南京大学数学系期中试卷

2020/2021 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级______ 学号__________ 姓名______

考试时间 2021.04.24 任课教师_______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（判断下列叙述是否正确, 并给出理由. 每小题 4 分, 共 20 分）.

1. 设 σ 是有限维线性空间 V 上的线性变换. 如果 σ 是单射, 则 σ 是满射.

2. 设 $\dim V = n$, $\mathscr{A} \in \operatorname{End} V$ 幂零, 且 $\dim \operatorname{Ker} \mathscr{A} = 1$, 则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 λ^n.

3. 设 $V = V_1 \oplus V_2$, W 是 V 的子空间, 则 $W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$.

4. 设 3 级方阵 A 满足 $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A^3$, 则 0 是 A 的 2 重根.

5. 两个 3 级复方阵相似当且仅当它们的特征多项式和最小多项式分别相等.

二. 填空题（每空 4 分，共 32 分）.

1. 设三级实方阵 A 的特征值是 $1, 2, 3$, 则与它可交换的实矩阵组成的实线性空间的维数为____.
   设 W 是所有三级实对角矩阵组成的实线性空间, 则商空间 $M_3(\mathbb{R})/W$ 的维数为______.

2. 多项式 $x^2 - x - 2$ 的友矩阵是__________.

3. 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的若当标准形为__________.

4. 设 $X = (1, 1, \cdots, 1)$, $Y = ((-1)^1, (-1)^2, \cdots, (-1)^n) \in \mathbb{F}^{1\times n}$, 则 $A = X'Y$ 的特征多项式为
   ______________.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 13 & -4 & -3 \\ 61 & -24 & -24 \\ -33 & 13 & 13 \end{pmatrix}$, A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^3 - 2A^2 + 2A + I_3| =$__________,
   A^* 的迹为__________.

6. 方阵 $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -6 \\ -39 & -10 & -35 \\ 21 & 6 & 20 \end{pmatrix}$ 的最小多项式为__________.

三. (8 分) 设 $V=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, V 上的线性变换 $\sigma: V\longrightarrow V, B\mapsto \sigma(B)=AB$. 设 $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 求 σ 在 e_1,e_2,e_3,e_4 下的矩阵.

四. (12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -12 & -10 & -26\\ 6 & 6 & 15\end{pmatrix}$. 求 A^{10}.

五. (14 分) 设 1 是 n 级复方阵 A 的 n 重根. 证明: A 和 A 的任意方幂都相似.

六. (14 分) 设数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换 σ 的最小多项式 $m_\sigma(\lambda)$ 在 F 上不可约, W 是 σ-子空间. 证明: $W=\{\alpha\in V \mid 存在\ f(\lambda)\in F[\lambda]\ 使得\ f(\sigma)(\alpha)\in W\ 且\ f(\sigma)(\alpha)\neq 0\}\cup\{0\}$.

七. (20 分) 定义 $V=M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ 中的加法和数乘运算为

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k\circ(a,b)=(ka,kb+\frac{1}{2}k(k-1)a^2),$$

则 V 为实线性空间.

(1) 试求向量组 $(1,0),(2,1),(3,3),(2,0)$ 的一个极大线性无关组;

(2) 上述极大无关向量组是否是 V 的一个基? 若是, 求 (a,b) 在该组基下的坐标;

(3) 设 U 是所有形如 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的实矩阵构成的线性空间. 定义 V 到 U 的两个映射:

$$\varphi(a,b)=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \psi(a,b)=\begin{pmatrix} 0 & a & b-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

问这两个映射是否是线性同构? 说明理由.