Simulation von Markov-Ketten

Wilhelm Horn

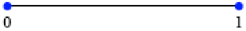
FernUniversität in Hagen

21. November 2020

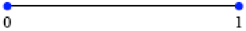
Gliederung

1. Grundlagen
2. Allgemeine Untersuchungen
   2.1 Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen
   2.2 Simulation einer Markov-Kette
      2.2.1 Die Startfunktion
      2.2.2 Die Übergangsfunktion
3. Wetter in Göteborg

Grundlagen

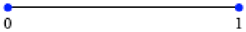
- das **Einheitsintervall**: 

Grundlagen

- das **Einheitsintervall**: 

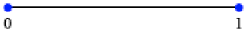
ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen

Grundlagen

- das **Einheitsintervall**: 

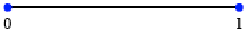
ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen
- **Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen**

Grundlagen

- das **Einheitsintervall**: 

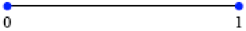
ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen
- **Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen**
  - besitzen alle die gleiche Verteilung

Grundlagen

- das **Einheitsintervall**: 

ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen
- **Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen**
  - besitzen alle die gleiche Verteilung
  - beeinflussen sich untereinander nicht (stochastisch unabhängig)

Grundlagen

- das **Einheitsintervall**: 

ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen
- **Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen**
  - besitzen alle die gleiche Verteilung
  - beeinflussen sich untereinander nicht (stochastisch unabhängig)
  - engl. *independent and identically distributed, iid*

Grundlagen: Markov-Kette

- betrachten MK mit endlich großem Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$

Grundlagen: Markov-Kette

- betrachten MK mit endlich großem Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
- an einem beliebigen Zeitpunkt t ist genau ein Zustand eingenommen

Grundlagen: Markov-Kette

- betrachten MK mit endlich großem Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
- an einem beliebigen Zeitpunkt t ist genau ein Zustand eingenommen
- **Gedächtnislosigkeit:** bei Übergang von einem Zustand in einen anderen spielt nur der aktuelle Zustand eine Rolle

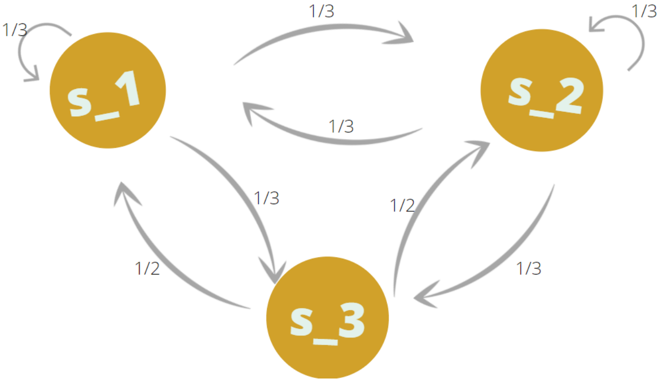
Grundlagen: Markov-Kette

- betrachten MK mit endlich großem Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
- an einem beliebigen Zeitpunkt t ist genau ein Zustand eingenommen
- **Gedächtnislosigkeit:** bei Übergang von einem Zustand in einen anderen spielt nur der aktuelle Zustand eine Rolle
- zeitunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten werden in $n \times n$ Matrix P (Übergangsmatrix) gesammelt

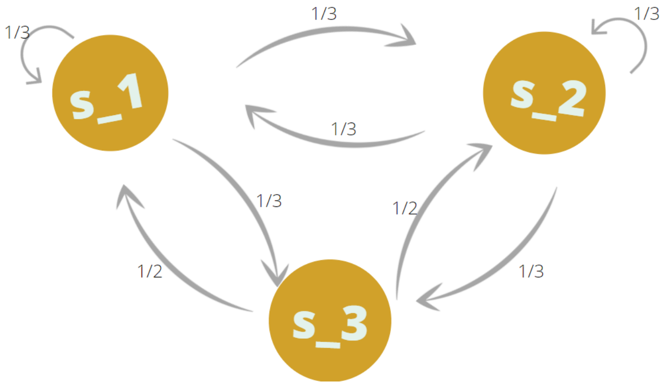
Grundlagen: Markov-Kette

- betrachten MK mit endlich großem Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
- an einem beliebigen Zeitpunkt t ist genau ein Zustand eingenommen
- **Gedächtnislosigkeit:** bei Übergang von einem Zustand in einen anderen spielt nur der aktuelle Zustand eine Rolle
- zeitunabhängige Übergangswahrscheinlichkeiten werden in $n \times n$ Matrix P (Übergangsmatrix) gesammelt
- Wk zum Zustand j zu wechseln, wenn der Zustand i eingenommen ist, wird in Zelle (i, j) vermerkt

Beispiel



Beispiel



$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Grundlagen: Markov-Ketten

Wo startet man?

- Startverteilung $\mu^{(0)}$ ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen

Grundlagen: Markov-Ketten

Wo startet man?

- Startverteilung $\mu^{(0)}$ ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen
- enthält die Wk's, mit denen ein Zustand anfangs eingenommen wird

Grundlagen: Markov-Ketten

Wo startet man?

- Startverteilung $\mu^{(0)}$ ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen
- enthält die Wk's, mit denen ein Zustand anfangs eingenommen wird
- i-te Eintrag aus $\mu^{(0)}$ enthält also genau die Wk, mit der s_i zu Beginn einer Markov-Kette eingenommen wird

Grundlagen: Markov-Ketten

Wo startet man?

- Startverteilung $\mu^{(0)}$ ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen
- enthält die Wk's, mit denen ein Zustand anfangs eingenommen wird
- i-te Eintrag aus $\mu^{(0)}$ enthält also genau die Wk, mit der s_i zu Beginn einer Markov-Kette eingenommen wird
- **Beispiel:** $\mu^{(0)} = (\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3})$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen werden für die Simulation benötigt

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen werden für die Simulation benötigt
- müssen stetig-gleichverteilt auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ vorliegen

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen werden für die Simulation benötigt
- müssen stetig-gleichverteilt auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ vorliegen

Ein vernachlässigbares Problem:

Die Menge der Zufallszahlen, die von einem Computer-Zufallszahlengenerator erzeugt werden, liegt nicht dicht genug im Einheitsintervall vor.

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen werden für die Simulation benötigt
- müssen stetig-gleichverteilt auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ vorliegen

Ein vernachlässigbares Problem:

Die Menge der Zufallszahlen, die von einem Computer-Zufallszahlengenerator erzeugt werden, liegt nicht dicht genug im Einheitsintervall vor.

Das größere Problem:

Es handelt sich bei den meisten Zufallszahlen um **Pseudozufallszahlen**, also Zahlen, die nur zufällig-erzeugt wirken, jedoch z.B. anhand der Uhrzeit berechnet werden.

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen werden für die Simulation benötigt
- müssen stetig-gleichverteilt auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ vorliegen

Ein vernachlässigbares Problem:

Die Menge der Zufallszahlen, die von einem Computer-Zufallszahlengenerator erzeugt werden, liegt nicht dicht genug im Einheitsintervall vor.

Das größere Problem:

Es handelt sich bei den meisten Zufallszahlen um **Pseudozufallszahlen**, also Zahlen, die nur zufällig-erzeugt wirken, jedoch z.B. anhand der Uhrzeit berechnet werden.

- Häggström rät sie als echte iid-Zufallszahlen zu betrachten

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

- $\psi : [0,1] \to S$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

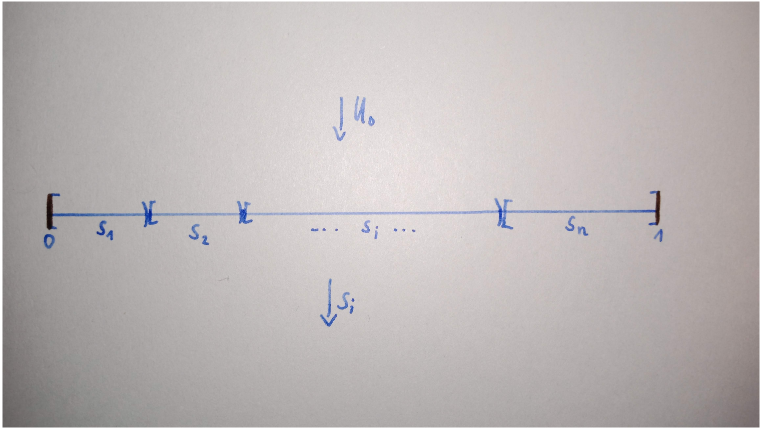
Die Startfunktion

- $\psi : [0,1] \to S$
- wir benötigen sie, um einen Startwert X_0 mit $X_0 = \psi(U_0)$ zu berechnen (U_0 Zufallsvariable)

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

- $\psi : [0, 1] \to S$
- wir benötigen sie, um einen Startwert X_0 mit $X_0 = \psi(U_0)$ zu berechnen (U_0 Zufallsvariable)



Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} s_1 & \text{for } x \in [0,\ \mu^{(0)}(s_1)) \\ s_2 & \text{for } x \in [\mu^{(0)}(s_1),\ \mu^{(0)}(s_1) + \mu^{(0)}(s_2)) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_i & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} \mu^{(0)}(s_j),\ \sum_{j=1}^{i} \mu^{(0)}(s_j)\right) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_k & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{k-1} \mu^{(0)}(s_j),\ 1\right]. \end{cases}$$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} s_1 & \text{for } x \in [0,\ \mu^{(0)}(s_1)) \\ s_2 & \text{for } x \in [\mu^{(0)}(s_1),\ \mu^{(0)}(s_1) + \mu^{(0)}(s_2)) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_i & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} \mu^{(0)}(s_j),\ \sum_{j=1}^{i} \mu^{(0)}(s_j)\right) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_k & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{k-1} \mu^{(0)}(s_j),\ 1\right]. \end{cases}$$

Eigenschaften:

1. Es handelt sich um eine Treppenfunktion.

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Startfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} s_1 & \text{for } x \in [0,\ \mu^{(0)}(s_1)) \\ s_2 & \text{for } x \in [\mu^{(0)}(s_1),\ \mu^{(0)}(s_1) + \mu^{(0)}(s_2)) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_i & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} \mu^{(0)}(s_j),\ \sum_{j=1}^{i} \mu^{(0)}(s_j) \right) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_k & \text{for } x \in \left[\sum_{j=1}^{k-1} \mu^{(0)}(s_j),\ 1 \right]. \end{cases}$$

Eigenschaften:

1. Es handelt sich um eine Treppenfunktion.
2. $\int_0^1 1_{\{\psi(x)=s\}}\, dx = \mu^{(0)}(s)$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

- $\phi : S \times [0,1] \to S$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

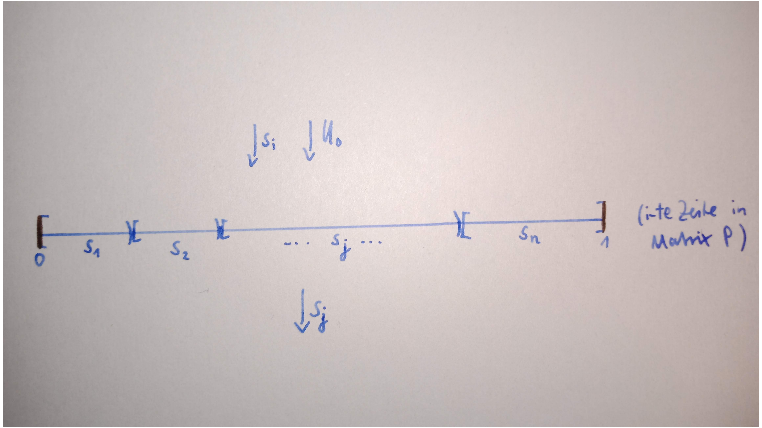
Die Übergangsfunktion

- $\phi : S \times [0,1] \to S$
- wird benötigt, um weitere Kette $(X_1, X_2, ...)$ iterativ zu bestimmen

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

- $\phi : S \times [0,1] \to S$
- wird benötigt, um weitere Kette $(X_1, X_2, \ldots)$ iterativ zu bestimmen



Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

$$\phi(s_i, x) = \begin{cases} s_1 & \text{for } x \in [0,\ P_{i,1}) \\ s_2 & \text{for } x \in [P_{i,1},\ P_{i,1} + P_{i,2}) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_j & \text{for } x \in \left[\sum_{l=1}^{j-1} P_{i,l},\ \sum_{l=1}^{j} P_{i,l} \right) \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ s_k & \text{for } x \in \left[\sum_{l=1}^{k-1} P_{i,l},\ 1 \right]. \end{cases}$$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

Eigenschaften:

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

Eigenschaften:

1. $\phi(s_i, x)$ ist eine Treppenfunktion, wenn man ϕ als Funktion von x betrachtet, für alle s_i

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

Eigenschaften:

1. $\phi(s_i, x)$ ist eine Treppenfunktion, wenn man ϕ als Funktion von x betrachtet, für alle s_i
2. $\int_0^1 1_{\{\phi(s_i x)=s_j\}}\,dx = P_{i,j}$

Wie simulieren wir Markov-Ketten?

Die Übergangsfunktion

Eigenschaften:

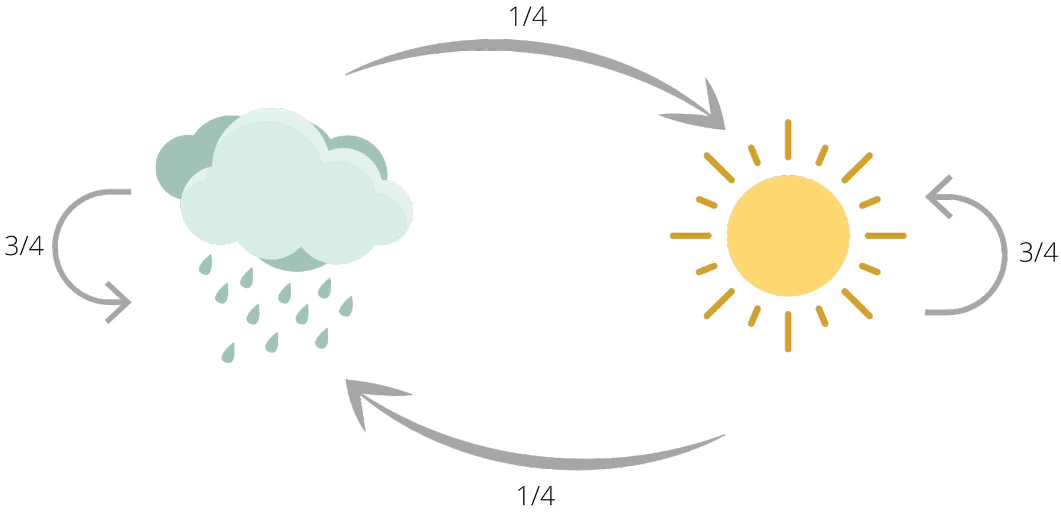
1. $\phi(s_i, x)$ ist eine Treppenfunktion, wenn man ϕ als Funktion von x betrachtet, für alle s_i
2. $\int_0^1 1_{\{\phi(s_i x)=s_j\}}\, dx = P_{i,j}$

So lassen sich nun alle Folgezustände konstruieren:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \phi(X_0, U_1)\\
X_2 &= \phi(X_1, U_2)\\
X_3 &= \phi(X_2, U_3)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wetter in Göteborg

Wetter in Göteborg



Wetter in Göteborg

Die Startfunktion:

$\psi(x) = s_1 \quad$ für alle x

Wetter in Göteborg

Die Startfunktion:

$\psi(x) = s_1 \quad \text{für alle } x$

Die Übergangsfunktion:

$$\phi(s_1, x) = \begin{cases} s_1 & \text{für } x \in [0, 0.75) \\ s_2 & \text{für } x \in [0.75, 1] \end{cases}$$

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_1 & \text{für } x \in [0, 0.25) \\ s_2 & \text{für } x \in [0.25, 1] \end{cases}$$

Wetter in Göteborg

Übergangsfunktion eindeutig?

Wetter in Göteborg

Übergangsfunktion eindeutig?

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{für } x \in [0, 0.75) \\ s_1 & \text{für } x \in [0.75, 1] \end{cases} \tag{1}$$

Wetter in Göteborg

Übergangsfunktion eindeutig?

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{für } x \in [0, 0.75) \\ s_1 & \text{für } x \in [0.75, 1] \end{cases} \tag{1}$$

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{für } x \in [0, 0.4) \vee [0.65, 1] \\ s_1 & \text{für } x \in [0.4, 0.65) \end{cases} \tag{2}$$

Simulation von MARKOV-Ketten

Wilhelm Horn

FernUniversität in Hagen

21. November 2020

Danke für Ihre Aufmerksamkeit