Základy počítačové grafiky
Přednáška 10

Martin Němec

VŠB-TU Ostrava

2024

Parametrické vyjádření přímky

$$P(t) = A + \vec{u}t$$
$$P(t) = A + (B - A)t$$
$$P(t) = (1 - t)A + tB$$

- Pro přímku platí, že parametr $t \in \mathbb{R}$.
- Pro polopřímku platí, že parametr $t \in \langle 0, \infty)$.
- Pro úsečku platí, že parametr $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Pohyb po úsečce

Vhodnou změnou parametru $t \in < 0, 1 >$ můžeme dopočítávat bod na parametricky zadané úsečce AB a měnit pozici tělesa.

```
float t = 0.5f;
float delta = 0.01;

while (!glfwWindowShouldClose(window)) {
    glm::vec3 point = A +(B-A)*t;

    if (t >= 1.0f || t <= 0.0f) delta *= -1;
    t += delta;
}
```

Tečna, tečný vektor

Parametricky vyjádřená křivka

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in \mathbb{R}.$$

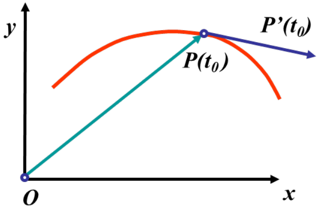
Tečný vektor v bodě $P(t = t_0)$ je dán jako

$$P'(t) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}(t_0) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

Tečna je dána bodem dotyku a tečným vektorem

$$Q(u) = P(t_0) + u \cdot P'(t_0), u \in \mathbb{R}.$$

Tečna je limitní polohou sečny, kdy oba průsečíky splynou v jeden.



Způsoby zápisu křivek

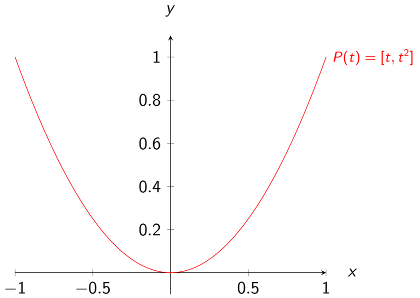
- Explicitně popsané křivky $y = f(x)$, kde $x \in <a, b>$.
  $y = x^2 + x + 1$, jedná se o parabolu.
- Implicitně popsané křivky $F(x, y) = 0$.
  $(x + 9)^2 + (y - 2)^2 - 4 = 0$, kružnice se středem $[-9, 2]$ a $r = 2$.
- Parametricky popsané křivky $x = x(t), y = y(t)$, parametr $t \in <a, b>$.
  $x = t, y = t^2$, kde $t \in \mathbb{R}$, parabola s vrcholem v počátku.

Parametricky popsané křivky

Základním prvkem teorie křivek v počítačové grafice jsou křivky polynomiální, které jsou popsány svým polynomem, kde stupeň udává nejvyšší mocnina.

$$\mathbf{P}_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

Mějme rovinnou křivku zadanou takto: $P(t) = [t, t^2]$, kde $t \in \mathbb{R}$, jedná se o parabolu s vrcholem v počátku.



Fergusonova křivka

James C. Ferguson, analytik u firmy Boeing, navrhl (1964) křivky třetího stupně.

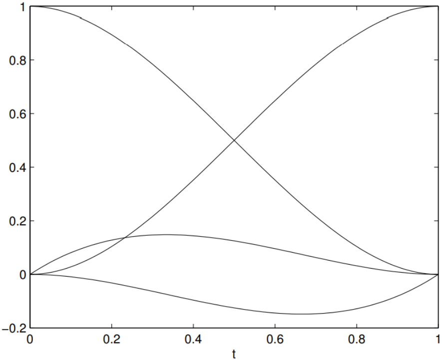
Křivka, která je daná dvěma body V_0 a V_1 a tečnými vektory $\mathbf{v}_0$ a $\mathbf{v}_1$ určující směr křivky v bodech V_0 a V_1, je definována

$$\mathbf{P}(t) = F_0(t)\mathbf{V}_0 + F_1(t)\mathbf{V}_1 + F_2(t)\mathbf{v}_0 + F_3(t)\mathbf{v}_1, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

Jednotlivé bázové funkce F_0, F_1, F_2 a F_3 vypočteme jako

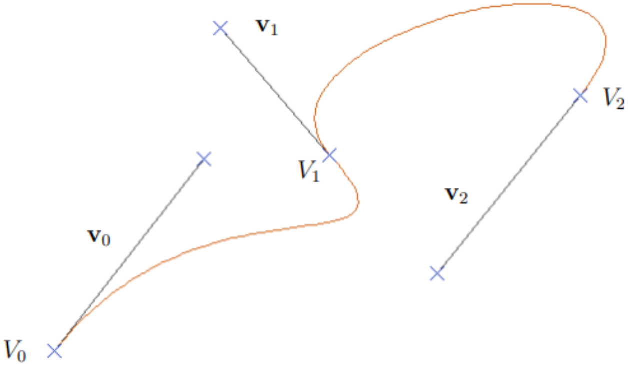
$$\begin{aligned}
F_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1\,,\\
F_1(t) &= -2t^3 + 3t^2\,,\\
F_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t\,,\\
F_3(t) &= t^3 - t^2\,.
\end{aligned}$$

Fergusonova křivka



$$
\begin{aligned}
F_0(t) &= 2t^3 - 3t^2 + 1\,, \\
F_1(t) &= -2t^3 + 3t^2\,, \\
F_2(t) &= t^3 - 2t^2 + t\,, \\
F_3(t) &= t^3 - t^2\,.
\end{aligned}
$$

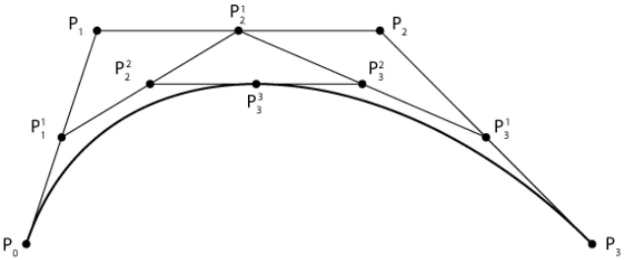
Fergusonova křivka



Geometrická konstrukce Bézierových křivek

Paul de Casteljau (narozen 1930 v Besançon, Francie), matematik a fyzik v Citroënu, využíval pro Bézierovy křivky geometrickou konstrukci nezávisle na Bézierovi. Pro výpočet se používá rekurentní vztah

$$\mathbf{P}_i^j(t) = \begin{cases} (1-t)\mathbf{P}_{i-1}^{j-1}(t) + t\mathbf{P}_i^{j-1}(t) & j > 0 \\ \mathbf{P}_i & \text{jinak} \end{cases}$$



Bézierova křivka

Parametrická křivka pojmenovaná po francouzském inženýru Pierru Bézierovi (1910-1999), Renault.

Mějme zadáno $n+1$ řídicích bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$, kde $n \geq 1$. Bézierova křivka je zadána jako

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Násobení jednotlivých bodů s bázovými funkcemi $B_i^n(t)$

Bernsteinovy polynomy

Mějme zadáno $n+1$ řídicích bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n$, kde $n \geq 1$. Bézierova křivka je zadána jako

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Pro výpočet bázových funkcí $B_i^n(t)$ se využívá Bernsteinových polynomů.

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i \,(1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i \,(1-t)^{n-i} \;,$$

$$\text{kde} \quad \binom{n}{0} = 1 \text{ a } 0^0 = 1\,.$$

Bézierova kubika

Kubické Bézierova křivka je zadána čtyřmi body P_0, P_1, P_2, P_3 a rovnicí

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}_i B_i^3(t)\,, \quad \text{kde} \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

Bernsteinovy bázové polynomy pro Bézierovu kubiku mají tvar

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3\,, \\ B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2\,, \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1-t)\,, \\ B_3^3(t) &= t^3\,. \end{aligned}$$

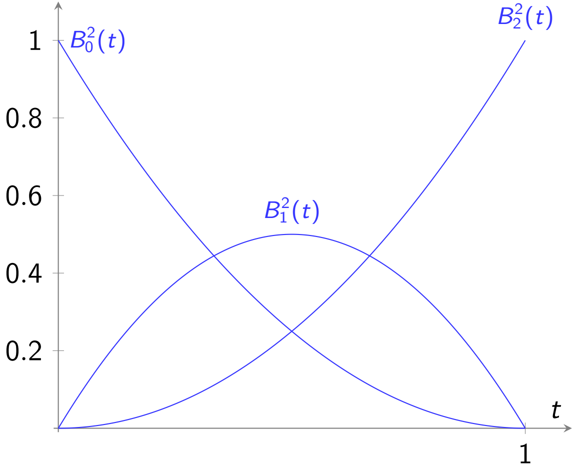
Bézierova křivka

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t)\,,$$

Obecně lze zapsat jako:

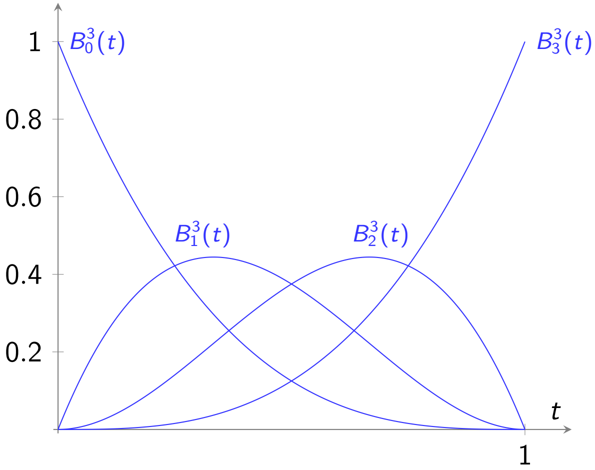
$$= (1-t)^n \mathbf{P}_0 + \binom{n}{1}(1-t)^{n-1} t \mathbf{P}_1 + \ldots + \binom{n}{n-1}(1-t) t^{n-1} \mathbf{P}_{n-1} + t^n \mathbf{P}_n\,.$$

Bernstein basis polynomials for 2th degree



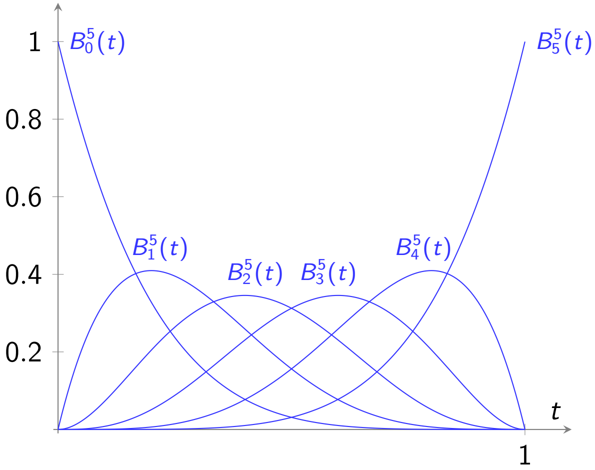
$$\mathbf{P}_2(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2.$$

Bernstein Basis Polynomials for 3th Degree



$$\mathbf{P}_3(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3 \,.$$

Bernstein Basis Bolynomials for 5th Degree



$$\mathbf{P}_5(t) = (1-t)^5\mathbf{P}_0 + 5t(1-t)^4\mathbf{P}_1 +$$

$$+10\mathrm{t}^2(1-t)^3\mathbf{P}_2 + 10t^3(1-t)^2\mathbf{P}_3 + 5t^4(1-t)\mathbf{P}_4 + t^5\mathbf{P}_5\,.$$

Bézierova kubika

Bézierovu křivku lze zapsat v maticovém tvaru. Omezíme se v tomto případě na Bézierovu kubiku $\mathbf{P}_3(t)$ a kvadriku $\mathbf{P}_2(t)$.

$$\mathbf{P}_3(t) = [t^3 \; t^2 \; t \; 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3(t) = (1-t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1-t)^2 t\mathbf{P}_1 + 3(1-t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3\,.$$

$$\mathbf{P}_2(t) = [t^2 \; t \; 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2 .$$

Binomická věta

Pro všechna čísla a, b a každé přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Pro binomický rozvoj pak platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \dots \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots \binom{n}{n} b^n$$

Řekněme, že $a = (1-t)$ a $b = t$, pak dostaneme

$$(a+b)^n = ((1-t)+t)^n = 1$$

Jak lze vidět, pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ bude součet bázových funkcí roven jedné.

Základní vlastnosti Bernsteinových polynomů

- **Symetrie** (symmetry) - bázové funkce $B_i^n(t)$ a $B_{n-i}^n(t)$ jsou zrcadlovými obrazy samy sebe.

$$B_{n-i}^n(1-t) = B_i^n(t)\,.$$

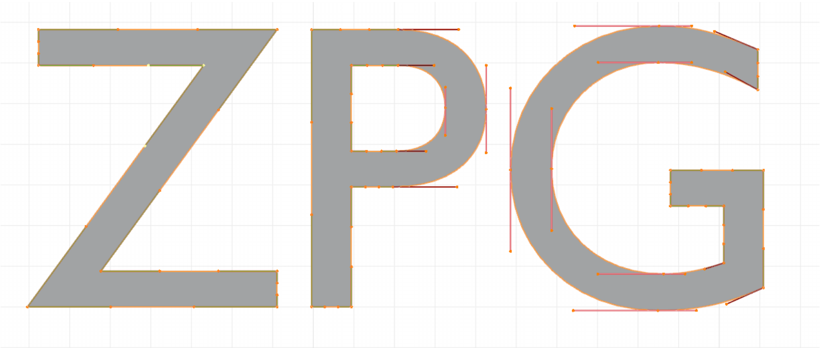
- **Rekurze** (recursion) - bázové funkce stupně $n+1$ můžeme generovat z báze stupně n.

$$B_i^{n+1}(t) = tB_{i-1}^n(t) + (1-t)B_i^n(t)$$

- **Nezápornost** (non-negativity) - pro bázové funkce platí, že $B_i^n(t) \geq 0$, pro $t \in < 0, 1 >$.

Příklady použití

- TrueType fontů (kvadratické křivky)
- Postscriptových fontů (kubické křivky)



Derivace Bézierovy křivky

Pro výslednou derivaci Bézierovy křivky platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t)\left(n\left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i\right)\right) .$$

$$\mathbf{P}'(t) = n\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^n(t)\mathbf{P}_{i+1}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i^n(t)\mathbf{P}_i\right)\right] .$$

Odvození a další křivky, jako racionální Bézierova křivka, NURBS křivka apod. ve čtvrtém ročníku.

Derivace Bézierovy kubiky

Pro výslednou derivaci Bézierovy kubiky platí

$$\mathbf{P_3}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\mathbf{P}_i \ \ , t \in \langle 0, 1\rangle \, , B_i^3(t) = \binom{n}{k} t^i (1-t)^{n-i} \, .$$

$$\mathbf{P_3}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 \, ,$$

$$\mathbf{P_3'}(t) =$$

$$\text{-3(1-t)}^2 P_0 - 6(1-t)tP_1 + 3(1-t)^2 P_1 - 3t^2 P_2 + 6(1-t)tP_2 + 3t^2 P_3 \, ,$$

$$\mathbf{P_3'}(t) = 3((1-t)^2(P_1 - P_0) + 2(1-t)t(P_2 - P_1) + t^2(P_3 - P_2) \, ,$$

$$\mathbf{P}'(t) = n \left(\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) \left(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i\right) \right) \ ,$$

$$\mathbf{P}'(t) = n \left[\left(\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) \mathbf{P}_{i+1} \right) - \left(\sum_{i=0}^{2} B_i^2(t) \mathbf{P}_i \right) \right] \, .$$

Pohyb po Bézierově kubice

```
glm::mat4 A = glm::mat4(
    glm::vec4(-1.0, 3.0, -3.0, 1.0),
    glm::vec4(3.0, -6.0, 3.0, 0),
    glm::vec4(-3.0, 3.0, 0, 0),
    glm::vec4(1, 0, 0, 0));

glm::mat4x3 B = glm::mat4x3(glm::vec3(-1, 0, 0),
    glm::vec3(0, 1, 0),
    glm::vec3(0, -1, 0),
    glm::vec3(1, 0, 0));

float t = 0.5f;
float delta = 0.01;

while (!glfwWindowShouldClose(window)) {
    glm::vec4 p = glm::vec4(t * t * t, t * t, t, 1.0f);
    glm::vec3 point = p * A * glm::transpose(B);

    if (t >= 1.0f || t <= 0.0f) delta *= -1;
    t += delta;
```

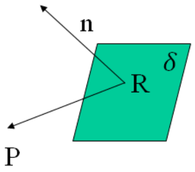
Identifikace

Rovina $\alpha(R, \vec{n})$ je množina bodů P_i pro které platí, že:

$$(P_i - R)\vec{n} = 0$$

Dosadíme-li do rovnice parametrické vyjádření přímky $X(t) = A + \vec{u}t$

$$t = (R - A)\vec{n}/(\vec{u} \cdot \vec{n})$$



Identifikace - Stencil Buffer

Stencil buffer je volitelné rozšíření depth bufferu
glEnable(GL_STENCIL_TEST)

Kliknutím do obrazovky určit které těleso jsem vybral:

- metody založené na výpočtu průsečíku s tělesy;
- stencil buffer;

```
glEnable(GL_STENCIL_TEST);
glStencilOp(GL_KEEP, GL_KEEP, GL_REPLACE);
for (vsechny kreslene objekty){
   glStencilFunc(GL_ALWAYS, objekt->getID(), 0xFF);
   drawArray(...);
}
```

Stencil buffer má obvykle 8 bitů, takže můžeme ukládat hodnoty v rozsahu 0-255 pro jeden pixel.

Identifikace - Stencil Buffer

```
glEnable(GL_STENCIL_TEST);
glStencilOp(GL_KEEP, GL_KEEP, GL_REPLACE);
for (vsechny kreslene objekty){
   glStencilFunc(GL_ALWAYS, objekt->getID(), 0xFF);
   drawArray(...);
}

GLbyte c[4];
GLfloat d;
GLuint i;

glReadPixels(x,y,1,1,GL_RGBA, GL_UNSIGNED_BYTE, c);
glReadPixels(x,y,1,1,GL_DEPTH_COMPONENT,GL_FLOAT,&d);
glReadPixels(x,y,1,1,GL_STENCIL_INDEX,GL_UNSIGNED_INT,&i);
```

vec3 p=unProject(screenX, view, projection, viewPort);

Závěr

Dotazy?