Irrfahrten auf Kantenperkulationen

Wilhelm Horn

FSU Jena

February 5, 2018

Gliederung

1. Perkulationen
   - Graphen
   - Gitter
   - Kantenperkulation
   - Kritischer Wert
2. Irrfahrt auf Kantenperkulation
   - Rekurrenz und Transienz
   - Satz von Pólya
   - Driftparameter
   - Durchschnittsgeschwindigkeit
3. Aufgabenstellung aus Häggström
4. Anwendung

Graphen

Graph

Ein Graph besteht aus

(i) einer Menge von Knoten $\{x_1, ..., x_n\}$ und

(ii) einer Menge von Kanten $\{e_1, ..., e_m\}$,

wobei eine Kante stets zwei Knoten miteinander verbindet.

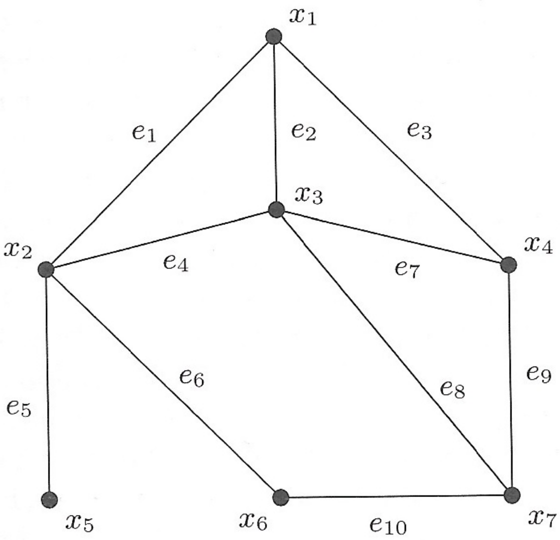


Figure 1: Ein zufälliger Graph G

zusammenhängender Graph

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten des Graphen über eine Folge von Kanten verbunden sind.
Eine zusammenhängende Komponente innerhalb eines Graphen nennt man **Cluster**.

zusammenhängender Graph

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten des Graphen über eine Folge von Kanten verbunden sind.
Eine zusammenhängende Komponente innerhalb eines Graphen nennt man **Cluster**.

Figure 2: Ausschnitt aus Liniennetzplan Jena, *jenah.de*

Gitter

Gitter $\mathbb{Z}^d$

Ein Gitter ist ein Graph der Knotenmenge aller ganzzahligen Knoten $(x_1, ..., x_d)$, wobei ein Knoten mit seinem nächsten Nachbarn über eine Kante verbunden ist.

Gitter

Gitter $\mathbb{Z}^d$

Ein Gitter ist ein Graph der Knotenmenge aller ganzzahligen Knoten $(x_1, ..., x_d)$, wobei ein Knoten mit seinem nächsten Nachbarn über eine Kante verbunden ist.

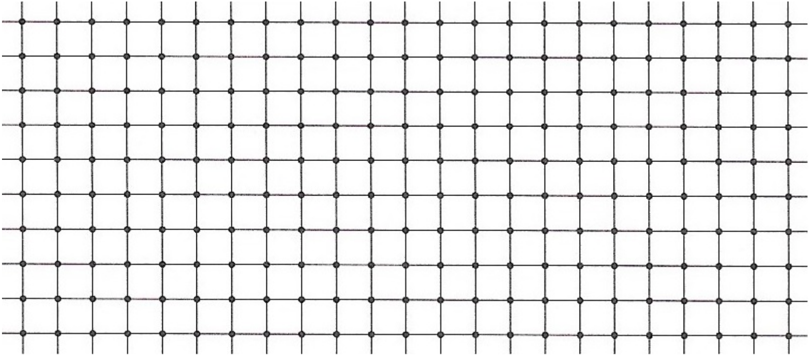


Figure 3: Ausschnitt aus dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$

Kantenperkulation

Kantenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$, mit der eine Kante des Gitters geöffnet bleibt, nennt man **Kanntenwahrscheinlichkeit**.

Kantenperkulation

Kantenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, mit der eine Kante des Gitters geöffnet bleibt, nennt man **Kanntenwahrscheinlichkeit**.
$\Rightarrow$ Mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p \in [0, 1]$ wird eine Kante geschlossen.

Kantenperkulation

Kantenwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$, mit der eine Kante des Gitters geöffnet bleibt, nennt man **Kanntenwahrscheinlichkeit**.
$\Rightarrow$ Mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p \in [0, 1]$ wird eine Kante geschlossen.

Perkulationskonfiguaration

Die Menge aller offenen Kanten wird **Kantenperkulation** bzw. **Perkulationskonfiguration** genannt.

Kantenperkulation

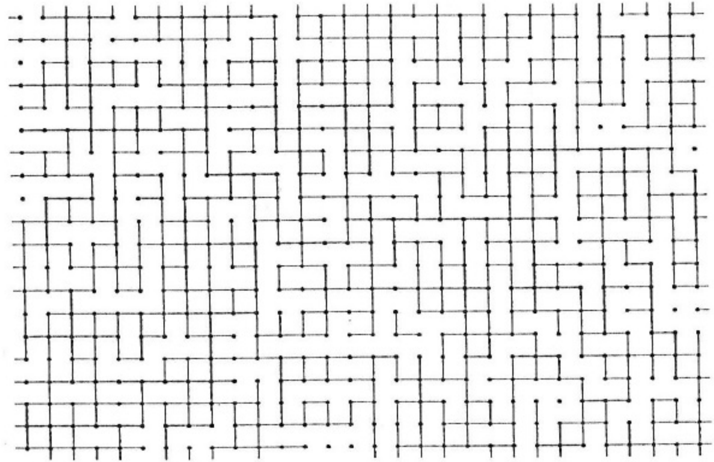


Figure 4: Ausschnitt einer Kantenperkulation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$ mit p=0.7

Kantenperkulation

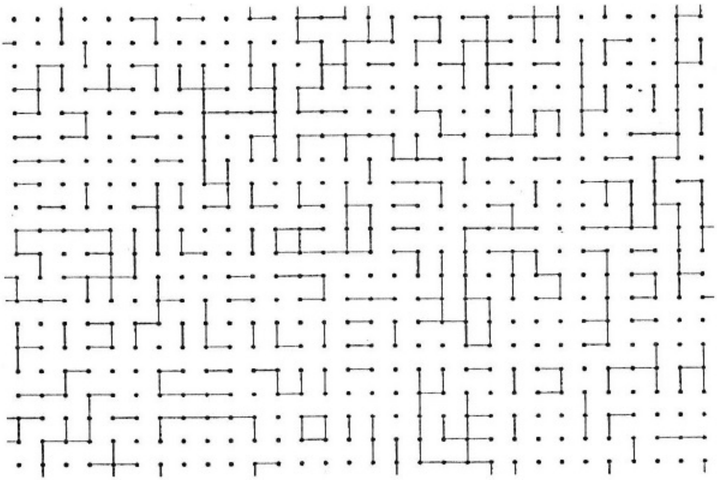


Figure 5: Ausschnitt einer Kantenperkulation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$ mit p=0.3

Kritischer Wert

Satz: unendliches Cluster

Jede Konfiguration $\mathbb{Z}^d$ enthält maximal ein unendliches Cluster

Kritischer Wert

Satz: unendliches Cluster

Jede Konfiguration $\mathbb{Z}^d$ enthält maximal ein unendliches Cluster

Frage: Ab welcher Kantenwahrscheinlichkeit p erhalten wir einen unendlichen Cluster?

Kritischer Wert

Satz: unendliches Cluster

Jede Konfiguration $\mathbb{Z}^d$ enthält maximal ein unendliches Cluster

Frage: Ab welcher Kantenwahrscheinlichkeit p erhalten wir einen unendlichen Cluster?

Def.: Kritischer Wert

Sei $\psi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenperkulation auf dem $\mathbb{Z}^d$ Gitter zu einer unendlich zusammenhängenden Komponente führt. Dann nennt man p_c den kritischen Wert, wenn gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, p \leq p_c, \\ 1, p > p_c. \end{cases}$$

Kritischer Wert

Satz: unendliches Cluster

Jede Konfiguration $\mathbb{Z}^d$ enthält maximal ein unendliches Cluster

Frage: Ab welcher Kantenwahrscheinlichkeit p erhalten wir einen unendlichen Cluster?

Def.: Kritischer Wert

Sei $\psi(p)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Kantenperkulation auf dem $\mathbb{Z}^d$ Gitter zu einer unendlich zusammenhängenden Komponente führt. Dann nennt man p_c den kritischen Wert, wenn gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, p \leq p_c, \\ 1, p > p_c. \end{cases}$$

Satz: Kritischer Wert

Für jedes Gitter $\mathbb{Z}^d (d \geq 2)$ existiert ein kritischer Wert $p_c \in [0, 1]$

kritischer Wert für d=2

Kritischer Wert in $\mathbb{Z}^2$

Für das $\mathbb{Z}^2$ Gitter gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, p \leq \frac{1}{2}, \\ 1, p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

kritischer Wert für d=2

Kritischer Wert in $\mathbb{Z}^2$

Für das $\mathbb{Z}^2$ Gitter gilt:

$$\psi(p) = \begin{cases} 0, p \leq \frac{1}{2}, \\ 1, p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow p_c = \frac{1}{2}$ in $\mathbb{Z}^2$

Irrfahrt

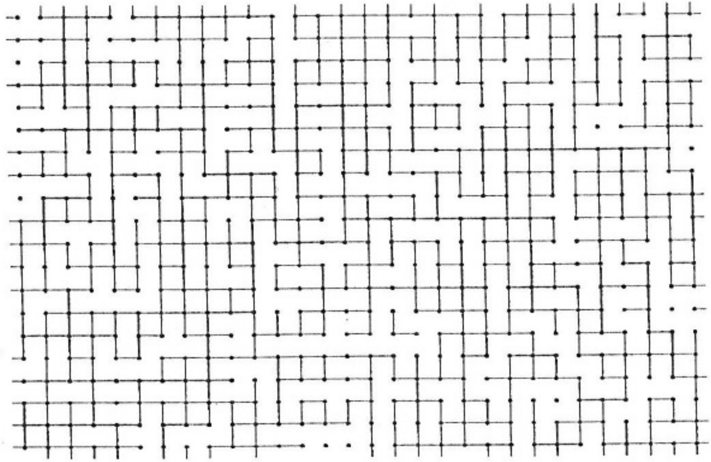


Figure 6: Eine Kantenperkulation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$ mit p=0.7

Irrfahrt

Rekurrenz und Transienz

Eine Irrfahrt auf einem unendlichen Graphen G mit Start im Knoten $X(0) = v$ wird **rekurrent** genannt, wenn

$$P(X(n) = v) = 1, \text{ für } n \geq 1$$

und **transient** genannt, falls

$$P(X(n) = v) < 1, \text{ für } n \geq 1$$

Irrfahrt

Rekurrenz und Transienz

Eine Irrfahrt auf einem unendlichen Graphen G mit Start im Knoten $X(0) = v$ wird **rekurrent** genannt, wenn

$$P(X(n) = v) = 1, \text{ für } n \geq 1$$

und **transient** genannt, falls

$$P(X(n) = v) < 1, \text{ für } n \geq 1$$

Frage: Findet ein betrunkener Mensch zurück zum Ausgangspunkt?

Irrfahrt

Rekurrenz und Transienz

Eine Irrfahrt auf einem unendlichen Graphen G mit Start im Knoten $X(0) = v$ wird **rekurrent** genannt, wenn

$$P(X(n) = v) = 1, \text{ für } n \geq 1$$

und **transient** genannt, falls

$$P(X(n) = v) < 1, \text{ für } n \geq 1$$

Frage: Findet ein betrunkener Mensch zurück zum Ausgangspunkt?
Und wie ist es mit einem betrunken Vogel?

Irrfahrt

Rekurrenz und Transienz

Eine Irrfahrt auf einem unendlichen Graphen G mit Start im Knoten $X(0) = v$ wird **rekurrent** genannt, wenn

$$P(X(n) = v) = 1, \text{ für } n \geq 1$$

und **transient** genannt, falls

$$P(X(n) = v) < 1, \text{ für } n \geq 1$$

Frage: Findet ein betrunkener Mensch zurück zum Ausgangspunkt?
Und wie ist es mit einem betrunken Vogel?

Satz von Pólya

Eine Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ ist

rekurrent für $d = 1$ und $d = 2$

transient für $d \geq 3$

Irrfahrt

Rekurrenz und Transienz

Eine Irrfahrt auf einem unendlichen Graphen G mit Start im Knoten $X(0) = v$ wird **rekurrent** genannt, wenn

$$P(X(n) = v) = 1, \text{ für } n \geq 1$$

und **transient** genannt, falls

$$P(X(n) = v) < 1, \text{ für } n \geq 1$$

Frage: Findet ein betrunkener Mensch zurück zum Ausgangspunkt? Und wie ist es mit einem betrunken Vogel?

Satz von Pólya

Eine Irrfahrt auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ ist

rekurrent für $d = 1$ und $d = 2$
transient für $d \geq 3$

Antwort: Der Mensch schon, der Vogel nicht (sicher).

Irrfahrt

Driftparameter

Der Driftparameter β sorgt für einen Drift in Richtung der positiven x-Achse im $\mathbb{Z}^2$ Gitter, mit $\beta \in [0, \frac{1}{4}], \beta \in \mathbb{R}$

Irrfahrt

Driftparameter

Der Driftparameter β sorgt für einen Drift in Richtung der positiven x-Achse im $\mathbb{Z}^2$ Gitter, mit $\beta \in [0, \frac{1}{4}], \beta \in \mathbb{R}$

veränderte Wahrscheinlicheiten

Ein Teilchen im Knoten (i,j) springt mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten zu einem seiner vier Nachbarknoten:

$$\text{nach } (i+1, j) \text{ mit } P(Osten) = \frac{1}{4} + \beta$$
$$\text{nach } (i-1, j) \text{ mit } P(Westen) = \frac{1}{4} - \beta$$
$$\text{nach } (i, j-1) \text{ mit } P(Sueden) = \frac{1}{4}$$
$$\text{nach } (i, j+1) \text{ mit } P(Norden) = \frac{1}{4}$$

Irrfahrt

Driftparameter

Der Driftparameter β sorgt für einen Drift in Richtung der positiven x-Achse im $\mathbb{Z}^2$ Gitter, mit $\beta \in [0, \frac{1}{4}], \beta \in \mathbb{R}$

veränderte Wahrscheinlicheiten

Ein Teilchen im Knoten (i,j) springt mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten zu einem seiner vier Nachbarknoten:

$$
\begin{aligned}
&\text{nach } (i+1, j) \text{ mit } P(Osten) = \tfrac{1}{4} + \beta \\
&\text{nach } (i-1, j) \text{ mit } P(Westen) = \tfrac{1}{4} - \beta \\
&\text{nach } (i, j-1) \text{ mit } P(Sueden) = \tfrac{1}{4} \\
&\text{nach } (i, j+1) \text{ mit } P(Norden) = \tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Gelöschte Kanten werden dabei **ignoriert**!

Irrfahrt

Durchschnittsgeschwindigkeit

Sei n die Anzahl der Schritte, die Irrfahrer auf der unendlichen Komponente im $\mathbb{Z}^2$ Gitter zurücklegt und $X_x(n)$ die x-Koordinate zur Zeit n. Wir nennen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_x(n)}{n} = \mu_{p,\beta}$$

Irrfahrt

Durchschnittsgeschwindigkeit

Sei n die Anzahl der Schritte, die Irrfahrer auf der unendlichen Komponente im $\mathbb{Z}^2$ Gitter zurücklegt und $X_x(n)$ die x-Koordinate zur Zeit n. Wir nennen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_x(n)}{n} = \mu_{p,\beta}$$

die **asymptotische Geschwindigkeit**, die für die Kantenwahrscheinlichkeit p und den Driftparameter β entsteht.

Irrfahrt

Frage: Ist $\mu_{p,\beta}$ direkt proportional zu β (bspw. $p = 0.7$)?

Irrfahrt

Frage: Ist $\mu_{p,\beta}$ direkt proportional zu β (bspw. $p = 0.7$)?

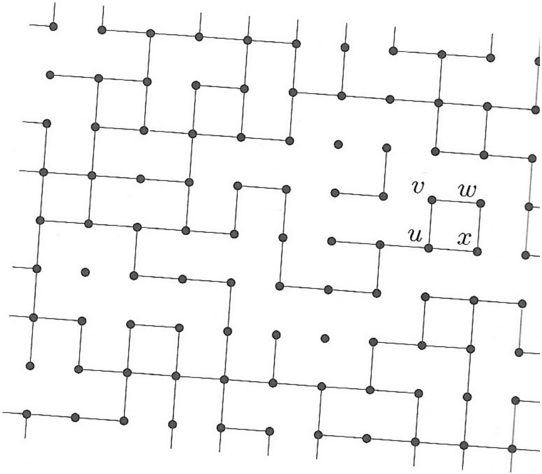


Figure 7: Halbinsel in einer Perkulationskonfiguration

Aufgabe

"Simuliere einen großen Ausschnitt einer superkritischen ($p > p_c$) Kantenperkulation auf dem $\mathbb{Z}^2$-Gitter (anfangs mit p=0.7).

Aufgabe

"Simuliere einen großen Ausschnitt einer superkritischen ($p > p_c$) Kantenperkulation auf dem $\mathbb{Z}^2$-Gitter (anfangs mit p=0.7). Starte dann eine Irrfahrt auf der Komponente, die wie die unendliche aussieht.

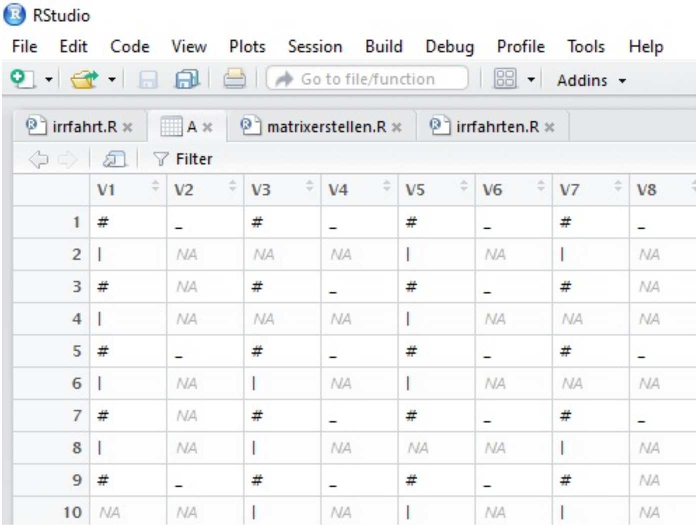
Aufgabe

"Simuliere einen großen Ausschnitt einer superkritischen ($p > p_c$) Kantenperkulation auf dem $\mathbb{Z}^2$-Gitter (anfangs mit p=0.7). Starte dann eine Irrfahrt auf der Komponente, die wie die unendliche aussieht. Zeichne μ als Funktion des Parametrs β. Wie lässt sich μ maximieren?"

<table>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
<tr><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td><td>#</td><td>_</td></tr>
<tr><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td><td>|</td><td>NA</td></tr>
</table>

Figure 8: Quadratisches Gitter in Matrixform, *RSudio*

Aufgabe



	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
1	#	_	#	_	#	_	#	_
2	|	NA	NA	NA	|	NA	|	NA
3	#	NA	#	_	#	_	#	NA
4	|	NA	NA	NA	|	NA	NA	NA
5	#	_	#	_	#	_	#	_
6	|	NA	|	NA	|	NA	NA	NA
7	#	NA	#	_	#	_	#	_
8	|	NA	|	NA	NA	NA	|	NA
9	#	_	#	_	#	_	#	NA
10	NA	NA	|	NA	|	NA	|	NA

Figure 9: Kantenperkulation mit $p = 0.7$ in Matrixform, *RSudio*

Aufgabe

irrfahrt.R × matrixerstellen.R × irrfahrten.R ×

Source on Save

```r
irrfahrt <- function(beta, pc){

n <- 1000                         # Perkulationsgroesse
A <- matrixerstellen(n, pc) # erstellt die kantenperkulation
max <- dim(A)[1]              # dimension der matrix

pnorden <- 0.25
psueden <- 0.25
pwesten <- 0.25 - beta
posten  <- 0.25 + beta

start <- (c(2*n+1,2*n+1)) # waehle den mittelpunkt des gitters als startpunkt
momentan <- start           # momentaner knoten
i <- 1                      # zaehlt die schritte (zeit)

```

Figure 10: Ausschnitt aus dem Programmcode, *RSudio*

Aufgabe

irrfahrt.R | matrixerstellen.R | irrfahrten.R

Source on Save

```r
irrfahrt <- function(beta, pc){

n <- 1000                        # Perkulationsgroesse
A <- matrixerstellen(n, pc) # erstellt die kantenperkulation
max <- dim(A)[1]                 # dimension der matrix

pnorden <- 0.25
psueden <- 0.25
pwesten <- 0.25 - beta
posten  <- 0.25 + beta

start <- (c(2*n+1,2*n+1)) # waehle den mittelpunkt des gitters als startpunkt
momentan <- start          # momentaner knoten
i <- 1                     # zaehlt die schritte (zeit)

```

Figure 11: Ausschnitt aus dem Programmcode, *RSudio*

Aufgabe

```r
#whileschleife fuer die irrfart, mindestens i iterationen
while(momentan[1] != max && momentan[1] != 1 && momentan[2] != max && momentan[2] != 1){ # stoppe, wenn rand erreicht wird

  zufallszahl <- runif(1,min=0,max=1) # gleichverteilte variable 0 ... 1

  if (zufallszahl < pnorden && is.na(A[momentan[1]-1, momentan[2]]) == FALSE){                                          #no
    momentan[1] <- momentan[1] - 2
    i <- i + 1}
  if (zufallszahl >= pnorden && zufallszahl < (pnorden + psueden) && is.na(A[momentan[1]+1, momentan[2]]) == FALSE){     #su
    momentan[1] <- momentan[1] + 2
    i <- i + 1}
  if (zufallszahl >= (pnorden + psueden) && zufallszahl < (pnorden + psueden + pwesten) && is.na(A[momentan[1], momentan[2]-1]) == FALSE){ #we
    momentan[2] <- momentan[2] - 2
    i <- i + 1}
  if (zufallszahl >= (pnorden + psueden + pwesten) && is.na(A[momentan[1], momentan[2]+1]) == FALSE){                   #os
    momentan[2] <- momentan[2] + 2
    i <- i + 1}
}
geschwindigkeit <- (momentan[2]-start[2])*0.5/i
return(geschwindigkeit)
}
```

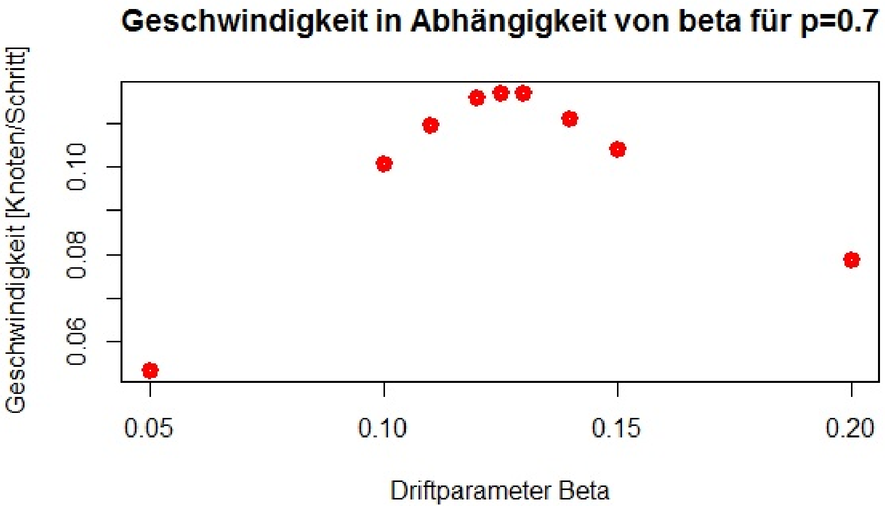
Figure 12: Ausschnitt aus dem Programmcode, *RSudio*

Aufgabe

β	0.05	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.20
$Erw * 10^1$	0.536	1.006	1.097	1.156	1.168	1.111	1.042	0.786
$Var * 10^3$	0.1	0.5	1	2	3	4	15	21

Table 1: $\mu_{\frac{7}{10},\beta}$ in Abhängigkeit von β

Aufgabe



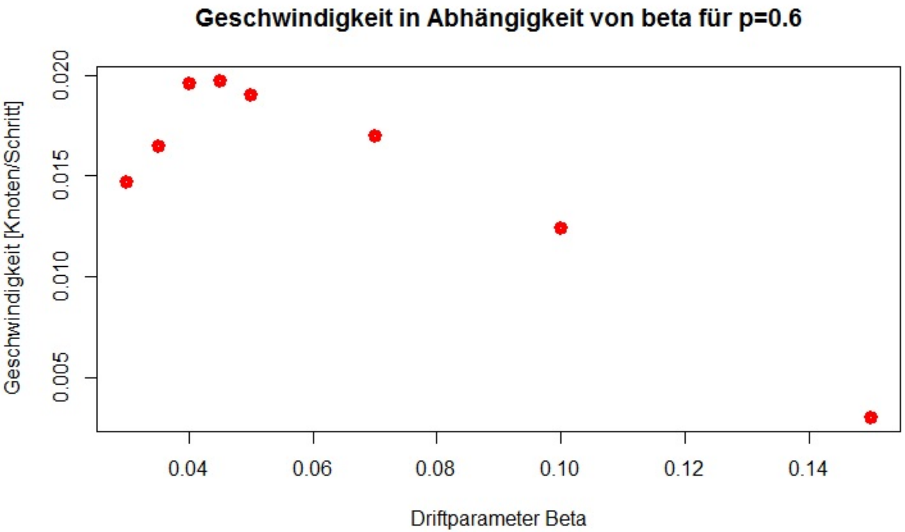
Geschwindigkeit in Abhängigkeit von beta für p=0.7
Geschwindigkeit [Knoten/Schritt]
0.06
0.08
0.10
0.05
0.10
0.15
0.20
Driftparameter Beta

Aufgabe

β	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	0.07	0.10	0.15
$Erw * 10^{-5}$	1472	1650	1959	1974	1902	1697	1244	300
$Var * 10^{-5}$	0.5	0.75	1	1.6	3.6	14	10	100

Table 2: $\mu_{\frac{6}{10},\beta}$ in Abhängigkeit von β

Aufgabe


Geschwindigkeit in Abhängigkeit von beta für p=0.6
Geschwindigkeit [Knoten/Schritt]
0.005
0.010
0.015
0.020
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
Driftparameter Beta

Anwendungen

- Flüssigkeiten, die ein poröses Material durchdringen
- Elektrotechnik
- Ausbreitung von Waldbränden und Epidemien
- ...

Quellen

- Olle Häggström, Streifzüge durch die Wahrscheinlichekitstheorie, Springer 2006

Quellen

- Olle Häggström, Streifzüge durch die Wahrscheinlichekitstheorie, Springer 2006

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!