# NJU 数学分析 B 期末考试

zjc from $TRIVIAL GROUP$

2022.06.13

**一、**(10 **分**) **设** $f(x) \in R\,[a,b]$, **证明** $\exists \xi \in [a,b]$, $s.t.$ $\int_\xi^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$.

**二、**(15 **分**) **求如下积分**

$$I = \int_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

**其中** $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R} \,|\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}$.

**三、**(10 **分**) **设** $\Sigma$ **为立方体** $[0,1]^3$ **的表面外侧，求第二型曲面积分**

$$I = \int_\Sigma \mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

**四、**(15 **分**) **设有定义在** $\mathbb{R}^2$ **上的函数** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

(1)(10 **分**) **判断** $f(x,y)$ **在** $(0,0)$ **处是否可微，证明你的判断**.
(2)(5 **分**) **判断** $f(x,y)$ **在** $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ **处是否可微，证明你的判断**.

**五、**(15 **分**) **设方程** $\mathrm{e}^z + x^2 z - y = 0$ **确定隐函数** $z = z(x,y)$, **求** $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ **在** $(0,1,0)$ **处的取值**.

**六、**(10 **分**) **设** $f(x,y)$ **在** $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **上可微, 且** $f(x,y) \ge x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}$. **求证** $\exists (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $s.t.\, \nabla f(x_0,y_0) = 0$.

**七、**(5 **分**) **设** $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^T A y$, **其中** $A$ **为** $n$ **阶实矩阵，求线性映射** $\nabla F$ **在** $\mathbb{R}^{2n}$ **下的表示矩阵. 注意 : 不是求向量** $\nabla F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

**八、**(15 **分**) **给定** $n \geq 2, p_1, ..., p_n > 0$, **求积分** $I = \displaystyle\int_S \frac{1}{(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k)^n} \, \mathrm{d}^{n-1} vol$, **其中** $S = \{(x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, x_1 + ... + x_n = 1\}$, $\mathrm{d}^{n-1} vol$ **表示曲面** $S$ **上的面积微元**.

**九、**(20 **分**) **设** $\mathbb{V}$ **是** $C[0,1]$ **的有限维子空间，且对任意** $v \in \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, **其值域都包含正数. 证明** $\exists w \in C[0,1]$, **使得** $\inf\limits_{[0,1]} w > 0$ **且** $\int_0^1 vw = 0, \forall v \in \mathbb{V}$.