

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Matchings

Daniel Penazzi

14 de mayo de 2021

# Tabla de Contenidos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

## 1 Matchings

- Definición y problema
- Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos
- Ejemplo
  - Rehaciendo el ejemplo con matrices

## 2 Teoremas de Hall y König

- Perfección y Completitud
- Teorema de Hall
- Teorema del Matrimonio de König
- Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

# Matching

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Definición

Dado un grafo  $G$  un **matching** en  $G$  es un subgrafo  $M$  de  $G$  tal que el grado (en  $M$ ) de cada vértice de  $M$  es uno.

# Matching

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Definición

Dado un grafo  $G$  un **matching** en  $G$  es un subgrafo  $M$  de  $G$  tal que el grado (en  $M$ ) de cada vértice de  $M$  es uno.

- En otras palabras, un matching es un conjunto de lados disjuntos.

# Matching

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Definición

Dado un grafo  $G$  un **matching** en  $G$  es un subgrafo  $M$  de  $G$  tal que el grado (en  $M$ ) de cada vértice de  $M$  es uno.

- En otras palabras, un matching es un conjunto de lados disjuntos.
- El problema a resolver será:

# Matching

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Definición

Dado un grafo  $G$  un **matching** en  $G$  es un subgrafo  $M$  de  $G$  tal que el grado (en  $M$ ) de cada vértice de  $M$  es uno.

- En otras palabras, un matching es un conjunto de lados disjuntos.
- El problema a resolver será:
- Dado un grafo  $G$  bipartito, encontrar un matching en  $G$  con la mayor cantidad de lados posible.

# Matching

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Definición

Dado un grafo  $G$  un **matching** en  $G$  es un subgrafo  $M$  de  $G$  tal que el grado (en  $M$ ) de cada vértice de  $M$  es uno.

- En otras palabras, un matching es un conjunto de lados disjuntos.
- El problema a resolver será:
- Dado un grafo  $G$  bipartito, encontrar un matching en  $G$  con la mayor cantidad de lados posible.
- Un matching que tenga la mayor cantidad posible de lados se dice matching **maximal**

# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:



# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:
  - 1 Muchos problemas de aplicación sólo requieren un grafo bipartito

# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:
  - 1 Muchos problemas de aplicación sólo requieren un grafo bipartito
  - 2 El algoritmo para grafos no bipartitos se “apoya” en el algoritmo para bipartitos, así que hay que conocer este de todos modos.

# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:
  - 1 Muchos problemas de aplicación sólo requieren un grafo bipartito
  - 2 El algoritmo para grafos no bipartitos se “apoya” en el algoritmo para bipartitos, así que hay que conocer este de todos modos.
- Nota: la persona que generalizó el algoritmo que daremos para grafos bipartitos a grafos no bipartitos es....

# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:
  - 1 Muchos problemas de aplicación sólo requieren un grafo bipartito
  - 2 El algoritmo para grafos no bipartitos se “apoya” en el algoritmo para bipartitos, así que hay que conocer este de todos modos.
- Nota: la persona que generalizó el algoritmo que daremos para grafos bipartitos a grafos no bipartitos es....Edmonds.

# Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si bien hay problemas de matchings en grafos generales, nos concentraremos en matchings en grafos bipartitos, pues:
  - 1 Muchos problemas de aplicación sólo requieren un grafo bipartito
  - 2 El algoritmo para grafos no bipartitos se “apoya” en el algoritmo para bipartitos, así que hay que conocer este de todos modos.
- Nota: la persona que generalizó el algoritmo que daremos para grafos bipartitos a grafos no bipartitos es....Edmonds. El algoritmo es mucho más complicado y no lo daremos.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ejemplo:  $G$  es un grafo cuyos vértices son tareas que hay que hacer y trabajadores que pueden hacer esas tareas.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ejemplo:  $G$  es un grafo cuyos vértices son tareas que hay que hacer y trabajadores que pueden hacer esas tareas.
- Se une un trabajador con una tarea si el trabajador es capaz de hacer esa tarea.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ejemplo:  $G$  es un grafo cuyos vértices son tareas que hay que hacer y trabajadores que pueden hacer esas tareas.
- Se une un trabajador con una tarea si el trabajador es capaz de hacer esa tarea.
- Queremos encontrar la mayor cantidad posible de emparejamientos tarea/trabajador.



# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ejemplo:  $G$  es un grafo cuyos vértices son tareas que hay que hacer y trabajadores que pueden hacer esas tareas.
- Se une un trabajador con una tarea si el trabajador es capaz de hacer esa tarea.
- Queremos encontrar la mayor cantidad posible de emparejamientos tarea/trabajador.
- Es decir, un matching maximal.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ejemplo:  $G$  es un grafo cuyos vértices son tareas que hay que hacer y trabajadores que pueden hacer esas tareas.
- Se une un trabajador con una tarea si el trabajador es capaz de hacer esa tarea.
- Queremos encontrar la mayor cantidad posible de emparejamientos tarea/trabajador.
- Es decir, un matching maximal.
- Mas adelante veremos una generalización de este problema, cuando pej asociamos a cada par tarea/trabajados un costo que puede cambiar dependiendo de cual trabajador hace cual tarea, y no sólo querramos un matching maximal sino un matching maximal de costo mínimo.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:
  - 1 Transformamos el grafo bipartito no dirigido en un network (el cual tendrás todas sus capacidades enteras)

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:

- 1 Transformamos el grafo bipartito no dirigido en un network (el cual tendrás todas sus capacidades enteras)
- 2 Encontramos un flujo **entero** maximal en ese network, que sabemos por el teorema de la Integralidad que existe.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:

- 1 Transformamos el grafo bipartito no dirigido en un network (el cual tendrás todas sus capacidades enteras)
- 2 Encontramos un flujo **entero** maximal en ese network, que sabemos por el teorema de la Integralidad que existe.
- 3 A partir de ese flujo maximal obtenemos un matching maximal

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:
  - 1 Transformamos el grafo bipartito no dirigido en un network (el cual tendrás todas sus capacidades enteras)
  - 2 Encontramos un flujo **entero** maximal en ese network, que sabemos por el teorema de la Integralidad que existe.
  - 3 A partir de ese flujo maximal obtenemos un matching maximal
- Sabemos como hacer la segunda de esas cosas, pues si las capacidades son enteras cualquier especificación de Ford-Fulkerson como Edmonds-Karp o Dinitz lo encuentra.

# Solución al problema de Matching maximales

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La solución original a este problema no es exactamente la que daremos, pero la daremos de la forma en que la daremos para aprovechar lo que hemos aprendido:
  - 1 Transformamos el grafo bipartito no dirigido en un network (el cual tendrás todas sus capacidades enteras)
  - 2 Encontramos un flujo **entero** maximal en ese network, que sabemos por el teorema de la Integralidad que existe.
  - 3 A partir de ese flujo maximal obtenemos un matching maximal
- Sabemos como hacer la segunda de esas cosas, pues si las capacidades son enteras cualquier especificación de Ford-Fulkerson como Edmonds-Karp o Dinitz lo encuentra.
- Veamos como hacer las otras dos.



# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .
- Los lados del network sera la unión de todos los siguientes lados:

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .
- Los lados del network sera la unión de todos los siguientes lados:
  - $\overrightarrow{xy}$  para todo  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $xy \in E(G)$

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .
- Los lados del network sera la unión de todos los siguientes lados:
  - $\overrightarrow{xy}$  para todo  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $xy \in E(G)$
  - $\overrightarrow{sx}$  para todo  $x \in X$

# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .
- Los lados del network sera la unión de todos los siguientes lados:
  - $\overrightarrow{xy}$  para todo  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $xy \in E(G)$
  - $\overrightarrow{sx}$  para todo  $x \in X$
  - $\overrightarrow{yt}$  para todo  $y \in Y$



# Transformación del grafo en network

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea  $G$  bipartito, y  $X, Y$  sus partes. Es decir:
- $V(G) = X \cup Y$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ , y no hay lados entre vértices de  $X$  o entre vértices de  $Y$ .
  - Por lo tanto los únicos lados son entre algún vértice de  $X$  y algún vértice de  $Y$ .
- Para construir el network  $N$ , agregamos a los vértices dos vértices nuevos, que denotaremos por  $s$  y  $t$ .
- Los lados del network sera la unión de todos los siguientes lados:
  - $\overrightarrow{xy}$  para todo  $x \in X, y \in Y, xy \in E(G)$
  - $\overrightarrow{sx}$  para todo  $x \in X$
  - $\overrightarrow{yt}$  para todo  $y \in Y$
- Con capacidad 1 en todos los lados

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.
- Como la capacidad de todos los lados es 1, tenemos:

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.
- Como la capacidad de todos los lados es 1, tenemos:
  - Si  $x \in X$ , como sólo hay un lado que entre a  $x$  (el  $\overrightarrow{sx}$ ) entonces  $in_f(x) = f(\overrightarrow{sx})$ .

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.
- Como la capacidad de todos los lados es 1, tenemos:
  - Si  $x \in X$ , como sólo hay un lado que entre a  $x$  (el  $\overrightarrow{sx}$ ) entonces  $in_f(x) = f(\overrightarrow{sx})$ .
  - Como  $f$  es entero, y la capacidad de  $\overrightarrow{sx}$  es uno, entonces  $f(\overrightarrow{sx})$  es 1 o 0, y por lo de arriba, entonces  $in_f(x)$  es 1 o 0.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.
- Como la capacidad de todos los lados es 1, tenemos:
  - Si  $x \in X$ , como sólo hay un lado que entre a  $x$  (el  $\overrightarrow{sx}$ ) entonces  $in_f(x) = f(\overrightarrow{sx})$ .
  - Como  $f$  es entero, y la capacidad de  $\overrightarrow{sx}$  es uno, entonces  $f(\overrightarrow{sx})$  es 1 o 0, y por lo de arriba, entonces  $in_f(x)$  es 1 o 0.
  - Si un vértice  $x \in X$  como  $out_f(x) = in_f(x)$ , debe ser  $out_f(x)$  también 1 o 0.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un flujo  $f$  entero.
- Como la capacidad de todos los lados es 1, tenemos:
  - Si  $x \in X$ , como sólo hay un lado que entre a  $x$  (el  $\overrightarrow{sx}$ ) entonces  $in_f(x) = f(\overrightarrow{sx})$ .
  - Como  $f$  es entero, y la capacidad de  $\overrightarrow{sx}$  es uno, entonces  $f(\overrightarrow{sx})$  es 1 o 0, y por lo de arriba, entonces  $in_f(x)$  es 1 o 0.
  - Si un vértice  $x \in X$  como  $out_f(x) = in_f(x)$ , debe ser  $out_f(x)$  también 1 o 0.
  - Así que si  $out_f(x) > 0$ , debe ser 1, y entonces, como  $f$  es entero, debe haber un único  $y \in Y$  con  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .



# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:
  - $W = \{x \in X : in_f(x) = 1\}$

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:
  - $W = \{x \in X : in_f(x) = 1\}$
  - $U = \{y \in Y : out_f(y) = 1\}$

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:
  - $W = \{x \in X : in_f(x) = 1\}$
  - $U = \{y \in Y : out_f(y) = 1\}$
  - $F = \{xy \in E(G) : x \in W, y \in U : f(\overrightarrow{xy}) = 1\}$

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:
  - $W = \{x \in X : in_f(x) = 1\}$
  - $U = \{y \in Y : out_f(y) = 1\}$
  - $F = \{xy \in E(G) : x \in W, y \in U : f(\overrightarrow{xy}) = 1\}$
- Entonces  $(W \cup U, F)$  es un subgrafo de  $G$  que es un matching.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un razonamiento similar, usando  $t$ , se puede hacer con los  $y \in Y$ : o bien  $out_f(y) = 0$ , o es 1, y en este último caso existe un único  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos que dado un flujo  $f$  entero, entonces si tomamos:
  - $W = \{x \in X : in_f(x) = 1\}$
  - $U = \{y \in Y : out_f(y) = 1\}$
  - $F = \{xy \in E(G) : x \in W, y \in U : f(\overrightarrow{xy}) = 1\}$
- Entonces  $(W \cup U, F)$  es un subgrafo de  $G$  que es un matching.
- Pues para cada  $x \in W$  hay un único  $y \in U$  con  $xy \in F$  y para cada  $y \in U$  hay un único  $x \in W$  con  $xy \in F$ .

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Es decir, podemos construir matchings a partir de flujos.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Es decir, podemos construir matchings a partir de flujos.
- Observemos que la cantidad de lados del matching será igual a la cantidad de  $x \in X$  con  $in_f(x) = 1$ ,



# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Es decir, podemos construir matchings a partir de flujos.
- Observemos que la cantidad de lados del matching será igual a la cantidad de  $x \in X$  con  $in_f(x) = 1$ ,
- Pero esto es igual a  $out_f(s) = v(f)$ .

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Es decir, podemos construir matchings a partir de flujos.
- Observemos que la cantidad de lados del matching será igual a la cantidad de  $x \in X$  con  $in_f(x) = 1$ ,
- Pero esto es igual a  $out_f(s) = v(f)$ .
- Así que la cantidad de lados del matching es igual al valor del flujo.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Viceversa, dado un matching, simplemente definimos  $f$  igual a 1 en los lados del matching, 0 en los otros lados  $\overrightarrow{xy}$ , y definimos  $f(\overrightarrow{sx}) = 1$  si  $x$  es un vértice del matching y  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$  si  $y$  es un vértices del matching.

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Viceversa, dado un matching, simplemente definimos  $f$  igual a 1 en los lados del matching, 0 en los otros lados  $\overrightarrow{xy}$ , y definimos  $f(\overrightarrow{sx}) = 1$  si  $x$  es un vértice del matching y  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$  si  $y$  es un vértices del matching.
- Es trivial ver que  $f$  es flujo (facil: lo costruimos camino a camino con caminos de la forma  $sxyt$ )

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, dado un matching, simplemente definimos  $f$  igual a 1 en los lados del matching, 0 en los otros lados  $\overrightarrow{xy}$ , y definimos  $f(\overrightarrow{sx}) = 1$  si  $x$  es un vértice del matching y  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$  si  $y$  es un vértice del matching.
- Es trivial ver que  $f$  es flujo (facil: lo construimos camino a camino con caminos de la forma  $sxyt$ )
- Y como antes, el valor de  $f$  es la cantidad de lados del matching

# Relación entre matchings maximales en $G$ y flujos maximales enteros en $N$

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Viceversa, dado un matching, simplemente definimos  $f$  igual a 1 en los lados del matching, 0 en los otros lados  $\overrightarrow{xy}$ , y definimos  $f(\overrightarrow{sx}) = 1$  si  $x$  es un vértice del matching y  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$  si  $y$  es un vértices del matching.
- Es trivial ver que  $f$  es flujo (facil: lo construimos camino a camino con caminos de la forma  $sxyt$ )
- Y como antes, el valor de  $f$  es la cantidad de lados del matching
- Por lo tanto flujos maximales enteros se corresponden con matching maximales.

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:
  - Construir el network asociado.



# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:
  - Construir el network asociado.
  - Encontrar flujo maximal entero  $f$  en el network. (como dijimos, pej Edmonds-Karp o Dinitz encuentran un flujo maximal entero si todas las capacidades son enteras)

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:
  - Construir el network asociado.
  - Encontrar flujo maximal entero  $f$  en el network. (como dijimos, pej Edmonds-Karp o Dinitz encuentran un flujo maximal entero si todas las capacidades son enteras)
  - Tomar como matching aquellos lados  $xy$  con  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:
  - Construir el network asociado.
  - Encontrar flujo maximal entero  $f$  en el network. (como dijimos, pej Edmonds-Karp o Dinitz encuentran un flujo maximal entero si todas las capacidades son enteras)
  - Tomar como matching aquellos lados  $xy$  con  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- En realidad, ya sea que se use Dinitz o Edmonds-Karp, la primera parte es siempre “con Dinitz”.

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Con lo cual, para resolver el problema del matching maximal basta con:
  - Construir el network asociado.
  - Encontrar flujo maximal entero  $f$  en el network. (como dijimos, pej Edmonds-Karp o Dinitz encuentran un flujo maximal entero si todas las capacidades son enteras)
  - Tomar como matching aquellos lados  $xy$  con  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- En realidad, ya sea que se use Dinitz o Edmonds-Karp, la primera parte es siempre “con Dinitz”.
- Lo pongo entre comillas porque ni siquiera usamos Dinitz, pero es equivalente.

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observemos que si hicieramos Dinitz, el primer network auxiliar tendría nivel 0 igual a  $\{s\}$ , nivel 1 igual a  $X$ , nivel 2 igual a  $Y$  y nivel 3 igual a  $\{t\}$ .

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observemos que si hicieramos Dinitz, el primer network auxiliar tendría nivel 0 igual a  $\{s\}$ , nivel 1 igual a  $X$ , nivel 2 igual a  $Y$  y nivel 3 igual a  $\{t\}$ .
- Todo camino aumentante en ese primer network auxiliar será de la forma  $sxyt$  con  $x \in X, y \in Y$ , y corresponderá a agregar  $xy$  al matching.

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observemos que si hicieramos Dinitz, el primer network auxiliar tendría nivel 0 igual a  $\{s\}$ , nivel 1 igual a  $X$ , nivel 2 igual a  $Y$  y nivel 3 igual a  $\{t\}$ .
- Todo camino aumentante en ese primer network auxiliar será de la forma  $sxyt$  con  $x \in X, y \in Y$ , y corresponderá a agregar  $xy$  al matching.
- Asi que la primera parte simplemente consiste en buscar un matching inicial agregando todos los lados que se pueda sin romper la condición de matching.

# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observemos que si hicieramos Dinitz, el primer network auxiliar tendría nivel 0 igual a  $\{s\}$ , nivel 1 igual a  $X$ , nivel 2 igual a  $Y$  y nivel 3 igual a  $\{t\}$ .
- Todo camino aumentante en ese primer network auxiliar será de la forma  $sxyt$  con  $x \in X, y \in Y$ , y corresponderá a agregar  $xy$  al matching.
- Así que la primera parte simplemente consiste en buscar un matching inicial agregando todos los lados que se pueda sin romper la condición de matching.
- Y esto es equivalente a correr Dinitz en el primer network auxiliar.



# Algoritmo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observemos que si hicieramos Dinitz, el primer network auxiliar tendría nivel 0 igual a  $\{s\}$ , nivel 1 igual a  $X$ , nivel 2 igual a  $Y$  y nivel 3 igual a  $\{t\}$ .
- Todo camino aumentante en ese primer network auxiliar será de la forma  $sxyt$  con  $x \in X, y \in Y$ , y corresponderá a agregar  $xy$  al matching.
- Asi que la primera parte simplemente consiste en buscar un matching inicial agregando todos los lados que se pueda sin romper la condición de matching.
- Y esto es equivalente a correr Dinitz en el primer network auxiliar.
- Y luego de esa primera parte, se trata de ir extendiendo el matching inicial.

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo. Pero antes hablemos un poco de cómo representaremos grafos bipartitos para estos problemas.

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo. Pero antes hablemos un poco de cómo representaremos grafos bipartitos para estos problemas.
- Sea  $G$  grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$ .

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo. Pero antes hablemos un poco de cómo representaremos grafos bipartitos para estos problemas.
- Sea  $G$  grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$ .
- Si bien en general es mas eficiente representar la estructura de vecinos de un grafo usando una lista o un array de vécinos, en muchos de estos problemas en realidad estan muchos de los vértices de  $X$  unidos a muchos de los vértices de  $Y$ .

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo. Pero antes hablemos un poco de cómo representaremos grafos bipartitos para estos problemas.
- Sea  $G$  grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$ .
- Si bien en general es mas eficiente representar la estructura de vecinos de un grafo usando una lista o un array de vécinos, en muchos de estos problemas en realidad estan muchos de los vértices de  $X$  unidos a muchos de los vértices de  $Y$ .
- Asi que en realidad en estos problemas es común usar una matriz de adyacencia en vez de una lista o array.

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como  $G$  es bipartito, una matriz de adyacencia para  $G$ , va a “lucir” como:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$$

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como  $G$  es bipartito, una matriz de adyacencia para  $G$ , va a “lucir” como:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$$

- puesto que no hay lados entre vértices de  $X$  o vértices de  $Y$ .

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como  $G$  es bipartito, una matriz de adyacencia para  $G$ , va a “lucir” como:

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$$

- puesto que no hay lados entre vértices de  $X$  o vértices de  $Y$ .
- Así que en vez de dar toda la matriz de adyacencia se suele dar solamente  $A$ , cuyas filas representan elementos de  $X$  y cuyas columnas elementos de  $Y$ .



# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En el caso de un grafo sin pesos, las entradas son 1 o 0, indicando simplemente si  $x$  es vecino de  $y$  o no.

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En el caso de un grafo sin pesos, las entradas son 1 o 0, indicando simplemente si  $x$  es vecino de  $y$  o no.
- En el caso de un grafo con pesos en los lados (que veremos mas adelante) se suele poner en la entrada  $(x, y)$  el peso del lado  $xy$  si existe un lado entre  $x$  e  $y$ , o bien  $\infty$  si no existe lado.

# Representación de un grafo bipartito

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En el caso de un grafo sin pesos, las entradas son 1 o 0, indicando simplemente si  $x$  es vecino de  $y$  o no.
- En el caso de un grafo con pesos en los lados (que veremos mas adelante) se suele poner en la entrada  $(x, y)$  el peso del lado  $xy$  si existe un lado entre  $x$  e  $y$ , o bien  $\infty$  si no existe lado.
- Pej, podría ser una matriz así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & \infty & 4 \\ \infty & 5 & \infty & 7 \\ 4 & 7 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo del algoritmo.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

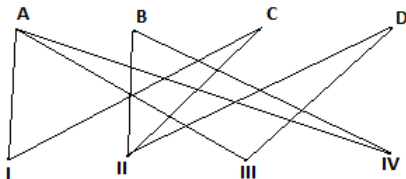
Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo del algoritmo.
- Sea  $G$  bipartito con  $X = \{A, B, C, D\}$ ,  $Y = \{I, II, III, IV\}$  dado por el siguiente grafo:



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veamos un ejemplo del algoritmo.
- Sea  $G$  bipartito con  $X = \{A, B, C, D\}$ ,  $Y = \{I, II, III, IV\}$  dado por el siguiente grafo:
- Lo podemos representar por la matriz con filas  $A, B, C, D$  y columnas,  $I, II, III, IV$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

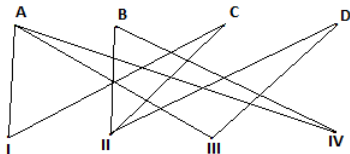
## ■ Un matching inicial, simplemente mirando

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## ■ Un matching inicial, simplemente mirando



## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

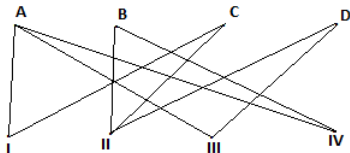
Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Un matching inicial, simplemente mirando se puede construir como  $AI, BII, DIII$ .







# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este ejemplo tan chico, es obvio como “arreglar” esto “a ojo”, pero estamos queriendo ejemplificar el algoritmo, así que sigamos.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este ejemplo tan chico, es obvio como “arreglar” esto “a ojo”, pero estamos queriendo ejemplificar el algoritmo, así que sigamos.
- Supongamos que usamos Edmonds-Karp.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este ejemplo tan chico, es obvio como “arreglar” esto “a ojo”, pero estamos queriendo ejemplificar el algoritmo, así que sigamos.
- Supongamos que usamos Edmonds-Karp.
- Recordemos que al construir la cola ibamos guardando tanto quien fue el vértice que pone al nuevo vértice en la cola, como el “ $\epsilon(x)$ ” que vamos teniendo hasta ese momento.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este ejemplo tan chico, es obvio como “arreglar” esto “a ojo”, pero estamos queriendo ejemplificar el algoritmo, así que sigamos.
- Supongamos que usamos Edmonds-Karp.
- Recordemos que al construir la cola ibamos guardando tanto quien fue el vértice que pone al nuevo vértice en la cola, como el “ $\epsilon(x)$ ” que vamos teniendo hasta ese momento.
- Pero en nuestro caso, como todas las capacidades son uno, esto último es irrelevante y no hace falta hacerlo.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

■ Asi que la cola empieza:

sC  
s



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Asi que la cola empieza:

sC  
s

- Pues al estar  $A, B, D$  en el matching es lo mismo que decir que  $\overrightarrow{f(sA)} = \overrightarrow{f(sB)} = \overrightarrow{f(sD)} = 1$  asi que sólo queda  $C$  para enviarle flujo.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

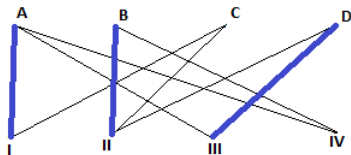
## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Asi que la cola empieza:

sC  
s

- Pues al estar  $A, B, D$  en el matching es lo mismo que decir que  $f(\overrightarrow{sA}) = f(\overrightarrow{sB}) = f(\overrightarrow{sD}) = 1$  asi que sólo queda  $C$  para enviarle flujo.

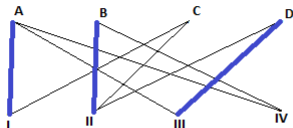


# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- $C$  tiene vécinos a  $I, II$



## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- $C$  tiene vécinos a  $I, II$
- Asi que la cola sigue:

sC I II  
sCC

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

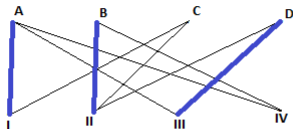
## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- $C$  tiene vecinos a  $I, II$
- Así que la cola sigue:

sC I II  
sCC

- Tanto  $I$  como  $II$  está en el matching, así que  
 $f(\overrightarrow{It}) = f(\overrightarrow{II}t) = 1$  y ninguno puede agregar a  $t$  a la cola.



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero justamente, como están en el matching, ambos tienen un vértice en  $X$  con el cual están matcheados.







# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero justamente, como están en el matching, ambos tienen un vértice en  $X$  con el cual están matcheados.
- $A$  en el caso de  $I$ ,  $B$  en el caso de  $II$ .
- Esto dice que  $f(\overrightarrow{AI}) = f(\overrightarrow{BII}) = 1$  y por lo tanto  $I$  puede agregar a  $A$  backward y  $II$  puede agregar a  $B$  backward.
- La cola queda:

$$\begin{array}{l} sC \mid II \ A \ B \\ sCC \mid - \ II^- \end{array}$$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

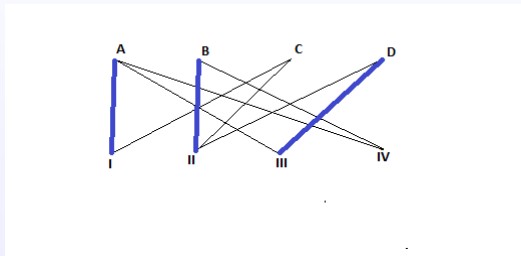
## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos



- A tiene vecinos a I,III,IV.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- A tiene vecinos a I,III,IV.
- El primero ya está en la cola pero los otros dos no, así que se agregan:

$$\begin{array}{ccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV \\ s & C & C & I & - & II & - & A & A \end{array}$$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

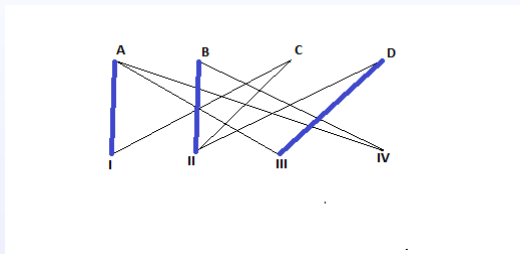
## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos



- A tiene vecinos a I,II,III,IV.
- El primero ya está en la cola pero los otros dos no, así que se agregan:
- B tiene a II, IV como vecinos,

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- A tiene vecinos a I,III,IV.
- El primero ya está en la cola pero los otros dos no, así que se agregan:

$$\begin{array}{ccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV \\ s & C & C & I & - & II & - & A & A \end{array}$$

- B tiene a II, IV como vecinos, ambos están, no se agrega nada.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- III forma parte del matching, lo que significa, como vimos en el caso de I,II, que sólo puede agregar (backwards) al vértice de  $X$  con el cual forma matching, en este caso,  $D$ :

$$\begin{array}{ccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D \\ s & C & C & I^- & II^- & A & A & III^- & \end{array}$$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

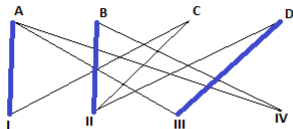
## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- III forma parte del matching, lo que significa, como vimos en el caso de I,II, que sólo puede agregar (backwards) al vértice de X con el cual forma matching, en este caso, D:

$$\begin{array}{ccccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D \\ s & C & C & I & - & II & - & A & A & III & - \end{array}$$

- IV **no forma parte** del matching.



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- III forma parte del matching, lo que significa, como vimos en el caso de I,II, que sólo puede agregar (backwards) al vértice de  $X$  con el cual forma matching, en este caso,  $D$ :

$$\begin{array}{cccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D \\ s & CC & I^- & II^- & A & & A & III^- & \end{array}$$

- IV no forma parte del matching.
- Esto significa que  $f(\overset{\rightarrow}{IV}t) = 0$  y puede agregar a  $t$  a la cola, con lo que terminamos.

$$\begin{array}{cccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D & t \\ s & CC & I^- & II^- & A & & A & III^- & IV & \end{array}$$



# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- III forma parte del matching, lo que significa, como vimos en el caso de I,II, que sólo puede agregar (backwards) al vértice de  $X$  con el cual forma matching, en este caso,  $D$ :

$$\begin{array}{ccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D \\ s & C & C & I^- & II^- & A & A & III^- & \end{array}$$

- IV **no forma parte** del matching.
- Esto significa que  $f(\overset{\rightarrow}{IV}t) = 0$  y puede agregar a  $t$  a la cola, con lo que terminamos.

$$\begin{array}{ccccccc} s & C & I & II & A & B & III & IV & D & t \\ s & C & C & I^- & II^- & A & A & III^- & IV & \end{array}$$

- Y reconstruimos el camino como  $s \overset{\leftarrow}{C} I A IV t$

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

$$\blacksquare sC \overset{\leftarrow}{IA} IVt$$

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\blacksquare s \overset{\leftarrow}{C} I A IV t$$

- Cambiando el flujo de acuerdo con ese camino, vemos que tenemos que sumarle 1 a los lados  $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  y restarle 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{c} \leftarrow \\ sC \, IA \, IVt \end{array}$$

- Cambiando el flujo de acuerdo con ese camino, vemos que tenemos que sumarle 1 a los lados  $\overrightarrow{sC}$ ,  $\overrightarrow{CI}$ ,  $\overrightarrow{AIV}$ ,  $\overrightarrow{IVt}$  y restarle 1 al lado  $\overrightarrow{AI}$ .
- Esto ¿cómo se traduce en términos del matching?

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- $s \overset{\leftarrow}{C} I A I V t$
- Cambiando el flujo de acuerdo con ese camino, vemos que tenemos que sumarle 1 a los lados  $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  y restarle 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .
- Esto ¿cómo se traduce en términos del matching?
- $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  son sólo auxiliares de la construcción que hemos hecho.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- $s \overset{\leftarrow}{C} I A IV t$
- Cambiando el flujo de acuerdo con ese camino, vemos que tenemos que sumarle 1 a los lados  $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  y restarle 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .
- Esto ¿cómo se traduce en términos del matching?
- $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  son sólo auxiliares de la construcción que hemos hecho.
- Así que lo importante es que le sumamos 1 a  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$  y restamos 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

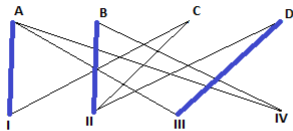
- $s \overset{\leftarrow}{C} I A \overset{\rightarrow}{I} V t$
- Cambiando el flujo de acuerdo con ese camino, vemos que tenemos que sumarle 1 a los lados  $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  y restarle 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .
- Esto ¿cómo se traduce en términos del matching?
- $\overset{\rightarrow}{sC}$ ,  $\overset{\rightarrow}{IVt}$  son sólo auxiliares de la construcción que hemos hecho.
- Así que lo importante es que le sumamos 1 a  $\overset{\rightarrow}{CI}$ ,  $\overset{\rightarrow}{AIV}$  y restamos 1 al lado  $\overset{\rightarrow}{AI}$ .
- Que significa que agregamos  $CI$ ,  $AIV$  al matching y eliminamos el lado  $AI$  del matching.

# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- Agregamos  $CI, A/IV$  al matching:



## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

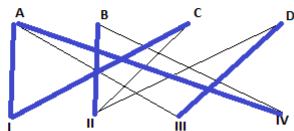


# Ejemplo

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- Agregamos  $CI, A/IV$  al matching:



## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos



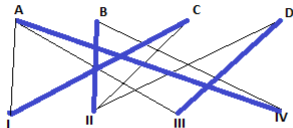
## Ejemplo

## Matchings

Daniel Penazzi

### Ejemplo

- Agregamos  $CI$ ,  $AIV$  al matching y eliminamos el lado  $AI$  del matching:





# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:

# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$sx_{i_1} \overset{\leftarrow}{y_{i_1}} x_{i_2} \overset{\leftarrow}{y_{i_2}} x_{i_3} \dots y_{i_{r-1}} \overset{\leftarrow}{x_{i_r}} y_{i_r} t.$$

# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$sx_{i_1} \overleftarrow{y_{i_1} x_{i_2}} \overleftarrow{y_{i_2} x_{i_3}} \dots \overleftarrow{y_{i_{r-1}} x_{i_r}} y_{i_r} t.$$
- Por eso se le suele llamar un camino **alternado** (porque alterna entre elementos de  $X$  y elementos de  $Y$ )

# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$sx_{i_1} \overleftarrow{y_{i_1} x_{i_2}} \overleftarrow{y_{i_2} x_{i_3}} \dots \overleftarrow{y_{i_{r-1}} x_{i_r}} y_{i_r} t.$$
- Por eso se le suele llamar un camino **alternado** (porque alterna entre elementos de  $X$  y elementos de  $Y$ )
- Y respecto del matching significará que:



# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$sx_{i_1} \overleftarrow{y_{i_1} x_{i_2}} \overleftarrow{y_{i_2} x_{i_3}} \dots \overleftarrow{y_{i_{r-1}} x_{i_r}} y_{i_r} t.$$
- Por eso se le suele llamar un camino **alternado** (porque alterna entre elementos de  $X$  y elementos de  $Y$ )
- Y respecto del matching significará que:
  - 1 Se agregarán al matching los lados  $x_{i_j} y_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$

# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$sx_{i_1} \overleftarrow{y_{i_1} x_{i_2}} \overleftarrow{y_{i_2} x_{i_3}} \dots \overleftarrow{y_{i_{r-1}} x_{i_r}} y_{i_r} t.$$
- Por eso se le suele llamar un camino **alternado** (porque alterna entre elementos de  $X$  y elementos de  $Y$ )
- Y respecto del matching significará que:
  - 1 Se agregarán al matching los lados  $x_{i_j} y_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$
  - 2 Se borrarán del matching los lados  $x_{i_j} y_{i_{j-1}}$ ,  $j = 2, \dots, r$

# Estructura general de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Algo similar a esto, por la estructura del grafo, es algo que va a pasar siempre:
- El camino aumentante será de la forma
$$s x_{i_1} \overleftarrow{y_{i_1} x_{i_2}} \overleftarrow{y_{i_2} x_{i_3}} \dots \overleftarrow{y_{i_{r-1}} x_{i_r}} y_{i_r} t.$$
- Por eso se le suele llamar un camino **alternado** (porque alterna entre elementos de  $X$  y elementos de  $Y$ )
- Y respecto del matching significará que:
  - 1 Se agregarán al matching los lados  $x_{i_j} y_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$
  - 2 Se borrarán del matching los lados  $x_{i_j} y_{i_{j-1}}$ ,  $j = 2, \dots, r$
- Como se agregan  $r$  lados y se borran  $r - 1$ , el matching aumenta en un lado y se continua de esta forma hasta que no se pueda seguir mas.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Una cosa que se puede hacer al hacerlo a mano es ir escribiendo en la misma matriz tanto el matching (marcando por ejemplo con un circulo las entradas) como las etiquetas de la cola, si se usa Edmonds-Karp, en cada fila o columna correspondiente.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Una cosa que se puede hacer al hacerlo a mano es ir escribiendo en la misma matriz tanto el matching (marcando por ejemplo con un circulo las entradas) como las etiquetas de la cola, si se usa Edmonds-Karp, en cada fila o columna correspondiente.
- En vez de marcar con un circulo, aca le cambiare el color a los elementos del matching.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cosa que se puede hacer al hacerlo a mano es ir escribiendo en la misma matriz tanto el matching (marcando por ejemplo con un circulo las entradas) como las etiquetas de la cola, si se usa Edmonds-Karp, en cada fila o columna correspondiente.
- En vez de marcar con un circulo, aca le cambiare el color a los elementos del matching.
- Matriz era:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cosa que se puede hacer al hacerlo a mano es ir escribiendo en la misma matriz tanto el matching (marcando por ejemplo con un círculo las entradas) como las etiquetas de la cola, si se usa Edmonds-Karp, en cada fila o columna correspondiente.
- En vez de marcar con un círculo, acá le cambiare el color a los elementos del matching.
- Matching inicial AI,BII,DIII:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:



# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

- Recorremos esa fila, buscando vecinos, es decir, “1”.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

- Recorremos esa fila, buscando vecinos, es decir, “1”.
- Encontramos las columnas I, II.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

- Recorremos esa fila, buscando vecinos, es decir, “1”.
- Encontramos las columnas I, II.
- Esto es lo mismo que antes cuando poníamos:

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

- Recorremos esa fila, buscamos vecinos, es decir, “1”.
- Encontramos las columnas I, II.
- Esto es lo mismo que antes cuando poníamos:

$$\begin{matrix} sC & I & II \\ sCC \end{matrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora empezamos la cola, marcando con una “s” las filas no matcheadas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} s$$

- Recorremos esa fila, buscando vecinos, es decir, “1”.
- Encontramos las columnas I, II.
- Esto es lo mismo que antes cuando poníamos:
- Pero en esa cola, marcábamos con una C a I,II.  
¿Cómo hacemos ahora?

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Simplemente marcamos las **columnas** I y II con “C”

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} & s \\ C & C \end{matrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Simplemente marcamos las **columnas** I y II con “C”

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} s$$

$C \quad C$

- En la siguiente etapa de la cola, mirabamos ambos vértices I,II, veiamos que no podiamos llegar a t, pero podiamos devolver flujo.



# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Simplemente marcamos las **columnas** I y II con “C”

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} s$$

$C \quad C$

- En la siguiente etapa de la cola, mirabamos ambos vértices I,II, veiamos que no podiamos llegar a t, pero podiamos devolver flujo.
- En la matriz es equivalente a revisar la columna correspondiente y ver si hay “1” marcado o no.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Simplemente marcamos las **columnas** I y II con “C”

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} s$$

$C \quad C$

- En la siguiente etapa de la cola, mirabamos ambos vértices I,II, veiamos que no podiamos llegar a t, pero podiamos devolver flujo.
- En la matriz es equivalente a revisar la columna correspondiente y ver si hay “1” marcado o no.
- Si no hay, es porque la columna no forma parte del matching y podemos extender el matching.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Simplemente marcamos las **columnas** I y II con “C”

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} s$$

$C \quad C$

- En la siguiente etapa de la cola, mirabamos ambos vértices I,II, veiamos que no podiamos llegar a t, pero podiamos devolver flujo.
- En la matriz es equivalente a revisar la columna correspondiente y ver si hay “1” marcado o no.
- Si no hay, es porque la columna no forma parte del matching y podemos extender el matching.
- Si hay un “1” marcado, podemos agregar la fila donde esta ese 1 a la cola.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola. Previamente lo hicimos así:

$$\begin{array}{cccc} s & C & I & II & A & B \\ s & CC & / & - & II & - \end{array}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.

Ahora:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ \\ \\ C \end{matrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.

Ahora:

$$\begin{matrix} & & & & / \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & s \\ C & C & & \end{matrix}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.

Ahora:

$$\begin{array}{cccc|c} \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & 1 & / \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & // \\ 1 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \\ C & C & & & \end{array}$$



# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.

Ahora:

$$\begin{array}{cccc|c} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} / \\ // \\ s \\ \end{matrix} \\ C & C & & & \end{array}$$

- Ahora revisamos esas dos filas, buscando 1s y etiquetando las columnas correspondientes, si no estan ya etiquetadas. (pues si lo estan, es que ya han sido puestas en la cola):

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.
- Ahora revisamos esas dos filas, buscando 1s y etiquetando las columnas correspondientes, si no están ya etiquetadas. (pues si lo están, es que ya han sido puestas en la cola):

$$\begin{array}{cccc|l} \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & 1 & / \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & // \\ 1 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \\ C & C & & & \end{array}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En este caso en las dos columnas hay 1 marcados, así que agregamos las filas correspondientes a la cola.
- Ahora revisamos esas dos filas, buscando 1s y etiquetando las columnas correspondientes, si no están ya etiquetadas. (pues si lo están, es que ya han sido puestas en la cola):

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & & & \\ & // & & & \\ & s & & & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La columna IV ha sido etiquetada y no tiene 1 marcados.

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La columna IV ha sido etiquetada y no tiene 1 marcados.

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Podemos extender el matching entonces.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La columna IV ha sido etiquetada y no tiene 1 marcados.

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Podemos extender el matching entonces.
- Nos fijamos en la etiqueta que tiene la columna “libre”, A en este caso.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La columna IV ha sido etiquetada y no tiene 1 marcados.

$$\begin{array}{cccc|l} \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & 1 & / \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & // \\ 1 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \\ C & C & A & \textcolor{blue}{A} & \end{array}$$

- Podemos extender el matching entonces.
- Nos fijamos en la etiqueta que tiene la columna “libre”, A en este caso.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \end{array}$$

C    C    A    A

- Esto representa la etiqueta en la cola que dice quien lo puso en la cola.



# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & & & \\ & // & & & \\ & s & & & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Esto representa la etiqueta en la cola que dice quien lo puso en la cola.
- Por lo que el lado  $A \xrightarrow{\quad} V$  formará parte del camino y por lo tanto mandaremos flujo por el.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \color{blue}{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \end{array}$$

$C \quad C \quad A \quad \color{blue}{A}$

- Esto representa la etiqueta en la cola que dice quien lo puso en la cola.
- Por lo que el lado  $A/V$   $\rightarrow$  formará parte del camino y por lo tanto mandaremos flujo por el.
- Es decir, agregaremos  $A/V$  al matching.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} / \\ // \\ s \end{matrix} & \\ C & C & A & A \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} / \\ // \\ s \end{array} \\ C & C & A & A \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & / & \\ & // & \\ & s & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila  $A$  tenga ahora dos 1 marcados.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & / \\ 0 & \textcolor{blue}{1} & 0 & 1 & // \\ 1 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila  $A$  tenga ahora dos 1 marcados.
- Borramos el “otro” 1, que podemos ver por la etiqueta del costado.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \color{blue}{1} \\ 0 & \color{blue}{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} / \\ // \\ s \end{matrix} & \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila A tenga ahora dos 1 marcados.
- Borramos el “otro” 1, que podemos ver por la etiqueta del costado.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & \color{blue}{1} \\ 0 & \color{blue}{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} / \\ // \\ s \end{array} \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila  $A$  tenga ahora dos 1 marcados.
- Borramos el “otro” 1, que podemos ver por la etiqueta del costado.
- Esto deja libre la columna  $I$ , así que miramos su etiqueta,  $C$ .



# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} / \\ // \\ s \end{matrix} \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila A tenga ahora dos 1 marcados.
- Borramos el “otro” 1, que podemos ver por la etiqueta del costado.
- Esto deja libre la columna I, así que miramos su etiqueta, C .
- Agregamos el 1 correspondiente al matching y listo.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

$$\begin{array}{cccc|l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} / \\ // \\ s \end{array} \\ C & C & A & A & \end{array}$$

- Agregamos  $A/V$  al matching.
- Esto hace que la fila  $A$  tenga ahora dos 1 marcados.
- Borramos el “otro” 1, que podemos ver por la etiqueta del costado.
- Esto deja libre la columna  $I$ , así que miramos su etiqueta,  $C$ .
- Agregamos el 1 correspondiente al matching y listo.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- Veremos mas ejemplos la clase que viene.

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veremos mas ejemplos la clase que viene.
- Pero la idea básica es esa: construir un matching inicial, luego para extenderlo en cada caso vamos revisando filas etiquetadas, etiquetando las columnas donde hay 1s, y luego miramos columnas etiquetadas, mirando si hay 1s **marcados**. Si los hay, etiquetamos las filas correspondientes, y si no, terminamos.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veremos mas ejemplos la clase que viene.
- Pero la idea básica es esa: construir un matching inicial, luego para extenderlo en cada caso vamos revisando filas etiquetadas, etiquetando las columnas donde hay 1s, y luego miramos columnas etiquetadas, mirando si hay 1s **marcados**. Si los hay, etiquetamos las filas correspondientes, y si no, terminamos.
- Si tenemos una columna libre, le miramos la etiqueta, agregamos el 1 correspondiente al matching, liberamos el “otro”1, esto deja una columna libre, repetimos hasta llegar a una fila marcada con “s”, con lo cual habremos extendido el matching en un lado

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veremos mas ejemplos la clase que viene.
- Pero la idea básica es esa: construir un matching inicial, luego para extenderlo en cada caso vamos revisando filas etiquetadas, etiquetando las columnas donde hay 1s, y luego miramos columnas etiquetadas, mirando si hay 1s **marcados**. Si los hay, etiquetamos las filas correspondientes, y si no, terminamos.
- Si tenemos una columna libre, le miramos la etiqueta, agregamos el 1 correspondiente al matching, liberamos el “otro”1, esto deja una columna libre, repetimos hasta llegar a una fila marcada con “s”, con lo cual habremos extendido el matching en un lado
- Seguimos hasta que no podemos mas.

# Construcción de los caminos aumentantes

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Veremos mas ejemplos la clase que viene.
- Pero la idea básica es esa: construir un matching inicial, luego para extenderlo en cada caso vamos revisando filas etiquetadas, etiquetando las columnas donde hay 1s, y luego miramos columnas etiquetadas, mirando si hay 1s **marcados**. Si los hay, etiquetamos las filas correspondientes, y si no, terminamos.
- Si tenemos una columna libre, le miramos la etiqueta, agregamos el 1 correspondiente al matching, liberamos el “otro”1, esto deja una columna libre, repetimos hasta llegar a una fila marcada con “s”, con lo cual habremos extendido el matching en un lado
- Seguimos hasta que no podemos mas.
- En el ejemplo terminamos matcheando todas las filas, pero no siempre sucederá eso.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Problemas relacionados con el de matching maximal son:



# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Problemas relacionados con el de matching maximal son:
  - 1 ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices?

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Problemas relacionados con el de matching maximal son:
  - 1 ■ ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices?
    - (Es decir, que el conjunto de vértices del matching sea igual al conjunto de vértices de  $G$ )

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## ■ Problemas relacionados con el de matching maximal son:

- 1 ■ ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices?
  - (Es decir, que el conjunto de vértices del matching sea igual al conjunto de vértices de  $G$ )
  - Un matching que cubra todos los vértices se dice **perfecto**

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## ■ Problemas relacionados con el de matching maximal son:

- 1 ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices?
  - (Es decir, que el conjunto de vértices del matching sea igual al conjunto de vértices de  $G$ )
  - Un matching que cubra todos los vértices se dice **perfecto**
- 2 ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices de una de las partes del grafo?

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## ■ Problemas relacionados con el de matching maximal son:

- 1 ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices?
  - (Es decir, que el conjunto de vértices del matching sea igual al conjunto de vértices de  $G$ )
  - Un matching que cubra todos los vértices se dice **perfecto**
- 2 ¿Existe un matching que “cubra” todos los vértices de una de las partes del grafo?
  - Pej. si cubre todos los vértices de  $X$ , se dice que es **completo** sobre  $X$ , o completo de  $X$  a  $Y$ .

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes del grafo es obvio que una condición necesaria para que exista un matching perfecto es que  $|X| = |Y|$ .

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes del grafo es obvio que una condición necesaria para que exista un matching perfecto es que  $|X| = |Y|$ .
- También es obvio que una condición necesaria para que un matching sea completo sobre una de las partes, pej  $X$ , es que  $|X| \leq |Y|$ , porque si vamos a cubrir todos los vértices de  $X$ , necesitamos para cada uno de ellos un vértice en  $Y$  correspondiente.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes del grafo es obvio que una condición necesaria para que exista un matching perfecto es que  $|X| = |Y|$ .
- También es obvio que una condición necesaria para que un matching sea completo sobre una de las partes, peej  $X$ , es que  $|X| \leq |Y|$ , porque si vamos a cubrir todos los vértices de  $X$ , necesitamos para cada uno de ellos un vértice en  $Y$  correspondiente.
- Obviamente, un matching completo sobre  $X$  y completo sobre  $Y$  es perfecto.



# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes del grafo es obvio que una condición necesaria para que exista un matching perfecto es que  $|X| = |Y|$ .
- También es obvio que una condición necesaria para que un matching sea completo sobre una de las partes, peej  $X$ , es que  $|X| \leq |Y|$ , porque si vamos a cubrir todos los vértices de  $X$ , necesitamos para cada uno de ellos un vértice en  $Y$  correspondiente.
- Obviamente, un matching completo sobre  $X$  y completo sobre  $Y$  es perfecto.
- Además, si  $|X| = |Y|$ , cualquier matching completo, sobre  $X$  o  $Y$ , es perfecto.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pej, si tenemos tareas y trabajadores que hagan las tareas, un matching perfecto es un matching en el cual todas las tareas se hacen y todos los trabajadores tienen un trabajo.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pej, si tenemos tareas y trabajadores que hagan las tareas, un matching perfecto es un matching en el cual todas las tareas se hacen y todos los trabajadores tienen un trabajo.
- Un matching completo sobre los trabajadores es un matching tal que ningún trabajador queda sin empleo, pero podría quedar alguna tarea sin realizar.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pej, si tenemos tareas y trabajadores que hagan las tareas, un matching perfecto es un matching en el cual todas las tareas se hacen y todos los trabajadores tienen un trabajo.
- Un matching completo sobre los trabajadores es un matching tal que ningún trabajador queda sin empleo, pero podría quedar alguna tarea sin realizar.
- Un matching completo sobre las tareas es un matching tal que todas las tareas se realizan pero puede quedar algún trabajador sin empleo.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observar que no podemos elegir entre tener un matching completo sobre los trabajadores o tener uno completo sobre las tareas, pues hay condiciones estructurales que nos pueden impedirlo:

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observar que no podemos elegir entre tener un matching completo sobre los trabajadores o tener uno completo sobre las tareas, pues hay condiciones estructurales que nos pueden impedirlo:
  - si la cantidad de trabajadores es mayor que la cantidad de tareas, no puede haber un completo sobre los trabajadores

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observar que no podemos elegir entre tener un matching completo sobre los trabajadores o tener uno completo sobre las tareas, pues hay condiciones estructurales que nos pueden impedirlo:
  - si la cantidad de trabajadores es mayor que la cantidad de tareas, no puede haber un completo sobre los trabajadores
  - si la cantidad de tareas es mayor que la cantidad de trabajadores, no puede haber un completo sobre las tareas

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Observar que no podemos elegir entre tener un matching completo sobre los trabajadores o tener uno completo sobre las tareas, pues hay condiciones estructurales que nos pueden impedirlo:
  - si la cantidad de trabajadores es mayor que la cantidad de tareas, no puede haber un completo sobre los trabajadores
  - si la cantidad de tareas es mayor que la cantidad de trabajadores, no puede haber un completo sobre las tareas
  - mientras que si la cantidad de trabajadores y tareas son iguales, todo completo sobre las tareas será perfecto y completo sobre los trabajadores.



# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, aunque la cantidad sea igual, podría suceder que no exista un matching perfecto, o en el caso de no ser iguales, que no exista un completo sobre ninguna de las 2 partes.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, aunque la cantidad sea igual, podría suceder que no exista un matching perfecto, o en el caso de no ser iguales, que no exista un completo sobre ninguna de las 2 partes.
- Por ejemplo, si tenemos 2 tareas A y B y 10 trabajadores, pero ninguno de ellos puede hacer la tarea B, entonces no puede haber un matching completo sobre las tareas. (ni sobre los trabajadores)

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, aunque la cantidad sea igual, podría suceder que no exista un matching perfecto, o en el caso de no ser iguales, que no exista un completo sobre ninguna de las 2 partes.
- Por ejemplo, si tenemos 2 tareas A y B y 10 trabajadores, pero ninguno de ellos puede hacer la tarea B, entonces no puede haber un matching completo sobre las tareas. (ni sobre los trabajadores)
- Para resolver estos problemas simplemente hallamos un matching maximal y chequeamos si es completo o perfecto.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero ademas se pueden probar cosas teóricas que se usan bastante.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero además se pueden probar cosas teóricas que se usan bastante.
- Vimos que la condición  $|X| \leq |Y|$  es necesaria para que exista un matching completo sobre  $X$ , pero con el ejemplo anterior vimos que no es suficiente.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero además se pueden probar cosas teóricas que se usan bastante.
- Vimos que la condición  $|X| \leq |Y|$  es necesaria para que exista un matching completo sobre  $X$ , pero con el ejemplo anterior vimos que no es suficiente.
- Esto es porque no es suficiente que la cardinalidad de  $X$  sea menor que la de  $Y$ , sino que necesitamos que existan suficientes **vecinos** para los elementos de  $X$ .

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero además se pueden probar cosas teóricas que se usan bastante.
- Vimos que la condición  $|X| \leq |Y|$  es necesaria para que exista un matching completo sobre  $X$ , pero con el ejemplo anterior vimos que no es suficiente.
- Esto es porque no es suficiente que la cardinalidad de  $X$  sea menor que la de  $Y$ , sino que necesitamos que existan suficientes **vecinos** para los elementos de  $X$ .
- En el ejemplo anterior,  $B$  no tenía ningún vecino.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Pero aún si todos los vértices tienen vecinos, podría no haber un matching completo.



# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero aún si todos los vértices tienen vecinos, podría no haber un matching completo.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos  $X = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y lados  $E = \{A1, A4, B2, B3, B4, B6, B7, C1, C5, D1, D4, D5, E4, E5\}$ .

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero aún si todos los vértices tienen vecinos, podría no haber un matching completo.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos  $X = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y lados  $E = \{A1, A4, B2, B3, B4, B6, B7, C1, C5, D1, D4, D5, E4, E5\}$ .
- Si queremos encontrar un matching completo sobre  $X$  no podríamos.

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

#### Perfección y Completitud

Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Pero aún si todos los vértices tienen vecinos, podría no haber un matching completo.
- Por ejemplo, supongamos que tenemos  $X = \{A, B, C, D, E\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  y lados  $E = \{A1, A4, B2, B3, B4, B6, B7, C1, C5, D1, D4, D5, E4, E5\}$ .
- Si queremos encontrar un matching completo sobre  $X$  no podríamos.
- Analizemos rápidamente porqué:

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Miremos el subconjunto  $S = \{A, C, D, E\}$ .

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Completitud

Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Miremos el subconjunto  $S = \{A, C, D, E\}$ .
- La unión de todos los vecinos de los vértices de  $S$  es  $\{1, 4, 5\}$ . ( $E = \{A1, A4, B2, B3, B4, B6, B7, C1, C5, D1, D4, D5, E4, E5\}$ )

# Matchings perfectos y completos

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

### Perfección y Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Miremos el subconjunto  $S = \{A, C, D, E\}$ .
- La unión de todos los véncinos de los vértices de  $S$  es  $\{1, 4, 5\}$ .
- Por lo tanto no hay suficiente cantidad de véncinos para el conjunto  $S$ , lo cual dice que  $S$  no puede ser cubierto, mucho menos  $X$ .

# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

**Teorema de Hall**

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

- Si hubiese un matching completo sobre  $X$ , y  $S \subseteq X$ , tendríamos que restringiendo el matching a  $S$  deberíamos tener al menos  $|S|$  vecinos de los elementos de  $S$ .



# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

- Si hubiese un matching completo sobre  $X$ , y  $S \subseteq X$ , tendríamos que restringiendo el matching a  $S$  deberíamos tener al menos  $|S|$  vecinos de los elementos de  $S$ .
- Y esos vecinos estan todos en  $\Gamma(S)$ .

# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
**Teorema de Hall**  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

- Si hubiese un matching completo sobre  $X$ , y  $S \subseteq X$ , tendríamos que restringiendo el matching a  $S$  deberíamos tener al menos  $|S|$  vecinos de los elementos de  $S$ .
- Y esos vecinos estan todos en  $\Gamma(S)$ .
- Por lo tanto una condición necesaria para que exista matching completo sobre  $|X|$  es que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ .

# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

- Si hubiese un matching completo sobre  $X$ , y  $S \subseteq X$ , tendríamos que restringiendo el matching a  $S$  deberíamos tener al menos  $|S|$  vecinos de los elementos de  $S$ .
- Y esos vecinos estan todos en  $\Gamma(S)$ .
- Por lo tanto una condición necesaria para que exista matching completo sobre  $|X|$  es que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ .
- Esto se llama la **condición de Hall**.

# Condición de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Dado un subconjunto  $S$  de vértices definimos

$$\Gamma(S) = \cup_{x \in S} \Gamma(x) = \{z : \exists x \in S : xz \in E\}$$

- Si hubiese un matching completo sobre  $X$ , y  $S \subseteq X$ , tendríamos que restringiendo el matching a  $S$  deberíamos tener al menos  $|S|$  vecinos de los elementos de  $S$ .
- Y esos vecinos estan todos en  $\Gamma(S)$ .
- Por lo tanto una condición necesaria para que exista matching completo sobre  $|X|$  es que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ .
- Esto se llama la **condición de Hall**.
- Y resulta que no sólo es necesaria sino suficiente.

# Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (Hall)

Si  $G$  es un grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$  y  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ , entonces existe un matching completo sobre  $X$ .

# Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (Hall)

Si  $G$  es un grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$  y  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ , entonces existe un matching completo sobre  $X$ .

## ■ Prueba:

# Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (Hall)

Si  $G$  es un grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$  y  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ , entonces existe un matching completo sobre  $X$ .

- Prueba:
- Supongamos que el teorema no es cierto, es decir que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$  pero que no existe un matching completo sobre  $X$ .

# Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (Hall)

Si  $G$  es un grafo bipartito con partes  $X$  e  $Y$  y  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ , entonces existe un matching completo sobre  $X$ .

- Prueba:
- Supongamos que el teorema no es cierto, es decir que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$  pero que no existe un matching completo sobre  $X$ .
- Probaremos que el hecho de que no exista un matching completo sobre  $X$  implica que existe  $S \subseteq X$  con  $|S| > |\Gamma(S)|$  lo cual contradice la hipótesis.



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

### Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- La prueba de que existe tal  $S$  la haremos analizando el algoritmo que dimos antes.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La prueba de que existe tal  $S$  la haremos analizando el algoritmo que dimos antes.
- Como estamos suponiendo que no existe matching completo sobre  $X$ , entonces corriendo el algoritmo para hallar matching maximal, usando Edmonds-Karp, obtenemos un matching maximal que NO cubre todos los vértices de  $X$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- La prueba de que existe tal  $S$  la haremos analizando el algoritmo que dimos antes.
- Como estamos suponiendo que no existe matching completo sobre  $X$ , entonces corriendo el algoritmo para hallar matching maximal, usando Edmonds-Karp, obtenemos un matching maximal que NO cubre todos los vértices de  $X$ .
- Sea  $S_0$  aquellos vértices de  $X$  que, al terminar el algoritmo, han quedado sin cubrir. ( $S_0 \neq \emptyset$  porque estamos suponiendo que no hemos cubierto a todos los vértices de  $X$ )

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

- Definición y problema
- Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos
- Ejemplo
  - Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

- Perfección y Completitud
- Teorema de Hall**
- Teorema del Matrimonio de König
- Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Entonces  $x \in S_0$  si y solo si no existe  $y \in Y$  tal que  $xy$  sea lado del matching.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $x \in S_0$  si y solo si no existe  $y \in Y$  tal que  $xy$  sea lado del matching.
- Esto significa que  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$ , donde  $f$  es el flujo maximal encontrado.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $x \in S_0$  si y solo si no existe  $y \in Y$  tal que  $xy$  sea lado del matching.
- Esto significa que  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$ , donde  $f$  es el flujo maximal encontrado.
- Por lo tanto  $out_f(x) = 0$  para todo  $x \in S_0$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $x \in S_0$  si y solo si no existe  $y \in Y$  tal que  $xy$  sea lado del matching.
- Esto significa que  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$ , donde  $f$  es el flujo maximal encontrado.
- Por lo tanto  $out_f(x) = 0$  para todo  $x \in S_0$ .
- Como  $f$  es flujo, eso significa que  $in_f(x) = 0$  para todo  $x \in S_0$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, supongamos que  $x$  es un vértice tal que  $in_f(x) = 0$ .



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

**Teorema de Hall**

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, supongamos que  $x$  es un vértice tal que  $in_f(x) = 0$ .
- Entonces  $out_f(x) = 0$  y por lo tanto  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$  lo cual significa que  $x$  no forma parte del matching.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, supongamos que  $x$  es un vértice tal que  $in_f(x) = 0$ .
- Entonces  $out_f(x) = 0$  y por lo tanto  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$  lo cual significa que  $x$  no forma parte del matching.
- Conclusión:  $S_0 = \{x \in X : in_f(x) = out_f(x) = 0\}$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, supongamos que  $x$  es un vértice tal que  $in_f(x) = 0$ .
- Entonces  $out_f(x) = 0$  y por lo tanto  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$  lo cual significa que  $x$  no forma parte del matching.
- Conclusión:  $S_0 = \{x \in X : in_f(x) = out_f(x) = 0\}$ .
- En el último paso del algoritmo, Edmonds-Karp encuentra un corte minimal.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Viceversa, supongamos que  $x$  es un vértice tal que  $in_f(x) = 0$ .
- Entonces  $out_f(x) = 0$  y por lo tanto  $f(\overrightarrow{xy}) = 0$  para todo  $y$  lo cual significa que  $x$  no forma parte del matching.
- Conclusión:  $S_0 = \{x \in X : in_f(x) = out_f(x) = 0\}$ .
- En el último paso del algoritmo, Edmonds-Karp encuentra un corte minimal.
- Antes denotabamos los cortes con la letra  $S$ , pero ahora usaremos otra letra porque el corte minimal no es el " $S$ " que estamos buscando. Digamos que el corte es  $C$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ese corte  $C$  incluye a  $s$ , y los otros elementos de  $C$  son vértices de  $G$ , que pueden estar en  $X$  o en  $Y$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

**Teorema de Hall**

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ese corte  $C$  incluye a  $s$ , y los otros elementos de  $C$  son vértices de  $G$ , que pueden estar en  $X$  o en  $Y$ .
- Así que existen  $S \subseteq X$ ,  $T \subseteq Y$  tal que  $C = \{s\} \cup S \cup T$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ese corte  $C$  incluye a  $s$ , y los otros elementos de  $C$  son vértices de  $G$ , que pueden estar en  $X$  o en  $Y$ .
- Así que existen  $S \subseteq X$ ,  $T \subseteq Y$  tal que  $C = \{s\} \cup S \cup T$ .
- Recordemos que  $C$  se obtiene al hacer la última cola BFS:  $C$  consiste de todos los vértices que en algún momento están en esa última cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ese corte  $C$  incluye a  $s$ , y los otros elementos de  $C$  son vértices de  $G$ , que pueden estar en  $X$  o en  $Y$ .
- Así que existen  $S \subseteq X$ ,  $T \subseteq Y$  tal que  $C = \{s\} \cup S \cup T$ .
- Recordemos que  $C$  se obtiene al hacer la última cola BFS:  $C$  consiste de todos los vértices que en algún momento están en esa última cola.
- Como  $x \in S_0 \iff \text{in}_f(x) = 0 \iff f(\overrightarrow{sx}) = 0$ , entonces los vértices de  $S_0$  son precisamente todos los vértices que  $s$  agrega a la cola.



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ese corte  $C$  incluye a  $s$ , y los otros elementos de  $C$  son vértices de  $G$ , que pueden estar en  $X$  o en  $Y$ .
- Así que existen  $S \subseteq X$ ,  $T \subseteq Y$  tal que  $C = \{s\} \cup S \cup T$ .
- Recordemos que  $C$  se obtiene al hacer la última cola BFS:  $C$  consiste de todos los vértices que en algún momento están en esa última cola.
- Como  $x \in S_0 \iff \text{in}_f(x) = 0 \iff f(\overrightarrow{sx}) = 0$ , entonces los vértices de  $S_0$  son precisamente todos los vértices que  $s$  agrega a la cola.
- Por lo tanto,  $S_0 \subseteq S$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

#### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, todos los otros elementos de  $S$  (los que no estan en  $S_0$ , si es que hay alguno) deben haber sido agregados a la cola por algún elemento distinto de  $s$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, todos los otros elementos de  $S$  (los que no estan en  $S_0$ , si es que hay alguno) deben haber sido agregados a la cola por algún elemento distinto de  $s$ .
- Pero un vértice solo puede agregar a algún vecino, ya sea vecino hacia adelante o hacia atras.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

#### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Ahora bien, todos los otros elementos de  $S$  (los que no estan en  $S_0$ , si es que hay alguno) deben haber sido agregados a la cola por algún elemento distinto de  $s$ .
- Pero un vértice solo puede agregar a algún vecino, ya sea vecino hacia adelante o hacia atras.
- Esto quiere decir que los vértices de  $S$  no pueden haber sido agregado por otros vértices de  $S$ , pues como  $S \subseteq X$ , no hay lados entre ellos.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

#### Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Ahora bien, todos los otros elementos de  $S$  (los que no estan en  $S_0$ , si es que hay alguno) deben haber sido agregados a la cola por algún elemento distinto de  $s$ .
- Pero un vértice solo puede agregar a algún vecino, ya sea vecino hacia adelante o hacia atras.
- Esto quiere decir que los vértices de  $S$  no pueden haber sido agregado por otros vértices de  $S$ , pues como  $S \subseteq X$ , no hay lados entre ellos.
- Asi que los vértices de  $S$  que no están en  $S_0$  deben haber sido agregados por vértices de  $T$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero  $T \subseteq Y$  y todo vértice  $y$  de  $Y$  tiene  $\Gamma^+(y) = \{t\}$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero  $T \subseteq Y$  y todo vértice  $y$  de  $Y$  tiene  $\Gamma^+(y) = \{t\}$ .
- Así que  $T$  sólo puede agregar a un vértice de  $X$  a la cola si lo agrega por medio de un lado **backward**

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero  $T \subseteq Y$  y todo vértice  $y$  de  $Y$  tiene  $\Gamma^+(y) = \{t\}$ .
- Así que  $T$  sólo puede agregar a un vértice de  $X$  a la cola si lo agrega por medio de un lado **backward**
- Para que  $y$  agregue a  $x$  como backward, debe pasar que  $f(\overrightarrow{xy}) > 0$ .



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero  $T \subseteq Y$  y todo vértice  $y$  de  $Y$  tiene  $\Gamma^+(y) = \{t\}$ .
- Así que  $T$  sólo puede agregar a un vértice de  $X$  a la cola si lo agrega por medio de un lado **backward**
- Para que  $y$  agregue a  $x$  como backward, debe pasar que  $f(\overrightarrow{xy}) > 0$ .
- En nuestro caso, esto implica  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$  y que  $xy$  sea parte del matching.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero  $T \subseteq Y$  y todo vértice  $y$  de  $Y$  tiene  $\Gamma^+(y) = \{t\}$ .
- Así que  $T$  sólo puede agregar a un vértice de  $X$  a la cola si lo agrega por medio de un lado **backward**
- Para que  $y$  agregue a  $x$  como backward, debe pasar que  $f(\overrightarrow{xy}) > 0$ .
- En nuestro caso, esto implica  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$  y que  $xy$  sea parte del matching.
- Por lo tanto, cada  $y$  que pueda agregar a la cola a algún vértice en forma backward, puede agregar UN SÓLO tal vértice.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero ademas, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?
- Supongamos que no, que exista  $y \in T$  que no agrega a nadie a la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?
- Supongamos que no, que exista  $y \in T$  que no agrega a nadie a la cola.
- Como  $C$  es un corte,  $t \notin C$ , así que  $y$  no debería poder agregar a  $t$  a la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?
- Supongamos que no, que exista  $y \in T$  que no agrega a nadie a la cola.
- Como  $C$  es un corte,  $t \notin C$ , así que  $y$  no debería poder agregar a  $t$  a la cola.
- Con lo cual, debemos tener que  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$ .



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?
- Supongamos que no, que exista  $y \in T$  que no agrega a nadie a la cola.
- Como  $C$  es un corte,  $t \notin C$ , así que  $y$  no debería poder agregar a  $t$  a la cola.
- Con lo cual, debemos tener que  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$ .
- Entonces  $out_f(y) = 1$  y por lo tanto  $in_f(y) = 1$  y debe existir  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces cada vértice de  $T$  puede agregar un sólo vértice a la cola.
- Pero además, cada vértice de  $T$  efectivamente agrega un vértice a la cola.
- ¿Por qué?
- Supongamos que no, que exista  $y \in T$  que no agrega a nadie a la cola.
- Como  $C$  es un corte,  $t \notin C$ , así que  $y$  no debería poder agregar a  $t$  a la cola.
- Con lo cual, debemos tener que  $f(\overrightarrow{yt}) = 1$ .
- Entonces  $out_f(y) = 1$  y por lo tanto  $in_f(y) = 1$  y debe existir  $x \in X$  tal que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Pero entonces  $x$  es “candidato” a ser agregado a la cola como backward por  $y$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

### Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.
- Pero ¿quien lo agregó?

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

### Teorema de Hall

Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.
- Pero ¿quien lo agregó?
- No lo puede haber agregado alguien de  $T$  pues si fuese así:

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
**Teorema de Hall**  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.
- Pero ¿quien lo agregó?
- No lo puede haber agregado alguien de  $T$  pues si fuese así:
  - y no lo agrega así que debería ser otro vértice  $z$  de  $T$ , agregandolo backward.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.
- Pero ¿quien lo agregó?
- No lo puede haber agregado alguien de  $T$  pues si fuese así:
  - y no lo agrega así que debería ser otro vértice  $z$  de  $T$ , agregandolo backward.
  - Pero esto significaría que tanto  $xz$  como  $xy$  estan en el matching, absurdo.



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como estamos suponiendo que  $y$  no agrega a nadie a la cola, debe haber una razón para que  $y$  no agregue a  $x$ .
- La única razón posible es que  $x$  ya esté en la cola.
- Pero ¿quien lo agregó?
- No lo puede haber agregado alguien de  $T$  pues si fuese así:
  - $y$  no lo agrega así que debería ser otro vértice  $z$  de  $T$ , agregandolo backward.
  - Pero esto significaría que tanto  $xz$  como  $xy$  estan en el matching, absurdo.
- Entonces la única posibilidad que queda es que haya sido agregado por  $s$ , es decir, que  $x$  esté en  $S_0$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero si  $x \in S_0$ , entonces  $out_f(x) = 0$  lo que contradice que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero si  $x \in S_0$ , entonces  $out_f(x) = 0$  lo que contradice que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos entonces que todo  $y$  en  $T$  agrega a alguien a la cola, y por lo que vimos antes, agrega **exactamente un** tal alguien a la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero si  $x \in S_0$ , entonces  $out_f(x) = 0$  lo que contradice que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .
- Concluimos entonces que todo  $y$  en  $T$  agrega a alguien a la cola, y por lo que vimos antes, agrega **exactamente un** tal alguien a la cola.
- Esos elementos agregados son los de  $S - S_0$ , así que concluimos que  $|S - S_0| = |T|$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Analicemos ahora un poco a los vértices de  $T$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Analicemos ahora un poco a los vértices de  $T$ .
- Todos ellos deben haber sido agregados por alguien de  $X$  de la cola, es decir, por alguien de  $S$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Analicemos ahora un poco a los vértices de  $T$ .
- Todos ellos deben haber sido agregados por alguien de  $X$  de la cola, es decir, por alguien de  $S$ .
- Esto sólo puede pasar si cada vértice de  $T$  es un vecino de algún vértice de  $S$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Analicemos ahora un poco a los vértices de  $T$ .
- Todos ellos deben haber sido agregados por alguien de  $X$  de la cola, es decir, por alguien de  $S$ .
- Esto sólo puede pasar si cada vértice de  $T$  es un vecino de algún vértice de  $S$ .
- Por lo tanto,  $T \subseteq \Gamma(S)$ .



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

- Definición y problema
- Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos
- Ejemplo
- Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

- Perfección y Completitud

### Teorema de Hall

- Teorema del Matrimonio de König

- Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .
- Como  $y \in \Gamma(S)$  entonces existe  $x \in S$  con  $xy \in E$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .
- Como  $y \in \Gamma(S)$  entonces existe  $x \in S$  con  $xy \in E$ .
- Como  $x \in S$ ,  $x$  está en  $C$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .
- Como  $y \in \Gamma(S)$  entonces existe  $x \in S$  con  $xy \in E$ .
- Como  $x \in S$ ,  $x$  está en  $C$ .
- Pero  $y \notin T$ , así que  $y$  no está en  $C$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .
- Como  $y \in \Gamma(S)$  entonces existe  $x \in S$  con  $xy \in E$ .
- Como  $x \in S$ ,  $x$  está en  $C$ .
- Pero  $y \notin T$ , así que  $y$  no está en  $C$ .
- Así que  $x$  nunca agregó a  $y$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Habiendo visto que  $T \subseteq \Gamma(S)$ , ahora nos preguntamos si son iguales o no.
- Si no son iguales, entonces existe  $y \in \Gamma(S)$  tal que  $y \notin T$ .
- Como  $y \in \Gamma(S)$  entonces existe  $x \in S$  con  $xy \in E$ .
- Como  $x \in S$ ,  $x$  está en  $C$ .
- Pero  $y \notin T$ , así que  $y$  no está en  $C$ .
- Así que  $x$  nunca agregó a  $y$ .
- Pero  $xy \in E$ , así que para que  $x$  no agregue a  $y$ , debe pasar que  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

■ Pero entonces, ¿quien agregó a  $x$ ?



# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero entonces, ¿quien agregó a  $x$ ?
- y no fue porque nunca estuvo en la cola.

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero entonces, ¿quien agregó a  $x$ ?
- y no fue porque nunca estuvo en la cola.
- No puede ser ningún otro elemento de  $T$  pues  
 $f(\overrightarrow{xy}) = 1$  implica que no existe ningún otro  $z$  con  
 $f(\overrightarrow{xz}) = 1$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero entonces, ¿quien agregó a  $x$ ?
- y no fue porque nunca estuvo en la cola.
- No puede ser ningún otro elemento de  $T$  pues  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$  implica que no existe ningún otro  $z$  con  $f(\overrightarrow{xz}) = 1$ .
- Debe haber sido agregado por  $s$ , pero esto implica que  $out_f(x) = 0$  absurdo pues  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Pero entonces, ¿quien agregó a  $x$ ?
- y no fue porque nunca estuvo en la cola.
- No puede ser ningún otro elemento de  $T$  pues  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$  implica que no existe ningún otro  $z$  con  $f(\overrightarrow{xz}) = 1$ .
- Debe haber sido agregado por  $s$ , pero esto implica que  $out_f(x) = 0$  absurdo pues  $f(\overrightarrow{xy}) = 1$
- El absurdo vino de suponer que  $T$  y  $\Gamma(S)$  no eran iguales, así que concluimos que  $T = \Gamma(S)$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

■ Entonces:

$$|\Gamma(S)| = |T| = |S - S_0| = |S| - |S_0| < |S|$$

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
**Teorema de Hall**  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

■ Entonces:

$$|\Gamma(S)| = |T| = |S - S_0| = |S| - |S_0| < |S|$$

■ (la ultima desigualdad pues  $S_0 \neq \emptyset$ ).

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

### ■ Entonces:

$$|\Gamma(S)| = |T| = |S - S_0| = |S| - |S_0| < |S|$$

- (la ultima desigualdad pues  $S_0 \neq \emptyset$ ).
- Hemos probado que  $|\Gamma(S)| < |S|$ , lo que contradice la hipotesis de que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ .

# Prueba del Teorema de Hall

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

### Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

### ■ Entonces:

$$|\Gamma(S)| = |T| = |S - S_0| = |S| - |S_0| < |S|$$

- (la ultima desigualdad pues  $S_0 \neq \emptyset$ ).
- Hemos probado que  $|\Gamma(S)| < |S|$ , lo que contradice la hipotesis de que  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  para todo  $S \subseteq X$ .
- Fin



# Teorema del matrimonio de Kőnig

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y Kőnig

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de Kőnig

Teorema de Kőnig sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- **OBSERVACIÓN:** A veces al teorema de Hall se le llama “teorema del matrimonio” pero en realidad ese nombre se suele reservar para otro teorema, del húngaro Dénes Kőnig.

# Teorema del matrimonio de Kőnig

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y Kőnig

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de Kőnig

Teorema de Kőnig  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- OBSERVACIÓN: A veces al teorema de Hall se le llama “teorema del matrimonio” pero en realidad ese nombre se suele reservar para otro teorema, del húngaro Dénnés Kőnig.

## Teorema del matrimonio (Kőnig, 1914)

Todo grafo bipartito regular tiene un matching perfecto.

# Teorema del matrimonio de Kőnig

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y Kőnig

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de Kőnig

Teorema de Kőnig  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- OBSERVACIÓN: A veces al teorema de Hall se le llama “teorema del matrimonio” pero en realidad ese nombre se suele reservar para otro teorema, del húngaro Dénnés Kőnig.

## Teorema del matrimonio (Kőnig, 1914)

Todo grafo bipartito regular tiene un matching perfecto.

- Antes de dar la prueba, hay que explicar un poco porqué se llama “teorema del matrimonio”.

# Teorema del matrimonio de Kőnig

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y Kőnig

Perfección y  
Complejidad

## Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de Kőnig

Teorema de Kőnig  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- OBSERVACIÓN: A veces al teorema de Hall se le llama “teorema del matrimonio” pero en realidad ese nombre se suele reservar para otro teorema, del húngaro Dénes Kőnig.

## Teorema del matrimonio (Kőnig, 1914)

Todo grafo bipartito regular tiene un matching perfecto.

- Antes de dar la prueba, hay que explicar un poco porqué se llama “teorema del matrimonio”.
- El nombre viene de una de las aplicaciones del teorema.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

**Teorema del  
Matrimonio de König**

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un conjunto de hombres y mujeres que quieren casarse.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
**Teorema del  
Matrimonio de König**  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un conjunto de hombres y mujeres que quieren casarse.
- Nota: como esto fue hecho hace décadas, obvio que no existía el matrimonio homosexual, y por eso vamos a tener un grafo bipartito, de lo contrario tendríamos que usar otro teorema.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un conjunto de hombres y mujeres que quieren casarse.
- Nota: como esto fue hecho hace décadas, obvio que no existía el matrimonio homosexual, y por eso vamos a tener un grafo bipartito, de lo contrario tendríamos que usar otro teorema.
- así que en la época actual tendremos que agregar la hipótesis que todos los involucrados son heterosexuales.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Supongamos que tenemos un conjunto de hombres y mujeres que quieren casarse.
- Nota: como esto fue hecho hace décadas, obvio que no existía el matrimonio homosexual, y por eso vamos a tener un grafo bipartito, de lo contrario tendríamos que usar otro teorema.
- así que en la época actual tendremos que agregar la hipótesis que todos los involucrados son heterosexuales.
- Cada hombre hace una lista de las mujeres con las cuales aceptaría casarse, y cada mujer hace una lista de los hombres con los cuales aceptaría casarse.



# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
**Teorema del  
Matrimonio de König**  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Luego para cada mujer  $x$  hacemos una lista reducida de hombres compatibles: aquellos hombres  $y$  en la lista de  $x$  que tienen a  $x$  en la lista de  $y$ .

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Luego para cada mujer  $x$  hacemos una lista reducida de hombres compatibles: aquellos hombres  $y$  en la lista de  $x$  que tienen a  $x$  en la lista de  $y$ .
- Y hacemos lo mismo para cada hombre  $y$ : una lista de mujeres  $x$  que estan en la lista de  $y$  tales que  $y$  está en la lista de  $x$ .

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Luego para cada mujer  $x$  hacemos una lista reducida de hombres compatibles: aquellos hombres  $y$  en la lista de  $x$  que tienen a  $x$  en la lista de  $y$ .
- Y hacemos lo mismo para cada hombre  $y$ : una lista de mujeres  $x$  que estan en la lista de  $y$  tales que  $y$  está en la lista de  $x$ .
- Es decir,  $x$  está en la lista reducida de  $y$  si y sólo si  $y$  está en la lista reducida de  $x$  si y solo si  $x$  e  $y$  son mutuamente compatibles.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Luego para cada mujer  $x$  hacemos una lista reducida de hombres compatibles: aquellos hombres  $y$  en la lista de  $x$  que tienen a  $x$  en la lista de  $y$ .
- Y hacemos lo mismo para cada hombre  $y$ : una lista de mujeres  $x$  que estan en la lista de  $y$  tales que  $y$  está en la lista de  $x$ .
- Es decir,  $x$  está en la lista reducida de  $y$  si y sólo si  $y$  está en la lista reducida de  $x$  si y solo si  $x$  e  $y$  son mutuamente compatibles.
- Entonces el teorema dice que si cada hombre es compatible con exactamente  $k$  mujeres y cada mujer es compatible con exactamente  $k$  hombres, con  $k \neq 0$ , entonces se pueden casar a todos los hombres y a todas las mujeres de forma compatible.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si lo prefieren pueden pensar en terminos de tareas/trabajadores que si cada tarea puede ser realizada por exactamente  $k$  trabajadores y cada trabajador puede realizar exactamente  $k$  tareas, con  $k > 0$ , entonces se pueden realizar todas las tareas y ningún trabajador se queda sin trabajo.

# Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

#### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si lo prefieren pueden pensar en terminos de tareas/trabajadores que si cada tarea puede ser realizada por exactamente  $k$  trabajadores y cada trabajador puede realizar exactamente  $k$  tareas, con  $k > 0$ , entonces se pueden realizar todas las tareas y ningún trabajador se queda sin trabajo.
- En esta formulación podría llamarse el teorema de la distribución de tareas o algo asi, pero bueno, no es asi como se lo conoce.

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

■ Vayamos a la prueba.

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Vayamos a la prueba.
- Dado un conjunto  $W \subseteq V$ , definamos
$$E_W = \{zw \in E \mid w \in W\}$$



# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Vayamos a la prueba.
- Dado un conjunto  $W \subseteq V$ , definamos
$$E_W = \{zw \in E \mid w \in W\}$$
- Sean  $X$  e  $Y$  las partes del grafo bipartito.

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Vayamos a la prueba.
- Dado un conjunto  $W \subseteq V$ , definamos  $E_W = \{zw \in E \mid w \in W\}$
- Sean  $X$  e  $Y$  las partes del grafo bipartito.
- Supongamos que  $W \subseteq X$ . Entonces:

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Vayamos a la prueba.
- Dado un conjunto  $W \subseteq V$ , definamos
$$E_W = \{zw \in E \mid w \in W\}$$
- Sean  $X$  e  $Y$  las partes del grafo bipartito.
- Supongamos que  $W \subseteq X$ . Entonces:
- $|E_W| = |\{zw \in E \mid w \in W\}| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}|$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

## Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Vayamos a la prueba.
- Dado un conjunto  $W \subseteq V$ , definamos
$$E_W = \{zw \in E \mid w \in W\}$$
- Sean  $X$  e  $Y$  las partes del grafo bipartito.
- Supongamos que  $W \subseteq X$ . Entonces:
- $|E_W| = |\{zw \in E \mid w \in W\}| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}|$
- La última igualdad pues como  $W \subseteq X$  entonces no estamos contando un lado  $zw$  dos veces, pues  $zw \in E$  implica que  $z \in Y$  y por lo tanto no puede estar en  $W$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

- Definición y problema
- Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos
- Ejemplo
  - Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

- Perfección y Completitud
- Teorema de Hall
- Teorema del Matrimonio de König**
- Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

■ Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$
- Con un razonamiento similar, tenemos que si  $W \subseteq Y$  entonces también vale que  $|E_W| = \Delta \cdot |W|.$



# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$
- Con un razonamiento similar, tenemos que si  $W \subseteq Y$  entonces también vale que  $|E_W| = \Delta \cdot |W|.$
- Apliquemos esta propiedad para diversos  $W$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$
- Con un razonamiento similar, tenemos que si  $W \subseteq Y$  entonces también vale que  $|E_W| = \Delta \cdot |W|.$
- Apliquemos esta propiedad para diversos  $W$ .
- Si tomamos  $W = X$  tendremos que  $|E_X| = \Delta \cdot |X|.$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$
- Con un razonamiento similar, tenemos que si  $W \subseteq Y$  entonces también vale que  $|E_W| = \Delta \cdot |W|.$
- Apliquemos esta propiedad para diversos  $W$ .
- Si tomamos  $W = X$  tendremos que  $|E_X| = \Delta \cdot |X|.$
- Pero  $G$  es bipartito, así que  $E_X = \{xy \in E : x \in X\} = E$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Entonces  $|E_W| = \sum_{w \in W} |\{z : zw \in E\}| = \sum_{w \in W} d(w)$
- Como  $G$  es regular,  $d(w) = \Delta$  para todo  $w$ , así que tenemos:
- $|E_W| = \sum_{w \in W} d(w) = \sum_{w \in W} \Delta = \Delta \cdot |W|.$
- Con un razonamiento similar, tenemos que si  $W \subseteq Y$  entonces también vale que  $|E_W| = \Delta \cdot |W|.$
- Apliquemos esta propiedad para diversos  $W$ .
- Si tomamos  $W = X$  tendremos que  $|E_X| = \Delta \cdot |X|.$
- Pero  $G$  es bipartito, así que  $E_X = \{xy \in E : x \in X\} = E$
- Concluimos que  $|E| = \Delta \cdot |X|.$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

■ Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Entonces  $|E|$  es igual a  $\Delta \cdot |X|$  y a  $\Delta \cdot |Y|$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Entonces  $|E|$  es igual a  $\Delta \cdot |X|$  y a  $\Delta \cdot |Y|$ .
- Por lo tanto  $\Delta \cdot |X| = \Delta \cdot |Y|$  así que  $|X| = |Y|$ .



# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Entonces  $|E|$  es igual a  $\Delta \cdot |X|$  y a  $\Delta \cdot |Y|$ .
- Por lo tanto  $\Delta \cdot |X| = \Delta \cdot |Y|$  así que  $|X| = |Y|$ .
- (observar que estamos usando  $\Delta \neq 0$ . Esto es así porque la definición de “bipartito” que dimos el primer día de clase era que  $\chi(G) = 2$ , así que esto implica que hay al menos un lado y  $\Delta \neq 0$ )

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Entonces  $|E|$  es igual a  $\Delta \cdot |X|$  y a  $\Delta \cdot |Y|$ .
- Por lo tanto  $\Delta \cdot |X| = \Delta \cdot |Y|$  así que  $|X| = |Y|$ .
- (observar que estamos usando  $\Delta \neq 0$ . Esto es así porque la definición de "bipartito" que dimos el primer día de clase era que  $\chi(G) = 2$ , así que esto implica que hay al menos un lado y  $\Delta \neq 0$ )
- Entonces, como  $|X| = |Y|$ , para probar que existe un matching perfecto basta probar que existe un matching completo sobre  $X$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

## Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Tomando  $W = Y$  concluimos  $|E_Y| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Pero  $E_Y = E$  así que tenemos que  $|E| = \Delta \cdot |Y|$ .
- Entonces  $|E|$  es igual a  $\Delta \cdot |X|$  y a  $\Delta \cdot |Y|$ .
- Por lo tanto  $\Delta \cdot |X| = \Delta \cdot |Y|$  así que  $|X| = |Y|$ .
- (observar que estamos usando  $\Delta \neq 0$ . Esto es así porque la definición de "bipartito" que dimos el primer día de clase era que  $\chi(G) = 2$ , así que esto implica que hay al menos un lado y  $\Delta \neq 0$ )
- Entonces, como  $|X| = |Y|$ , para probar que existe un matching perfecto basta probar que existe un matching completo sobre  $X$ .
- Para probar esto, usaremos el teorema de Hall.

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

**Teorema del  
Matrimonio de König**

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

■ Sea entonces  $S \subseteq X$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .
- Entonces existe  $x \in S, y \in Y$  tal que  $\ell$  es de la forma  $\ell = xy$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .
- Entonces existe  $x \in S, y \in Y$  tal que  $\ell$  es de la forma  $\ell = xy$ .
- Por lo tanto  $y \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(S)$  (pues  $x \in S$ ).

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .
- Entonces existe  $x \in S, y \in Y$  tal que  $\ell$  es de la forma  $\ell = xy$ .
- Por lo tanto  $y \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(S)$  (pues  $x \in S$ ).
- Entonces  $\ell$  es de la forma  $xy$  con  $y \in \Gamma(S)$ , lo cual implica que  $\ell \in E_{\Gamma(S)}$ .



# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .
- Entonces existe  $x \in S, y \in Y$  tal que  $\ell$  es de la forma  $\ell = xy$ .
- Por lo tanto  $y \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(S)$  (pues  $x \in S$ ).
- Entonces  $\ell$  es de la forma  $xy$  con  $y \in \Gamma(S)$ , lo cual implica que  $\ell \in E_{\Gamma(S)}$ .
- Como  $\ell$  era cualquier elemento de  $E_S$  esto dice que  $E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Sea entonces  $S \subseteq X$ .
- Sea  $\ell \in E_S$ .
- Entonces existe  $x \in S, y \in Y$  tal que  $\ell$  es de la forma  $\ell = xy$ .
- Por lo tanto  $y \in \Gamma(x) \subseteq \Gamma(S)$  (pues  $x \in S$ ).
- Entonces  $\ell$  es de la forma  $xy$  con  $y \in \Gamma(S)$ , lo cual implica que  $\ell \in E_{\Gamma(S)}$ .
- Como  $\ell$  era cualquier elemento de  $E_S$  esto dice que  $E_S \subseteq E_{\Gamma(S)}$ .
- Por lo tanto  $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como  $S \subseteq X$ , entonces lo que probamos al principio de la prueba dice que  $|E_S| = \Delta \cdot |S|$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como  $S \subseteq X$ , entonces lo que probamos al principio de la prueba dice que  $|E_S| = \Delta \cdot |S|$ .
- Como  $\Gamma(S) \subseteq Y$ , entonces  $|E_{\Gamma(S)}| = \Delta \cdot |\Gamma(S)|$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Como  $S \subseteq X$ , entonces lo que probamos al principio de la prueba dice que  $|E_S| = \Delta \cdot |S|$ .
- Como  $\Gamma(S) \subseteq Y$ , entonces  $|E_{\Gamma(S)}| = \Delta \cdot |\Gamma(S)|$ .
- Como en la pagina anterior probamos que  $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$ , concluimos que  $\Delta \cdot |S| \leq \Delta \cdot |\Gamma(S)|$ .

# Prueba del Teorema del matrimonio

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud

Teorema de Hall

#### Teorema del Matrimonio de König

Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Como  $S \subseteq X$ , entonces lo que probamos al principio de la prueba dice que  $|E_S| = \Delta \cdot |S|$ .
- Como  $\Gamma(S) \subseteq Y$ , entonces  $|E_{\Gamma(S)}| = \Delta \cdot |\Gamma(S)|$ .
- Como en la pagina anterior probamos que  $|E_S| \leq |E_{\Gamma(S)}|$ , concluimos que  $\Delta \cdot |S| \leq \Delta \cdot |\Gamma(S)|$ .
- Por lo tanto  $|S| \leq |\Gamma(S)|$  y como esto vale para cualquier  $S \subseteq X$ , Hall nos dice que existe un matching completo sobre  $X$  lo cual completa la prueba.

# Mas sobre König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

- König fue un “peso pesado” en teoría de grafos.

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

**Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos**

# Mas sobre König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- König fue un “peso pesado” en teoría de grafos.
- Publicó el primer libro de texto sobre teoría de grafos y tiene varios teoremas en el area.



# Mas sobre König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- König fue un “peso pesado” en teoría de grafos.
- Publicó el primer libro de texto sobre teoría de grafos y tiene varios teoremas en el area.
- Uno de sus teoremas dice que el número de lados de un matching maximal es igual al número de vértices de una cobertura minimal de vértices. (i.e., un conjunto de vértices tal que todo lado tiene a uno de esos vértices como extremo).

# Mas sobre König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

### Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

#### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

### Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- König fue un “peso pesado” en teoría de grafos.
- Publicó el primer libro de texto sobre teoría de grafos y tiene varios teoremas en el area.
- Uno de sus teoremas dice que el número de lados de un matching maximal es igual al número de vértices de una cobertura minimal de vértices. (i.e., un conjunto de vértices tal que todo lado tiene a uno de esos vértices como extremo).
- Este teorema es equivalente al teorema de Hall.

# Mas sobre König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- König fue un “peso pesado” en teoría de grafos.
- Publicó el primer libro de texto sobre teoría de grafos y tiene varios teoremas en el area.
- Uno de sus teoremas dice que el número de lados de un matching maximal es igual al número de vértices de una cobertura minimal de vértices. (i.e., un conjunto de vértices tal que todo lado tiene a uno de esos vértices como extremo).
- Este teorema es equivalente al teorema de Hall.
- En octubre de 1944, durante el exterminio del 75% de los judíos de Hungría, König, que era judío, se suicidó para evitar caer en las garras de los nazis.

# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

**Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos**

- En honor de König, probaremos otro teorema también de él.

# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En honor de König, probaremos otro teorema también de él.
- Este teorema se puede probar de varias formas pero la más fácil es usar el teorema del matrimonio.

# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En honor de König, probaremos otro teorema tambien de el.
- Este teorema se puede probar de varias formas pero la mas fácil es usar el teorema del matrimonio.
- Y encaja bastante bien con otros temas del curso.

# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En honor de König, probaremos otro teorema tambien de el.
- Este teorema se puede probar de varias formas pero la mas fácil es usar el teorema del matrimonio.
- Y encaja bastante bien con otros temas del curso.
- Hemos visto coloreo de vértices de un grafo, pero los **lados** tambien se pueden colorear.

# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En honor de König, probaremos otro teorema tambien de el.
- Este teorema se puede probar de varias formas pero la mas fácil es usar el teorema del matrimonio.
- Y encaja bastante bien con otros temas del curso.
- Hemos visto coloreo de vértices de un grafo, pero los **lados** tambien se pueden colorear.
- Un coloreo propio de los lados de un grafo es un coloreo de los lados tal que dos lados que tengan un extremo en común tengan colores distintos.



# Otro teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- En honor de König, probaremos otro teorema también de él.
- Este teorema se puede probar de varias formas pero la más fácil es usar el teorema del matrimonio.
- Y encaja bastante bien con otros temas del curso.
- Hemos visto coloreo de vértices de un grafo, pero los **lados** también se pueden colorear.
- Un coloreo propio de los lados de un grafo es un coloreo de los lados tal que dos lados que tengan un extremo en común tengan colores distintos.
- El **índice** cromático de un grafo es la menor cantidad de colores de un coloreo propio de los lados y se denota por  $\chi'(G)$ .

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

■ Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .

## Matchings

Definición y  
problema

Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

**Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos**

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.
- Vizing probó en 1964 que una cota superior es....

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.
- Vizing probó en 1964 que una cota superior es....
- $\Delta + 1$  (!!!!)

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.
- Vizing probó en 1964 que una cota superior es....
- $\Delta + 1$  (!!!!)
- Es decir  $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$  para todo grafo  $G$ , así que sólo hay dos opciones.

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.
- Vizing probó en 1964 que una cota superior es....
- $\Delta + 1$  (!!!!)
- Es decir  $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$  para todo grafo  $G$ , así que sólo hay dos opciones.
- Pero determinar en general si  $\chi'(G)$  es  $\Delta$  o  $\Delta + 1$  es NP-completo!

# Coloreos de lados

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Una cota inferior obvia es  $\Delta \leq \chi'(G)$ .
- Pues si  $d(x) = \Delta$ , entonces existen  $\Delta$  lados con extremo  $x$ , todos los cuales deben llevar colores distintos.
- Vizing probó en 1964 que una cota superior es....
- $\Delta + 1$  (!!!!)
- Es decir  $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$  para todo grafo  $G$ , así que sólo hay dos opciones.
- Pero determinar en general si  $\chi'(G)$  es  $\Delta$  o  $\Delta + 1$  es NP-completo!
- Para algunos grafos sin embargo, se puede determinar a que categoría pertenecen fácilmente



# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (König)

Si  $G$  es bipartito, entonces  $\chi'(G) = \Delta$

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (König)

Si  $G$  es bipartito, entonces  $\chi'(G) = \Delta$

■ Prueba.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (König)

Si  $G$  es bipartito, entonces  $\chi'(G) = \Delta$

- Prueba.
- Supongamos primero que  $G$  es regular y probemoslo por inducción en  $\Delta$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (König)

Si  $G$  es bipartito, entonces  $\chi'(G) = \Delta$

- Prueba.
- Supongamos primero que  $G$  es regular y probemoslo por inducción en  $\Delta$ .
- Si  $\Delta = 1$ , entonces  $G$  es una colección de lados disjuntos, y podemos colorearlos a todos con el color 1.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

## Teorema (König)

Si  $G$  es bipartito, entonces  $\chi'(G) = \Delta$

- Prueba.
- Supongamos primero que  $G$  es regular y probemoslo por inducción en  $\Delta$ .
- Si  $\Delta = 1$ , entonces  $G$  es una colección de lados disjuntos, y podemos colorearlos a todos con el color 1.
- Supongamos ahora que  $\Delta(G) > 1$  y que el teorema vale para grafos bipartitos regulares con grado máximo  $\Delta(G) - 1$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König  
Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Usando el teorema del matrimonio, tenemos un matching perfecto, pues  $G$  es bipartito regular.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Usando el teorema del matrimonio, tenemos un matching perfecto, pues  $G$  es bipartito regular.
- Sean  $E_1$  los lados de ese matching, y borremoslos de  $G$ , obteniendo un grafo  $G^*$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Usando el teorema del matrimonio, tenemos un matching perfecto, pues  $G$  es bipartito regular.
- Sean  $E_1$  los lados de ese matching, y borremoslos de  $G$ , obteniendo un grafo  $G^*$ .
- Como son lados de un matching, el grado de cada vértice de  $G$  disminuye en 1.



# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Usando el teorema del matrimonio, tenemos un matching perfecto, pues  $G$  es bipartito regular.
- Sean  $E_1$  los lados de ese matching, y borremoslos de  $G$ , obteniendo un grafo  $G^*$ .
- Como son lados de un matching, el grado de cada vértice de  $G$  disminuye en 1.
- Así,  $G^*$  también es regular y  $\Delta(G^*) = \Delta(G) - 1$  y por hipótesis inductiva, sus lados se pueden colorear con  $\Delta(G^*)$  colores.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Usando el teorema del matrimonio, tenemos un matching perfecto, pues  $G$  es bipartito regular.
- Sean  $E_1$  los lados de ese matching, y borremoslos de  $G$ , obteniendo un grafo  $G^*$ .
- Como son lados de un matching, el grado de cada vértice de  $G$  disminuye en 1.
- Así,  $G^*$  también es regular y  $\Delta(G^*) = \Delta(G) - 1$  y por hipótesis inductiva, sus lados se pueden colorear con  $\Delta(G^*)$  colores.
- Dándole a los lados de  $E_1$  un color distinto de esos  $\Delta(G^*)$  colores, tenemos coloreados todos los lados de  $G$  con  $\Delta(G^*) + 1 = \Delta(G)$  colores, lo cual prueba el paso inductivo.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H)$

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Complejidad

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H)$   
pues  $G \subseteq H$

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H)$   
pues  $H$  es bipartito regular y ya probamos el teorema para bipartitos regulares

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G)$

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G)$
- Lo que quedaria es probar la existencia de  $H$ .



# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G)$
- Lo que quedaria es probar la existencia de  $H$ .
- La idea es ir construyendo grafos cada vez mas grandes tal que el  $\delta$  crezca pero el  $\Delta$  se mantenga igual, terminando eventualmente con un grafo con  $\delta = \Delta$ , es decir, regular.

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Para finalizar la prueba en el caso general, se puede probar que todo grafo bipartito  $G$  puede incluirse en un grafo bipartito  $H$  **regular** tal que  $\Delta(G) = \Delta(H)$ .
- Entonces  $\chi'(G) \leq \chi'(H) = \Delta(H) = \Delta(G)$
- Lo que quedaria es probar la existencia de  $H$ .
- La idea es ir construyendo grafos cada vez mas grandes tal que el  $\delta$  crezca pero el  $\Delta$  se mantenga igual, terminando eventualmente con un grafo con  $\delta = \Delta$ , es decir, regular.
- Asi que basta probar que existe  $\tilde{G}$  con  $G \subseteq \tilde{G}$  tal que  $\tilde{G}$  es bipartito con  $\Delta(\tilde{G}) = \Delta(G)$  y  $\delta(\tilde{G}) = \delta(G) + 1$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud  
Teorema de Hall  
Teorema del  
Matrimonio de König

**Teorema de König**  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes de  $G$ , definimos  $X^*$ ,  $Y^*$  copias de  $X, Y$  respectivamente. (pej, podríamos definir para cada  $x$  de  $X$  un elemento  $x^* = (x, 1)$ , y similar para  $y$  pero la forma exacta de definir  $x^*$  es irrelevante)

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes de  $G$ , definimos  $X^*$ ,  $Y^*$  copias de  $X, Y$  respectivamente. (pej, podríamos definir para cada  $x$  de  $X$  un elemento  $x^* = (x, 1)$ , y similar para  $y$  pero la forma exacta de definir  $x^*$  es irrelevante)
- Tomamos  $\tilde{X} = X \cup Y^*$ ,  $\tilde{Y} = Y \cup X^*$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes de  $G$ , definimos  $X^*$ ,  $Y^*$  copias de  $X, Y$  respectivamente. (pej, podríamos definir para cada  $x$  de  $X$  un elemento  $x^* = (x, 1)$ , y similar para  $y$  pero la forma exacta de definir  $x^*$  es irrelevante)
- Tomamos  $\tilde{X} = X \cup Y^*$ ,  $\tilde{Y} = Y \cup X^*$ .
- Sea  $\Delta = \Delta(G)$  y:

$$\begin{aligned}\tilde{E} = & E \cup \{x^*y^* : xy \in E\} \cup \{xx^* : d(x) < \Delta\} \cup \\ & \cup \{yy^* : d(y) < \Delta\}\end{aligned}$$

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

## Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Si  $X$  e  $Y$  son las partes de  $G$ , definimos  $X^*$ ,  $Y^*$  copias de  $X, Y$  respectivamente. (pej, podríamos definir para cada  $x$  de  $X$  un elemento  $x^* = (x, 1)$ , y similar para  $y$  pero la forma exacta de definir  $x^*$  es irrelevante)
- Tomamos  $\tilde{X} = X \cup Y^*$ ,  $\tilde{Y} = Y \cup X^*$ .
- Sea  $\Delta = \Delta(G)$  y:

$$\begin{aligned}\tilde{E} = E \cup \{x^*y^* : xy \in E\} \cup \{xx^* : d(x) < \Delta\} \cup \\ \cup \{yy^* : d(y) < \Delta\}\end{aligned}$$

- Queda claro que  $\tilde{G}$  es bipartito con partes  $\tilde{X}, \tilde{Y}$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y  
problema  
Reducción del  
problema de  
encontrar matching  
maximales a flujos

### Ejemplo

Rehaciendo el  
ejemplo con  
matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y  
Compleitud

Teorema de Hall

Teorema del  
Matrimonio de König

Teorema de König  
sobre coloreo lateral  
de grafos bipartitos

- Además, el grado de cualquier vértice  $z$  con  $d(z) = \Delta$  no cambia, y el grado del  $z^*$  correspondiente también es  $\Delta$ .

# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo  
Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Además, el grado de cualquier vértice  $z$  con  $d(z) = \Delta$  no cambia, y el grado del  $z^*$  correspondiente también es  $\Delta$ .
- Mientras que para todos los otros vértices, el grado sube exactamente en uno, pues existe un lado extra  $zz^*$ .



# Teorema de König

## Matchings

Daniel  
Penazzi

## Matchings

Definición y problema  
Reducción del problema de encontrar matching maximales a flujos  
Ejemplo

Rehaciendo el ejemplo con matrices

## Teoremas de Hall y König

Perfección y Completitud  
Teorema de Hall  
Teorema del Matrimonio de König  
Teorema de König sobre coloreo lateral de grafos bipartitos

- Además, el grado de cualquier vértice  $z$  con  $d(z) = \Delta$  no cambia, y el grado del  $z^*$  correspondiente también es  $\Delta$ .
- Mientras que para todos los otros vértices, el grado sube exactamente en uno, pues existe un lado extra  $zz^*$ .
- Fin.