

Simulation von MARKOV-Ketten



PROSEMINAR

im Studiengang Mathematik

FERNUNIVERSITÄT IN HAGEN

Fakultät für Mathematik und Informatik

Eingereicht von Wilhelm Horn

Hagen, den 8. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundlagen	4
3	Allgemeine Untersuchungen	5
3.1	Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen	5
3.2	Simulation einer Markov-Kette	5
3.2.1	Die Startfunktion	5
3.2.2	Die Übergangsfunktion	6
4	Wetter in Göteborg	7
4.1	Problemstellung	7
4.2	Ist die Übergangsfunktion eindeutig?	7
	Literaturverzeichnis	8

1 Einführung

In der vorliegenden Ausarbeitung wird ein kurzer Einblick in das Gebiet der Markov-Ketten gewährt und näher beleuchtet, wie diese in Computersimulationen Anwendung finden können.

Beginnend mit den grundlegenden Hürden bei der Erzeugung von Zufallszahlen wird weiter beleuchtet, wie die theoretischen Überlegungen einer Markov-Kette für mathematisch-algebraische Computersimulationen zugänglich gemacht werden können.

In Anlehnung an Olle HÄGGSTRÖM¹ beleuchten wir ein interessantes und dennoch simples Beispiel, was vom wechselhaften Wetter der schwedischen Hauptstadt Stockholm handelt.

Markov-Ketten finden in der Wissenschaft und Wirtschaft eine breite Anwendungen. So werden zum Beispiel in der Finanzmathematik Markov-Prozesse herangezogen, um Aktienkursentwicklungen zu simulieren. In der Bioinformatik werden Markov-Ketten angewandt, um Sequenzabschnitte auf bestimmte Eigenschaften zu untersuchen.

Und sogar Gesellschafts-Brettspiele wie MONOPOLY² lassen sich durch Markov-Ketten simulieren.

¹Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*.

²Bewersdorff, *Monopoly im Blickwinkel der Mathematik*.

2 Grundlagen

In der vorliegenden Ausarbeitung findet der Begriff **Einheitsintervall** Verwendung. Dabei ist das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ auf den reellen Zahlen gemeint.

Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen (engl. *independent and identically distributed, iid*) besitzen alle die gleiche Verteilung, beeinflussen sich untereinander aber nicht, sind also stochastisch unabhängige Zufallsvariablen.

Eine diskrete **Markov-Kette** besitzt einen endlich großen Zustandsraum $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. An einem beliebigen Zeitpunkt t ist genau ein Zustand eingenommen. Bei dem Übergang von einem Zustand in einen anderen spielt nur der aktuelle Zustand eine Rolle (*Gedächtnislosigkeit*). Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer quadratischen $n \times n$ Matrix P , die sogenannte *Übergangsmatrix*, gesammelt. Die Wahrscheinlichkeit, zum Zustand j zu wechseln, wenn der Zustand i eingenommen ist, wird in der Zelle (i, j) vermerkt.

Die Startverteilung $\mu^{(0)}$ ist ein Zeilenvektor mit n Einträgen. Er enthält die Wahrscheinlichkeiten, mit denen zum Start ($t = 0$) ein Zustand eingenommen wird. Der i -te Eintrag aus $\mu^{(0)}$ enthält also genau die Wahrscheinlichkeit, mit der der Zustand s_i zu Beginn einer Markov-Kette eingenommen wird.

Weil die Startverteilung eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, ergeben die Vektoreinträge aufsummiert 1.

3 Allgemeine Untersuchungen

3.1 Probleme bei der Erzeugung von Zufallszahlen

Um Markov-Ketten am Computer simulieren zu können, werden Zufallszahlen benötigt, die stetig-gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ vorliegen. Jedoch tritt bei der Erzeugung solcher Zufallszahlen ein größeres sowie ein kleineres Problem in Erscheinung:

- Die Zufallszahlen, die von einem Computer-Zufallszahlengenerator erzeugt werden, liegen nicht stetig im Intervall $[0, 1]$ vor. Das liegt daran, dass sie von binärer oder dezimaler Natur sind und somit auf endlich viele Stellen reduziert sind. Das ist aber ein geringes Problem, da die Rechenleistung heutzutage so stark ist, um eine ausreichend hohe Anzahl an Nachkommastellen zu produzieren.
- Für die allermeisten Ergebnisse aus Zufallszahlengeneratoren gilt: es handelt sich nicht um echte Zufallszahlen. Viel mehr spricht man bei den meisten Zufallszahlen von sogenannten *Pseudozufallszahlen*, also Zahlen, die nur zufällig-erzeugt wirken, jedoch z.B. anhand der Uhrzeit berechnet werden.

In der Vergangenheit wurde viel Aufwand betrieben, um mit Pseudozufallszahlen möglichst nahe an echte iid-Zufallsvariablen heranzukommen. HÄGGSTRÖM¹ rät, die Annahme zu treffen, es handle sich um echte iid-Zufallszahlen. Man solle jedoch diese Ungenauigkeit als Ursache für potenzielle Fehlerquellen im Hinterkopf behalten.

3.2 Simulation einer Markov-Kette

3.2.1 Die Startfunktion

Die Funktion $\psi : [0, 1] \rightarrow S$, welche vom Einheitsintervall auf den Zustandsraum S abbildet, nennen wir Startfunktion. Wir benötigen sie, um einen Startwert X_0 zu generieren. Sie unterliegt zwei Eigenschaften:

1. Es handelt sich um eine Treppenfunktion.
2. $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\psi(x)=s\}} dx = \mu^{(0)}(s)$

Ausgehend von der Startfunktion ψ lässt sich jetzt der Startwert X_0 mit $X_0 = \psi(U_0)$ berechnen, wobei U_0 eine Zufallsvariable darstellt.

Wegen $\sum \mu_i^{(0)} = 1$ lassen sich die Werte aus $\mu^{(0)}$ nacheinander auf dem Einheitsintervall darstellen. Je nachdem, welchen Wert die Zufallsvariable U_0 annimmt, bildet die Startfunktion auf ein s_i aus dem Zustandsraum ab (genauer: die Funktion bildet auf s_i ab, wenn U_0 im i -ten Teilintervall liegt).

¹Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*.

3.2.2 Die Übergangsfunktion

Nachdem wir nun einen Startwert X_0 finden können, benötigen wir ein Verfahren, um die ganze Kette (X_0, X_1, \dots) iterativ bestimmen zu können. Hier hilft die Übergangsfunktion $\phi : S \times [0, 1] \rightarrow S$, welche vom Zustandsraum S und dem Einheitsintervall wieder in den Zustandsraum S abbildet. Auch sie unterliegt zwei Eigenschaften:

1. $\phi(s_i, x)$ ist eine Treppenfunktion, wenn man ϕ als Funktion von x betrachtet
2. $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\phi(s_i x)=s_j\}} dx = P_{i,j}$

Die Übergangsfunktion sieht wie folgt aus: man nehme das i aus dem Zustand s_i und zieht sich die i -te Zeile aus P heran. Weil die Zeilensummen der Matrix P immer gleich 1 sind, lässt sich äquivalent zu 3.1 die betreffende Zeile auf das Einheitsintervall projizieren. Der Funktion ist, äquivalent zur Startfunktion, eine Zufallsvariable U zuzuführen. Je nachdem, welchen Wert U annimmt, bildet die Funktion auf einen Zustand s_j ab (genauer: befindet sich U im j -ten Teilintervall, bildet die Funktion auf den Zustand s_j ab).

So lassen sich nun alle Folgezustände konstruieren:

$$\begin{aligned} X_0 &= \psi(U_0) \\ X_1 &= \phi(X_0, U_1) \\ X_2 &= \phi(X_1, U_2) \\ X_3 &= \phi(X_2, U_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

4 Wetter in Göteborg

4.1 Problemstellung

Es liegt das Beispiel 3.1 von HÄGGSTRÖM vor, in welchem er das Wetter über Göteborg als eine Markovkette betrachtet. Die Kette besitzt zwei Zustände: Regen und Sonne. Am Tag 0 ist das Wetter regnerisch. Mit Wahrscheinlichkeit 0.75 behält das Wetter am Folgetag seinen Zustand, mit der Gegenwahrscheinlichkeit nimmt es den jeweils anderen Zustand an. s_1 steht dabei für Regen und s_2 für Sonne. Die Startfunktion nimmt also folgende Gestalt an:

$$\psi(x) = s_1 \quad \text{für alle } x$$

und die Übergangsfunktion sieht folgendermaßen aus:

$$\phi(s_1, x) = \begin{cases} s_1 & \text{für } x \in [0, 0.75) \\ s_2 & \text{für } x \in [0.75, 1] \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_1 & \text{für } x \in [0, 0.25) \\ s_2 & \text{für } x \in [0.25, 1] \end{cases} \quad (4.2)$$

x steht dabei für eine in der Simulation erzeugte Zufallszahl aus dem Einheitsintervall.

4.2 Ist die Übergangsfunktion eindeutig?

Funktion (4.2) können wir auch durch

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{für } x \in [0, 0.75) \\ s_1 & \text{für } x \in [0.75, 1] \end{cases} \quad (4.3)$$

ersetzen. Bildlich können wir uns eine Vertauschung der beiden Teilintervalle vorstellen. Während in (4.2) s_1 der Folgezustand sein wird, wenn die Zufallszahl x im **ersten** Viertel liegt, ist in Funktion (4.3) s_1 der Folgezustand, wenn die Zufallszahl im **letzten** Viertel des Einheitsintervalls liegt.

Denkbar, aber überflüssig, wäre auch eine komplizierter aussehende Funktion, bei der man die Teilintervalle weiter splittet, ihnen aber dennoch den gleichen “Platz“ auf dem Einheitsintervall einräumt:

$$\phi(s_2, x) = \begin{cases} s_2 & \text{für } x \in [0, 0.4) \cup [0.65, 1] \\ s_1 & \text{für } x \in [0.4, 0.65) \end{cases} \quad (4.4)$$

Literaturverzeichnis

Bewersdorff, Jörg. *Monopoly im Blickwinkel der Mathematik*. 2002. URL: <http://www.bewersdorff-online.de/monopoly/>.

Häggström, Olle. *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-511-01941-6.