

第 5 章 大样本 OLS

5.1 为何需要大样本理论

“大样本理论”(large sample theory), 也称“渐近理论”(asymptotic theory), 研究当样本容量 n 趋无穷时统计量的性质。

大样本理论近年来大受欢迎的原因如下。

(1) 小样本理论的假设过强。小样本理论的严格外生性假设要求解释变量与所有的扰动项均正交。在时间序列模型中, 这意味着解释变量与扰动项的过去、现在与未来值全部正交!

自回归模型必然违背此假定。大样本理论只要求解释变量与同期扰动项不相关。

例 $y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$ ，其中 $E(y_{t-1}\varepsilon_t) = 0$ 。

由于 ε_t 是 y_t 的一部分，故二者相关，即

$$E(y_t \varepsilon_t) = E[(\beta y_{t-1} + \varepsilon_t) \varepsilon_t] = \beta E(y_{t-1} \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) = E(\varepsilon_t^2) > 0$$

小样本理论假定扰动项为正态分布，大样本理论无此限制。

(2) 小样本的精确分布(exact distribution)难推导。大样本的渐近分布较易推导。

(3) 大样本理论要求样本容量较大，至少 $n \geq 30$ ，最好 100 以上。

5.2 随机收敛

1. 确定性序列的收敛

定义 确定性序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ “收敛” (converges) 于常数 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 只要 $n > N$, 就有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 即 $\{a_{N+1}, a_{N+2}, \dots\}$ 均落入区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内。

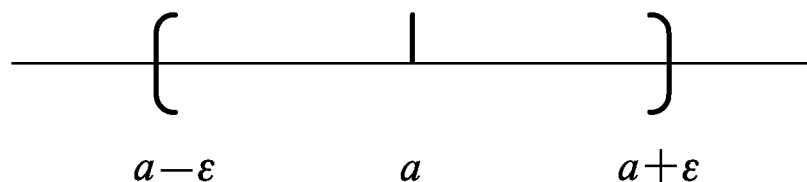


图 5.1 确定性序列的收敛

2. 随机序列的收敛

定义 随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ “依概率收敛”(converges in probability)于常数 a , 记为 $\text{p}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \xrightarrow{p} a$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|x_n - a| > \varepsilon) = 0$ 。

任意给定 $\varepsilon > 0$, 当 n 越来越大时, 随机变量 x_n 落在区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之外的概率收敛于 0。

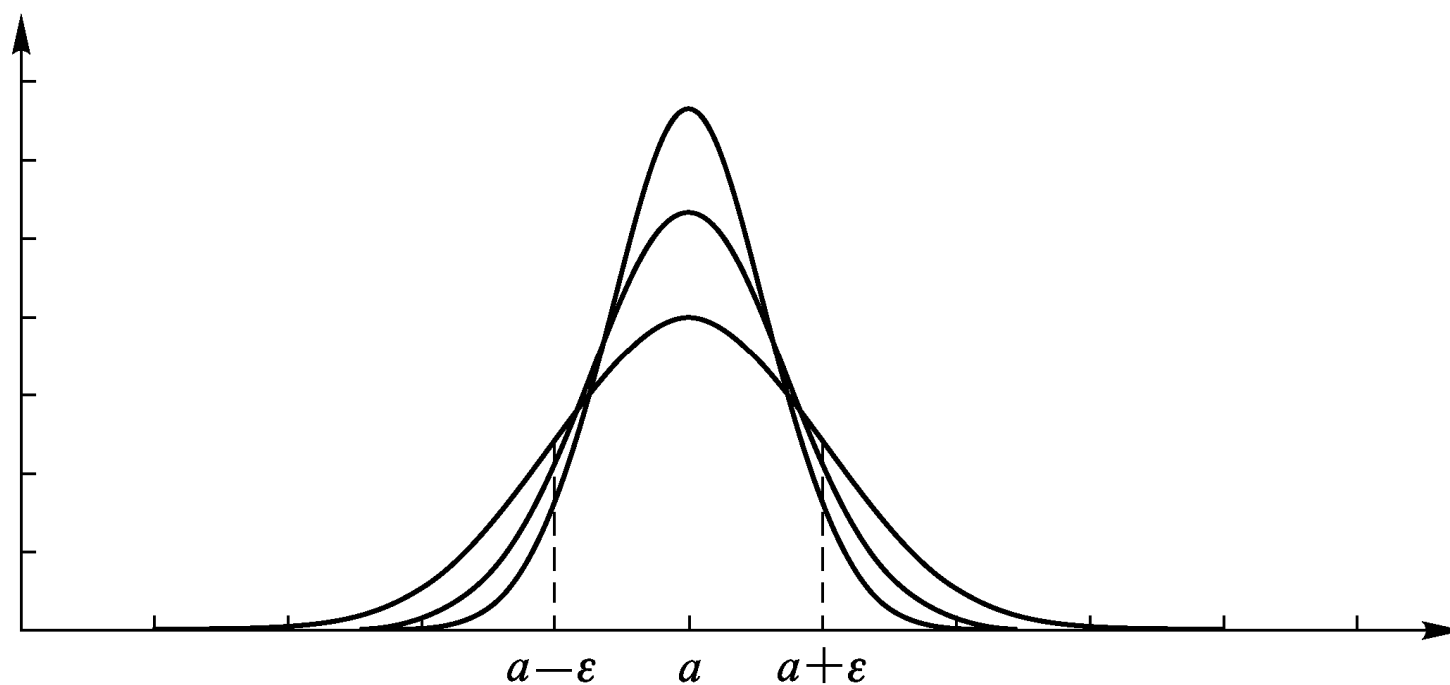


图 5.2 随机序列的收敛

对于随机向量与随机矩阵，也可定义依概率收敛，只要定义其每个元素都依概率收敛即可。

定义 随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ “依概率收敛”于随机变量 x ，记为 $x_n \xrightarrow{p} x$ ，如果随机序列 $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ 依概率收敛于 0。

命题(连续函数与依概率收敛可交换运算次序, preservation of convergence for continuous transformation) 假设 $g(\cdot)$ 为连续函数，
则 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g\left(\text{plim}_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$ 。

当 x_n 的分布越来越集中于某 x 附近时， $g(x_n)$ 的分布自然也就越来越集中于 $g(x)$ 附近。

概率收敛算子 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty}$ 与连续函数 $g(\cdot)$ 可交换运算次序。期望算子 E 无此性质，一般 $E(x^2) \neq [E(x)]^2$ 。

例：如果 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} s^2 = \sigma^2$ ，则

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} s = \text{plim}_{n \rightarrow \infty} (s^2)^{1/2} = (\text{plim}_{n \rightarrow \infty} s^2)^{1/2} = (\sigma^2)^{1/2} = \sigma$$

(因为开根号是连续函数)。

如果样本方差是方差的一致估计，则样本标准差也是标准差的一致估计)。

3. 依均方收敛

定义 随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ “依均方收敛” (converges in mean square) 于常数 a , 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} E(x_n) = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(x_n) = 0$ 。

命题 依均方收敛是依概率收敛的充分条件。

证明: 使用切比雪夫不等式(参见附录)。

当 x_n 的均值越来越趋于 a , 方差越来越小并趋于 0 时, 就有 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即在极限处 x_n 退化(degenerate)为常数 a 。

此命题是依均方收敛概念的主要用途。

4. 依分布收敛

定义 记随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与随机变量 x 的累积分布函数(cdf)分别为 $F_n(\cdot)$ 与 $F(\cdot)$ 。

如果对于任意实数 c ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(c) = F(c)$ ，则称随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ “**依分布收敛**”(converge in distribution)于随机变量 x ，记为 $x_n \xrightarrow{d} x$ 。

【例】当 t 分布的自由度越来越大时，其累积分布函数收敛于标准正态的累积分布函数。

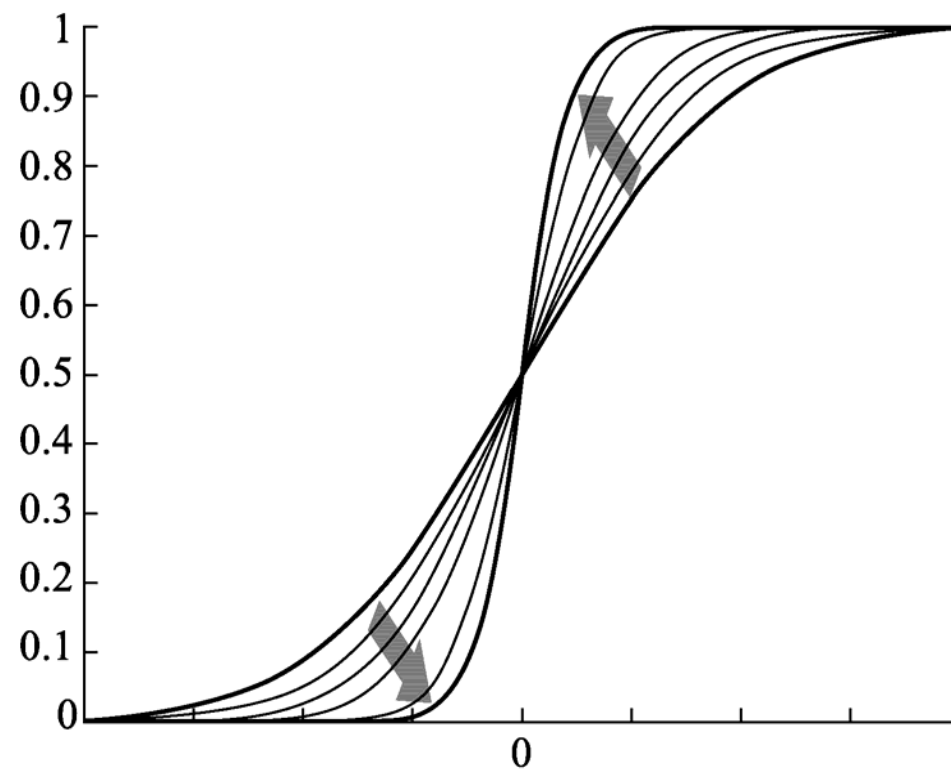


图 5.3 依分布收敛

如果 x 为正态分布，而 $x_n \xrightarrow{d} x$ ，则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为“渐近正态”(asymptotically normal)。

依分布收敛意味着，两个随机变量的概率密度长得越来越像。

“依概率收敛”比“依分布收敛”更强(前者是后者的充分条件)：

$$“x_n \xrightarrow{p} x” \Rightarrow “x_n \xrightarrow{d} x”$$

反之不然：当 x_n 与 x 的分布函数很接近时， x_n 与 x 的实际取值仍然可以很不相同(比如， x_n 与 x 相互独立)。

命题 假设 $g(\cdot)$ 为连续函数, 且 $x_n \xrightarrow{d} x$, 则 $g(x_n) \xrightarrow{d} g(x)$ 。

当 x_n 的分布越来越像 x 的分布时, $g(x_n)$ 的分布自然也越来越多像 $g(x)$ 的分布。

例: 假设 $x_n \xrightarrow{d} z$, 其中 $z \sim N(0, 1)$,

则 $x_n^2 \xrightarrow{d} z^2$, 其中 $z^2 \sim \chi(1)$, 即 $x_n^2 \xrightarrow{d} \chi(1)$
(因为平方是连续函数)

渐近标准正态的平方服从渐近 $\chi(1)$ 分布。

5.3 大数定律与中心极限定理

1. 弱大数定律(Weak Law of Large Numbers)

假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布的随机序列, 且 $E(x_1) = \mu$, $\text{Var}(x_1) = \sigma^2$ 存在, 则样本均值 $\bar{x}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{p} \mu$ 。

证明: 因为 $E(\bar{x}_n) = \mu$, 而

$$\text{Var}(\bar{x}_n) = \text{Var}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0, \text{ 故 } \bar{x}_n \text{ 依均方收敛于 } \mu。$$

因此, $\bar{x}_n \xrightarrow{p} \mu$ 。样本无限大时, 样本均值趋于总体均值, 故名“大数定律”。

2. 中心极限定理(Central Limit Theorem, 简记 CLT)

定理 假定 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布的随机序列, 且 $E(x_1) = \mu$, $\text{Var}(x_1) = \sigma^2$ 存在, 则 $\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ 。

根据弱大数定律, $(\bar{x}_n - \mu) \xrightarrow{p} 0$, 而 $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, 故用 $\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)$ (即“ $\infty \cdot 0$ ”型) 得到非退化分布。

进一步, $(\bar{x}_n - \mu)$ 收敛到 0 的速度与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛到 0 的速度类似 (二者乘积为非退化分布), 称为“ \sqrt{n} 收敛” (root-n convergence)。

直观上, 可视为 $\bar{x}_n \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$; 但不严格, 因为 $\frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$ 。

在一维情况下，中心极限定理可等价地写为 $\frac{\bar{x}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$,

但此形式不易推广到多维的情形。

推广到多维的情形：

假定 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为独立同分布的随机向量序列，且 $E(\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\mu}$ ，
 $\text{Var}(\mathbf{x}_1) = \boldsymbol{\Sigma}$ 存在，则 $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{x}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ 。

5.4 统计量的大样本性质

1. 均方误差

假设 $\hat{\beta}$ 是一维参数 β 的估计量。希望抽样误差 $(\hat{\beta} - \beta)$ 尽量地小。

定义 以估计量 $\hat{\beta}$ 来估计参数 β ，则其均方误差(Mean Squared Error, 简记 MSE)为

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) \equiv E[(\hat{\beta} - \beta)^2]$$

一个最优的估计量应在所有估计量中均方误差最小。

不希望 $\hat{\beta}$ 系统地高估或低估 β ，即无系统误差(systematic error)。

定义 以估计量 $\hat{\beta}$ 来估计参数 β ，则其偏差为 $\text{Bias}(\hat{\beta}) \equiv E(\hat{\beta}) - \beta$ 。

定义 如果偏差 $\text{Bias}(\hat{\beta}) = 0$ ，则称 $\hat{\beta}$ 为无偏估计量(unbiased estimator)。

命题 均方误差可分解为方差与偏差平方之和，即

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) = \text{Var}(\hat{\beta}) + [\text{Bias}(\hat{\beta})]^2$$

证明： $\text{MSE}(\hat{\beta}) \equiv E[(\hat{\beta} - \beta)^2] = E\left\{ \left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta}) + E(\hat{\beta}) - \beta \right]^2 \right\}$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]^2 + 2E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[E(\hat{\beta}) - \beta\right]\right\} + E\left[E(\hat{\beta}) - \beta\right]^2 \\
&= \text{Var}(\hat{\beta}) + 2E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[E(\hat{\beta}) - \beta\right]\right\} + \left[\text{Bias}(\hat{\beta})\right]^2
\end{aligned}$$

上式的交叉项为

$$E\left\{\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]\left[E(\hat{\beta}) - \beta\right]\right\} = \left[E(\hat{\beta}) - \beta\right]E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right] = \left[E(\hat{\beta}) - \beta\right] \cdot 0 = 0$$

均方误差最小化，可视为在“估计量方差”与“偏差”之间进行权衡(trade-off)。

多维情形的类似结论：

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) \equiv E\left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\right] = \text{Var}(\hat{\beta}) + \left[\text{Bias}(\hat{\beta})\right]\left[\text{Bias}(\hat{\beta})\right]'$$

2. 一致估计量

定义 如果 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_n = \beta$ ，则估计量 $\hat{\beta}_n$ 是参数 β 的一致估计量 (consistent estimator)。

一致性(consistency)意味着，当样本容量足够大时， $\hat{\beta}_n$ 依概率收敛到真实参数 β 。

这是对估计量最基本，也是最重要的要求。

如果估计方法不一致，意味着研究没有太大意义；因为无论样本容量多大，估计量也不会收敛到真实值。

3. 渐近正态分布与渐近方差

定义 如果 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Sigma)$, 其中 Σ 为半正定矩阵, 则称 $\hat{\beta}_n$ 为渐近正态分布(asymptotically normally distributed), 称 Σ 为渐近方差(asymptotic variance), 记为 $\text{Avar}(\hat{\beta}_n)$ 。

可近似地认为 $\hat{\beta}_n \xrightarrow{d} N(\beta, \Sigma/n)$ 。 $(\hat{\beta}_n - \beta)$ 收敛到 0 的速度与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛到 0 的速度相同, 称为 “ \sqrt{n} 收敛” (root-n convergence)。

4. 渐近有效

假设 $\hat{\beta}_n$ 与 $\tilde{\beta}_n$ 都是 β 的渐近正态估计量, 其渐近方差分别为 Σ 与 V 。如果 $(V - \Sigma)$ 为半正定矩阵, 则称 $\hat{\beta}_n$ 比 $\tilde{\beta}_n$ 更为渐近有效(asymptotically more efficient)。

5.5 渐近分布的推导

推导渐近分布的常用技巧，涉及依概率收敛与依分布收敛的交叉运算，统称“斯拉斯基定理”(Slutsky Theorem)。

$$(1) \quad x_n \xrightarrow{d} x, \quad y_n \xrightarrow{p} a \Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{d} x + a。$$

在极限处， y_n 退化为常数 a ，故 $x_n + y_n$ 在极限处只是将 x_n 的渐近分布 x 位移到 $x + a$ 。

特例：如果 $a = 0$ ，则 $x_n + y_n \xrightarrow{d} x$ 。

$$(2) \quad x_n \xrightarrow{d} x, \quad y_n \xrightarrow{p} 0 \Rightarrow x_n y_n \xrightarrow{p} 0。$$

在极限处， y_n 退化为 0 ， x_n 有正常的渐近分布 x ，故 $x_n y_n$ 退化为 0 。

(3) 随机向量 $\mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{x}$ ，随机矩阵 $\mathbf{A}_n \xrightarrow{p} \mathbf{A}$ ， $\mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$ 可以相乘
 $\Rightarrow \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{A} \mathbf{x}$ 。

特例：如果 $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ ，则 $\mathbf{A}_n \mathbf{x}_n \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}')$ 。

在极限处，随机矩阵 \mathbf{A}_n 退化为常数矩阵 \mathbf{A} 。

正态分布的线性组合仍服从正态分布，且
 $\text{Var}(\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{x}) \mathbf{A}' = \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}'$ 。

(4) 随机向量 $\mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{x}$ ，随机矩阵 $\mathbf{A}_n \xrightarrow{p} \mathbf{A}$ ， $\mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$ 可以相乘， \mathbf{A}^{-1} 存在
 \Rightarrow 二次型 $\mathbf{x}_n' \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{x}_n \xrightarrow{d} \mathbf{x}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}$ 。

5.6 随机过程的性质

随机序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也称“随机过程”(stochastic process)。如下标为时间，记为 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ ，也称“时间序列”(time series)。

1. 严格平稳过程

考察中国 1978—2007 年的通货膨胀率，即 $\{\pi_{1978}, \pi_{1979}, \dots, \pi_{2007}\}$ ，假如每年的通货膨胀率作为随机变量都有不同的分布，如何估计 $E(\pi_{1978})$ 与 $\text{Var}(\pi_{1978})$ ？每年通货膨胀率的样本容量仅为 1！

如果 30 年的通货膨胀率分布都不变，可将 $\bar{\pi} \equiv \frac{1}{30} \sum_{t=1978}^{2007} \pi_t$ 作为 $E(\pi_t)$ 的估计量。

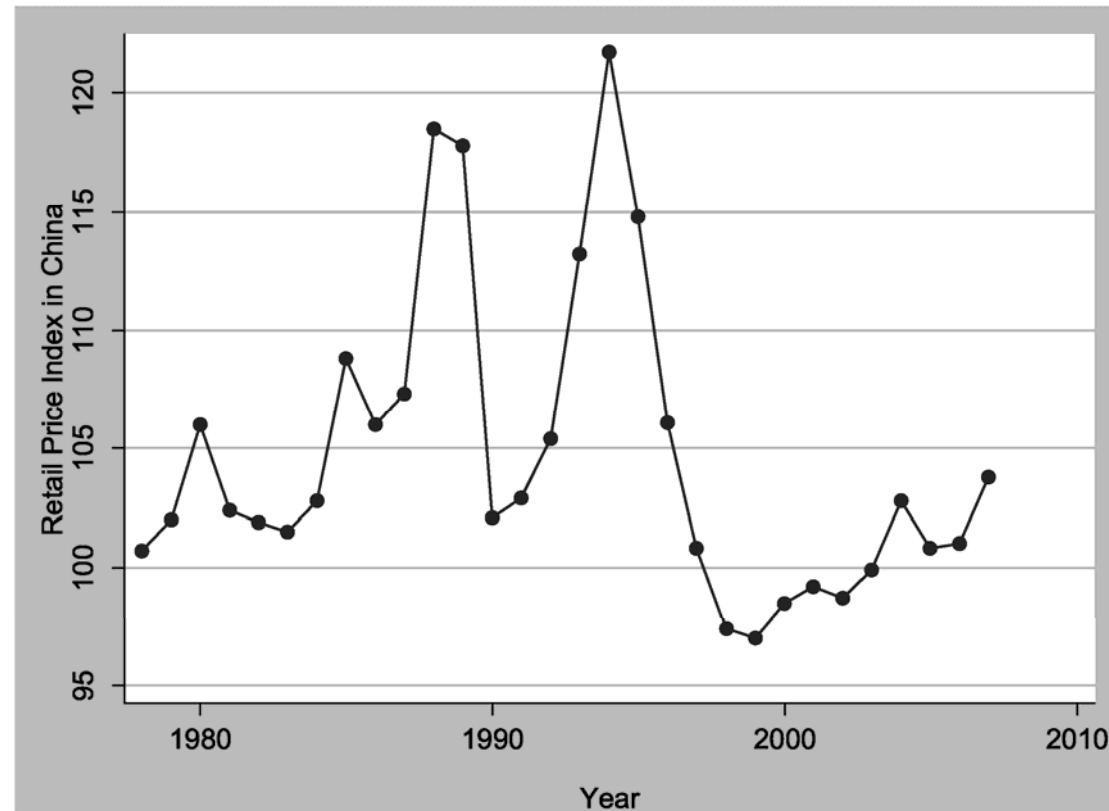


图 5.4 中国零售物价环比指数，1978—2007

“严格平稳过程”要求有限维分布不随时间推移而改变。

【例】 x_i 的分布与 x_j 的分布相同 ($\forall i, j$);

(x_1, x_4) 的分布与 (x_2, x_5) 相同;

(x_1, x_2, x_3) 的分布与 (x_5, x_6, x_7) 相同。

定义 随机过程 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 是严格平稳过程 (strictly stationary process), 简称平稳过程, 如果对任意 m 个时期的时间集合 $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, 随机向量 $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\}$ 的联合分布等于随机向量 $\{x_{t_1+k}, x_{t_2+k}, \dots, x_{t_m+k}\}$ 的联合分布, 其中 k 为任意整数。

$\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}\}$ 的联合分布仅依赖于 $\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 各个时期之间的相对距离，而不依赖于其绝对位置。

例 如果随机过程 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 为 iid，则 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 是平稳过程，且不存在序列相关。

例 如果随机过程 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty} = \{x_1, x_1, x_1, \dots\}$ (即 $x_t \equiv x_1$)，则 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 是平稳过程，且存在最强的序列相关。

例 考虑以下一阶自回归过程(first order autoregression, 简记 AR(1)),

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \text{Cov}(y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$$

其中， $\{\varepsilon_t\}$ 为独立同分布。

命题 如果 $\rho=1$ ，则 $\{y_t\}$ 不是平稳过程。如果 $|\rho|<1$ ，则 $\{y_t\}$ 是严格平稳过程。

证明： 如果 $\rho=1$ ，则 $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ 。因此， $y_t = y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$ 。

故当 $t \rightarrow \infty$ 时， $\text{Var}(y_t) = t\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow \infty$ ，其中 $\sigma_\varepsilon^2 \equiv \text{Var}(\varepsilon_t)$ ，即方差越来越大，以至无穷。因此， $\{y_t\}$ 不是平稳过程。此时， $\{y_t\}$ 被称为“随机游走” (random walk)，存在“单位根” (unit root)。

如果 $|\rho|<1$ ，对该方程两边同时取方差，可得

$$\text{Var}(y_t) = \rho^2 \text{Var}(y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$$

这是一阶线性差分方程。由于 $\rho^2 < 1$ ，故 $\text{Var}(y_t)$ 将收敛于 $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$ 。

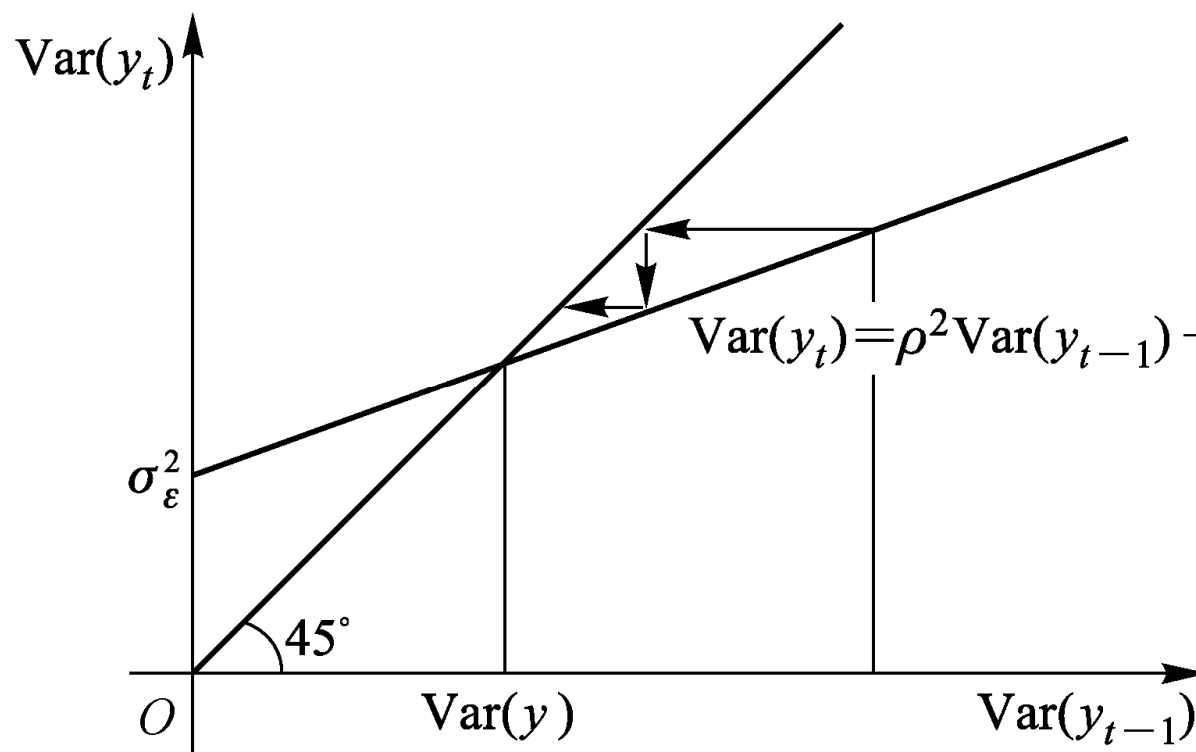


图 5.5 平稳一阶自回归过程的方差收敛

定义 随机过程 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 是弱平稳过程(weakly stationary process)或协方差平稳过程(covariance stationary process), 如果 $E(x_t)$ 不依赖于 t , 而且 $\text{Cov}(x_t, x_{t+k})$ 仅依赖于 k (即 x_t 与 x_{t+k} 在时间上的相对距离) 而不依赖于其绝对位置 t 。

弱平稳过程的期望与方差均为常数。

在 $\text{Cov}(x_t, x_{t+k})$ 中令 $k=0$, 可知方差为常数。

定义 一个协方差平稳过程 $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ 被称为白噪声过程(white noise process), 如果对于 $\forall t$, 都有 $E(x_t)=0$, 而且 $\text{Cov}(x_t, x_{t+k})=0, \forall k \neq 0$ 。

注: 白噪声过程不一定是 iid, 也不一定严格平稳。

严格平稳过程是弱平稳过程的充分条件。

但反之则不然，因为弱平稳过程只要求二阶矩平稳(即期望、方差、协方差等不随时间而变)，而概率分布可能依赖于更高阶矩。

对于随机向量过程 $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ ，可类似定义平稳过程或弱平稳过程。

如果 $\{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ 为(弱)平稳过程，则其每个分量都是(弱)平稳过程；反之，则不然。

2. 渐近独立性

“严格平稳过程”(相当于“同分布”假定)还不足以应用大数定律或中心极限定理,因为它们都要求独立同分布。

但相互独立的假定对于大多数经济变量而言过强。比如,今年的通胀率显然与去年的通胀率相关。

但今年的通胀率与 100 年前的通胀率或许可近似地视为相互独立,称为**渐近独立**(ergodic, 也称“遍历性”)。

渐近独立意味着,只要两个随机变量相距足够远,可近似认为它们相互独立。

例 AR(1)是否渐近独立？

考虑 $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ ，其中 $|\rho| < 1$ 。当时间间隔为 1 时，

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \text{Cov}(\rho y_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-1}) = \rho \sigma_y^2$$

当时间间隔为 2 时，

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t = \rho(\rho y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \rho^2 y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

故

$$\text{Cov}(y_t, y_{t-2}) = \text{Cov}(\rho^2 y_{t-2} + \rho \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, y_{t-2}) = \rho^2 \sigma_y^2$$

当时间间隔为 j 时， $\text{Cov}(y_t, y_{t-j}) = \rho^j \sigma_y^2$ 。由于 $|\rho| < 1$ ，故当 $j \rightarrow \infty$ 时，

$\text{Cov}(y_t, y_{t-j}) \rightarrow 0$ 。因此，AR(1)为渐近独立。

渐近独立定理(Ergodic Theorem) 假设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为渐近独立的严格平稳过程，且 $E(x_i) = \mu$ ，则 $\bar{x}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{p} \mu$ ，即样本均值 \bar{x}_n 是总体均值 $E(x_i)$ 的一致估计。

这是对大数定律的重要推广，更适用于经济数据。

大数定律要求每个 x_i 相互独立，而渐近独立定理允许 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 存在“序列相关”(serial correlation)，只要此相关关系在极限处消失。

大数定律要求每个 x_i 的分布相同，而渐近独立定理要求 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为严格平稳过程(故也同分布)。

命题 如果 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为渐近独立的严格平稳过程，则对于任何连续函数 $f(\cdot)$ ， $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 也是渐近独立的严格平稳过程。

渐近独立定理意味着，渐近独立平稳过程 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的任何“总体矩”(population moment) $E[f(x_i)]$ ，都可以由其对应的“样本矩”(sample moment) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ 一致地估计。

【例】 $E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')_{K \times K}$ 可由 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ 一致地估计，其中 $(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')_{K \times K}$ 为随机矩阵。其中， $\mathbf{x}_i \equiv (x_{i1} \ x_{i2} \ \cdots \ x_{iK})'$ 。

使用中心极限定理还需另一条件，即鞅差分序列。

定义 称随机过程 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为鞅 (martingale)，如果它满足 $E(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1) = x_{i-1}$ ， $\forall i \geq 2$ 。

例 随机游走过程 $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$ 。显然， $E(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1) = x_{t-1}$ 。

例 资本市场有效理论认为，所有有关未来价格的已知信息均已反映在当期价格上，故 $E(p_{t+1} | p_t, \dots, p_1) = p_t$ 。

定义 称随机过程 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为鞅差分序列 (Martingale Difference Sequence, 简记 MDS), 如果它满足 $E(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1) = 0, \forall i \geq 2$ 。

这意味着 x_i 均值独立于它的所有过去值。

因此, $\text{Cov}(x_i, x_{i-j}) = 0, \forall j \neq 0$ 。

根据迭代期望定律可知, 鞅差分序列的无条件期望

$$E(x_i) = E_{x_{i-1}, \dots, x_1} [E(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1)] = 0$$

命题 对鞅序列进行一阶差分，就得到鞅差分序列。

证明： 假设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ 为鞅过程。

定义其差分为 $g_1 \equiv x_1$, $g_i \equiv x_i - x_{i-1}$, $\forall i \geq 2$ 。

对 $\forall i \geq 2$ ，条件期望

$$\begin{aligned} & E(g_i \mid g_{i-1}, \dots, g_1) \\ &= E(g_i \mid x_{i-1}, \dots, x_1) \quad (\{g_{i-1}, \dots, g_1\} \text{ 与 } \{x_{i-1}, \dots, x_1\} \text{ 包含同样的信息}) \\ &= E(x_i - x_{i-1} \mid x_{i-1}, \dots, x_1) \quad (\text{定义 } g_i \equiv x_i - x_{i-1}) \\ &= E(x_i \mid x_{i-1}, \dots, x_1) - x_{i-1} \quad (\text{期望算子的线性性}) \\ &= x_{i-1} - x_{i-1} = 0 \quad (\text{鞅过程的定义}) \end{aligned}$$

故 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是鞅差分序列。

鞅差分序列的中心极限定理 (Central Limit Theorem for Ergodic Stationary MDS)

假设 $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为渐近独立的平稳鞅差分随机向量过程，且其协方差矩阵为 $\text{Cov}(\mathbf{g}_i) = \text{E}(\mathbf{g}_i \mathbf{g}_i') = \boldsymbol{\Sigma}$ ，记 $\bar{\mathbf{g}} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i$ ，则

$$\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}} \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$

普通的中心极限定理仅适用于 iid 情形，此定理适用于更一般的渐近独立的平稳鞅差分序列。

5.7 大样本 **OLS** 的假定

假定 5.1 线性假定

$$y_i = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

假定 5.2 渐近独立的平稳过程(ergodic stationarity)

$(K + 1)$ 维随机过程 $\{y_i, \mathbf{x}_i\}$ 为渐近独立的平稳过程。

【例】如果样本为随机样本，则 $\{y_i, \mathbf{x}_i\}$ 独立同分布，故是渐近独立的平稳过程。

假定 5.3 前定解释变量(predetermined regressors)

所有解释变量均为“前定”(predetermined), 即它们与同期的扰动项正交, 即 $E(x_{ik}\varepsilon_i) = 0, \forall i, k$ 。

由于 $\text{Cov}(x_{ik}, \varepsilon_i) = E(x_{ik}\varepsilon_i) - E(x_{ik})E(\varepsilon_i) = 0 - 0 = 0$, 故 \mathbf{x}_i 与 ε_i 不相关, 仿佛在 ε_i 产生之前, \mathbf{x}_i 已经确定, 故名“前定解释变量”。

定义如下列向量:

$$\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{x}_i \varepsilon_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{pmatrix} \varepsilon_i$$

则 $E(\mathbf{g}_i) = E(\mathbf{x}_i \varepsilon_i) = \mathbf{0}$ 。

此假定比严格外生性假定更弱，因为后者要求扰动项与过去、现在及未来的解释变量都不相关(对于时间序列数据而言)。

假定 5.4 秩条件(rank condition)

$K \times K$ 矩阵 $E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 为非退化矩阵，即其逆矩阵 $[E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ 存在。这个条件保证了在大样本下， $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ 存在。

假定 5.5 \mathbf{g}_i 为鞅差分序列，且其协方差矩阵 $S \equiv E(\mathbf{g}_i \mathbf{g}_i') = E(\varepsilon_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 为非退化矩阵。

鞅差分序列的无条件期望为 0，故假定 5.5 比假定 5.3 强。

大样本 OLS，无须假设“严格外生性”与“正态随机扰动项”，具有更大的适用性与稳健性。

5.8 OLS 的大样本性质

$$\text{由于 } \mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix}, \text{ 故 } \mathbf{X}'\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}'_i。$$

其中， $\mathbf{x}_i \mathbf{x}'_i$ 为 $K \times K$ 的矩阵。

定义 $S_{XX} \equiv \frac{1}{n} X'X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ (随机矩阵 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ 的样本均值)。

$$\text{另一方面, } X'y = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i \circ$$

其中, $\mathbf{x}_i y_i$ 为 $K \times 1$ 向量。

定义 $S_{Xy} \equiv \frac{1}{n} X'y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i$ (随机向量 $\mathbf{x}_i y_i$ 的样本均值)。因此,

$$\mathbf{b} = (X'X)^{-1} X'y = \left(\frac{X'X}{n} \right)^{-1} \frac{X'y}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'}{n} \right)^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i}{n} \right) = S_{XX}^{-1} S_{Xy}$$

大样本理论关注当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_{XX}^{-1} 与 S_{Xy} 的概率收敛性质。

定理(OLS 估计量的大样本性质)

(1) (\mathbf{b} 为一致估计量) 在假定 5.1-5.4 之下, $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{b} = \boldsymbol{\beta}$ 。

(2) (\mathbf{b} 为渐近正态) 如果把假定 5.3(即 $E(\mathbf{g}_i) = \mathbf{0}$) 强化为假定 5.5(即 $\{\mathbf{g}_i\}$ 为 MDS), 则 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \text{Avar}(\mathbf{b}))$ 。

其中, $\text{Avar}(\mathbf{b}) = [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1} S [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$, 而 $S \equiv E(\mathbf{g}_i \mathbf{g}_i') = E(\varepsilon_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$

(3) ($\text{Avar}(\mathbf{b})$ 的一致估计量) 假设 \hat{S} 为 S 的一致估计量, 则 $S_{XX}^{-1} \hat{S} S_{XX}^{-1}$ 是 $\text{Avar}(\mathbf{b})$ 的一致估计量。

证明：(1) 抽样误差可以写为

$$\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'}{n} \right)^{-1} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \varepsilon_i}{n} \right) = \mathbf{S}_{XX}^{-1} \bar{\mathbf{g}}$$

其中， $\bar{\mathbf{g}} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i$ ， $\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{x}_i \varepsilon_i$ 。假定 5.2 意味着 $\{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\}$ 也是渐近独立平稳序列，故根据渐近独立定理， $\mathbf{S}_{XX} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \xrightarrow{p} \mathbf{E}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 。

假定 5.4 意味着 $[\mathbf{E}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ 存在，故 $\mathbf{S}_{XX}^{-1} \xrightarrow{p} [\mathbf{E}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ 。由于 $\{\mathbf{g}_i \equiv \mathbf{x}_i \varepsilon_i = \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})\}$ ，故 $\{\mathbf{g}_i\}$ 也是渐近独立平稳序列。

假定 5.3 意味着, $\bar{\mathbf{g}} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{g}_i \xrightarrow{p} E(\mathbf{g}_i) = E(\mathbf{x}_i \varepsilon_i) = \mathbf{0}$ 。因此,
 $\mathbf{S}_{XX}^{-1} \bar{\mathbf{g}} \xrightarrow{p} [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, 故 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$ 。

扰动项与同期解释变量不相关(假定 5.3), 是保证 OLS 一致的最重要条件。

以一元回归图示。

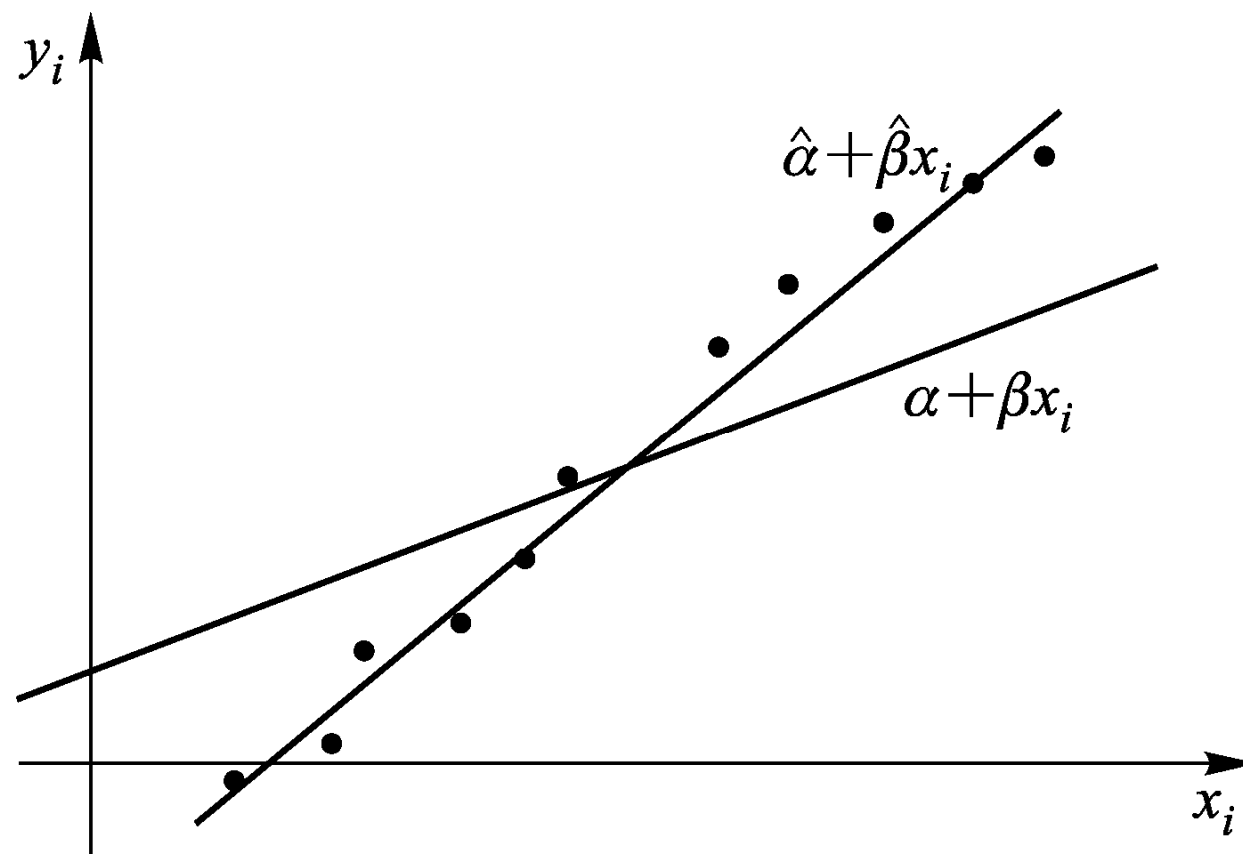


图 5.6 扰动项与解释变量相关导致不一致估计

假设 $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ ，且 $\text{Cov}(x_i, \varepsilon_i) > 0$ 。真实回归线 $(\alpha + \beta x_i)$ 与样本回归线 $(\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)$ 参见图 5.6。

由于 x_i 与 ε_i 正相关，故当 x_i 较小时， ε_i 也倾向于较小；当 x_i 较大时， ε_i 也倾向于较大。故样本回归线比真实回归线陡峭， $\hat{\beta}$ 高估 β 。

反之，如果 $\text{Cov}(x_i, \varepsilon_i) < 0$ ，则 $\hat{\beta}$ 将低估 β 。

增大样本容量 ($n \rightarrow \infty$) 能使偏差 (bias) 消失吗？

什么情况下可能出现 $\text{Cov}(x_i, \varepsilon_i) \neq 0$ ？

在存在遗漏变量、内生解释变量或解释变量测量误差的情况下常会出现。

(2) 由于抽样误差 $\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{S}_{XX}^{-1} \bar{\mathbf{g}}$ ，故 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}_{XX}^{-1}(\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}})$ 。根据假定 5.5 及鞅差分序列中心极限定理， $\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}} \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{S})$ ，其中 $\mathbf{S} \equiv E(\mathbf{g}_i \mathbf{g}_i') = E(\varepsilon_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 。

由于 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{S}_{XX}^{-1}(\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}})$ 是 $\sqrt{n} \bar{\mathbf{g}}$ 的线性组合，故 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \text{Avar}(\mathbf{b}))$ 。

由于 $\mathbf{S}_{XX} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \xrightarrow{p} E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ ，故

$$\text{Avar}(\mathbf{b}) = [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1} \mathbf{S} [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$$

使用公式 $\text{Var}(\mathbf{A}\mathbf{Y}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{Y}) \mathbf{A}'$ ；其中， $[E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ 为对称矩阵。

注意：无须假设扰动项服从正态分布。

(3) 如果存在 $\hat{S} \xrightarrow{p} S$ ，已知 $S_{XX}^{-1} \xrightarrow{p} [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ ，故估计量 $\widehat{\text{Avar}}(\mathbf{b}) \equiv S_{XX}^{-1} \hat{S} S_{XX}^{-1} \xrightarrow{p} [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1} S [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1}$ ，是 $\text{Avar}(\mathbf{b})$ 的一致估计量。

由于 $S_{XX}^{-1} \hat{S} S_{XX}^{-1}$ 的形式为两个 S_{XX}^{-1} (“两片面包”) 夹着一个 \hat{S} (“中间的菜”)，故被称为“夹心估计量”或“三明治估计量”(sandwich estimator)。

为得到 $S \equiv E(\varepsilon_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 的一致估计量，须对解释变量的四阶矩进行假设。

假定 5.6(解释变量的四阶矩存在) $E[(x_{ik}x_{ij})^2]$ 存在且为有限 $(\forall i, j, k)$ 。

这只是技术性的假定。

在假定 5.6 下, 可证明 $\hat{S} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$ 是 S 的一致估计量, 其中 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为最小二乘法的残差。

进一步可证明, s^2 是 σ^2 的一致估计。

命题 s^2 是无条件方差 $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ 的一致估计量。

$$\begin{aligned}
 \text{证明: } s^2 &\equiv \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-K} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}}{n-K} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'[\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\boldsymbol{\varepsilon}}{n-K} && (\text{参见第 3 章}) \\
 &= \frac{1}{n-K} \left[\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \right] && (\text{乘积展开}) \\
 &= \frac{n}{n-K} \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}}{n} \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} \frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right] && (\text{同时乘除 } n) \\
 &= \frac{n}{n-K} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 - \bar{\mathbf{g}}' \mathbf{S}_{XX}^{-1} \bar{\mathbf{g}} \right] && (\bar{\mathbf{g}} \text{ 与 } \mathbf{S}_{XX} \text{ 的定义})
 \end{aligned}$$

由于 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-K} = 1$, $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$ (因为 $\{\varepsilon_i\}$ 为渐近独立的平稳序列), $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{g}}' \mathbf{S}_{XX}^{-1} \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0}' \cdot [E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')]^{-1} \cdot \mathbf{0} = 0$, 故 $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} s^2 = \sigma^2$ 。

5.9 线性假设的大样本检验

1. 检验单个系数： $H_0 : \beta_k = \bar{\beta}_k$ 。

在原假设 H_0 成立的情况下， $\sqrt{n}(b_k - \bar{\beta}_k) \xrightarrow{d} N(0, \text{Avar}(b_k))$ ，其中 b_k 为 OLS 估计量 \mathbf{b} 的第 k 个元素， $\text{Avar}(b_k)$ 为矩阵 $\text{Avar}(\mathbf{b})$ 的第 (k, k) 个元素；而 $\widehat{\text{Avar}}(b_k)$ 是对 $\text{Avar}(b_k)$ 的一致估计。

定义 t 统计量：

$$t_k \equiv \frac{\sqrt{n}(b_k - \bar{\beta}_k)}{\sqrt{\widehat{\text{Avar}}(b_k)}} = \frac{b_k - \bar{\beta}_k}{\sqrt{\frac{1}{n}\widehat{\text{Avar}}(b_k)}} \equiv \frac{b_k - \bar{\beta}_k}{\text{SE}^*(b_k)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

其中, $SE^*(b_k) \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \widehat{\text{Avar}}(b_k)} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(S_{XX}^{-1} \hat{S} S_{XX}^{-1} \right)_{kk}}$ 称为“异方差稳健的标准误”(heteroskedasticity-consistent standard errors), 简称“稳健标准误”(robust standard errors, White's standard errors, Huber-White standard errors, Eicker-Huber-White standard errors)。

在推导过程中并未用到“条件同方差”的假定, 故在“条件异方差”的情况下也适用。

统计量 t_k 称为“稳健 t 比值”, 服从标准正态分布, 而非 t 分布。

$|t_k|$ 越大, 则越倾向于拒绝 H_0 。比如, 对于显著性水平 5%, 如果 $|t_k|$ 大于临界值 1.96, 则拒绝 H_0 。

命题 在条件同方差的假定下, 稳健标准误还原为普通(非稳健)标准误。

证明: 假设 $E(\varepsilon_i^2 | \mathbf{x}_i) = \sigma^2 > 0$ (条件同方差), 根据迭代期望定律,

$$\mathbf{S} \equiv E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \varepsilon_i^2) = E_{\mathbf{x}_i} E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \varepsilon_i^2 | \mathbf{x}_i) = E_{\mathbf{x}_i} \left[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' E(\varepsilon_i^2 | \mathbf{x}_i) \right] = \sigma^2 E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$$

由于 $s^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$, $\mathbf{S}_{XX} \xrightarrow{p} E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$, 故 $s^2 \mathbf{S}_{XX}$ 是 \mathbf{S} 的一致估计量。

$$\widehat{\text{Avar}}(\mathbf{b}) = \mathbf{S}_{XX}^{-1} \left(s^2 \mathbf{S}_{XX} \right) \mathbf{S}_{XX}^{-1} = s^2 \mathbf{S}_{XX}^{-1} = s^2 \left(\frac{1}{n} \mathbf{X}'\mathbf{X} \right)^{-1} = ns^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\text{SE}^*(b_k) = \sqrt{\frac{1}{n} \widehat{\text{Avar}}(b_k)} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot ns^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{kk}^{-1}} = \sqrt{s^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})_{kk}^{-1}}$$

此公式正是“小样本 OLS”中普通(非稳健)标准误的公式。

2. 检验线性假设: $H_0: \underbrace{\mathbf{R}}_{m \times K} \underbrace{\boldsymbol{\beta}}_{K \times 1} = \underbrace{\mathbf{r}}_{m \times 1}$, 其中 \mathbf{R} 满行秩。

根据沃尔德检验原理, 考察 $(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})$ 的大小, 譬如其二次型 $(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})'(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})$ 。在 H_0 成立的情况下, 统计量

$$W \equiv n(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})' \left[\mathbf{R} \widehat{\text{Avar}}(\mathbf{b}) \mathbf{R}' \right]^{-1} (\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r}) \xrightarrow{d} \chi^2(m)$$

将 n 拆成 $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}$ ，把 W 更直观地写为

$$W \equiv \left[\sqrt{n}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r}) \right]' \left[\widehat{\mathbf{R}\mathbf{A}\text{var}(\mathbf{b})\mathbf{R}'} \right]^{-1} \left[\sqrt{n}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r}) \right] \xrightarrow{d} \chi^2(m)$$

证明：记 $\mathbf{c}_n \equiv \sqrt{n}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r})$ ， $\mathbf{Q}_n \equiv \widehat{\mathbf{R}\mathbf{A}\text{var}(\mathbf{b})\mathbf{R}'}$ ，则 $W = \mathbf{c}_n' \mathbf{Q}_n^{-1} \mathbf{c}_n$ 。

在 H_0 成立的情况下，

$$\mathbf{c}_n \equiv \sqrt{n}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{r}) = \sqrt{n}(\mathbf{R}\mathbf{b} - \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}) = \sqrt{n}\mathbf{R}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{R} \left[\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \right]。$$

因为 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{A}\text{var}(\mathbf{b}))$ ，而 \mathbf{c}_n 是 $\sqrt{n}(\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta})$ 的线性组合，故 $\mathbf{c}_n \xrightarrow{d} \mathbf{c}$ ，其中 $\mathbf{c} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}\mathbf{A}\text{var}(\mathbf{b})\mathbf{R}')$ 。

定义 $\mathbf{Q} \equiv \text{Var}(\mathbf{c}) = \mathbf{R} \text{Avar}(\mathbf{b}) \mathbf{R}'$ ，由于 $\widehat{\text{Avar}}(\mathbf{b}) \xrightarrow{p} \text{Avar}(\mathbf{b})$ ，故 $\mathbf{Q}_n \xrightarrow{p} \mathbf{Q}$ 。

因此， $W = \mathbf{c}'_n \mathbf{Q}_n^{-1} \mathbf{c}_n \xrightarrow{d} \mathbf{c}' \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{c}' [\text{Var}(\mathbf{c})]^{-1} \mathbf{c} \sim \chi^2(m)$ 。

注：由于 \mathbf{R} 满行秩，且 $\text{Avar}(\mathbf{b})$ 为正定矩阵，故 \mathbf{Q}^{-1} 存在。