系别：________ 姓名：________ 学号：________ 任课教师：________

密封线内不要答题

南京大学数学课程试卷

2017-2018 学年度第 二 学期 考试形式： 开卷 课程名称： 数值计算与试验 I

考试时间： 2018 年 7 月 3 日 考试成绩：____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空与简述题（每题 6 分，计 30 分）

1. 设 $f(x)=2^x$, 步长 $h=1$，则 $\Delta^4 f(n)=$ <u>16</u> 。

2. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个相异的插值节点，$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 为 Lagrange 基本多项式，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=$ <u>1</u> 。

3. 假设函数 $f(x)\in C^6[a,b]$, 且 $x_i=a+(i-1)h, h=(b-a)/n, i=1,2,\cdots,n+1, f'(a)=f'(b)$。则利用复化梯形公式计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差余项为 $O(h^\eta)$，其中 $\eta=$ <u>4</u> 。

4. 区间 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上是具有直到 <u>2</u> 阶导数的连续函数。

5. $P_0(x)=1, P_1(x)=x$, 则关于权函数 $W(x)=1$ 的首一正交多项式 $P_2(x)=$ <u>$x^2-\frac{1}{3}$</u> 。

二、求解题（每题 10 分，共 40 分）

（1）已知函数列表

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	-5	-6	3

用差商法求满足上述插值条件的 Newton 插值多项式（要求写出差商表）.

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-1	0			
0	-5	-5		
1	-6	-1	2	
2	3	9	5	1

所求 Newton 插值多项式为

$$p_3(x)=0-5(x+1)+2x(x+1)+(x+1)x(x-1)=-5-4x+2x^2+x^3$$

（2）求 x_1 和 c_0, c_1，使下列求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx c_0 f(0)+c_1 f(x_1)$$

具有尽可能高的代数精度，并指出其代数精度。

解： 对 $f(x)=1,x,x^2$, 令 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=c_0f(0)+c_1f(x_1)$ 得，

$$\begin{cases} c_0+c_1=1, \\ c_1x_1=1/2, \\ c_1x_1^2=1/3. \end{cases} \quad \text{解得} \quad c_0=1/4, c_1=3/4, x_1=2/3,$$

因 $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\neq\frac{2}{9}=c_0\cdot 0^3+c_1\cdot x^3$，所以求积公式具有二次代数精度。

（3）求次数小于 3 的多项式 $P(x)$，使其满足条件：

$$P(0)=0, P'(0)=1, P(1)=1, P'(1)=2.$$

解： $x_0=0, x_1=1$，则 $f(x_0)=0, f(x_1)=1, f'(x_0)=1, f'(x_1)=2$, 由两点埃尔米特插值公式

$$P(x)=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)$$

其中 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x)$, 是埃尔米特插值基函数，即

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(3-2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(x-1)$$

因此，

$$P(x)=x^2(3-2x)+x(x-1)^2+2x^2(x-1)=x^3-x^2+x$$

（4）判断能否使用有限个节点数值积分方法计算得到$\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\mathrm{d}x$的精确解，并给出理由或者计算过程。

解：令$x=\frac{y+3}{2}$，将积分区间变换到$[-1,1]$，$\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{y^3+y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$

令权函数$w(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，则$f(y)=y^3+y^2$为三次函数，因此本题只需取二次 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点进行 Gauss 积分即可得到精确解。

由 Chebyshev 多项式零点公式：$y_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)},k=0,1,\cdots$

得$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2},y_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\approx A_0 f(\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1 f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$A_0=A_1=\frac{\pi}{2}$

则$\int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy\approx\frac{\pi}{2}\left[f(\frac{\sqrt{2}}{2})+f(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$

因此原积分=$\frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi}{4}$

三、分析证明题（8+12=20 分）

（1）设$f(x)=\ln(1+x),x\in[0,1],p_n(x)$为$f(x)$以$n+1$个节点$x_i=\frac{i}{n},i=0,1,\cdots,n$为插值节点的$n$次插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)-p_n(x)\right|=0.$$

证明：$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\xi\in(\min\{x,0\},\max\{x,1\})$

$f'(x)=\frac{1}{1+x},f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\cdots,f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

当$x\in[0,1]$时，$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le n!,\left|x-x_i\right|\le 1$，因此$\left|f(x)-p_n(x)\right|\le\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)-p_n(x)\right|\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

（2）设$f\in C^1[a,b]$，证明左矩形公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi).$

试以此构造一个复合求积公式，并证明该复合求积公式是收敛的。

证明：因为$f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a)$，其中$\eta=\eta(x)$. 故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(\eta)(x-a)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)，\quad 其中\xi\in(a,b)$$

区间分割得$[x_{k-1},x_k],k=1,2,\cdots,n$得复合公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}f'(\zeta_k),\zeta_k\in(x_{k-1},x_k)$$

所以

$$R=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}f'(\zeta_k)=\frac{b-a}{2}hf'(\eta)$$

其中$h=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$

因而有$\lim_{h\to 0}R=0$

四、（本题 10 分）若$f(x)\in C^2[a,b],S(x)$是三次样条函数，$f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$，式中$x_i$为插值节点，且$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,证明：

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]\mathrm{d}x=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)].$$

证明：

左边=

$$\int_a^b S''(x)\mathrm{d}[f'(x)-S'(x)]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S''(x)\mathrm{d}[f'(x)-S'(x)]$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{S''(x)[f'(x)-S'(x)]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f'(x)-S'(x)]\mathrm{d}S''(x)\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}S''(x)[f'(x)-S'(x)]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S'''(x)\mathrm{d}[f(x)-S(x)]$$

$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]-\sum_{i=0}^{n-1}S'''(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})[f(x)-S(x)]\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)]$$

=右边