六. (15 分) 试叙述 Borel-Cantelli 引理.

(i) $\{A_n\}$ 为随机变量序列

若满足 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

则 $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 0$ 或 $P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 1$

(ii) $\{A_n\}$ 为相互独立的随机变量序列. 则.

$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \iff P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) = 1$ 或 $P(\underline{\lim_{n\to\infty}} \overline{A_n}) = 0$

七. (15 分) 设 $\{\xi_n\}$ 为独立随机变量序列. $P(\xi_n = 0) = \frac{1}{2} = P(\xi_n = 1)$, 令 $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{2^i}$. 求证: η_n 依分布收敛于 $(0,1)$ 的均匀分布.

$\xi_1, \ldots \xi_n$ 独立同分布.

5.2.(2)

设 ξ_i $(i=1, \cdots n)$ 的特征函数为 $f(t)$

P131

则 由 $P(\xi_i=0) = \frac{1}{2} = P(\xi_i = 1)$.

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{it}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos t + i\sin t + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2\frac{t}{2} + 2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2})$$

$$= \cos\frac{t}{2} e^{\frac{it}{2}}$$

所以 $f(\frac{t}{2^i}) = \cos\frac{t}{2^{i+1}} e^{\frac{it}{2^{i+1}}}$

$$f(\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i}{2^i}) = \cos\frac{t}{2^2} \cdots \cos\frac{t}{2^{n+1}} e^{it(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}})}$$

$$= \frac{\sin\frac{t}{2}}{2^n \sin\frac{t}{2^{n+1}}} e^{\frac{it}{2}}$$

$F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$.

$$= \frac{2}{t}\sin\frac{t}{2} e^{\frac{it}{2}}$$

$$= \frac{2}{t} \cdot \frac{(e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})e^{\frac{it}{2}}}{2i} = \frac{1}{it}(e^{it}-1)$$