

八 (10 分) 设  $G_1, \dots, G_k$  为有限群  $G$  的子群且  $\bigcup_{i=1}^k G_i = G$ . 证明  $p$  为  $|G|$  的素因子时有  $1 \leq i \leq k$  使得  $p$  整除  $|G_i|$ .

$p \neq |G|$  是素数. 故  $\exists a \in G$  s.t.  $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p$

$$|\langle a \rangle| = p$$

$$\exists i=1, \dots, k \text{ s.t. } \langle a \rangle \leq G_i$$

$$\therefore |\langle a \rangle| \mid |G_i|$$

$$\text{即 } p \mid |G_i|$$

$p$  阶循环群  $\langle a \rangle$  <sup>基</sup>  $a \in G_i$   $\langle a \rangle \leq G_i$   $p = |\langle a \rangle| \mid |G_i|$