GrafosGreedy

Daniel Penazzi

17 de marzo de 2021

Tabla de Contenidos

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.
- Recordemos que un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.
- Recordemos que un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde
  - V es un conjunto cualquiera.

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.
- Recordemos que un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde
  - V es un conjunto cualquiera.
    - En esta materia siempre supondremos V finito.

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.
- Recordemos que un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde
  - V es un conjunto cualquiera.
    - En esta materia siempre supondremos V finito.
  - E es un subconjunto del conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V.

Repaso de Definiciíon de Grafos

- Uds. vieron grafos en Discreta I
- Repasaremos algunos temas para estar seguros que los tenemos frescos.
- y para coordinar la notación.
- Recordemos que un grafo es un par ordenado $G = (V, E)$ donde
  - V es un conjunto cualquiera.
    - En esta materia siempre supondremos V finito.
  - E es un subconjunto del conjunto de subconjuntos de 2 elementos de V.
    - es decir $E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- Los elementos de E se llaman lados o aristas. Usaremos preferentemente el primer nombre.

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- Los elementos de E se llaman lados o aristas. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- La cantidad de elementos de V, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como n.

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- Los elementos de E se llaman lados o aristas. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- La cantidad de elementos de V, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como n.
- La cantidad de elementos de E, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como m.

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- Los elementos de E se llaman lados o aristas. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- La cantidad de elementos de V, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como n.
- La cantidad de elementos de E, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como m.
- Un elemento $\{x, y\} \in E$ será abreviado como xy.

Notaciones

- Los elementos de V se llaman vértices o nodos. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- Los elementos de E se llaman lados o aristas. Usaremos preferentemente el primer nombre.
- La cantidad de elementos de V, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como n.
- La cantidad de elementos de E, salvo que digamos otra cosa, se denotará por default como m.
- Un elemento $\{x, y\} \in E$ será abreviado como xy.
- x e y se llamarán los extremos del lado xy.

Lados

- Como xy denota el conjunto $\{x, y\}$ entonces es claro que $xy = yx$.

Lados

- Como *xy* denota el conjunto $\{x, y\}$ entonces es claro que $xy = yx$.
- Hay grafos en donde vamos a querer que el orden de los elementos de un lado importe, esos serán “grafos dirigidos”.

Lados

- Como xy denota el conjunto $\{x, y\}$ entonces es claro que $xy = yx$.
- Hay grafos en donde vamos a querer que el orden de los elementos de un lado importe, esos serán “grafos dirigidos”.
- La diferencia es que en vez de ser $E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ tendremos $E \subseteq A \times A$.

Lados

- Como xy denota el conjunto $\{x, y\}$ entonces es claro que $xy = yx$.
- Hay grafos en donde vamos a querer que el orden de los elementos de un lado importe, esos serán "grafos dirigidos".
- La diferencia es que en vez de ser $E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$ tendremos $E \subseteq A \times A$.
- Pero ese tipo de grafos los veremos mas adelante, por ahora estaremos tomando grafos "no dirigidos"

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)
  - $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}\}$ (por lo tanto, $m = 4$)

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)
  - $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}\}$ (por lo tanto, $m = 4$)
  - o bien, en la notación que usaremos usualmente que hemos aclarado antes, $E = \{AB, AC, AE, CE\}$.

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)
  - $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}\}$ (por lo tanto, $m = 4$)
  - o bien, en la notación que usaremos usualmente que hemos aclarado antes, $E = \{AB, AC, AE, CE\}$.
- No hay que confundir un grafo con la representación gráfica de un grafo.

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)
  - $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}\}$ (por lo tanto, $m = 4$)
  - o bien, en la notación que usaremos usualmente que hemos aclarado antes, $E = \{AB, AC, AE, CE\}$.
- No hay que confundir un grafo con la representación gráfica de un grafo.
- Podemos representar G dibujando 5 puntos, representando cada uno de los vértices, y dibujando lineas, ya sea rectas o curvas, uniendo dos vértices si forman un lado.

Ejemplo de un grafo

- $G = (V, E)$ con:
  - $V = \{A, B, C, D, E\}$ (por lo tanto, $n = 5$)
  - $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}, \{C, E\}\}$ (por lo tanto, $m = 4$)
  - o bien, en la notación que usaremos usualmente que hemos aclarado antes, $E = \{AB, AC, AE, CE\}$.
- No hay que confundir un grafo con la representación gráfica de un grafo.
- Podemos representar G dibujando 5 puntos, representando cada uno de los vértices, y dibujando lineas, ya sea rectas o curvas, uniendo dos vértices si forman un lado.
- La representación gráfica puede ser útil para grafos con pocos vértices o lados, pero a medida que el grafo se vuelve mas grande se vuelve casi inútil.

Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.

Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.
- Observemos que pedimos que H sea en si mismo un grafo. No cualquier par (W, F) con $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$ será un subgrafo porque necesitamos que si un lado está, los dos extremos del lado estén.

Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.
- Observemos que pedimos que H sea en si mismo un grafo. No cualquier par (W, F) con $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$ será un subgrafo porque necesitamos que si un lado está, los dos extremos del lado estén.
- En el ejemplo anterior $(\{A, B, C\}, \{AC\})$ es un subgrafo de G.

Subgrafos

- Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G es un grafo $H = (W, F)$ tal que $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$.
- Observemos que pedimos que H sea en si mismo un grafo. No cualquier par (W, F) con $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$ será un subgrafo porque necesitamos que si un lado está, los dos extremos del lado estén.
- En el ejemplo anterior $(\{A, B, C\}, \{AC\})$ es un subgrafo de G.
- $(\{A, B, C, D, E\}, \{AB, CE\})$ es otro subgrafo de G

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el “vecindario” y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:
    - $\Gamma(A) = \{B, C, E\}$.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:
  - $\Gamma(A) = \{B, C, E\}$.
  - $\Gamma(B) = \{A\}$.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:
  - $\Gamma(A) = \{B, C, E\}$.
  - $\Gamma(B) = \{A\}$.
  - $\Gamma(C) = \{A, E\}$.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el “vecindario” y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:
  - $\Gamma(A) = \{B, C, E\}$.
  - $\Gamma(B) = \{A\}$.
  - $\Gamma(C) = \{A, E\}$.
  - $\Gamma(D) = \emptyset$.

Vecinos de un vértice

- Dado $x \in V$, los vértices que forman un lado con x se llaman los vécinos de x.
- El conjunto de vécinos se llama el "vecindario" y se denota por $\Gamma(x)$.
- Es decir $\Gamma(x) = \{y \in V : xy \in E\}$
- En el ejemplo anterior:
  - $\Gamma(A) = \{B, C, E\}$.
  - $\Gamma(B) = \{A\}$.
  - $\Gamma(C) = \{A, E\}$.
  - $\Gamma(D) = \emptyset$.
  - $\Gamma(E) = \{A, C\}$.

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:
  - $d(A) = 3$.

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:
  - $d(A) = 3$.
  - $d(B) = 1$.

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:
  - $d(A) = 3$.
  - $d(B) = 1$.
  - $d(C) = 2$.

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:
  - $d(A) = 3$.
  - $d(B) = 1$.
  - $d(C) = 2$.
  - $d(D) = 0$.

Grado de un vértice

- La cardinalidad de $\Gamma(x)$ se llama el grado de x, y la denotaremos por $d(x)$ (o $d_G(x)$ si queremos recalcar G, pej, si tenemos varios grafos con los mismos vértices).
- WARNING: en algunos libros se denota usando la letra griega delta: $\delta(x)$ pero δ nosotros la usaremos para otra cosa. (ver página siguiente).
- En el ejemplo anterior, tenemos:
  - $d(A) = 3$.
  - $d(B) = 1$.
  - $d(C) = 2$.
  - $d(D) = 0$.
  - $d(E) = 2$.

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$
  - $\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$
  - $\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$
- En el ejemplo anterior, $\delta = 0$, $\Delta = 3$.

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$
  - $\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$
- En el ejemplo anterior, $\delta = 0$, $\Delta = 3$.
- Un grafo que tenga $\delta = \Delta$ (es decir, todos los grados iguales) se llamará un grafo regular.

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$
  - $\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$
- En el ejemplo anterior, $\delta = 0$, $\Delta = 3$.
- Un grafo que tenga $\delta = \Delta$ (es decir, todos los grados iguales) se llamará un grafo regular.
- o Δ-regular si queremos especificar el grado común a todos los vértices.

δ y Δ

- El menor de todos los grados de un grafo lo denotaremos por δ y al mayor de todos los grados por Δ.
- Es decir:
  - $\delta = \text{Min}\{d(x) : x \in V\}$
  - $\Delta = \text{Max}\{d(x) : x \in V\}$
- En el ejemplo anterior, $\delta = 0$, $\Delta = 3$.
- Un grafo que tenga $\delta = \Delta$ (es decir, todos los grados iguales) se llamará un grafo regular.
- o Δ-regular si queremos especificar el grado común a todos los vértices.
- Puesto que en el ejemplo $\delta = 0 \neq 3 = \Delta$, el ejemplo no es un grafo regular.

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, $(n > 3)$ denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$).

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$).
2. El grafo completo en n vértices, denotado por K_n, es el grafo:

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$).
2. El grafo completo en n vértices, denotado por K_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$).
2. El grafo completo en n vértices, denotado por K_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{ij : i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i < j\}$.

Cíclicos y completos

1. El grafo cíclico en n vértices, ($n > 3$) denotado por C_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{12, 23, ..., (n-1)n, n1\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$).
2. El grafo completo en n vértices, denotado por K_n, es el grafo:
   - Con vértices $\{1, 2, ..., n\}$.
   - Con lados $\{ij : i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i < j\}$.
   - (mas generalmente podria ser cualquier conjunto con n elementos $\{x_1, ..., x_n\}$ y lados $\{x_ix_j : i, j \in \{1, 2, ..., n\}, i < j\}$)

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.
- C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es un ciclo de n puntos.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.
- C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es un ciclo de n puntos.
- Pej, como dijimos, C_3 es un triangulo, C_4 un cuadrado, C_5 un pentágono, etc.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.
- C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es un ciclo de n puntos.
- Pej, como dijimos, C_3 es un triangulo, C_4 un cuadrado, C_5 un pentágono, etc.
- $d_{C_n}(x) = 2$ para todo vértice de C_n, mientras que $d_{K_n}(x) = n - 1$ para todo vértice de K_n.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.
- C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es un ciclo de n puntos.
- Pej, como dijimos, C_3 es un triangulo, C_4 un cuadrado, C_5 un pentágono, etc.
- $d_{C_n}(x) = 2$ para todo vértice de C_n, mientras que $d_{K_n}(x) = n - 1$ para todo vértice de K_n.
- Por lo tanto ambos son grafos regulares.

Mas sobre ciclicos y completos.

- C_n y K_n tienen ambos n vértices, (aunque C_1 y C_2 no están definidos y K_1 y K_2 si) pero C_n tiene n lados mientras que K_n tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ lados.
- Observar que $C_3 = K_3$ y su representación gráfica es un triángulo.
- C_n se llaman cíclicos porque su representación gráfica es un ciclo de n puntos.
- Pej, como dijimos, C_3 es un triangulo, C_4 un cuadrado, C_5 un pentágono, etc.
- $d_{C_n}(x) = 2$ para todo vértice de C_n, mientras que $d_{K_n}(x) = n - 1$ para todo vértice de K_n.
- Por lo tanto ambos son grafos regulares.
- (C_n es 2-regular y K_n es $(n-1)$-regular).

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \; \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \; \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.
- Es trivial ver que la relación:

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \ \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.
- Es trivial ver que la relación:
  - "$x \sim y$ sii existe un camino entre x e y"

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \ \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.
- Es trivial ver que la relación:
  - "$x \sim y$ sii existe un camino entre x e y"
- es una relación de equivalencia.

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \ \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.
- Es trivial ver que la relación:
  - "$x \sim y$ sii existe un camino entre x e y"
- es una relación de equivalencia.
- Por lo tanto el grafo G se parte en clases de equivalencia de esa relación de equivalencia.

Componentes conexas

- Un camino entre 2 vértices x, y es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_r$ tales que:
  1. $x_1 = x$
  2. $x_r = y$.
  3. $x_i x_{i+1} \in E \; \forall i \in \{1, 2, ..., r-1\}$.
- Es trivial ver que la relación:
  - "$x \sim y$ sii existe un camino entre x e y"
- es una relación de equivalencia.
- Por lo tanto el grafo G se parte en clases de equivalencia de esa relación de equivalencia.
- Esas partes se llaman las componentes conexas de G.

Grafos conexos

- Un grafo se dice conexo si tiene una sola componente conexa.

Grafos conexos

- Un grafo se dice conexo si tiene una sola componente conexa.
- Por ejemplo, C_n y K_n son conexos.

Grafos conexos

- Un grafo se dice conexo si tiene una sola componente conexa.
- Por ejemplo, C_n y K_n son conexos.
- Pero el ejemplo de grafo que habiamos dado al principio no es conexo.

Grafos conexos

- Un grafo se dice conexo si tiene una sola componente conexa.
- Por ejemplo, C_n y K_n son conexos.
- Pero el ejemplo de grafo que habiamos dado al principio no es conexo.
- Tiene dos componentes conexas: $\{A, B, C, E\}$ y $\{D\}$.

Grafos conexos

- Un grafo se dice conexo si tiene una sola componente conexa.
- Por ejemplo, C_n y K_n son conexos.
- Pero el ejemplo de grafo que habiamos dado al principio no es conexo.
- Tiene dos componentes conexas: $\{A, B, C, E\}$ y $\{D\}$.
- Recordemos que un arbol es un grafo conexo sin ciclos. (es decir, que no tiene como subgrafo a un C_k).

Componentes conexas.

- ¿Cómo determinar las componentes conexas?

Componentes conexas.

- ¿Cómo determinar las componentes conexas?
- En realidad no estoy seguro si esto lo vieron en Discreta I, pero seguro lo vieron en Algoritmos II.

Componentes conexas.

- ¿Cómo determinar las componentes conexas?
- En realidad no estoy seguro si esto lo vieron en Discreta I, pero seguro lo vieron en Algoritmos II.
- De hecho, vieron al menos dos algoritmos que hacen esto.

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.
- De hecho, hay un poco de ambivalencia en que queremos decir por “DFS”y “BFS”

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.
- De hecho, hay un poco de ambivalencia en que queremos decir por “DFS”y “BFS”
- El algoritmo básico de DFS o BFS lo que hace es, dado un vértice x, encontrar todos los vértices de la componente conexa de x.

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.
- De hecho, hay un poco de ambivalencia en que queremos decir por “DFS”y “BFS”
- El algoritmo básico de DFS o BFS lo que hace es, dado un vértice x, encontrar todos los vértices de la componente conexa de x.
- Asi que si llamamos DFS o BFS a eso, no encuentra todas las componentes conexas.

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.
- De hecho, hay un poco de ambivalencia en que queremos decir por “DFS”y “BFS”
- El algoritmo básico de DFS o BFS lo que hace es, dado un vértice x, encontrar todos los vértices de la componente conexa de x.
- Asi que si llamamos DFS o BFS a eso, no encuentra todas las componentes conexas.
- Pero ese algoritmo seria mas preciso llamarlo DFS(x) o BFS(x).

Determinación de las componentes conexas

- Son DFS y BFS.
- De hecho, hay un poco de ambivalencia en que queremos decir por “DFS”y “BFS”
- El algoritmo básico de DFS o BFS lo que hace es, dado un vértice x, encontrar todos los vértices de la componente conexa de x.
- Asi que si llamamos DFS o BFS a eso, no encuentra todas las componentes conexas.
- Pero ese algoritmo seria mas preciso llamarlo DFS(x) o BFS(x).
- Y el algoritmo DFS o BFS seria: (concretemos para BFS, pej):

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.
3. Correr BFS(x).

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.
3. Correr BFS(x).
4. LLamarle C_i a la componente conexa que encuentra BFS(x).

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.
3. Correr BFS(x).
4. LLamarle C_i a la componente conexa que encuentra BFS(x).
5. Hacer $W = W \cup$ (vértices de C_i).

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.
3. Correr BFS(x).
4. LLamarle C_i a la componente conexa que encuentra BFS(x).
5. Hacer $W = W \cup$ (vértices de C_i).
6. Si $W = V$, **return** $C_1, C_2, ..., C_i$.

Determinación de las componentes conexas

(abajo en vez de BFS puede usarse DFS)

1. Tomar $W = \emptyset$, $i = 1$.
2. Tomar un vértice cualquiera x de V.
3. Correr BFS(x).
4. LLamarle C_i a la componente conexa que encuentra BFS(x).
5. Hacer $W = W \cup$ (vértices de C_i).
6. Si $W = V$, **return** $C_1, C_2, ..., C_i$.
7. Si no, hacer $i = i + 1$, tomar un vértice $x \notin W$ y repetir [3].

DFS y BFS

- Uds ya vieron DFS y BFS en Algoritmos II, asi que no los veremos aca asi que si no los recuerdan bien vuelvan a verlos.

DFS y BFS

- Uds ya vieron DFS y BFS en Algoritmos II, asi que no los veremos aca asi que si no los recuerdan bien vuelvan a verlos.
- En especial BFS va a ser usado mas adelante en forma crucial en un algoritmo muy importante.

DFS y BFS

- Uds ya vieron DFS y BFS en Algoritmos II, asi que no los veremos aca asi que si no los recuerdan bien vuelvan a verlos.
- En especial BFS va a ser usado mas adelante en forma crucial en un algoritmo muy importante.
- Sólo daremos un breve repaso de ambos.

DFS y BFS

- Uds ya vieron DFS y BFS en Algoritmos II, asi que no los veremos aca asi que si no los recuerdan bien vuelvan a verlos.
- En especial BFS va a ser usado mas adelante en forma crucial en un algoritmo muy importante.
- Sólo daremos un breve repaso de ambos.
- En ambos casos, a partir de un vértice raiz, los algoritmos van buscando nuevos vértices, buscando vecinos de vértices que ya han sido agregados.

DFS y BFS

- Uds ya vieron DFS y BFS en Algoritmos II, asi que no los veremos aca asi que si no los recuerdan bien vuelvan a verlos.
- En especial BFS va a ser usado mas adelante en forma crucial en un algoritmo muy importante.
- Sólo daremos un breve repaso de ambos.
- En ambos casos, a partir de un vértice raiz, los algoritmos van buscando nuevos vértices, buscando vecinos de vértices que ya han sido agregados.
- Los algoritmos pueden ser implementados simplemente buscando los vértices, o ademas agregando los lados entre un vértice que ya estaba agregado y los vértices que ese vértice agregó.

DFS y BFS

- En ambos casos, si se hace lo segundo, las componentes conexas que se obtengan serán árboles, por la forma que tienen ambos algoritmos.

DFS y BFS

- En ambos casos, si se hace lo segundo, las componentes conexas que se obtengan serán árboles, por la forma que tienen ambos algoritmos.
- Esto es porque en ambos casos no se agrega un vértice que ya estaba agregado, asi que no se generan ciclos.

DFS y BFS

- En ambos casos, si se hace lo segundo, las componentes conexas que se obtengan serán árboles, por la forma que tienen ambos algoritmos.
- Esto es porque en ambos casos no se agrega un vértice que ya estaba agregado, asi que no se generan ciclos.
- La diferencia entre ambos es cómo se buscan vecinos, y qué tipo de estructura de datos usan.

DFS y BFS

- En ambos casos, si se hace lo segundo, las componentes conexas que se obtengan serán árboles, por la forma que tienen ambos algoritmos.
- Esto es porque en ambos casos no se agrega un vértice que ya estaba agregado, asi que no se generan ciclos.
- La diferencia entre ambos es cómo se buscan vecinos, y qué tipo de estructura de datos usan.
- DFS agrega de a un vécino por vez y usa una pila.

DFS y BFS

- En ambos casos, si se hace lo segundo, las componentes conexas que se obtengan serán árboles, por la forma que tienen ambos algoritmos.
- Esto es porque en ambos casos no se agrega un vértice que ya estaba agregado, asi que no se generan ciclos.
- La diferencia entre ambos es cómo se buscan vecinos, y qué tipo de estructura de datos usan.
- DFS agrega de a un vécino por vez y usa una pila.
- BFS agrega todos los vecinos juntos y usa una cola.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
    - Tomar p=el primer elemento de la cola.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
    - Tomar p=el primer elemento de la cola.
    - Borrar p de la cola.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la cola.
  - Borrar p de la cola.
  - IF existen vértices de $\Gamma(p)$ que no esten en C:

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la cola.
  - Borrar p de la cola.
  - IF existen vértices de $\Gamma(p)$ que no esten en C:
    - Agregar todos los elementos de $\Gamma(p)$ que no estén en C a la cola y a C.

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
    - Tomar p=el primer elemento de la cola.
    - Borrar p de la cola.
    - IF existen vértices de $\Gamma(p)$ que no esten en C:
        - Agregar todos los elementos de $\Gamma(p)$ que no estén en C a la cola y a C.
    - ENDWHILE

BFS(x):

- Crear una cola con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la cola no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la cola.
  - Borrar p de la cola.
  - IF existen vértices de $\Gamma(p)$ que no esten en C:
    - Agregar todos los elementos de $\Gamma(p)$ que no estén en C a la cola y a C.
  - ENDWHILE
- **return** C.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.
    - Agregar q a la pila.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.
    - Agregar q a la pila.
  - ELSE:

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.
    - Agregar q a la pila.
  - ELSE:
    - Borrar p de la pila.

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.
    - Agregar q a la pila.
  - ELSE:
    - Borrar p de la pila.
  - ENDWHILE

DFS(x):

- Crear una pila con x como único elemento.
- Tomar $C = \{x\}$.
- WHILE (la pila no sea vacia)
  - Tomar p=el primer elemento de la pila.
  - IF existe algún vértice de $\Gamma(p)$ que no esté en C:
    - Tomar un $q \in \Gamma(p) - C$.
    - Hacer $C = C \cup \{q\}$.
    - Agregar q a la pila.
  - ELSE:
    - Borrar p de la pila.
  - ENDWHILE
- **return** C.

Complejidad

- Deberian haber visto en Algoritmos II que la complejidad tanto de DFS como de BFS es $O(m)$.

Complejidad

- Deberian haber visto en Algoritmos II que la complejidad tanto de DFS como de BFS es $O(m)$.
- (por supuesto, en realidad depende de como se implementen. Hay formas malas de implementarlos que harian que la complejidad fuese peor).

Complejidad

- Deberian haber visto en Algoritmos II que la complejidad tanto de DFS como de BFS es $O(m)$.
- (por supuesto, en realidad depende de como se implementen. Hay formas malas de implementarlos que harian que la complejidad fuese peor).
- Una variación obvia de DFS o BFS hace que en vez de retornar las componentes conexas, se retorne simplemente el número de componentes conexas, si es de interes.

Complejidad

- Deberian haber visto en Algoritmos II que la complejidad tanto de DFS como de BFS es $O(m)$.
- (por supuesto, en realidad depende de como se implementen. Hay formas malas de implementarlos que harian que la complejidad fuese peor).
- Una variación obvia de DFS o BFS hace que en vez de retornar las componentes conexas, se retorne simplemente el número de componentes conexas, si es de interes.
- En el proyecto que van a tener que entregar van a tener que implementar al menos uno de estos algoritmos.

Coloreos propios

- Un coloreo (de los vértices) es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito.

Coloreos propios

- Un coloreo (de los vértices) es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito.
- Un coloreo es propio si $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$ (extremos con distinto color)

Coloreos propios

- Un coloreo (de los vértices) es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito.
- Un coloreo es propio si $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$ (extremos con distinto color)
- Si la cardinalidad de S es k diremos que el coloreo tiene k colores. En general usaremos $S = \{0, 1, ..., k-1\}$ para denotar los colores.

Coloreos propios

- Un coloreo (de los vértices) es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito.
- Un coloreo es propio si $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$ (extremos con distinto color)
- Si la cardinalidad de S es k diremos que el coloreo tiene k colores. En general usaremos $S = \{0, 1, ..., k-1\}$ para denotar los colores.
- Un grafo que tiene un coloreo propio con k colores se dice k-coloreable.

Coloreos propios

- Un coloreo (de los vértices) es una función cualquiera $c : V \to S$ donde S es un conjunto finito.
- Un coloreo es propio si $xy \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$ (extremos con distinto color)
- Si la cardinalidad de S es k diremos que el coloreo tiene k colores. En general usaremos $S = \{0, 1, ..., k-1\}$ para denotar los colores.
- Un grafo que tiene un coloreo propio con k colores se dice k-coloreable.
- El número cromático es

$$\chi(G) = \min\{k : \exists \text{ un coloreo propio con } k \text{ colores de } G\}$$

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
     - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
     - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"
  2. Probar que no existe ningún coloreo propio con $k - 1$ colores de G.

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
     - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"
  2. Probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G.
     - Esto prueba que k es el mínimo.

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
    1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
        - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"
    2. Probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G.
        - Esto prueba que k es el mínimo.
- Es un error inexplicable (porque repetimos una y otra vez que no lo hagan, pero lo hacen igual) pero común que muchos alumnos cuando se les pide probar que $\chi(G)$ es igual a pej 5, lo que hacen es dar un coloreo propio con 5 colores y nada mas.

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
     - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"
  2. Probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G.
     - Esto prueba que k es el mínimo.
- Es un error inexplicable (porque repetimos una y otra vez que no lo hagan, pero lo hacen igual) pero común que muchos alumnos cuando se les pide probar que $\chi(G)$ es igual a pej 5, lo que hacen es dar un coloreo propio con 5 colores y nada mas.
- Es decir, prueban [1] arriba pero no [2].

Calculando $\chi(G)$

- Si uno dice que $\chi(G) = k$, por la definición misma de este número, hay que hacer dos cosas para probarlo:
  1. Dar un coloreo propio de G con k colores. (y obviamente probar que es propio).
     - Esto prueba la parte del "$\exists$ un coloreo propio con k colores de G"
  2. Probar que no existe ningún coloreo propio con $k-1$ colores de G.
     - Esto prueba que k es el mínimo.
- Es un error inexplicable (porque repetimos una y otra vez que no lo hagan, pero lo hacen igual) pero común que muchos alumnos cuando se les pide probar que $\chi(G)$ es igual a pej 5, lo que hacen es dar un coloreo propio con 5 colores y nada mas.
- Es decir, prueban [1] arriba pero no [2].
- Este es un error serio con alto descuento de puntos.

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.
- Probar [2], salvo en algunos casos especiales, puede ser la parte mas complicada.

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.
- Probar [2], salvo en algunos casos especiales, puede ser la parte mas complicada.
- Una ayuda útil para probar [2] es la siguiente observación obvia:

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.
- Probar [2], salvo en algunos casos especiales, puede ser la parte mas complicada.
- Una ayuda útil para probar [2] es la siguiente observación obvia:
  - Si H es un subgrafo de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.
- Probar [2], salvo en algunos casos especiales, puede ser la parte mas complicada.
- Una ayuda útil para probar [2] es la siguiente observación obvia:
  - Si H es un subgrafo de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.
    - Prueba: pues si necesito r colores para colorear los vértices de H, no puedo colorear a todos los vértices de G con menos de r colores, porque tendria un coloreo con menos de r colores de los vértices de H al restringir el coloreo de G a los vértices de H.

Calculando $\chi(G)$

- En general probar [1] es la parte mas fácil de un ejercicio, aunque en algunos casos puede ser la mas dificil si no pueden encontrar un coloreo.
- Probar [2], salvo en algunos casos especiales, puede ser la parte mas complicada.
- Una ayuda útil para probar [2] es la siguiente observación obvia:
  - Si H es un subgrafo de G, entonces $\chi(H) \leq \chi(G)$.
    - Prueba: pues si necesito r colores para colorear los vértices de H, no puedo colorear a todos los vértices de G con menos de r colores, porque tendria un coloreo con menos de r colores de los vértices de H al restringir el coloreo de G a los vértices de H.
- Entonces si encontramos un subgrafo H de G para el cual sepamos que $\chi(H) = k$ habremos probado [2].

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.
  2. Para poder hacer la prueba por contradicción, hay que asumir que existe un coloreo propio con $k-1$ colores.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.
  2. Para poder hacer la prueba por contradicción, hay que asumir que existe un coloreo propio con $k-1$ colores.
     - Eso significa que uds. NO TIENEN CONTROL sobre ese coloreo.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.
  2. Para poder hacer la prueba por contradicción, hay que asumir que existe un coloreo propio con $k-1$ colores.
     - Eso significa que uds. NO TIENEN CONTROL sobre ese coloreo.
     - Sólo saben que hay uno, y deben deducir cosas sobre ese coloreo a partir de la estructura del grafo.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.
  2. Para poder hacer la prueba por contradicción, hay que asumir que existe un coloreo propio con $k-1$ colores.
     - Eso significa que uds. NO TIENEN CONTROL sobre ese coloreo.
     - Sólo saben que hay uno, y deben deducir cosas sobre ese coloreo a partir de la estructura del grafo.
     - Un error típico es que los alumnos CONSTRUYEN un coloreo con $k-1$ colores y prueba que ese coloreo que construyeron no es propio.

Calculando $\chi(G)$

- Lamentablemente en muchos casos no es posible o no es fácil encontrar un H adecuado con esa propiedad.
- Entonces hay que hacer una prueba por contradicción: se asume que existe un coloreo propio con $k-1$ colores y deduciendo cosas, se llega a un absurdo.
- Hay 2 problemas aca:
  1. Llegar al absurdo puede ser bastante dificil, teniendo que contemplar varios casos, pej.
  2. Para poder hacer la prueba por contradicción, hay que asumir que existe un coloreo propio con $k-1$ colores.
     - Eso significa que uds. NO TIENEN CONTROL sobre ese coloreo.
     - Sólo saben que hay uno, y deben deducir cosas sobre ese coloreo a partir de la estructura del grafo.
     - Un error típico es que los alumnos CONSTRUYEN un coloreo con $k-1$ colores y prueba que ese coloreo que construyeron no es propio.
     - Esto obviamente no prueba nada mas que ese coloreo no es adecuado, pero no demuestra que no pueda existir otro coloreo.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.
- Obviamente $\chi(K_n) = n$ pues al estar todos los vértices unidos con todos los otros vértices, entonces todos los vértices deben tener colores distintos.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.
- Obviamente $\chi(K_n) = n$ pues al estar todos los vértices unidos con todos los otros vértices, entonces todos los vértices deben tener colores distintos.
- Entonces si quieren probar que $r \leq \chi(G)$ basta con ver que existe un K_r subgrafo de G.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.
- Obviamente $\chi(K_n) = n$ pues al estar todos los vértices unidos con todos los otros vértices, entonces todos los vértices deben tener colores distintos.
- Entonces si quieren probar que $r \leq \chi(G)$ basta con ver que existe un K_r subgrafo de G.
- Por ejemplo, en el ejemplo dado al principio, dado que el subgrafo $(\{A, C, E\}, \{AC, AE, CE\})$ es un K_3, concluimos que $3 \leq \chi(G)$.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.
- Obviamente $\chi(K_n) = n$ pues al estar todos los vértices unidos con todos los otros vértices, entonces todos los vértices deben tener colores distintos.
- Entonces si quieren probar que $r \leq \chi(G)$ basta con ver que existe un K_r subgrafo de G.
- Por ejemplo, en el ejemplo dado al principio, dado que el subgrafo $(\{A, C, E\}, \{AC, AE, CE\})$ es un K_3, concluimos que $3 \leq \chi(G)$.
- Como es trivial dar un coloreo propio con 3 colores de G, concluimos $\chi(G) = 3$.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- En general, dado que para cualquier grafo G podemos darle un color distinto a todos los vértices, tenemos la desigualdad $\chi(G) \leq n$.
- Obviamente $\chi(K_n) = n$ pues al estar todos los vértices unidos con todos los otros vértices, entonces todos los vértices deben tener colores distintos.
- Entonces si quieren probar que $r \leq \chi(G)$ basta con ver que existe un K_r subgrafo de G.
- Por ejemplo, en el ejemplo dado al principio, dado que el subgrafo $(\{A, C, E\}, \{AC, AE, CE\})$ es un K_3, concluimos que $3 \leq \chi(G)$.
- Como es trivial dar un coloreo propio con 3 colores de G, concluimos $\chi(G) = 3$.
- Sin embargo, la vuelta NO VALE: puede ocurrir que $r \leq \chi(G)$ pero que no exista ningún subgrafo K_r de G. (luego veremos un ejemplo).

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.
- $\chi(C_{2r}) = 2$ pues podemos colorear $c(i) = (i \mod 2)$ (es decir $c(i) = 0$ si i es par y $c(i) = 1$ si i es impar) y eso es un coloreo propio porque vértices consecutivos en el ciclo tendrán colores distintos.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.
- $\chi(C_{2r}) = 2$ pues podemos colorear $c(i) = (i \mod 2)$ (es decir $c(i) = 0$ si i es par y $c(i) = 1$ si i es impar) y eso es un coloreo propio porque vértices consecutivos en el ciclo tendrán colores distintos.
- Pero no podemos hacer lo mismo con $\chi(C_{2r+1})$ pues tendriamos que $2r + 1$ y 1 tendrían color 1, absurdo pues forman lado.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.
- $\chi(C_{2r}) = 2$ pues podemos colorear $c(i) = (i \mod 2)$ (es decir $c(i) = 0$ si i es par y $c(i) = 1$ si i es impar) y eso es un coloreo propio porque vértices consecutivos en el ciclo tendrán colores distintos.
- Pero no podemos hacer lo mismo con $\chi(C_{2r+1})$ pues tendriamos que $2r + 1$ y 1 tendrían color 1, absurdo pues forman lado.
- Podemos colorear: $c(i) = (i \mod 2)$ si $i < 2r + 1$ y $c(2r + 1) = 2$.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.
- $\chi(C_{2r}) = 2$ pues podemos colorear $c(i) = (i \mod 2)$ (es decir $c(i) = 0$ si i es par y $c(i) = 1$ si i es impar) y eso es un coloreo propio porque vértices consecutivos en el ciclo tendrán colores distintos.
- Pero no podemos hacer lo mismo con $\chi(C_{2r+1})$ pues tendriamos que $2r + 1$ y 1 tendrían color 1, absurdo pues forman lado.
- Podemos colorear: $c(i) = (i \mod 2)$ si $i < 2r + 1$ y $c(2r + 1) = 2$.
- Ese es un coloreo propio pues $2r + 1$ tiene color distinto del resto de los vértices asi que no hay problema con el, y los demas vértices consecutivos tienen colores distintos.

$\chi(G)$ para algunos grafos

- $\chi(G) = 1$ si y solo si $E = \emptyset$ asi que para cualquier grafo que tenga al menos un lado, $\chi(G) \geq 2$.
- $\chi(C_{2r}) = 2$ pues podemos colorear $c(i) = (i \mod 2)$ (es decir $c(i) = 0$ si i es par y $c(i) = 1$ si i es impar) y eso es un coloreo propio porque vértices consecutivos en el ciclo tendrán colores distintos.
- Pero no podemos hacer lo mismo con $\chi(C_{2r+1})$ pues tendriamos que $2r + 1$ y 1 tendrían color 1, absurdo pues forman lado.
- Podemos colorear: $c(i) = (i \mod 2)$ si $i < 2r + 1$ y $c(2r + 1) = 2$.
- Ese es un coloreo propio pues $2r + 1$ tiene color distinto del resto de los vértices asi que no hay problema con el, y los demas vértices consecutivos tienen colores distintos.
- Esto demuestra que $\chi(C_{2r+1}) \leq 3$. Pero todavia no probamos que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ pues sólo hemos probado que un coloreo específico que dimos con 2 colores no es propio. Podria haber otro.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.
- Sea $A = c(1)$.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.
- Sea $A = c(1)$.
- Como $12 \in E$, entonces $c(2) \neq c(1)$. Sea $B = c(2)$. Entonces acabamos de ver que $B \neq A$ y como estamos suponiendo que es un coloreo con 2 colores, entonces A y B son esos 2 colores.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.
- Sea $A = c(1)$.
- Como $12 \in E$, entonces $c(2) \neq c(1)$. Sea $B = c(2)$. Entonces acabamos de ver que $B \neq A$ y como estamos suponiendo que es un coloreo con 2 colores, entonces A y B son esos 2 colores.
- Como $23 \in E$, entonces $c(3) \neq c(2)$. Como $c(2) = B$ y sólo hay 2 colores, concluimos que necesariamente $c(3) = A$.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.
- Sea $A = c(1)$.
- Como $12 \in E$, entonces $c(2) \neq c(1)$. Sea $B = c(2)$. Entonces acabamos de ver que $B \neq A$ y como estamos suponiendo que es un coloreo con 2 colores, entonces A y B son esos 2 colores.
- Como $23 \in E$, entonces $c(3) \neq c(2)$. Como $c(2) = B$ y sólo hay 2 colores, concluimos que necesariamente $c(3) = A$.
- Como $34 \in E$, entonces $c(4) \neq c(3)$. Como $c(3) = A$ y sólo hay 2 colores, concluimos que necesariamente $c(4) = B$.

$\chi(C_{2r+1}) = 3$

- Para ver que $3 \leq \chi(C_{2r+1})$ supongamos que no es cierto. Esto implica que existe un coloreo propio c con 2 colores.
- Sea $A = c(1)$.
- Como $12 \in E$, entonces $c(2) \neq c(1)$. Sea $B = c(2)$. Entonces acabamos de ver que $B \neq A$ y como estamos suponiendo que es un coloreo con 2 colores, entonces A y B son esos 2 colores.
- Como $23 \in E$, entonces $c(3) \neq c(2)$. Como $c(2) = B$ y sólo hay 2 colores, concluimos que necesariamente $c(3) = A$.
- Como $34 \in E$, entonces $c(4) \neq c(3)$. Como $c(3) = A$ y sólo hay 2 colores, concluimos que necesariamente $c(4) = B$.
- Continuando de esta forma y probando por inducción, concluimos que $c(i) = A$ si i es impar (y $c(i) = B$ si i es par) lo cual es un absurdo pues 1 y $2r + 1$ forman lado.

- Entonces hemos probado que los ciclos impares (i.e., con un número impar de vértices) tienen número cromático igual a 3.

- Entonces hemos probado que los ciclos impares (i.e., con un número impar de vértices) tienen número cromático igual a 3.
- En particular, $\chi(C_5) = 3$.

- Entonces hemos probado que los ciclos impares (i.e., con un número impar de vértices) tienen número cromático igual a 3.
- En particular, $\chi(C_5) = 3$.
- Pero C_5 no tiene como subgrafo ningún K_3, asi que esto es un ejemplo de que se puede tener $\chi(G) \geq r$ sin tener un K_r como subgrafo.

- Entonces hemos probado que los ciclos impares (i.e., con un número impar de vértices) tienen número cromático igual a 3.
- En particular, $\chi(C_5) = 3$.
- Pero C_5 no tiene como subgrafo ningún K_3, asi que esto es un ejemplo de que se puede tener $\chi(G) \geq r$ sin tener un K_r como subgrafo.
- Que los ciclos impares tengan número cromático igual a 3 significa que cualquier grafo que tenga como subgrafo a un ciclo impar debe tener número cromático mayor o igual que 3.

- Entonces hemos probado que los ciclos impares (i.e., con un número impar de vértices) tienen número cromático igual a 3.
- En particular, $\chi(C_5) = 3$.
- Pero C_5 no tiene como subgrafo ningún K_3, asi que esto es un ejemplo de que se puede tener $\chi(G) \geq r$ sin tener un K_r como subgrafo.
- Que los ciclos impares tengan número cromático igual a 3 significa que cualquier grafo que tenga como subgrafo a un ciclo impar debe tener número cromático mayor o igual que 3.
- En algunos ejercicios esto les permitira calcular rapidamente $\chi(G)$: sólo tienen que dar un coloreo propio con 3 colores y encontrar algún ciclo impar.

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.
- Este algoritmo calcula $\chi(G)$ pero:

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.
- Este algoritmo calcula $\chi(G)$ pero:
  1. Hay n^n posibles coloreos.

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.
- Este algoritmo calcula $\chi(G)$ pero:
  1. Hay n^n posibles coloreos.
  2. Chequear que un coloreo es propio es $O(m)$.

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.
- Este algoritmo calcula $\chi(G)$ pero:
  1. Hay n^n posibles coloreos.
  2. Chequear que un coloreo es propio es $O(m)$.
- por lo tanto el algoritmo tiene complejidad $O(n^n m)$ asi que no es útil salvo para n muy chicos.

Algoritmo de fuerza bruta

- Un algoritmo para encontrar $\chi(G)$ es simplemente tomar todos los coloreos posibles con los colores $\{0, 1, ..., n-1\}$ y calcular cuales de esos coloreo son propios, y ver de entre esos quien tiene la menor cantidad de colores.
- Este algoritmo calcula $\chi(G)$ pero:
  1. Hay n^n posibles coloreos.
  2. Chequear que un coloreo es propio es $O(m)$.
- por lo tanto el algoritmo tiene complejidad $O(n^n m)$ asi que no es útil salvo para n muy chicos.
- Ahora veremos un algoritmo que no calcula $\chi(G)$ pero al menos da un coloreo propio en tiempo polinomial.

Algoritmo Greedy

- El algoritmo Greedy requiere como input no sólo un grafo G sino un orden de los vértices.

Algoritmo Greedy

- El algoritmo Greedy requiere como input no sólo un grafo G sino un orden de los vértices.
- Algunas implementaciones en vez de requerir un orden simplemente usan algún orden cualquiera, pero para extraer el mayor beneficio posible de Greedy conviene poder llamarlo varias veces cambiando el orden.

Algoritmo Greedy

- El algoritmo Greedy requiere como input no sólo un grafo G sino un orden de los vértices.
- Algunas implementaciones en vez de requerir un orden simplemente usan algún orden cualquiera, pero para extraer el mayor beneficio posible de Greedy conviene poder llamarlo varias veces cambiando el orden.
- De hecho, luego probaremos que si bien Greedy no necesariamente colorea G con $\chi(G)$ colores, existe un orden de los vértices tal que Greedy, con ese orden, colorea G con $\chi(G)$ colores, asi que el orden es importante.

Algoritmo Greedy

- El algoritmo Greedy requiere como input no sólo un grafo G sino un orden de los vértices.
- Algunas implementaciones en vez de requerir un orden simplemente usan algún orden cualquiera, pero para extraer el mayor beneficio posible de Greedy conviene poder llamarlo varias veces cambiando el orden.
- De hecho, luego probaremos que si bien Greedy no necesariamente colorea G con $\chi(G)$ colores, existe un orden de los vértices tal que Greedy, con ese orden, colorea G con $\chi(G)$ colores, asi que el orden es importante.
- Esto no nos da un algoritmo polinomial para calcular $\chi(G)$ porque hay $n!$ ordenes posibles.

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:
  1. Ir coloreando los vértices de G uno por uno, en el orden dado, manteniendo siempre el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio.

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:
  1. Ir coloreando los vértices de G uno por uno, en el orden dado, manteniendo siempre el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio.
  2. Darle a cada vértice al momento de colorearlo el menor color posible que se le pueda dar manteniendo el invariante de que el coloreo es propio.

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:
  1. Ir coloreando los vértices de G uno por uno, en el orden dado, manteniendo siempre el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio.
  2. Darle a cada vértice al momento de colorearlo el menor color posible que se le pueda dar manteniendo el invariante de que el coloreo es propio.

1 nos asegura que cuando Greedy termina, el coloreo que da es propio.

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:
  1. Ir coloreando los vértices de G uno por uno, en el orden dado, manteniendo siempre el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio.
  2. Darle a cada vértice al momento de colorearlo el menor color posible que se le pueda dar manteniendo el invariante de que el coloreo es propio.

1 nos asegura que cuando Greedy termina, el coloreo que da es propio.

2 es lo que le da el nombre al algoritmo: usar siempre el menor color posible.

Idea de Greedy

- La idea de Greedy consiste de dos partes:
  1. Ir coloreando los vértices de G uno por uno, en el orden dado, manteniendo siempre el invariante que el coloreo parcial que se va obteniendo es propio.
  2. Darle a cada vértice al momento de colorearlo el menor color posible que se le pueda dar manteniendo el invariante de que el coloreo es propio.

1 nos asegura que cuando Greedy termina, el coloreo que da es propio.

2 es lo que le da el nombre al algoritmo: usar siempre el menor color posible.

- Como muchas cosas en la vida, hacer algo que optimiza el presente no necesariamente optimiza el futuro, y luego veremos ejemplos de que Greedy no siempre obtiene $\chi(G)$.

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $c(x_1) = 0$

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $c(x_1) = 0$
- Para $i > 1$, asumiendo que los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ ya han sido coloreados, colorear x_i con:

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $c(x_1) = 0$
- Para $i > 1$, asumiendo que los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ ya han sido coloreados, colorear x_i con:
  - $c(x_i) = \min\{k \geq 0 : k \notin c\left(\{x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i)\right)\}$

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $c(x_1) = 0$
- Para $i > 1$, asumiendo que los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ ya han sido coloreados, colorear x_i con:
    - $c(x_i) = \min\{k \geq 0 : k \notin c\left(\{x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i)\right)\}$
- Arriba estamos usando la notación usual de $c(A) = \{c(a) : a \in A\}$.

Greedy

- Input: Grafo G y orden de los vértices $x_1, x_2, ..., x_n$.
- $c(x_1) = 0$
- Para $i > 1$, asumiendo que los vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ ya han sido coloreados, colorear x_i con:
  - $c(x_i) = \min\{k \geq 0 : k \notin c\left(\{x_1, \ldots, x_{i-1}\} \cap \Gamma(x_i)\right)\}$
- Arriba estamos usando la notación usual de $c(A) = \{c(a) : a \in A\}$.
- Es decir, x_i recibe el menor color que sea distinto del color de todos los vecinos anteriores a x_i.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.
- Como $AB \in E$, B no puede tener el color de A, coloreamos B con el menor color posible distinto de 0: $c(B) = 1$.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.
- Como $AB \in E$, B no puede tener el color de A, coloreamos B con el menor color posible distinto de 0: $c(B) = 1$.
- Como $AC \in E$, C no puede tener el color de A. Pero A es el único vécino de C en el conjunto $\{A, B\}$ asi que Greedy le da $c(C) = 1$.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.
- Como $AB \in E$, B no puede tener el color de A, coloreamos B con el menor color posible distinto de 0: $c(B) = 1$.
- Como $AC \in E$, C no puede tener el color de A. Pero A es el único vécino de C en el conjunto $\{A, B\}$ asi que Greedy le da $c(C) = 1$.
- Como D no tiene vecinos, $c(D) = 0$.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.
- Como $AB \in E$, B no puede tener el color de A, coloreamos B con el menor color posible distinto de 0: $c(B) = 1$.
- Como $AC \in E$, C no puede tener el color de A. Pero A es el único vécino de C en el conjunto $\{A, B\}$ asi que Greedy le da $c(C) = 1$.
- Como D no tiene vecinos, $c(D) = 0$.
- Como $\Gamma(E) = \{A, C\}$, entonces E no puede tener ni el color 0 ni el 1, Greedy le da $c(E) = 2$.

Greedy, ejemplo

- $G =$ el grafo del ejemplo del principio, con el orden alfabetico.
- $c(A) = 0$.
- Como $AB \in E$, B no puede tener el color de A, coloreamos B con el menor color posible distinto de 0: $c(B) = 1$.
- Como $AC \in E$, C no puede tener el color de A. Pero A es el único vécino de C en el conjunto $\{A, B\}$ asi que Greedy le da $c(C) = 1$.
- Como D no tiene vecinos, $c(D) = 0$.
- Como $\Gamma(E) = \{A, C\}$, entonces E no puede tener ni el color 0 ni el 1, Greedy le da $c(E) = 2$.
- En este caso Greedy coloreó con 3 colores, y como el grafo tiene un K_3 entonces $\chi(G) = 3$.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.
- 3 tiene vecinos a 2 (de color 1) y a 4 (de color 0) asi que Greedy le da el color 2.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.
- 3 tiene vecinos a 2 (de color 1) y a 4 (de color 0) asi que Greedy le da el color 2.
- 5 tiene vecino anterior solamente a 4, asi que Greedy le da el color 1.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.
- 3 tiene vecinos a 2 (de color 1) y a 4 (de color 0) asi que Greedy le da el color 2.
- 5 tiene vecino anterior solamente a 4, asi que Greedy le da el color 1.
- 6 tiene vecinos a 1 (color 0) y a 5 (color 1) asi que Greedy hace $c(6) = 2$.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.
- 3 tiene vecinos a 2 (de color 1) y a 4 (de color 0) asi que Greedy le da el color 2.
- 5 tiene vecino anterior solamente a 4, asi que Greedy le da el color 1.
- 6 tiene vecinos a 1 (color 0) y a 5 (color 1) asi que Greedy hace $c(6) = 2$.
- Conclusión: Greedy colorea C_6, en ese orden, con 3 colores.

Greedy, ejemplo II

- Tomemos C_6 pero con el orden $1, 4, 2, 3, 5, 6$.
- $c(1) = 0$.
- 4 no es vecino de 1, por lo tanto, Greedy tambien le da el color 0.
- 2 es vecino de 1, Greedy hace $c(2) = 1$.
- 3 tiene vecinos a 2 (de color 1) y a 4 (de color 0) asi que Greedy le da el color 2.
- 5 tiene vecino anterior solamente a 4, asi que Greedy le da el color 1.
- 6 tiene vecinos a 1 (color 0) y a 5 (color 1) asi que Greedy hace $c(6) = 2$.
- Conclusión: Greedy colorea C_6, en ese orden, con 3 colores.
- Pero sabemos que $\chi(C_6) = 2$ asi que este es un ejemplo de que Greedy puede colorear con mas de $\chi(G)$ colores.

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n))$.

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n))$.
- (en realidad el d_1 esta de mas porque colorear x_1 es $O(1)$ pero no importa).

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n))$.
- (en realidad el d_1 esta de mas porque colorear x_1 es $O(1)$ pero no importa).
- Por el lema del apretón de manos que vieron en Discreta I, la suma de todos los grados es igual a $2m$.

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n))$.
- (en realidad el d_1 esta de mas porque colorear x_1 es $O(1)$ pero no importa).
- Por el lema del apretón de manos que vieron en Discreta I, la suma de todos los grados es igual a $2m$.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(2m) = O(m)$, polinomial.

Complejidad de Greedy

- Para colorear el vertice x_i Greedy debe chequear $d(x_i)$ vecinos de x para ver sus colores.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(d(x_1) + d(x_2) + \cdots + d(x_n))$.
- (en realidad el d_1 esta de mas porque colorear x_1 es $O(1)$ pero no importa).
- Por el lema del apretón de manos que vieron en Discreta I, la suma de todos los grados es igual a $2m$.
- Por lo tanto la complejidad de Greedy es $O(2m) = O(m)$, polinomial.
- (el lema del apreton de manos es facil de probar: al sumar sobre todos los grados, estamos contando cada lado xy dos veces: una vez cuando pasamos por x y otra cuando pasamos por y).