

数学分析 2021 秋期末试题 (A)

wzt 复述, wlzh 整理, eyl 只会整活不会写

2022.1.5

一. 计算

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})}$$

2.

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx$$

3.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1+x}} \, dx$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2})$$

6. 求

$$\arcsin^{(2021)}(0)$$

二. 综合题

1. 证明: $x \geq \frac{1}{3}, \frac{2}{2x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{3}{3x+1}$

2. $a, b, c > 0, a^a b^b c^c \geq (\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$

3. 求证 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \frac{1}{2}(x + \arcsin x)$ 在 $(-1, 1)$ 存在的最小值并求之

三. 证明题

1. f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续, $f([a, b]) = g([a, b])$, 求证: 存在 $\xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = g(\xi)$

2. f 在 $[a, b]$ 上可导, $|f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|$, 求证:

$$|\int_a^b f(x) \, dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)| \leq \frac{M}{12}(b - a)^3$$

3. f 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x) \, dx = 0$

求证: (1) 存在 $\xi \in [a, b], s.t. f''(\xi) = 0$

(2) 存在 $\zeta \in [a, b], s.t. f(\zeta) = f''(\zeta)$

四. 附加题

设 f 在 \mathbb{R} 上有定义, 如果 $\frac{x^2}{2} - f(x)$ 和 $\frac{x^2}{2} + f(x)$ 都是凸函数, 求证:
 f 处处可导, 且 $|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|$