南京大学数学系概率论期末试卷(2016)

2015/2016 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论

院系________ 班级________ 学号________ 姓名________

考试时间2016/06/29任课教师 代雄平 赵进 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. (20分) 计算题：设ξ与η是独立的随机变量。

(a) 若$\xi \sim B(5, 0.5), \eta \sim B(10, 0.5)$，求$\xi + \eta$的分布；

(b) 若$\xi \sim P(\frac{1}{3}), \eta \sim P(\frac{2}{3})$，求$\xi + \eta$的分布；

(a) 若$\xi \sim N(3, 4), \eta \sim N(7, 9)$，求$\xi + \eta$的分布；

(a) 若$\xi \sim \Gamma(2, 10), \eta \sim \Gamma(8, 10)$，求$\xi + \eta$的分布。

二. (10分) 设随机变量η取值于$\mathbb{N}$满足：$P(\eta = k+1 | \eta > k) = P(\eta = 1)\ \forall k \geq 1$。求$\eta$的分布。

三. (10分) 设$p(x, y)$是二元正态分布$N\left((0,0), \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)$的联合密度函数。求$x$-边际分布$p_1(x)$和条件分布$p(y|x)$。

四. (5分) 设随机变量$\xi \geq 0$。证明：$\mathrm{E}(\xi^2) = 2\int_0^\infty P(\xi \geq t) t dt$。

五. (15分) 设(ξ, η)是一个二维的随机向量。

(1) （10分）定义(ξ, η)的特征函数$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$;

(2) （5分）证明f具有非负定性。

六. (10分) 设$\{\xi_n; n = 1, 2, \ldots\}$是一列两两不相关的随机变量，满足$\sum_{n=1}^\infty D\xi_n / n^2 < \infty$。证明弱大数定律：

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{E}\xi_1 + \cdots + \mathrm{E}\xi_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0。$$

七.(15分) （1）设$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$是一列i.i.d. 随机变量满足$\mu = \mathrm{E}X_n < \infty, \sigma^2 = DX_n > 0$。陈述Lindeberg-Lévy中心极限定理(10分)。

（2）应用该中心极限定理证明：设μ_n是p-型Bernoulli试验中成功的次数; i.e., $\mu_n \sim B(n, p)$。令$a \le x_{k,n} := \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}} < b$。则有：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(\mu_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}x_{k,n}^2}}} = 1$$

一致地对$a < b$成立(5分)。

八. (15分) 证明Khinchine弱大数定律：设$\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$是一列i.i.d. 随机变量满足$\mu = \mathrm{E}X_n < \infty$。则

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \ge \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0。$$