南京大学数学系试卷

2018/2019 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法（A卷）

班级______ 学号______ 姓名______

考试时间 2019.6.24 任课教师______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一. 填空题 (18分$= 4*2+2*5$)

1. 设$f(0)=0$, $f(1)=16$, $f(2)=46$, 则$f[0,1]=$______, $f[0,1,2]=$______; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为______.

2. 设$h=\dfrac{b-a}{2m}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,2m$. 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合辛普森公式为______; 它是____ 阶收敛的，代数精度为____.

3. 设 $x_i=i(i=1,\cdots,n+1)$, $l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^{n+1} l_i(0)=$______.

4. 设$f(x)=7x^7+5x^5+4$, 则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$______, $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$______.

5. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度为______.

6. 近似数 $x^*=0.231$ 关于真值 $x=0.229$ 有____ 位有效数字.

7. 在求解非线性方程的迭代法中，局部收敛指的是______, 你学过的局部收敛方法有______.

二. (10分) 设n 次多项式$f(x)$ 有互异的n 个实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 试证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1} & k=n-1,\end{cases}$$

其中a_n 为$f(x)$ 的首项系数.

三. (10分)　设$P_2(x)$ 是$f(x)$ 的以$0,h,2h$ 为插值基点的二次插值多项式，试由$P_2(x)$ 导出求积分$I=\int_0^{3h}f(x)dx$ 的一个插值型求积公式I_h; 进一步假设函数$f(x)$ 具有四阶连续导数, 证明

$$I-I_h=\frac{3}{8}h^4f'''(0)+O(h^5).$$

四. (10分) 判断能否使用有限个节点数值积分方法计算得到

$$\int_1^2\frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\mathrm{d}x$$

的精确解，并给出理由或者计算过程。

五. (10分) 应用Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

六. (10分) 对于积分$\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x$, 若采用复合梯形公式需要使用多少个求积基点才能使积分近似值的误差不超过10^{-8}?

七. (10分) 试确定常数A, B, C 及正数β, 使求积公式

$$\int_{-3}^{3} f(x) \approx Af(-\beta) + Bf(0) + Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式?

八. (10分=5+5) 设函数$f(x)$ 在$[0,1]$ 上具有三阶连续导数,

(1) 试构造二次多项式$H_2(x)$,使其满足插值条件:

$$H_2(0)=f(0)=0, H_2(1)=f(1)=2, H_2'(0)=f'(0)=2$$

(2) 证明其余项表达式为

$$R(x)=f(x)-H_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}x^2(x-1),\quad 其中\quad \xi\in[0,1].$$

九. (12分) 对区间$[a,b]$ 作等距剖分, 基点为$x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, 即$x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 试证明当n 为偶数, $\int_a^b w_{n+1}(x)dx=0$, 其中$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 进一步, 利用证到的结论说明当$n$ 为偶数时闭Newton-Cotes型求积公式的代数精度为$n+1$.