géométries_non_euclidiennes\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_(géométries_non_euclidiennes))

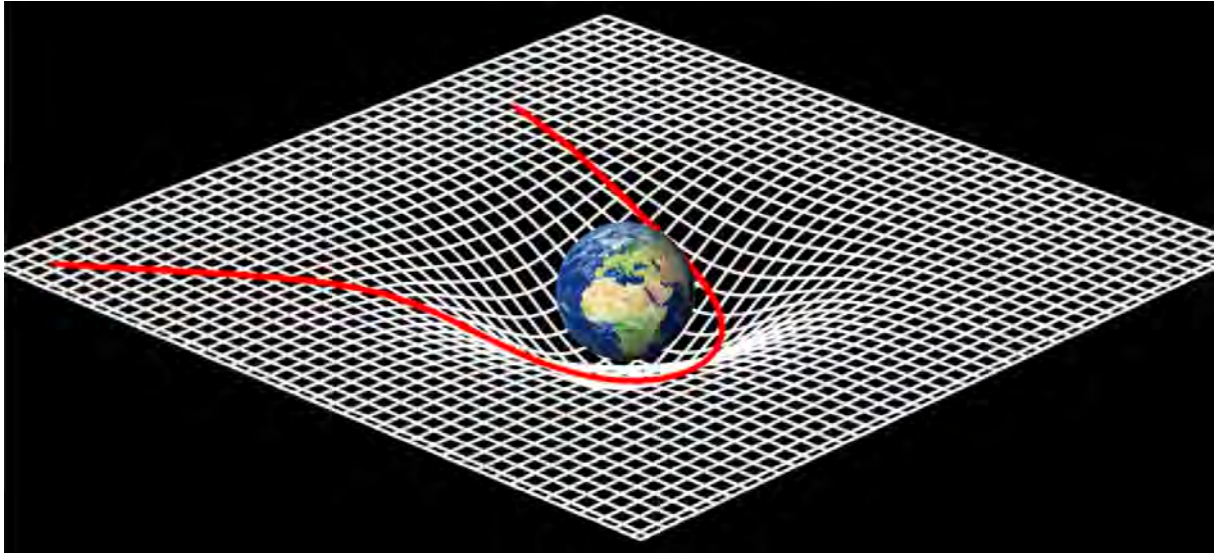


ABBILDUNG 7: GRAFISCHE DARSTELLUNG DER RAUM-ZEIT ⁷

“Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.”
 (Wheeler & Ford (2000)) - John Archibald Wheeler⁸

“Die Materie sagt dem Raum, wie er sich biegen soll, und der Raum sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll.“

⁷Quelle Bild: <https://www.youtube.com/watch?v=E5LvA8FHBxs&t=403s>

⁸US-amerikanischer theoretischer Physiker

3 Schwarze Löcher

Schwarze Löcher sind interstellare Objekte, die die Raum-Zeit sehr stark krümmen. Sie fassen eine grosse Masse in einem infinitesimalen Punkt, die Singularität. Daraus folgt also eine Besonderheit: Licht kann sich nicht “entfliehen“. Die Fluchtgeschwindigkeit eines schwarzen Lochs ist grösser als die Lichtgeschwindigkeit. Das heisst, wenn Photonen zum schwarzen Loch gehen, werden sie nie zurückkehren und können unsere Augen (Satellit) nicht erreichen. Wir können sie deshalb nicht direkt sehen und das ist der Grund, warum sie “schwarz“ sind.(Barrau (2017))

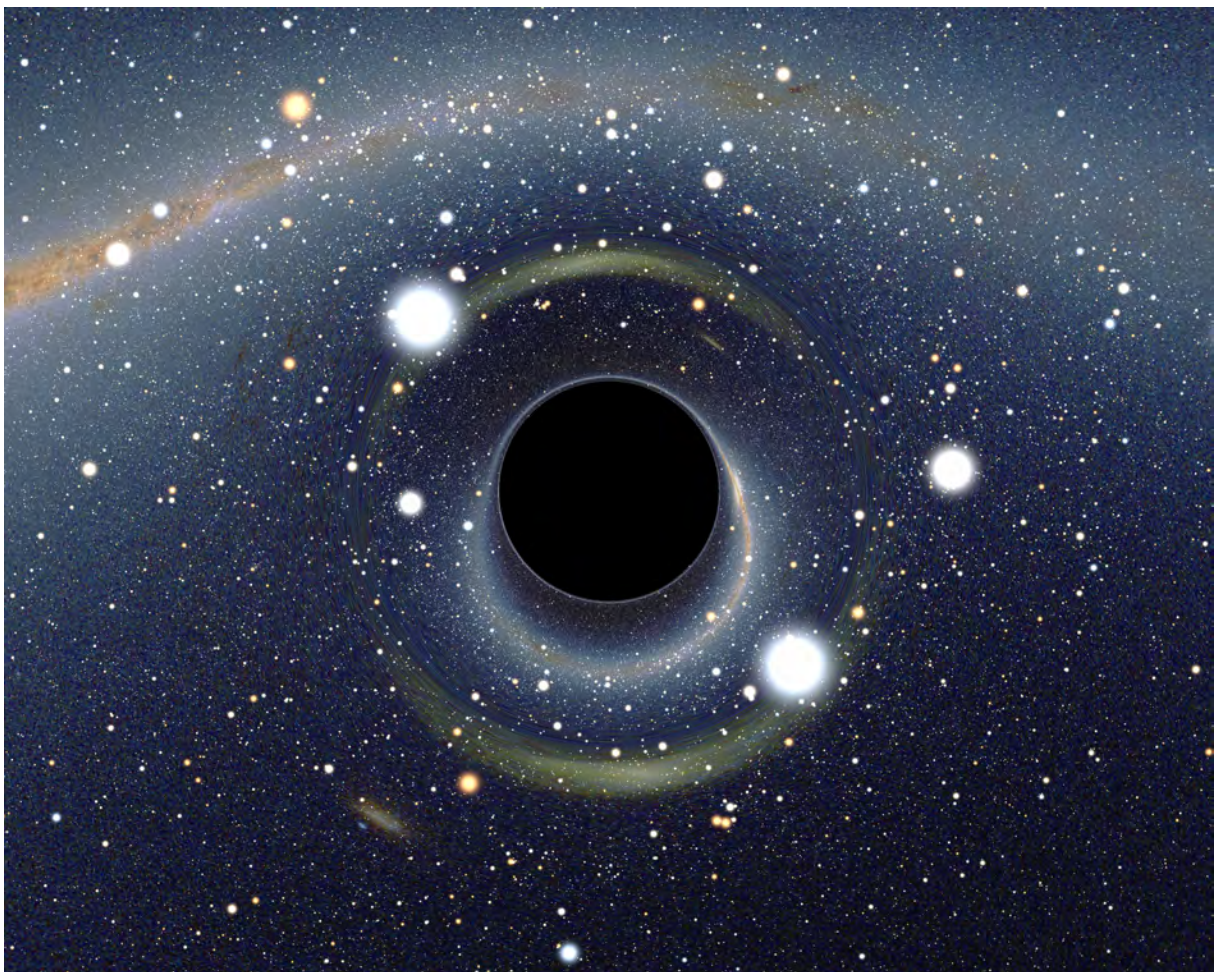


ABBILDUNG 8: SCHWARZSCHILD-LÖSUNG EINES SCHWARZEN LOCHS ⁹

Es gibt verschiedene Arten von schwarzen Löchern, je nachdem, ob sie einen kinetischen Im-

⁹Quelle Bild: <https://www.markushanke.net/more-on-schwarzschild-black-holes/>

puls und eine elektrische Ladung haben oder nicht. In unserem Fall hat das schwarze Loch keine, d.h. es ist statisch, kugelförmig, nicht rotierend und hat keine elektrische Ladung. Die Metrik, die diese schwarzen Löcher beschreibt, wurde im Jahr 1916 von Astronom Karl Schwarzschild gefunden. Sie ist eine Lösung der Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein (1915 veröffentlicht) (Schwarzschild (1916)). Diese schwarzen Löcher entstehen durch die Implosion eines Sterns.

3.1 Allgemeine Struktur

Um den letzten Horizont wo man Licht noch sieht zu finden muss man den Begriff des *Linienelements* einführen. Man verwendet dieses um Distanzen in der Raum-Zeit zu messen. In der Nähe schwarzer Löcher ist das Linienelement folgendes:

$$\Delta s = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (\Delta t^2) + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)} (\Delta r^2) \quad (2)$$

c Lichtgeschwindigkeit

G Gravitationskonstante

M Masse des schwarzen Lochs

r Abstand vom Zentrum des schwarzen Lochs

Man bemerkt in dieser Formel, dass bei $r = 0$ und $r = \frac{2GM}{c^2}$ eine Division durch null vorkommt. Zwar sind diese zwei Stellen Singularitäten. Bei $r = 0$ ist man in der Singularität, und bei $r = \frac{2GM}{c^2}$ ist man am letzten Ort, wo man noch etwas sehen kann. Dieser Abstand heißt “der Schwarzschildradius“. Er begrenzt den Ereignishorizont, letzter Horizont wo man Licht noch sehen kann.

Die Formel des Schwarzschildradius ist folgende:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (3)$$

Bevor diesem Horizont gibt es die Photonsphäre, wo alle Photonen in kreisrunde Orbits rühren.

In der Mitte des schwarzen Lochs befindet sich die Singularität. Die Singularität ist der Ort wo unsere aktuelle Theorie scheitert. Dort ist die Krümmung der Raum-Zeit unendlich, was die allgemeine Relativitätstheorie nicht erlaubt. Wir brauchen also eine neue Theorie.



ABBILDUNG 9: STRUKTUR EINES SCHWARZEN LOCHS (AUS DEM ENGLISCH ÜBERSETZT) ¹⁰

¹⁰Quelle Bild: https://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole

4 Arbeitsausführung

4.1 Hamilton Gleichungen

Diese Arbeit interessiert sich für die *Bewegung* von Photonen. Man braucht also Bewegungsgleichungen. Um die Bewegungsgleichungen zu kriegen verwendet man den Hamiltonian des Systems. Dieser beschreibt die gesamte Energie des Systems; d.h. also die Summe aus potentieller und kinetischer Energien. Der Hamiltonian ist folgender:

$$H = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{p_r^2}{2} + \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (4)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen haben wir $c = 1$ und $G = 1$ gesetzt. Wenn wir also M schreiben, meinen wir eigentlich $\frac{GM}{c^2}$.

Wir wissen ja schon, dass der Schwarzschildradius $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ ist. Da R_s und M zusammenhängend sind schreiben wir M nach R_s , so dass wir nur eine Variable haben. Man hat also $M = \frac{R_s}{2}$. Jetzt können wir die Gleichung nochmals schreiben:

$$H = - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} + \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \frac{p_r^2}{2} + \left(\frac{p_\theta^2}{2r^2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (5)$$

Für das Licht haben wir $H = 0$.

Das Ziel ist, die Entwicklung eines Vektors zu berechnen. Man wählt also die Anfangsbedingungen und mit Gleichungen, die jeden Parameter beschreiben, berechnet man jede einzelne Koordinate zu jedem Zeitpunkt in einem Intervall $\Delta\tau$ (da t eine Koordinate des Vektors des Photons ist). $\Delta\tau$ ist die **Eigenzeit**. Die Eigenzeit die Zeit für ein Objekt, das an das Linienelement entlanggeht. Bei Photonen ist es ein bisschen merkwürdig, denn sie haben keine Eigenzeit. In diesem Fall ist es ein gleichmässiges Massintervall auf dem Linienelement.

Der Hamiltonian weist jede Koordinate auf, die man braucht. Man kann daher die Ableitungen einfach ausdrücken und dann diese "Rückwärtsableiten", um die Koordinaten des Vektors zu finden.

Die Koordinaten sind folgende : r, θ, ϕ, t (ct),

$p_r, p_\theta, p_\phi, p_t$.

r, θ und ϕ sind die Kugel-Koordinaten des Photons. r ist der Abstand vom Zentrum des schwarzen Lochs zum Photon, θ ist der Winkel zwischen die z -Achse und die Gerade durch den Nullpunkt und die Projektion des Photons auf die z -O- y -Fläche. ϕ ist der Winkel zwischen der x -Achse und der Projektion des Photons auf die x -O- y -Fläche. p_r, p_θ, p_ϕ

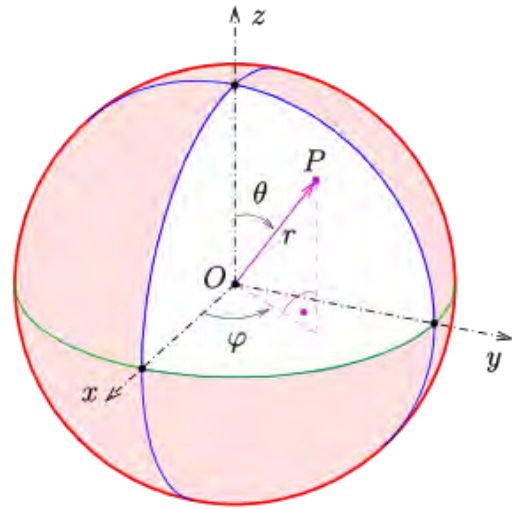


ABBILDUNG 10: KUGELKOORDINATEN ¹¹

und p_t sind die Momentums, d.h. sie geben eine Information über den Vektor des Photons. Die vier ersten Koordinaten sagen wo sich der Photon befindet, die vier weiteren Koordinaten sagen wie er sich bewegt (Impuls in jeder Richtung, die Länge des Vektors ist nicht relevant, denn die Geschwindigkeit ist sowieso der Lichtgeschwindigkeit).

Aus dem Hamiltonian kriegt man die Hamiltonsche Bewegungsgleichungen (*Hamilton's equations of motion*) durch (Montague (1995)):

$$\dot{q}_k = \frac{\partial q_k}{\partial \tau} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad (6)$$

$$\dot{p}_k = \frac{\partial p_k}{\partial \tau} = -\frac{\partial H}{\partial d_k} \quad (7)$$

Wobei die q_k -Werte die verallgemeinerten Ortskoordinaten sind und die p_k -Werte die verallgemeinerten Impulskoordinaten.

Man wendet diese Regeln auf die anderen Koordinaten an:

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta p_\phi^2}{r^2 \sin^3 \theta} \quad (10)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \quad (12)$$

$$\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial p_t} = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} p_t \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2} \quad (11)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (13)$$

¹¹Quelle Bild: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten#/media/Datei:Kugelkoord-def.svg>

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) p_r \quad (14)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} + \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} - \frac{R_s p_r^2}{2r^2} - \frac{p_t^2 R_s}{2r^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2} \quad (15)$$

Wir können die Anfangsbedingungen frei wählen, aber diese müssen trotzdem die Bedingung $H = 0$ erfüllen, sonst wären die Orbits keine Photonen-Orbits, sondern Orbits von Teilchen mit einer Masse, welche Photonen nicht besitzen. Wir wählen also sieben Koordinaten und berechnen die achte. Bei der Hamilton-Funktion ist es einfacher p_t nach H zu berechnen, denn diese Koordinate nur einmal vorkommt und ziemlich einfach zu berechnen ist. Wir haben also:

$$p_t = \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 p_r^2 + \frac{p_\theta^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2} + \frac{p_\phi^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2 \sin^2 \theta}} \quad (16)$$

In unserem Fall setzen wir $\theta = \frac{\pi}{2}$, d.h. 90° . Wir setzen auch $p_\theta = \dot{p}_\theta = \dot{\theta} = 0$, so dass θ immer gleich bleibt. Die z-Koordinaten des Photons sind folglich $z = 0$, d.h., dass der Photon sich in einer Ebene bewegt.

Diese weiteren Bedingungen ermöglichen uns, die Gleichungen (5) und (16) noch weiter zu vereinfachen (Saha (2018)).

$$H = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\phi^2}{2r^2} \quad (17)$$

$$p_t = \sqrt{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^2 p_r^2 + \frac{p_\phi^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}{r^2}} \quad (18)$$

4.2 Code

Wie früher erwähnt ist es einfacher, die Ableitungen mit einem Computer zu behandeln. Zwar kann ein Computer die Koordinaten berechnen und den Orbit direkt grafisch zeigen. Natürlich wäre es ohne Maschine viel zu mühsam. Wir programmieren das Ganze mit *Python*, da diese Sprache sehr einfach zu lernen und zu benutzen ist.

Zuerst müssen wir die Programmbibliotheken importieren. Man braucht sie für die Handhabung von Vektoren, Matrizen und mathematische Darstellungen aller Art.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import math
5 from math import *
6 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Man kann danach die Anfangsbedingungen und Bewegungsgleichungen codieren.

Bemerkung: Wenn das Photon ins Loch hineinfällt, kommt eine Division durch null vor. Um diese zu vermeiden programmiert man die Bewegungsgleichungen so, dass die Photonen zu nahe am schwarzen Loch weggelassen werden.

```
7 ptheta = 0
8 rs = 2 # schwarzschildradius
9 t0 = 0
10 theta = np.pi/2

11 def func(f, T, rs):
12     # f
13     t, r, theta, phi, pt, pr, ptheta, pphi = f
14     # derivatives
15     if r > rs+0.2:
16         dtdT = -((1-rs/r)**-1)*pt
17         drdT = (1-rs/r)*pr
18         dthetadT = ptheta/(r**2)
19         dphidT = pphi/((r**2)*(np.sin(theta)**2))
20         dptdT = 0
21         dprdT = ((ptheta**2)/(r**3)) + ((pphi**2)/(np.sin(theta)
22                 *(r**3))) - ((rs*(pr**2))/(2*(r**2))) -
23                 (((pt**2)*rs)/(2*(r**2) * ((1-rs/r)**2)))
24         dpthetadT = np.cos(theta)*(pphi**2)/((np.sin(theta)**3)
```

```

                *(r**2))
23         dpphidT = 0
24     else:
25         dtdT = 0
26         drdT = 0
27         dthetadT = 0
28         dphidT = 0
29         dptdT = 0
30         dprdT = 0
31         dpthetadT = 0
32         dpphidT = 0
33     return(dtdT, drdT, dthetadT, dphidT, dptdT, dprdT,
            dpthetadT, dpphidT)

34 # Anfangsbedingungen
35 r0 = 15*rs
36 phi0 = np.pi/2
37 pr0 = -0.6
38 pphi0 = 2

```

Wie früher erwähnt muss man p_t so berechnen, dass die Bedingung $H = 0$ erfüllt wird. In diesem Beispiel gibt es nur einen Photon, aber in der Tat wird man mehrere codieren. Es wird also einfacher, keine Wiederholungen zu schreiben, sondern Funktionen (Zeile 29-31). f_0 ist der Vektor zum Punkt $\tau = 0$. Mit `odeint` rufen wir die Lösung auf.

```

39 def time_momentum(r, pr, pphi):
40     pt = -(sqrt((((1-(rs/r))**2)*(pr**2))
41                + (pphi**2)*(1-rs/r)/(r**2))))
42     return(pt)

42 pt0 = time_momentum(r0, pr0, pphi0)

43 f0=[t0, r0, theta, phi0, pt0, pr0, ptheta, pphi0]

```

```

44 #Zeitintervall zwischen 0 und 3450 [s] mit 9000 Berechnungen
45 T = np.linspace(0, 3450, 9000)

46 xx=odeint(func, f0, T, args=(rs,))

47 # Werte aus der odeint-Funktion definieren
48 r00 = xx[:, 1]
49 theta00 = xx[:, 2]
50 phi00 = xx[:, 3]
51 pt00 = xx[:, 4]
52 pr00 = xx[:, 5]
53 pphi00 = xx[:, 7]

```

Man sollte nicht vergessen, dass bei Photonen $H = 0$. Diese Bedingung muss kontrolliert werden.

```

54 # Hamiltonian
55 def Hamiltonian(r, pt, pr, pphi):
56     H = (-((1-rs/r)**-1)*(pt**2)/2 + (1-rs/r)*(pr**2)/2
           + (pphi**2)/(2*(r**2)))
57     return(H)

58 H0 = Hamiltonian(r00, pt00, pr00, pphi00)
59 print(H0)

```

Wir arbeiten in Kugelkoordinaten und müssen diese Koordinaten umwandeln, da der Computer in Kartesischen-Koordinaten berechnet.

```

60 # Kugel --> Kartesische Koordinaten
61 def sph2cart(r, phi, theta):
62     X = r * np.cos(phi) * np.sin(theta)
63     Y = r * np.sin(phi) * np.sin(theta)
64     Z = r * np.cos(theta)

```

```
65     return(X, Y, Z)
```

```
66 X0, Y0, Z0 = sph2cart(r00, phi00, theta00)
```

Bis jetzt haben wir nichts mit dem Ereignishorizont getan. Nämlich darf man nicht vergessen, eine schwarze Kugel einzufügen. Diese wird durch einfache Kugel-Gleichungen definiert und als Radius wird R_s verwendet.

```
67 # schwarze Kugel
```

```
68 fig = plt.figure()
```

```
69 ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")
```

```
70 u = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
```

```
71 v = np.linspace(0, np.pi, 100)
```

```
72 x = rs * np.outer(np.cos(u), np.sin(v))
```

```
73 y = rs * np.outer(np.sin(u), np.sin(v))
```

```
74 z = rs * np.outer(np.ones(np.size(u)), np.cos(v))
```

```
75 # plot schwarze Kugel
```

```
76 ax.plot_surface(x, y, z, rstride=4, cstride=4, color='k')
```

Zuletzt muss man das ganze plotten und Grenzen wählen.

```
75 # plot Umlaufbahnen
```

```
76 plt.plot(X0, Y0, Z0, 'r')
```

```
77 # Limits
```

```
78 axlim = 25
```

```
79 ax.set_xlim(-axlim, axlim)
```

```
80 ax.set_ylim(-axlim, axlim)
```

```
81 ax.set_zlim(-axlim, axlim)
```

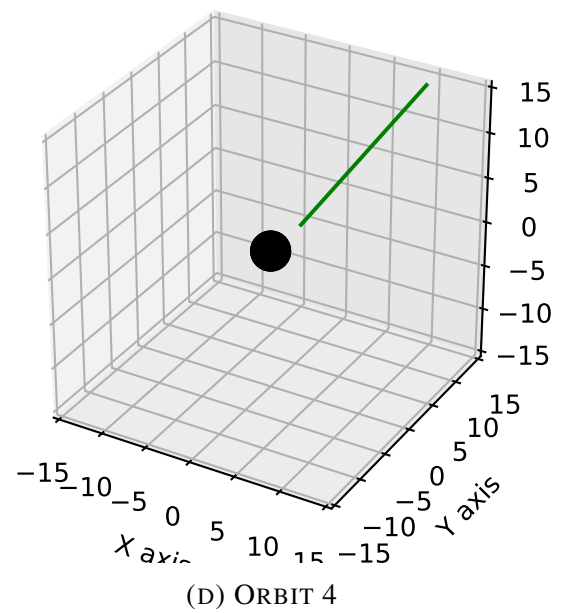
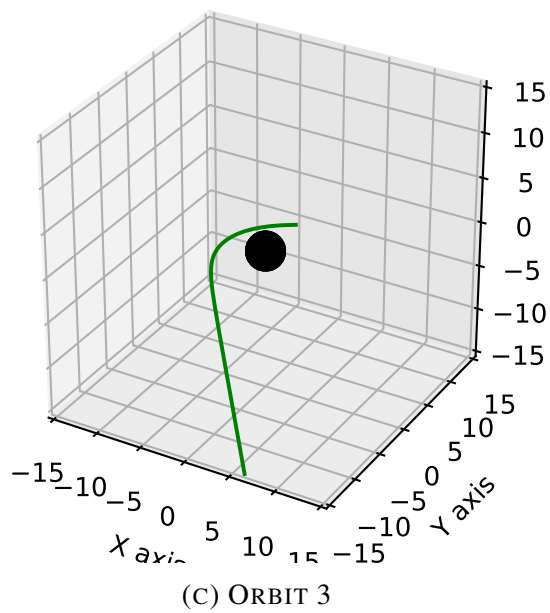
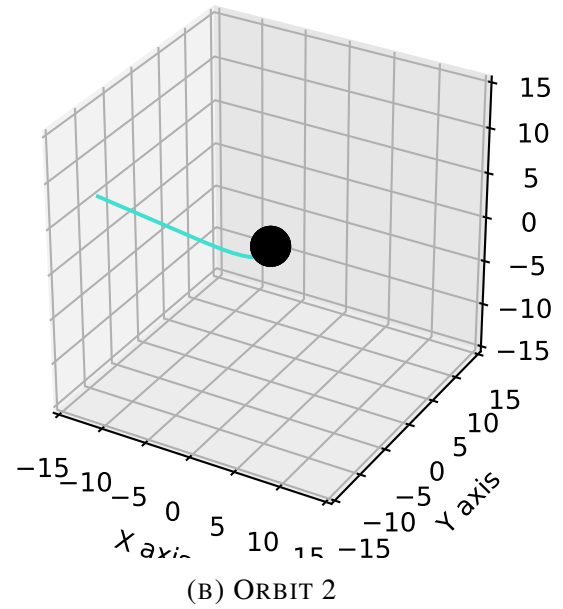
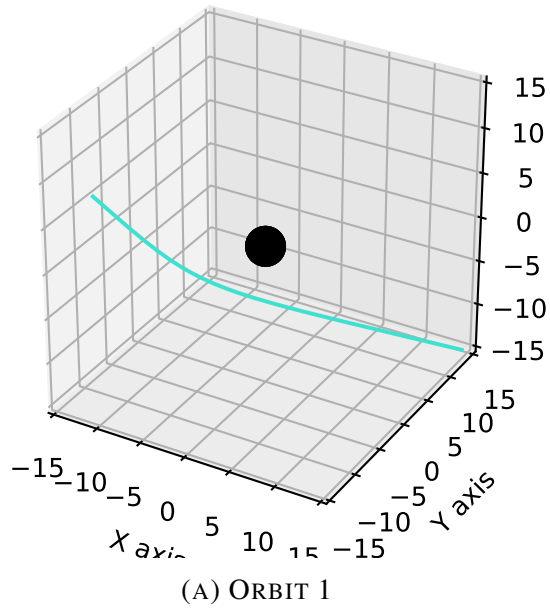
```
82 # Labels
```

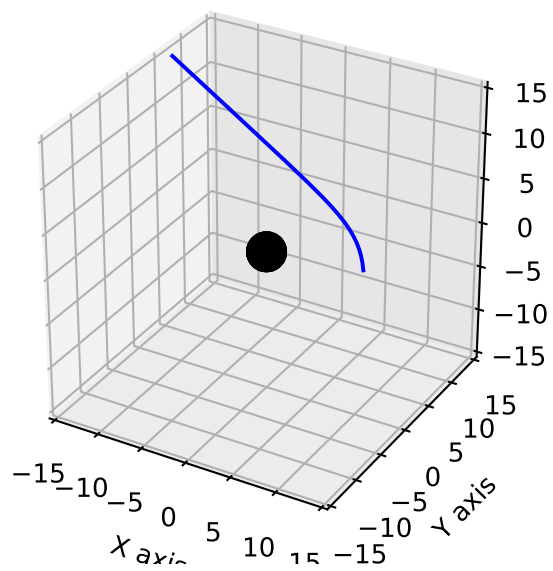
```
83 ax.set_xlabel('X axis')
84 ax.set_ylabel('Y axis')
85 ax.set_zlabel('Z axis')

86 plt.show()
```

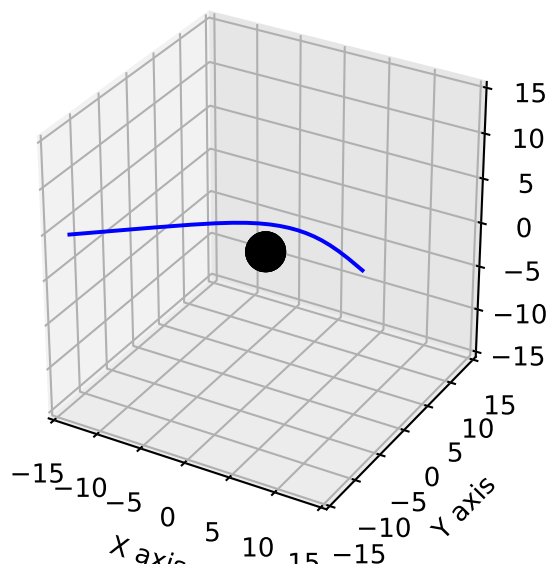
5 Resultate

Hier sind ein paar Orbits, die mit dem Code erhalten wurden :

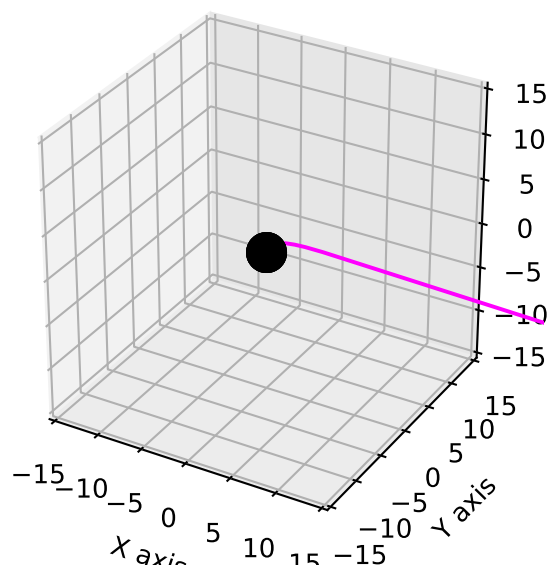




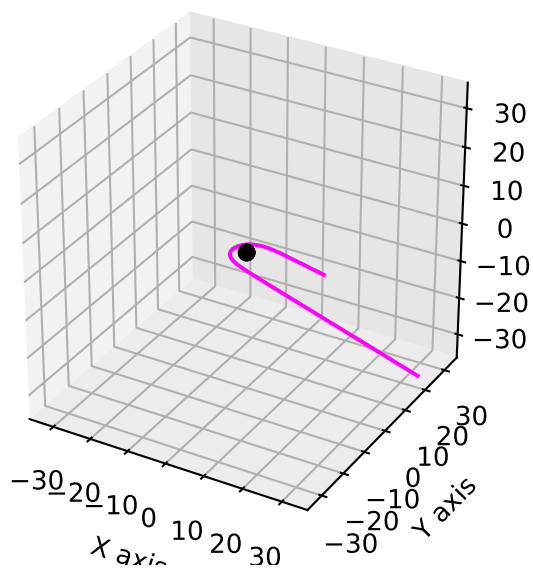
(E) ORBIT 5



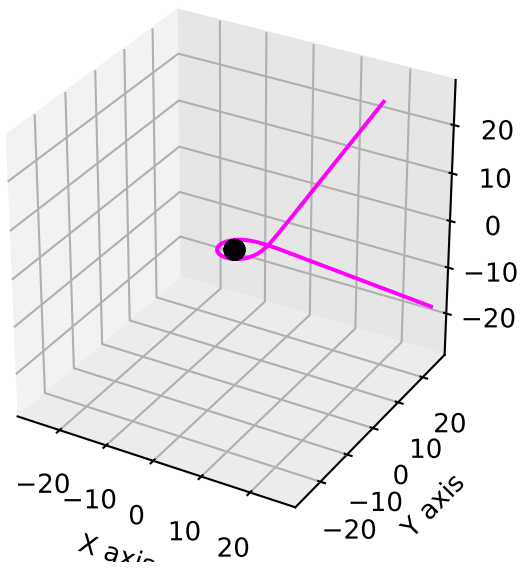
(F) ORBIT 6



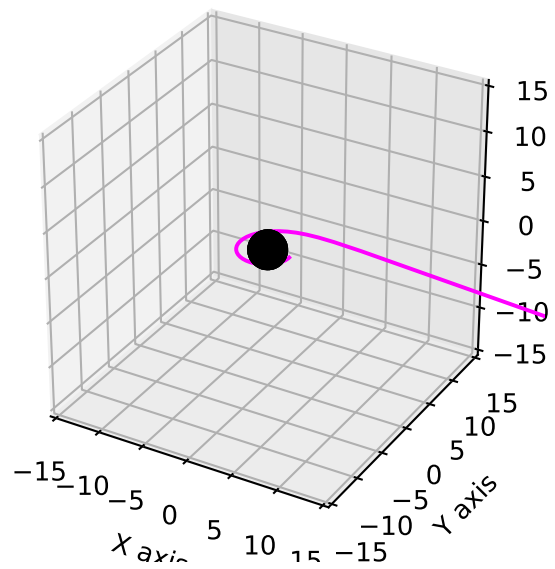
(G) ORBIT 7



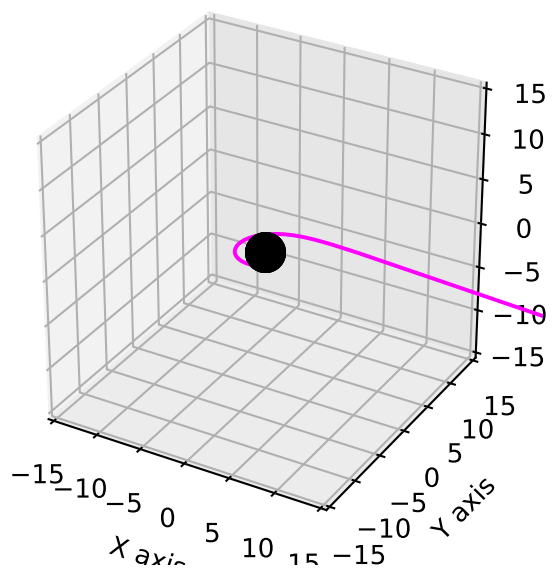
(H) ORBIT 8



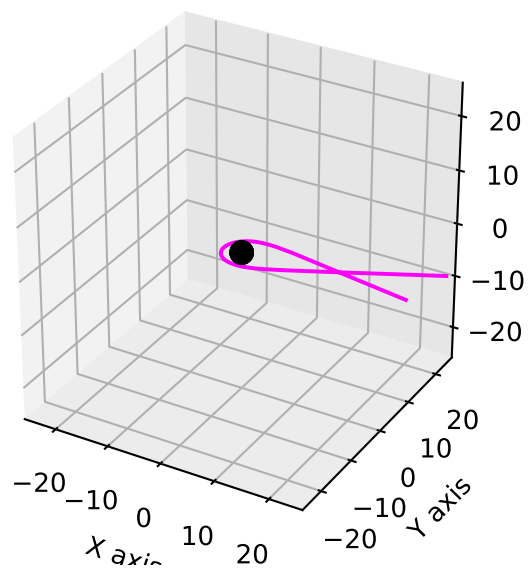
(I) ORBIT 9



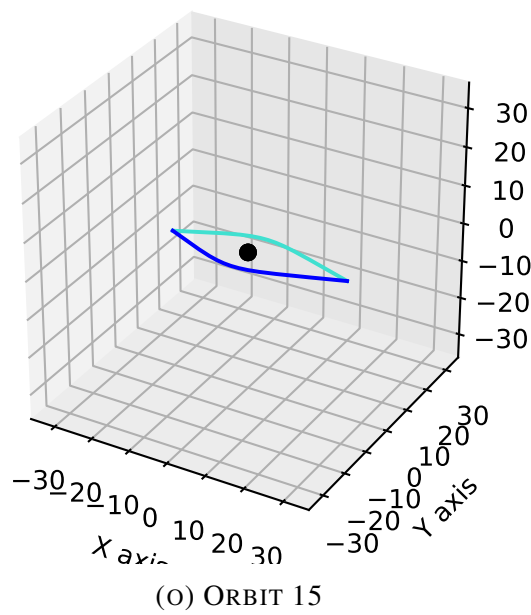
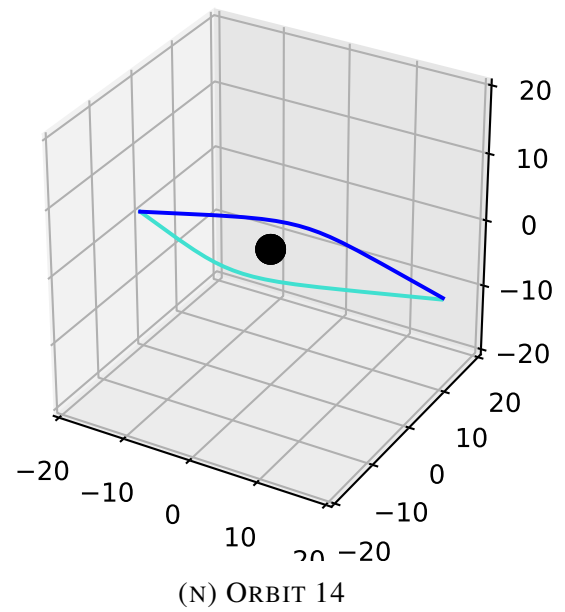
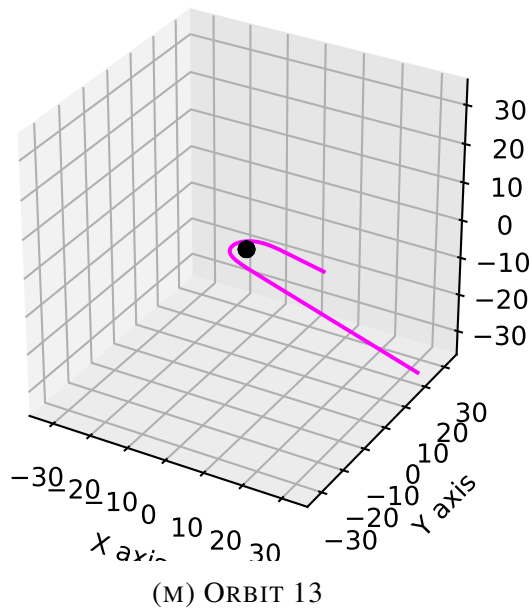
(J) ORBIT 10



(K) ORBIT 11



(L) ORBIT 12



N.B.: die für die grafische Darstellung verwendete Bibliothek ist für 3D-Umlaufbahnen nicht optimal: sie berücksichtigt nicht, was sich im Vordergrund oder im Hintergrund befindet.

6 Diskussion

Es gibt vier Hauptarten von Umlaufbahnen.

1. Die erste Art ist wenn das schwarze Loch gar nichts zur Umlaufbahn verändert. (Abb. (D))
2. Die zweite Art ist wenn das Photon abgelenkt wird. (Abb. (A), (C), (E), (F), (N), (O))
3. Die dritte Art ist wenn das Photon umgelenkt wird. (Abb. (H), (I), (L), (M))
4. Die vierte Art ist wenn das Photon ins Loch hineinfällt. (Abb. (B), (G), (J), (K))

Photonen sind sehr heikel und kleine Änderungen können eine grosse Wirkung haben. Man muss also sehr genau mit den Anfangsbedingungen spielen, um schöne Orbits zu kriegen. Diese erlauben uns den Einfluss jeder Koordinate zu beweisen. Wenn man nämlich die Abbildungen (A) und (B) anschaut, bemerkt man den Einfluss von p_r , da alle anderen Anfangswerte gleich sind ($r = 10 r_s$, $\phi = 5\pi$, $p_\phi = 5$). Bei der ersten Abbildung ist $p_r = -0.5$. Bei der zweiten ist dieser Wert $= -1.5$. Das heisst, in der Nähe des schwarzen Lochs wird r kleiner. Wenn p_r gross ist, dann wird r grösser. Das ist der Fall bei den Abbildungen (C) und (D). Die beiden Orbits haben die gleiche Anfangswerte ($r = 3 r_s$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $p_\phi = 2$). Bei der Abbildung (C) ist $p_r = -0.3$, bei der Abbildung (D) ist $p_r = 5$. Besser gesagt wird das Photon bei Abbildung (D) vom schwarzen Loch abgerückt.

Wenn man die p_ϕ -Koordinate ändert bemerkt man, dass der Einfluss ziemlich ähnlich ist. Dies ist der Fall bei den Abbildungen (L) und (M), wobei p_r kleiner in der Abbildung (L) ist. Wenn p_r oder p_ϕ zu klein wird, geht das Photon ins schwarze Loch. Das kann man bei den Abbildungen (B), (G), (J) und (K) beobachten.

Man könnte also die Einflüsse so zusammenfassen: je kleiner der Impuls (p_r oder p_ϕ) ist, desto gekrümmter wird die Kurve, und desto näher geht das Photon an das schwarze Loch. Nämlich hat der Impuls p_r einen Einfluss auf der r -Koordinate. Er beschreibt ihre Entwicklung.

Der perfekte Kreisorbit wäre bei $\dot{r} = 0$ und $\dot{p}_r = p_r = 0$. Das würde bedeuten, dass der Radius und der Impuls sich nie verändern. Wenn r konstant ist, dann ist p_r logischerweise gleich null.

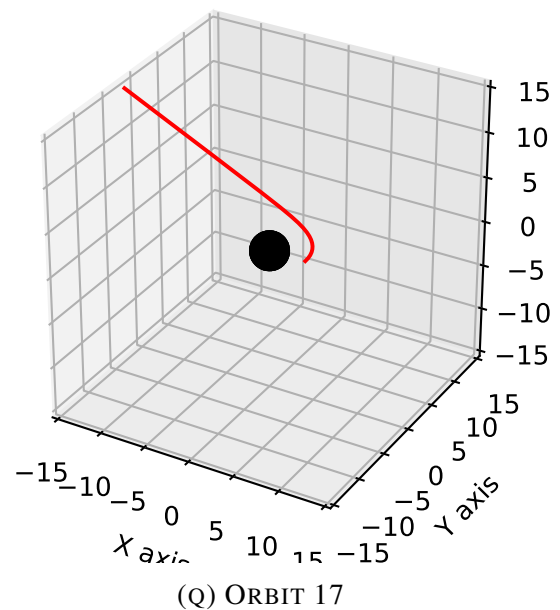
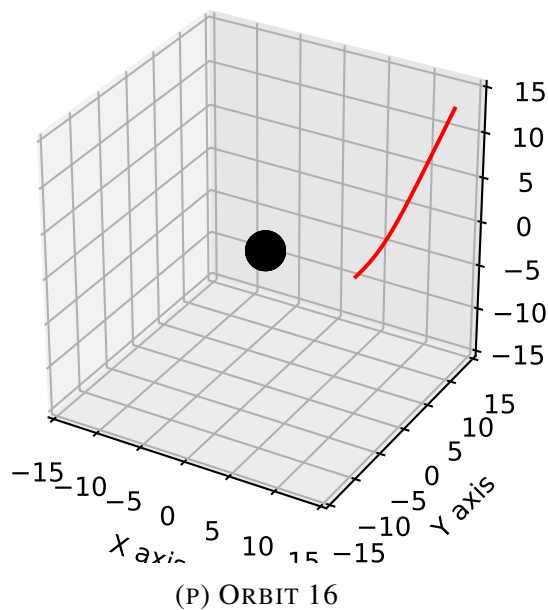
Wenn man die Gleichung (15) anschaut, bemerkt man, dass p_ϕ einen Einfluss auf die Ableitung von p_r , und folglich auch auf r hat. Wenn p_ϕ jedoch kleiner ist, dann wird \dot{p}_r auch kleiner.

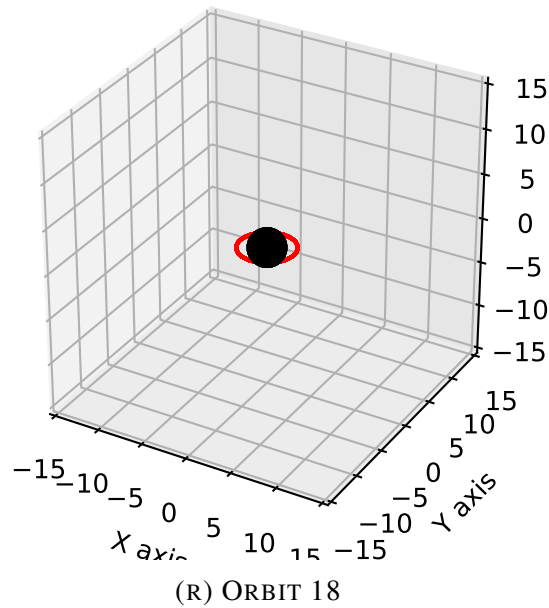
Bei den Abbildungen (N) und (O) sieht man etwas Interessantes; zwei Photonen an der linken Seite des schwarzen Lochs können zur rechten Seite hinkommen. Das ist ganz interessant, da es bedeutet, dass ein Beobachter an der rechten Seite des schwarzen Lochs einen Planeten an der linken Seite sehen könnte. Man könnte z.B. eine Planete sehen und dahinter ein schwarzes Loch, obwohl das schwarze Loch sich im Vordergrund befindet. Dieses Phänomen heisst *Gravitationslinse*. Eine Materie, die die Raum-Zeit sehr stark krümmt, verhält sich wie eine Linse und erlaubt einem Beobachter, Objekte hinter ihr zu sehen (Schutz (2009)).

6.1 Geschlossene Kreisbahn

Wir haben festgestellt, dass es vier Hauptarten von Umlaufbahnen gibt. Nun könnte man sich fragen, ob es möglich ist für ein Photon, sich um ein schwarzes Loch auf einer geschlossenen Kreisbahn zu bewegen. Wie früher erwähnt wurde, muss der Radius konstant bleiben, wobei der Impuls auch konstant sein muss: $\dot{r} = 0$ und $\dot{p}_r = p_r = 0$. Wenn $p_r = 0$ ist, dann hat der Impuls p_ϕ keine Relevanz, sobald er ungleich null ist.

Man kann daher den Code mit diesen Anfangsbedingungen laufen lassen und schauen für welchen Radius sich das Photon auf einer geschlossenen Kreisbahn bewegt. Hier sind ein Paar Ergebnisse:





Bei Abbildung (P) ist der Radius gleich $3R_s$, bei der Abbildung (Q) ist er gleich $2R_s$ und bei der letzten Abbildung ist er gleich $1.5R_s$.

N:B.: auf der Abbildung (R) umkreist das Photon das Loch.

Tatsächlich macht dies Sinn, denn das ist die Formel der stabilen Kreisbahn (*stable circular orbit*) (Carroll (1997)):

$$r_c = \frac{3}{2}R_s \quad (19)$$

Wenn man die Bedingung $p_r = 0$ erfüllen will, muss man $r = 1.5 R_s$ wählen, diesen Radius kann man berechnen. Dieser Horizont wo die Photonen sich in Kreisumlaufbahnen bewegen ist die Photonsphäre (Carroll (1997)).

6.2 Schlussfolgerung

Die verwendete Methode ist ziemlich betriebssicher, da die Unsicherheitsquellen vermindert sind. Die Informatik ist ein gutes Werkzeug, um eine Arbeit im Bereich der allgemeinen Relativitätstheorie zu behandeln, denn es ist sehr schwierig, Experimente ohne Computer zu machen. Die Frage der Bewegung von Photonen in der Nähe eines schwarzen Lochs wird gut beantwortet.

Python ist eine gute Methode, um eine solche Arbeit durchzuführen, denn diese Sprache ist weder kompliziert zu lernen noch anzuwenden. Trotzdem könnten die Orbits schöner aussehen, *Matplotlib* ist vielleicht nicht die beste Bibliothek.

Die Orbits zeigen, dass je kleiner die Anfangswerte sind, desto vermutlichlicher ist es für die Photonen vom schwarzen Loch abgewichen zu werden.

7 Literaturverzeichnis

- Barrau, A. (2017). *Au coeur des trous noirs*. Malakoff: Dunod.
- Carroll, S. M. (1997). Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*.
- Ellis, G. F. R. & Williams, R. M. (2000). *Flat and curved space-times*. Clarendon Press.
- Gunn, A. (2012). *What would happen to earth's orbit if the sun vanished?*
<https://www.sciencefocus.com/space/what-would-happen-to-earths-orbit-if-the-sun-vanished/>. Science Focus.
- Laplace, P.-S. (1798). *Exposition du système du monde, 2e édition* [Buch]. Duprat.
- Lazlo, P. (2010, 4). Brève préhistoire littéraire du trou noir. *Alliage* (66).
- Louapre, D. (2011, 10). *La théorie de la relativité de... galilée!*
<https://sciencetonnante.wordpress.com/2011/10/10/la-theorie-de-la-relativite-de-galilee/>. Science étonnante.
- Louapre, D. (2018, 9). *La relativité générale*.
<https://sciencetonnante.wordpress.com/2018/09/27/la-relativite-generale/>. Science étonnante.
- Montague, B. W. S. L. (1995). Basic hamiltonian mechanics.
- Saha, . T. P. A., P. (2018). The astronomer's magic envelope.
- Schmüser, P. (2011). *Die prinzipien der speziellen relativitätstheorie*. Welt der Physik.
- Schutz, B. (2009). *A first course in general relativity*. Cambridge university press.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einstein-schen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), 1916, Seite 189-196*.
- Wheeler, J. A. & Ford, K. (2000). *Geons, black holes and quantum foam: A life in physics*. AAPT.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäss übernommen wurden, habe ich als solche gekennzeichnet.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'SV' with a stylized flourish.