

# Flujos Y Networks. MDII 2021

Daniel Penazzi

7 de abril de 2021

# Tabla de Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Herramientas matemáticas
  - Grafos Dirigidos
  - Networks (redes)
  - Flujos

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej
  - 1 TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej
  - 1 TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.
  - 2 Agua, gas, electricidad, llamadas telefónicas, etc

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej
  - 1 TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.
  - 2 Agua, gas, electricidad, llamadas telefónicas, etc
- Y tenemos ciertos productores que producen esos bienes.

# Explicación del problema

- Supongamos que tenemos un cierto “bien” que ciertos consumidores quieren. Pej
  - 1 TVs, computadoras, autos, smartphones, libros, etc.
  - 2 Agua, gas, electricidad, llamadas telefónicas, etc
- Y tenemos ciertos productores que producen esos bienes.
- Queremos llevar esos bienes de los productores a los consumidores.

# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.



# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red sería una red de carreteras, pej.

# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red sería una red de carreteras, pej.
- En el caso de los bienes de [2] será una red de cañerías de agua, o cañerías de gas, o cables de electricidad o teléfono.

# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red sería una red de carreteras, pej.
- En el caso de los bienes de [2] será una red de cañerías de agua, o cañerías de gas, o cables de electricidad o teléfono.
- El problema que vamos a abordar no es construir esas redes, o resolver un problema de producción de los productores.

# Redes

- Para poder llevar los bienes de los productores a los consumidores, necesitaremos una red que nos permita transportarlos.
- En el caso de los bienes de [1] de la página anterior, esa red seria una red de carreteras, pej.
- En el caso de los bienes de [2] será una red de cañerías de agua, o cañerías de gas, o cables de electricidad o teléfono.
- El problema que vamos a abordar no es construir esas redes, o resolver un problema de producción de los productores.
- Esos son problemas importantes, pero nuestro objetivo ahora es otro problema, tambien muy importante.

# El problema

- El problema es:

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.



# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.
- Hay dos cosas a modelizar:

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.
- Hay dos cosas a modelizar:
  - ① La red de transporte

# El problema

- El problema es:
  - DADOS los productores, los consumidores, y la red de transporte,
  - ¿Cómo llevar la mayor cantidad posible de bienes desde los productores a los consumidores?
- Para poder resolver este problema primero tenemos que modelizarlo adecuadamente.
- Hay dos cosas a modelizar:
  - 1 La red de transporte
  - 2 El “flujo” de bienes a través de esa red.

Empecemos con la red:

Empecemos con la red:

### Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E$

# Grafos Dirigidos

Empecemos con la red:

## Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

Empecemos con la red:

### Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:

Empecemos con la red:

### Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:

$$E \subset V \times V$$



# Grafos Dirigidos

Empecemos con la red:

## Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:

$$E \subseteq V \times V$$

- Es decir, ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.

# Grafos Dirigidos

Empecemos con la red:

## Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:  
 $E \subseteq V \times V$
- Es decir, ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.
- Esto significa que no es lo mismo  $(x, y)$  que  $(y, x)$

Empecemos con la red:

### Definición:

Un Grafo dirigido es un par  $G = (V, E)$  donde  $V$  es un conjunto cualquiera (finito para nosotros) y  $E \subseteq V \times V$

- La diferencia con un grafo no dirigido es:  
 $E \subseteq V \times V$
- Es decir, ahora los lados son pares ordenados en vez de conjuntos.
- Esto significa que no es lo mismo  $(x, y)$  que  $(y, x)$
- Pero además que pueden existir **AMBOS** lados.

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde  $x$  a  $y$  que al revés.

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde  $x$  a  $y$  que al revés.
- Pej, podría ser imposible ir de  $y$  a  $x$ , si la red es una red de calles, y las calles son de sentido único.

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde  $x$  a  $y$  que al revés.
- Pej, podría ser imposible ir de  $y$  a  $x$ , si la red es una red de calles, y las calles son de sentido único.
- En ese caso en nuestro grafo dirigido existirá el lado  $(x, y)$  pero no el  $(y, x)$ .

- ¿Por qué estamos diferenciando  $(x, y)$  de  $(y, x)$ ?
- Porque en muchas situaciones puede suceder que no sea lo mismo mandar un bien desde  $x$  a  $y$  que al revés.
- Pej, podría ser imposible ir de  $y$  a  $x$ , si la red es una red de calles, y las calles son de sentido único.
- En ese caso en nuestro grafo dirigido existirá el lado  $(x, y)$  pero no el  $(y, x)$ .
- Pero incluso cuando se puede mandar en ambas direcciones podemos necesitar diferenciar.



$$(x, y)/(y, x)$$

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerías, y tenemos un caño entre  $x$  e  $y$ , quizás podría ser tal que podamos mandar agua tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$ .

$(x, y)/(y, x)$ 

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerías, y tenemos un caño entre  $x$  e  $y$ , quizás podría ser tal que podamos mandar agua tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$ .
- Pero si estamos mandando agua desde  $x$  a  $y$ , entonces no podemos simultaneamente mandar agua desde  $y$  a  $x$ .

$(x, y)/(y, x)$ 

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerías, y tenemos un caño entre  $x$  e  $y$ , quizás podría ser tal que podamos mandar agua tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$ .
- Pero si estamos mandando agua desde  $x$  a  $y$ , entonces no podemos simultaneamente mandar agua desde  $y$  a  $x$ .
- Nos conviene modelar el grafo de forma tal que existan tanto los lados  $(x, y)$  como  $(y, x)$  para que cuando mandemos agua, sepamos si estamos mandando desde  $x$  a  $y$  o al revés.

$(x, y)/(y, x)$ 

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerías, y tenemos un caño entre  $x$  e  $y$ , quizás podría ser tal que podamos mandar agua tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$ .
- Pero si estamos mandando agua desde  $x$  a  $y$ , entonces no podemos simultaneamente mandar agua desde  $y$  a  $x$ .
- Nos conviene modelar el grafo de forma tal que existan tanto los lados  $(x, y)$  como  $(y, x)$  para que cuando mandemos agua, sepamos si estamos mandando desde  $x$  a  $y$  o al revés.
- Los lados los escribiremos como  $(x, y)$  pero tambien como:

$(x, y)/(y, x)$ 

- Pej si estamos mandando agua por una red de cañerías, y tenemos un caño entre  $x$  e  $y$ , quizás podría ser tal que podamos mandar agua tanto de  $x$  a  $y$  como de  $y$  a  $x$ .
- Pero si estamos mandando agua desde  $x$  a  $y$ , entonces no podemos simultaneamente mandar agua desde  $y$  a  $x$ .
- Nos conviene modelar el grafo de forma tal que existan tanto los lados  $(x, y)$  como  $(y, x)$  para que cuando mandemos agua, sepamos si estamos mandando desde  $x$  a  $y$  o al revés.
- Los lados los escribiremos como  $(x, y)$  pero tambien como:

## Notación:

Denotaremos el lado  $(x, y)$  como  $\overrightarrow{xy}$ .

# Vecinos hacia adelante y hacia atras

- En los grafos no dirigidos, teníamos al conjunto de vecinos  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$ .

# Vecinos hacia adelante y hacia atras

- En los grafos no dirigidos, teníamos al conjunto de vecinos  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$ .
- Pero ahora como podemos tener lados tanto  $(x, y)$  como  $(y, x)$  deberíamos diferenciar entre “véminos hacia adelante” y “véminos hacia atras”

# Vecinos hacia adelante y hacia atras

- En los grafos no dirigidos, teníamos al conjunto de vecinos  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$ .
- Pero ahora como podemos tener lados tanto  $(x, y)$  como  $(y, x)$  deberíamos diferenciar entre “véminos hacia adelante” y “véminos hacia atras”

## Notación:

En un grafo dirigido, definimos:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid \overrightarrow{xy} \in E\}$$



# Vecinos hacia adelante y hacia atras

- En los grafos no dirigidos, teníamos al conjunto de vecinos  $\Gamma(x) = \{y \in V \mid xy \in E\}$ .
- Pero ahora como podemos tener lados tanto  $(x, y)$  como  $(y, x)$  deberíamos diferenciar entre “véminos hacia adelante” y “véminos hacia atras”

## Notación:

En un grafo dirigido, definimos:

$$\Gamma^+(x) = \{y \in V \mid \overrightarrow{xy} \in E\}$$

y :

$$\Gamma^-(x) = \{y \in V \mid \overrightarrow{yx} \in E\}$$

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atrás”

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atrás”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.
- Y ademas esas capacidades máximas no tendrán porqué ser uniformes.

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.
- Y ademas esas capacidades máximas no tendrán porqué ser uniformes.
- Pej un cierto caño podrá transportar 1000 litros de agua y otro 3400.

# De grafos dirigidos a networks

- Los elementos de  $\Gamma^+(x)$  son los “véminos hacia adelante” y los de  $\Gamma^-(x)$  son los “véminos hacia atras”
- Ahora bien, el concepto de grafo dirigido no modeliza completamente una red de transporte.
- Esto es asi porque en gral las redes de transporte tienen alguna capacidad máxima de transporte.
- Y ademas esas capacidades máximas no tendrán porqué ser uniformes.
- Pej un cierto caño podrá transportar 1000 litros de agua y otro 3400.
- La definición que modela esto es la de **network**(redes, en castellano, pero voy a usar la palabra en ingles)

# Network

## Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple  $(V, E, c)$  donde  $(V, E)$  es un grafo dirigido y  $c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$



# Network

## Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple  $(V, E, c)$  donde  $(V, E)$  es un grafo dirigido y  $c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$

- En este contexto,  $c(\overrightarrow{xy})$  se llamará la “capacidad” del lado  $\overrightarrow{xy}$ .

# Network

## Definición:

Un Network es un grafo dirigido con pesos positivos en los lados, es decir, un triple  $(V, E, c)$  donde  $(V, E)$  es un grafo dirigido y  $c : E \mapsto \mathbb{R}_{>0}$

- En este contexto,  $c(\overrightarrow{xy})$  se llamará la “capacidad” del lado  $\overrightarrow{xy}$ .
- La idea, como dijimos antes, es que esto simboliza que no podemos mandar mas de  $c(\overrightarrow{xy})$  “bienes” por el lado  $\overrightarrow{xy}$ , sean cuales sean esos bienes.

- En realidad a esa definición le falta otra cosa, al menos en nuestro caso, cosa que algunos autores ponen directamente en la definición de network y otros la incluyen en la del **flujo**.

- En realidad a esa definición le falta otra cosa, al menos en nuestro caso, cosa que algunos autores ponen directamente en la definición de network y otros la incluyen en la del [flujo](#).
- Recordemos que lo que tenemos además de la red, son los productores y los consumidores.

- En realidad a esa definición le falta otra cosa, al menos en nuestro caso, cosa que algunos autores ponen directamente en la definición de network y otros la incluyen en la del [flujo](#).
- Recordemos que lo que tenemos además de la red, son los productores y los consumidores.
- Así que además de la definición anterior, deberíamos decir cuales de los vértices son los productores, cuales los consumidores y cuales son simplemente “vértices de tránsito”

- En realidad a esa definición le falta otra cosa, al menos en nuestro caso, cosa que algunos autores ponen directamente en la definición de network y otros la incluyen en la del [flujo](#).
- Recordemos que lo que tenemos además de la red, son los productores y los consumidores.
- Así que además de la definición anterior, deberíamos decir cuales de los vértices son los productores, cuales los consumidores y cuales son simplemente “vértices de tránsito”
- Podemos pensar que eso es una propiedad estructural del network en si o bien que es una propiedad que se deduce de las características del flujo de bienes.

- En realidad a esa definición le falta otra cosa, al menos en nuestro caso, cosa que algunos autores ponen directamente en la definición de network y otros la incluyen en la del [flujo](#).
- Recordemos que lo que tenemos además de la red, son los productores y los consumidores.
- Así que además de la definición anterior, deberíamos decir cuales de los vértices son los productores, cuales los consumidores y cuales son simplemente “vértices de tránsito”
- Podemos pensar que eso es una propiedad estructural del network en si o bien que es una propiedad que se deduce de las características del flujo de bienes.
- Es una cuestión filosófica en la cual no conviene perder mucho tiempo.

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.



- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.
- Este año la dejaré dentro de la de flujo.

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.
- Este año la dejaré dentro de la de flujo.
- De todos modos, una aclaración que conviene hacer ahora es que para simplificar el modelo, es practica común asumir que hay **un sólo productor** y **un sólo consumidor**

- Pero la traigo a colación pues puede depender a cual autor lean cual de las dos posturas está tomando.
- Yo mismo algunos años incluyo la definición de los productores/consumidores en la definición de network y otros años en la de flujo.
- Este año la dejaré dentro de la de flujo.
- De todos modos, una aclaración que conviene hacer ahora es que para simplificar el modelo, es practica común asumir que hay **un sólo productor** y **un sólo consumidor**
- En un ejercicio del práctico se les pedirá ver que esto no es una limitación, es decir, si pueden resolver problemas con un sólo productor y un sólo consumidor, entonces es fácil realizar una modificación que permita resolver el problema de múltiples productores o consumidores.

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?
- Buena, una de ellas es la relacionada con la capacidad: no deberíamos mandar mas litros de agua que lo que el caño puede aguantar.

- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?
- Buena, una de ellas es la relacionada con la capacidad: no deberíamos mandar mas litros de agua que lo que el caño puede aguantar.
- Otra de ellas tiene que ver con cosas realísticas: tiene sentido hablar de mandar 4 litros de agua, o incluso 0 litros de agua, pero no mandar -10 litros de agua por un caño.



- Ahora tenemos que modelizar los bienes que tendremos que mandar. (el “flujo”)
- ¿Que condiciones deberíamos imponerle?
- Buena, una de ellas es la relacionada con la capacidad: no deberíamos mandar mas litros de agua que lo que el caño puede aguantar.
- Otra de ellas tiene que ver con cosas realísticas: tiene sentido hablar de mandar 4 litros de agua, o incluso 0 litros de agua, pero no mandar -10 litros de agua por un caño.
- Entonces vamos a incluir en la definición de flujo como una función  $f$  sobre los lados tal que  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy})$ .

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias enorrosas.

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias engorrosas.
- Por lo que usaremos una notación común para resolver esto:

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias engorrosas.
- Por lo que usaremos una notación común para resolver esto:
- Si  $P$  es una propiedad que puede ser verdadera o falsa,  $[P]$  denota el número 1 si  $P$  es verdadera, y 0 si  $P$  es falsa.

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Otra cosa es que vamos a suponer que la red no tiene filtraciones, es decir, que los únicos que consumen bienes son los consumidores y no los vértices intermedios de transporte
- Para poder definir bien esto y para poder demostrar cosas con ellos tendremos que usar algunas sumatorias engorrosas.
- Por lo que usaremos una notación común para resolver esto:
- Si  $P$  es una propiedad que puede ser verdadera o falsa,  $[P]$  denota el número 1 si  $P$  es verdadera, y 0 si  $P$  es falsa.
- Para qué sirve esto?

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable  $x$ , y queremos sumar una función  $f(x)$  sobre todos los  $x$  que satisfagan una propiedad  $P(x)$

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable  $x$ , y queremos sumar una función  $f(x)$  sobre todos los  $x$  que satisfagan una propiedad  $P(x)$
- En vez de escribir

$$\sum_{x:P(x)} f(x)$$



# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable  $x$ , y queremos sumar una función  $f(x)$  sobre todos los  $x$  que satisfagan una propiedad  $P(x)$

- En vez de escribir

$$\sum_{x:P(x)} f(x)$$

- podemos simplemente escribir  $\sum_x f(x)[P(x)]$  o  $\sum_x [P(x)]f(x)$

# Notación para agilizar lecturas de sumatorias

- Supongamos que tenemos una variable  $x$ , y queremos sumar una función  $f(x)$  sobre todos los  $x$  que satisfagan una propiedad  $P(x)$

- En vez de escribir

$$\sum_{x:P(x)} f(x)$$

- podemos simplemente escribir  $\sum_x f(x)[P(x)]$  o  $\sum_x [P(x)]f(x)$
- o incluso  $\sum f(x)[P(x)]$  si queda claro que sumamos sobre  $x$ .

# Notación para funciones sobre lados

- Otra cosa que permita agilizar la notación es, dada una función  $g$  cualquiera definida sobre los lados ( $g$  en general va a ser o bien las capacidades o bien el flujo) extender la notación “ $g(\overrightarrow{xy})$ ” para tomar en cuenta conjuntos de vértices y no sólo 2 vértices individuales.

# Notación para funciones sobre lados

- Otra cosa que permita agilizar la notación es, dada una función  $g$  cualquiera definida sobre los lados ( $g$  en general va a ser o bien las capacidades o bien el flujo) extender la notación " $g(\overrightarrow{xy})$ " para tomar en cuenta conjuntos de vértices y no sólo 2 vértices individuales.

## Notación:

Si  $g$  es una función definida en los lados y  $A$  y  $B$  son subconjuntos de vertices, entonces  $g(A, B)$  denotará la suma:

# Notación para funciones sobre lados

- Otra cosa que permita agilizar la notación es, dada una función  $g$  cualquiera definida sobre los lados ( $g$  en general va a ser o bien las capacidades o bien el flujo) extender la notación “ $g(\overrightarrow{xy})$ ” para tomar en cuenta conjuntos de vértices y no sólo 2 vértices individuales.

## Notación:

Si  $g$  es una función definida en los lados y  $A$  y  $B$  son subconjuntos de vertices, entonces  $g(A, B)$  denotará la suma:

$$g(A, B) = \sum_{x,y} [x \in A][y \in B][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

- Con la notación usual esto seria:

- Con la notación usual esto seria:

$$g(A, B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \overrightarrow{xy} \in E}} g(\overrightarrow{xy})$$

- Con la notación usual esto seria:

$$g(A, B) = \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B \\ \overrightarrow{xy} \in E}} g(\overrightarrow{xy})$$

- Por eso preferimos usar la notación “[]” aunque cuando uno lo escribe a mano ya sea en papel o en el pizarrón probablemente no sea necesario.



# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V)$$

# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

- Es decir  $out_g(x)$  es todo lo que “sale” de  $x$  por medio de  $g$ .

# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

$$in_g(x) = g(V, \{x\})$$

- Es decir  $out_g(x)$  es todo lo que “sale” de  $x$  por medio de  $g$ .

# in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

$$in_g(x) = g(V, \{x\}) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] g(\overrightarrow{yx})$$

- Es decir  $out_g(x)$  es todo lo que “sale” de  $x$  por medio de  $g$ .

## in y out

## Notación:

Dada una función  $g$  sobre lados y un vértice  $x$ , definimos:

$$out_g(x) = g(\{x\}, V) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] g(\overrightarrow{xy})$$

$$in_g(x) = g(V, \{x\}) = \sum_y [y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] g(\overrightarrow{yx})$$

- Es decir  $out_g(x)$  es todo lo que “sale” de  $x$  por medio de  $g$ .
- Es decir,  $in_g(x)$  es todo lo que “entra” a  $x$  por medio de  $g$ .

- Alternativamente, dado que

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$



- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
- $in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx})$

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
- $in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})$

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
- $in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})$
- Ahora estamos listos para definir flujo desde un productor (que denotaremos  $s$ ) a un consumidor (que denotaremos  $t$ ).

- Alternativamente, dado que
  - $[y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$
  - $y$
  - $[y \in V][\overrightarrow{yx} \in E] = [y \in \Gamma^-(x)],$
- podemos escribir:
- $out_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^+(x)] g(\overrightarrow{xy}) = g(\{x\}, \Gamma^+(x))$
- $in_g(x) = \sum_y [y \in \Gamma^-(x)] g(\overrightarrow{yx}) = g(\Gamma^-(x), \{x\})$
- Ahora estamos listos para definir flujo desde un productor (que denotaremos  $s$ ) a un consumidor (que denotaremos  $t$ ).
- El hecho que uno sea productor y el otro consumidor se verá reflejado en la definición.



# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- 1  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$
- 2  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$
- ❹  $in_f(t) \geq out_f(t).$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$  (“feasability”)
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$
- ❹  $in_f(t) \geq out_f(t).$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$  (“feasability”)
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$  (“conservación”)
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$
- ❹  $in_f(t) \geq out_f(t).$

# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$  (“feasability”)
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$  (“conservación”)
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$  ( $s$  es productor)
- ❹  $in_f(t) \geq out_f(t).$



# Flujos

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$ , y un par de vertices  $s, t \in V$ , un *flujo* de  $s$  a  $t$  es una función  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  con las siguientes propiedades:

- ❶  $0 \leq f(\overrightarrow{xy}) \leq c(\overrightarrow{xy}) \quad \forall \overrightarrow{xy} \in E.$  (“feasability”)
- ❷  $in_f(x) = out_f(x) \quad \forall x \in V - \{s, t\}.$  (“conservación”)
- ❸  $out_f(s) \geq in_f(s).$  ( $s$  es productor)
- ❹  $in_f(t) \geq out_f(t).$  ( $t$  es consumidor)

# Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien

# Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a transportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.

# Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a transportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.
- La segunda propiedad dice que el network no tiene “pérdidas” .

# Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a transportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.
- La segunda propiedad dice que el network no tiene “pérdidas” .
- es decir que cualquier vértice que no sea ni  $s$  ni  $t$  no consume ni produce bienes.

# Explicación de la definición de flujo

- Como habíamos explicado antes, la primera propiedad dice que no vamos a transportar una cantidad negativa de un bien
- ni vamos a transportar por encima de la capacidad de transporte de un lado.
- La segunda propiedad dice que el network no tiene “pérdidas” .
- es decir que cualquier vértice que no sea ni  $s$  ni  $t$  no consume ni produce bienes.
- (o en una interpretación alternativa, produce exactamente lo mismo que consume)

# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.

# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que  $t$  es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.



# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que  $t$  es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.
- En algunos libros en vez de 3) se pide directamente  $in_f(s) = 0$  y en vez de 4) se pide  $out_f(t) = 0$ .

# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que  $t$  es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.
- En algunos libros en vez de 3) se pide directamente  $in_f(s) = 0$  y en vez de 4) se pide  $out_f(t) = 0$ .
- Podríamos definirlo así porque en todos los algoritmos que veamos, los flujos que efectivamente construyamos van a tener esa propiedad.

# Explicación de la definición de flujo

- La tercera especifica que  $s$  es un vértice donde hay una producción neta de bienes, pues produce mas de lo que consume.
- y la cuarta que  $t$  es un vértice donde se consumen los bienes pues consume mas de lo que produce.
- En algunos libros en vez de 3) se pide directamente  $in_f(s) = 0$  y en vez de 4) se pide  $out_f(t) = 0$ .
- Podríamos definirlo así porque en todos los algoritmos que veamos, los flujos que efectivamente construyamos van a tener esa propiedad.
- Además que en todos los ejemplos que usaremos,  
 $\Gamma^-(s) = \Gamma^+(t) = \emptyset$

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.
- s se llama tradicionalmente la “fuente”(source)

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.
- $s$  se llama tradicionalmente la “fuente”(source)
- y  $t$  el “resumidero”(sink).

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.
- $s$  se llama tradicionalmente la “fuente”(source)
- y  $t$  el “resumidero”(sink).
- Estos nombres vienen de pensar el network como una red de cañerías de agua.

- Pero algún ejemplo de aplicación podría requerir no asumir eso, y no es un detalle extra complicado en las pruebas, así que lo dejamos así.
- $s$  se llama tradicionalmente la “fuente”(source)
- y  $t$  el “resumidero”(sink).
- Estos nombres vienen de pensar el network como una red de cañerías de agua.
- En algunos libros la propiedad [4] no se incluye en la definición. (veremos que se deduce de las otras tres).



# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el *valor* de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el *valor* de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

- Es decir, el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.

# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el *valor* de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

- Es decir, el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.
- Veremos luego que  $v(f)$  también es igual a  $in_f(t) - out_f(t)$ , es decir, la cantidad neta de bienes consumidos.

# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el *valor* de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

- Es decir, el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.
- Veremos luego que  $v(f)$  también es igual a  $in_f(t) - out_f(t)$ , es decir, la cantidad neta de bienes consumidos.
- Intuitivamente, si en el medio no se pierde nada por la propiedad 2), lo que llega a  $t$  debería ser igual a lo que sale de  $s$ .

# Valor de un flujo

## Definición

Dado un network  $(V, E, c)$  el *valor* de un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  es:

$$v(f) = out_f(s) - in_f(s)$$

- Es decir, el valor de un flujo es la cantidad neta de bienes producidos.
- Veremos luego que  $v(f)$  también es igual a  $in_f(t) - out_f(t)$ , es decir, la cantidad neta de bienes consumidos.
- Intuitivamente, si en el medio no se pierde nada por la propiedad 2), lo que llega a  $t$  debería ser igual a lo que sale de  $s$ .
- Esto se puede demostrar con una pequeña cuenta que haremos luego, pero primero:

# Flujos maximales

## Definición

Dado un network  $N$  y vertices  $s, t$ , un flujo maximal de  $s$  a  $t$  (o “Max flow”) es un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  tal que  $v(g) \leq v(f)$  para todo flujo  $g$  de  $s$  a  $t$ .

# Flujos maximales

## Definición

Dado un network  $N$  y vertices  $s, t$ , un flujo maximal de  $s$  a  $t$  (o “Max flow”) es un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  tal que  $v(g) \leq v(f)$  para todo flujo  $g$  de  $s$  a  $t$ .

- El problema que queremos resolver es:

# Flujos maximales

## Definición

Dado un network  $N$  y vertices  $s, t$ , un flujo maximal de  $s$  a  $t$  (o “Max flow”) es un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  tal que  $v(g) \leq v(f)$  para todo flujo  $g$  de  $s$  a  $t$ .

- El problema que queremos resolver es:
- Dado un network, encontrar un flujo maximal en el network



# Flujos maximales

## Definición

Dado un network  $N$  y vertices  $s, t$ , un flujo maximal de  $s$  a  $t$  (o “Max flow”) es un flujo  $f$  de  $s$  a  $t$  tal que  $v(g) \leq v(f)$  para todo flujo  $g$  de  $s$  a  $t$ .

- El problema que queremos resolver es:
- Dado un network, encontrar un flujo maximal en el network
- Y obviamente queremos un algoritmo polinomial que lo resuelva.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” **valor** de un flujo maximal.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” **valor** de un flujo maximal.
- A veces esto se llama el maxvalue.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” **valor** de un flujo maximal.
- A veces esto se llama el maxvalue.
- De la definición no es claro que exista un flujo maximal.

# Flujos maximales

- Puede haber mas de un flujo maximal.
- (obviamente todos tendran el mismo valor, asi que si bien no podemos hablar de “el” flujo maximal, si podemos hablar de “el” **valor** de un flujo maximal.
- A veces esto se llama el maxvalue.
- De la definición no es claro que exista un flujo maximal.
- pero probaremos mas adelante que siempre existe.

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:



# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$f(V, V) =$$

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$f(V, V) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in V][y \in V][\overrightarrow{xy} \in E]$$

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$f(V, V) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy}) [x \in V] [y \in V] [\overrightarrow{xy} \in E]$$

Observemos que  $[y \in V] [\overrightarrow{xy} \in E] = [y \in \Gamma^+(x)]$ , así que :

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy}) [x \in V] [y \in V] [\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy}) [y \in \Gamma^+(x)] [x \in V]
 \end{aligned}$$

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in V][y \in V][\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy})[y \in \Gamma^+(x)][x \in V] \\
 &= \sum_x out_f(x)[x \in V]
 \end{aligned}$$

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy}) [x \in V] [y \in V] [\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy}) [y \in \Gamma^+(x)] [x \in V] \\
 &= \sum_x out_f(x) [x \in V]
 \end{aligned}$$

Para que las cosas no se vean tan amontonadas, no escribiremos las condiciones del tipo “[ $x \in V$ ]” es decir asumiremos que nuestras variables,  $x, y$  están en  $V$ .

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy})[y \in \Gamma^+(x)] \\
 &= \sum_x out_f(x)
 \end{aligned}$$

Para que las cosas no se vean tan amontonadas, no escribiremos las condiciones del tipo “[ $x \in V$ ]” es decir asumiremos que nuestras variables,  $x, y$  están en  $V$ .

# Una propiedad chiquita

## Propiedad

Propiedades 1,2 y 3 implican la 4), y  $v(f) = in_f(t) - out_f(t)$ .

Prueba:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy}) [\overrightarrow{xy} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{xy}) [y \in \Gamma^+(x)] \\
 &= \sum_x out_f(x)
 \end{aligned}$$

Para que las cosas no se vean tan amontonadas, no escribiremos las condiciones del tipo “[ $x \in V$ ]” es decir asumiremos que nuestras variables,  $x, y$  estan en  $V$ . sigue->



# continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

# continuación de la prueba

Por otro lado, también podemos escribir:

$$f(V, V) =$$

# continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

$$f(V, V) = \sum_{y,x} [\overrightarrow{yx} \in E]$$

# continuación de la prueba

Por otro lado, también podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(V, V) &= \sum_{y, x} [\overrightarrow{yx} \in E] \\ &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{yx}) [y \in \Gamma^-(x)] \end{aligned}$$

# continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(V, V) &= \sum_{y,x} [\overrightarrow{yx} \in E] \\ &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{yx}) [y \in \Gamma^-(x)] \\ &= \sum_x in_f(x) \end{aligned}$$

# continuación de la prueba

Por otro lado, tambien podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 f(V, V) &= \sum_{y,x} [\overrightarrow{yx} \in E] \\
 &= \sum_x \sum_y f(\overrightarrow{yx}) [y \in \Gamma^-(x)] \\
 &= \sum_x in_f(x)
 \end{aligned}$$

sigue->

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .



# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .
- Con lo cual nos queda la igualdad

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .
- Con lo cual nos queda la igualdad
- $out_f(s) + out_f(t) = in_f(s) + in_f(t)$

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .
- Con lo cual nos queda la igualdad
- $out_f(s) + out_f(t) = in_f(s) + in_f(t)$
- es decir,  $in_f(t) - out_f(t) = out_f(s) - in_f(s) = v(f) \geq 0$ .

# finalización de la prueba

- Por lo que concluimos que
$$\sum_x out_f(x) = f(V, V) = \sum_x in_f(x).$$
- Por la propiedad 2) de flujos,  $out_f(x) = in_f(x)$  para todo  $x \neq s, t$ .
- Esto último dice que en la igualdad  $\sum_x out_f(x) = \sum_x in_f(x)$  se cancelan todos los terminos menos los correspondientes a  $s$  y  $t$ .
- Con lo cual nos queda la igualdad
- $out_f(s) + out_f(t) = in_f(s) + in_f(t)$
- es decir,  $in_f(t) - out_f(t) = out_f(s) - in_f(s) = v(f) \geq 0$ .
- QED