

## Tentamen i modern fysik (SH1011)

(Korrigerad med rättelser som skrevs upp på tavlan under skrivtiden.)

Måndag 25 oktober 2021, kl 08.00 - 13.00

Examinator: Mats Persson, Tel. 0762742376

För uppgift 1 är inga hjälpmedel tillåtna. För övriga uppgifter är det tillåtet att använda tabellblad som utdelas vid tentamen, Beta formelsamling, fickkalkylator samt ordbok. Skriv namn och nummer på alla sidor. Redogör utförligt för antaganden och beräkningar. Rita gärna figurer. 20 poäng ger med säkerhet godkänt (E). Tillgodoräknade poäng (max 5 p) från kontrollskrivningar och hemuppgifter kommer att adderas till resultatet från övriga uppgifter.

Lycka Till!

*Mats Persson*

---

1. Fyll i formlerna och konstanterna på det tomma formelbladet. (5p)

2. Härled formeln för tidsdilatation. (5p)

**Lösning:** Se Boken.

3. Comptonspridning

- (a) Du håller på att konstruera en datortomografmaskin med dubbla röntgenkällor och dubbla detektorer som röntgar patienten från olika riktningar och du är orolig för att en foton skall kunna comptonspridas mot en fri elektron i kroppen och byta riktning  $90^\circ$ . Detta skulle nämligen kunna medföra att den registreras av fel detektor. Hur många procent av sin energi förlorar en sådan foton vid comptonspridningen? Antag en ursprunglig fotonenergi som är rimlig vid datortomografi. (2p)
- (b) Det är inte bara elektroner som kan comptonsprida fotoner. Om fotoner med energin 800 keV comptonsprids mot protoner i stället, hur många procent av sin energi förlorar de fotoner som sprids i rät vinkel ( $90^\circ$ ) mot fotonernas ursprungliga riktning? (2p)
- (c) Kan parbildning inträffa i stället för comptonspridning när fotonerna i (b) kommer nära protonen? Motivera svaret! (1p)

**Lösning:**

(a)  $\theta = 90^\circ$  ger

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) = \frac{h}{mc} \quad (1)$$

$$\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \frac{h}{mc} \quad (2)$$

$$E' = \frac{E}{1 + E/mc^2} \quad (3)$$

$$\frac{E - E'}{E} = \frac{E}{mc^2 + E} \quad (4)$$

$m$  är här elektronmassan. Vanligt använda energier i datortomografi är ca 20-150 keV.  $E = 70$  keV ger  $\frac{E-E'}{E} = \underline{12\%}$ .

- (b)  $\frac{E-E'}{E} = \frac{E}{m_p c^2 + E} = 0,085\%$
- (c) Nej, för parbildning krävs en högre fotonenergi:  $2m_e c^2 = 1022 \text{ keV}$ .
4. En väteatom i 1s-tillståndet har vågfunktionen  $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$  där  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  och  $a_0 = 0,0529 \text{ nm}$  är bohrradien.
- (a) Använd ovanstående information för att (grovt) uppskatta osäkerheten i elektronens hastighet. (2p)
- (b) Beräkna förhållandet mellan sannolikhetstätheterna för att påträffa elektronen i punkterna  $(x, y, z) = (a_0, 0, 0)$  och  $(x, y, z) = (2a_0, 0, 0)$ . Indikera vilken av sannolikheterna som är störst (2p).
- (c) Hur stort är banrörelsemängdsmomentet ("orbital angular momentum") för elektronen i detta tillstånd? (1p)

**Lösning:**

- (a) Obestämthetsrelationen ger  $\Delta v = \Delta p/m \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ .
- (b)  $\psi(r = a_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0}} e^{-1}$  och  $\psi(r = 2a_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0}} e^{-2}$  ger
- $$\frac{|\psi(r = 2a_0)|^2}{|\psi(r = a_0)|^2} = \frac{e^{-4}}{e^{-2}} = e^{-2} \approx 0,135. \quad (5)$$
- Sannolikheten att hitta elektronen i  $(2a_0, 0, 0)$  är alltså mindre, närmare bestämt 13,5% av sannolikheten att hitta den i  $(a_0, 0, 0)$ .
- (c) I 1s-tillståndet är bankvanttalet  $l = 0$  så  $L = l(l+1)\hbar = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .
5. Doktor Ond tänker konstruera en dödsstråle med hjälp av en laserpekare och en ljusförstärkare. Ljusförstärkaren består av en genomskinlig behållare som innehåller argonjoner ( $\text{Ar}^+$ ) i ett exciterat tillstånd. Tanken är att använda stimulerad emission för att förstärka ljuset från laserpekaren.
- (a) Förklara hur stimulerad emission fungerar. (1p)
- (b) Ljusförstärkaren bygger på en övergång mellan två exciterade energinivåer i en  $\text{Ar}^+$ -jon. Vid denna övergång utsänds en foton med våglängden 488,122622 nm. Beräkna energiskillnaden mellan de två nivåerna. (1p)
- (c) Doktorn upptäcker att laserpekaren har våglängden 488,122000 nm vilket inte riktigt stämmer överens med våglängden som behövs för att få stimulerad emission från ljusförstärkaren, vilket gör honom förtvivlad ända tills hans dotter Evilia föreslår att de skall montera laserpekaren på ett flygplan och utnyttja dopplereffekten för att få våglängden att stämma. Med vilken hastighet skall flygplanet med laserpekaren röra sig relativt ljusförstärkaren för att stimulerad emission skall kunna ske? Ange också om flygplanet skall flyga mot eller bort från ljusförstärkaren. (3p)

**Lösning:**

- (a) Se boken.
- (b)  $\Delta E = hc/\lambda = 2,54 \text{ eV}$ .

- (c) Frekvensen för det dopplerskiftade ljuset är  $f = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} f_0$  där  $f_0$  är frekvensen i laserns vilosystem och  $u$  är flygplanets hastighet i riktning mot ljusförstärkaren. Lite algebra ger  $u = c \frac{(f/f_0)^2 - 1}{(f/f_0)^2 + 1} = c \frac{(\lambda_0/\lambda)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda)^2 + 1} = -382 \text{ m/s}$ . Planet skall alltså flyga 382 m/s i riktning bort från förstärkaren.  
 Kommentar: I verkligheten brukar argonjonlasrar arbeta vid höga temperaturer vilket gör att jonerna rör sig med så höga hastigheter att deras dopplerförskjutning ger en breddning av spektrallinjen som är större än skillnaden mellan laserpekarens och argonjonernas våglängd. Så doktor Ond behöver inte vara orolig. (Men det kanske resten av mänskligheten behöver vara?)
6. Galliumarsenid (GaAs) är en halvledare som har ett bandgap på 1,42 eV och som används i solceller.
- (a) Vilken är våglängden hos en foton som kan excitera en elektron från toppen av valensbandet till botten av ledningsbandet i GaAs? (2p)
  - (b) Vilken temperatur skall en svart kropp ha för att sända ut strålning med sitt intensitetsmaximum lika med våglängden i (a)? Har du inte löst (a) får du anta ett rimligt värde. (1p)
  - (c) Vilka våglängder kan GaAs absorbera? Längre eller kortare än i (a)? Eller endast exakt samma som i (a)? Motivera svaret. (1p)
  - (d) Använd svaren i (a-c) för att förklara varför GaAs är lämpligt som material i solceller. Solens yttemperatur är 5780 K. (1p)

#### Lösning:

- (a) Bandgapet är energiskillnaden mellan toppen av valensbandet och botten av ledningsbandet.  $\Delta E = hc/\lambda = 873 \text{ nm}$
  - (b) Wiens förskjutningslag ger  $T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{\lambda} = 3320 \text{ K}$
  - (c) Elektroner kan exciteras från en energinivå i valensbandet till en energinivå i ledningsbandet. Bandgapet är alltså den minsta energi som behövs för att excitera en elektron, vilket innebär att GaAs kan absorbera våglängder  $\lambda \leq 873 \text{ nm}$ .
  - (d) Solens temperatur är högre än 3320 K vilket innebär att solljus har sitt våglängdsmaximum vid kortare våglängd än 873 nm. (Närmare bestämt omkring 500 nm.) Detta innebär att GaAs har hög absorptionsförmåga för våglängder kortare än 873 nm vilket stämmer bra med de våglängder där solljuset har störst intensitet.
7. Bor-12 ( $^{12}_5\text{B}$ )  $\beta^-$ -sönderfaller till kol (C) med en halveringstid på 20,20 ms. Den nuklid som då bildas är stabil.
- (a) Skriv upp sönderfallsformeln och var noga med att skriva upp alla produkter som skapas. Ange masstal och atomnummer på den nuklid som skapas. (1 p)
  - (b) Den totala kinetiska energin hos alla partiklar som skapas vid  $\beta^-$ -sönderfallet är 13,369 MeV. För stabila kolisotoper är det en bra approximation att anta att en nuklid med masstal A har massan A u. Beräkna nuklidmassan (d.v.s. massan för en neutral atom) för  $^{12}_5\text{B}$ . Ange svaret i u med tre decimalers noggrannhet.  $1 \text{ u} = 1,660539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  (2p)

- (c) Antag att  $10^{11}$   $^{12}_5\text{B}$ -atomer bildas inne kroppen som en biprodukt under en strålterapi behandling av en vuxen patient. Antag att boratomena är jämnt utspridda i kroppen och beräkna bor-12-atomernas bidrag till dosen som patienten får (d.v.s. du behöver inte fundera över dosen från den process som skapade boratomerna). Du kan behöva göra något rimligt antagande om patienten. (2 p)

**Lösning:**

- (a)  $^{12}_5\text{B} \rightarrow ^{12}_6\text{C} + e^- + \bar{\nu}_e$  (Observera att den kolatom som bildas är en plusladdad jon så man kan skriva  $^{12}_6\text{C}^+$  om man vill men när man skriver formler för kärnreaktionerna låter man ofta bli att skriva ut nuklidens totala laddning, d.v.s. låter beteckningen  $^{12}_6\text{C}$  syfta på själva atomkärnan).
- (b) Eftersom masstalet för kolnukliden som bildas är 12 så kan vi anta att  $m_{^{12}_6\text{C}} = 12,000$  u. Elektronens massa är här inräknad i nuklidmassan  $m_{^{12}_6\text{C}}$ .  $m_{^{12}_5\text{B}} = m_{^{12}_6\text{C}} + 13,369 \text{ MeV}/c^2 = 12,000 \text{ u} + 0,014 \text{ u} = 12,014 \text{ u}$ . Kommentar: I själva verket är  $m_{^{12}_6\text{C}} = 12$  u inte en approximation utan gäller exakt enligt definitionen av enheten u.
- (c) Antag att patienten har massan  $m = 70$  kg och att all kinetisk energi som frigörs absorberas i kroppen. Den absorberade dosen är  $D = 10^{11} \cdot 13,369 \text{ MeV}/70 \text{ kg} = 3,1 \text{ mGy}$ . Kommentar: I verkligheten kommer en betydande del av energin att gå till neutronernas rörelseenergi, och dessa lämnar med största sannolikhet kroppen utan att interagera. En tumregel är att ca 1/3 av den frigjorda energin bidrar till absorberad dos, vilket ger en dos på ca 1 mGy (Men det behöver man inte ta hänsyn till för att få full poäng på uppgiften.)
8.  $\Delta^0$ -baryonen är en partikel som liknar neutronen men vars kvarkar har ett annat spinttillstånd. Den har en genomsnittlig livstid på  $5,6 \cdot 10^{-24}$  s. Dess genomsnittliga massa är  $1232 \text{ MeV}/c^2$ .
- (a) Uppskatta den minsta möjliga osäkerheten med vilken man kan mäta en  $\Delta^0$ -baryons massa. (1p)
- (b) En  $\Delta^0$ -baryon kan sönderfalla på mer än ett sätt och ett av sätten är att den blir till en neutron varvid en foton sänds ut. Använd rörelsemängdens och energins bevarande för att beräkna neutronens hastighet (riktning och belopp) efter sönderfallet om  $\Delta^0$ -baryonen från början var i vila. Svara som andel av ljusets fart  $c$ . (4p)

**Lösning:**

- (a) Livstiden är  $\tau = 5,6 \cdot 10^{-24}$  s. Obestämthetsrelationen ger osäkerheten (standardavvikelsen) för massan  $\Delta m = \Delta E/c^2 \geq \frac{\hbar}{2c^2\tau} = 59 \text{ MeV}/c^2$
- (b) Låt neutronen ha hastigheten  $v$  i positiv x-led efter sönderfallet. Fotonen rör sig då i negativ x-led. Låt vidare  $E_{\text{foton}}$  vara fotonens energi och låt  $m_n$  vara neutronens och  $m_{\Delta^0}$   $\Delta^0$ -baryonens massa. Energin bevaras:  
 $E_{\text{foton}} + \gamma m_n c^2 = m_{\Delta^0} c^2$   
Rörelsemängd i x-led bevaras:  $-E_{\text{foton}}/c + \gamma m_n c^2 = 0$   
Tillsammans ger dessa ekvationer att  $\gamma m_n v c + \gamma m_n c^2 = m_{\Delta^0} c^2$  Lite räkningar ger

$$\frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_{\Delta^0}}{m_n} \quad (6)$$

vilket kan skrivas som (konjugatregeln!)

$$\frac{1 + v/c}{1 - v/c} = \left( \frac{m_{\Delta^0}}{m_n} \right)^2 \quad (7)$$

och efter lite mer räkningar ger

$$\frac{v}{c} = \frac{\left( \frac{m_{\Delta^0}}{m_n} \right)^2 - 1}{\left( \frac{m_{\Delta^0}}{m_n} \right)^2 + 1} = 0,265 \quad (8)$$

Hastigheten blir alltså 26,5 % av ljusfarten.