南京大学数学系概率论期试题试卷(2012)

2013/2014 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论

院系______ 班级 一 学号 121110323 姓名 许金华

考试时间 2014/05/05 任课教师 代雄平 刘荣丽

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											100

一. (15分) 陈述概率空间的定义并证明：

15

(1) 如果$\{A_n\}$是单调增序列，则$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$;

(2) 如果$\{B_n\}$是单调减序列，则$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$。

$(\Omega, \mathcal{F})$ 是可测空间，在上面定义一函数 P 满足 1) $P \geq 0$. 2) $P(\Omega)=1$. 3) 对 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥事件成立 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 则称 P 为 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率，称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间。

(1) 令 $C_i = A_i - A_{i-1}$, ($A_0 = \emptyset$), 则$\{C_i\}$为两两互斥的，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

$\therefore P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(C_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(2) $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n)$ 则$\{\bar{B}_n\}$是单调增序列。

由(1)得知，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n) = \lim_{n\to\infty} P(\bar{B}_n)$

$\therefore P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\bar{B}_n) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(\bar{B}_n)) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$

10

二. (10分) Banach的左右口袋中各有一盒火柴。他每次抽烟时从左口袋中掏火柴的概率为3/5。已知每盒有50根火柴。求遇到左边一盒空而右边恰好余10根火柴的概率。

解：由题意得共需摸 $51 + 40 = 91$ 次。

记左边一盒空，右边剩10根的事件A，则服从二项分布。

$$P(A) = C_{90}^{50} \left(\frac{3}{5}\right)^{50} \left(\frac{2}{5}\right)^{40} \cdot \frac{3}{5} = \frac{90!}{50!\,40!} \cdot \frac{3^{51} 2^{40}}{5^{91}}$$

故遇到左边一盒空右边恰好剩10根的概率为 $\frac{90!}{50!\,40!} \cdot \frac{3^{51} 2^{40}}{5^{91}}$.