

2023 数学分析 C 期末考试

will 捡到试卷的群友

某平凡的数学讨论群

版本: 0.10

日期: 2023 年 2 月 22 日

注 意

这张试卷是王奕倩老师和苗栋老师一起出的, 同时具有两个老师的出题特点.

一、(10 分)

1. 将 e^{-x} , $x \in (0, \pi)$ 分别作奇延拓和偶延拓, 求其 Fourier 展开.
2. 求 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)}{4k^2+1}$.

二、(10 分) 设 $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$ 在 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 上连续. 求

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy$$

三、(10 分) 设三角级数 $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 一致收敛, 其中 $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

证明: $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n^2 + b_n^2) < +\infty$

若仅知该级数收敛, 是否仍然有相同结论? 说明理由.

四、(10 分) 计算:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt$$

五、(10 分) 设 $f(x, y)$ 在 $x, y \geq 0$ 上非负连续, 广义积分 $J(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \, dy$ 和 $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) \, dx$ 分别关于 x 和 y 在 y 在 $[0, +\infty)$ 上内闭一致收敛. 设广义积分 $\int_0^{+\infty} I(y) \, dy$ 收敛 (记为 S).

证明: 广义重积分 $\int_{x, y \geq 0} f(x, y) \, dx \, dy$ 收敛并等于 S.

六、(20 分) 设周期为 1 的函数 f 在 $[0, 1]$ 上广义可积且平方可积. 设 $\varepsilon > 0$

定义 $f_\varepsilon: \mathbb{R} \ni x \mapsto \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t) \frac{dt}{2\varepsilon}$.

证明 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 |f - f_\varepsilon|^2 = 0$

七、(20 分) 设 $B \subset \mathbb{R}^3$ 是单位球, $y \in \mathbb{R}^3$ 模长为 $\frac{1}{2}$. 求积分:

$$\int_B \frac{dx}{\|y - x\|}.$$

八、(5 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为凸开集, $K \subset \Omega$ 为紧集. 证明: 存在常数 C 使得对任何定义在 Ω 上的凸函数 F (可能无界), 皆有

$$\sup_K |F(x)| \leq C \int_{\Omega} |F(x)|$$

九、(5 分) 记 $\|v\|_2 = (\int_{\mathbb{R}^6} v^2)^{\frac{1}{2}}$. 设 u 是 \mathbb{R}^6 上具有紧支集的光滑函数.

证明: $\|\nabla u\|_2 \cdot \|u\| \geq 2.5 \left\| \|x\|^{-\frac{1}{2}} u \right\|_2^2$.

其中 $\|x\|$ 表示 \mathbb{R}^6 中向量 x 的欧氏范数.

(编者注) 原题最后一个范数符号外没平方, 经验证需要加上平方.