抽象代数 2022 期中

Zavalon from TG

2022.11.01

一. 填空题 (每格 2 分, 共 10 分)

1. 不同构的 144 阶 Abel 群共有 ________ 种.

2. 使有 n 阶非交换群的最小正整数 n 的值为 ________.

3. 与群 G 的子群 H 共轭的子群个数是 ________ 在 G 中的指标.

4. 设 p 为素数, 则 p 阶循环群共有 ________ 个生成元.

5. 设 $\sigma = (13524), \tau = (12)(345)$, 则 $\sigma\tau\sigma^{-1} =$________(写成不相交轮换的乘积).

二. 判断题 (在左端括号内填, 每小题 2 分, 共 20 分)

1.( ) 设 G 为群, 对 $g \in G$ 让 $\sigma(g) = g^{-1}$, 则 σ 为 G 的自同构.

2.( ) 对任意正整数 n, 群 G 的 n 阶导群 $G^{(n)}$ 在 G 中正规.

3.( ) 具有消去律的半群为群.

4.( ) 任给素数 p, 所有 p-群都可解.

5.( ) 无限可解群一定有合成列.**(注: 原文表述如此.)**

6.( ) 设群 G 恰有两个自同构, 则 G 必为 Abel 群.

7.( ) 八阶群都为 Abel 群.

8.( ) 设 H 与 K 均为群 G 子群, 则 $H \cup K$ 为 G 子群当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$.

9.( ) 设 H 与 K 都是群 G 的正规子群且 $H \subseteq K$, 则 G/H 可解时 G/K 也可解.

10.( ) 设 G 为有限可解群,$H < G$ 为 G 极大正规子群, 则 $[G : H]$ 为素数.

三.(每小题 5 分, 共 10 分)

(1). 写出群 $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ 的一个合成群列.

(2). 设 A, B 为有限群 G 的非空子集且 $|A| + |B| > |G|$, 证明 $G = AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

四.(10 分) 设 H 为群 G 的有穷正规子群,P 为 H 的 Sylow p-子群, 证明 $G = HN_G(P)$.**(注: 考试中途追加条件 G 有限.)**

五.(每小题 5 分, 共 10 分)

设 H 与 K 为有限群 G 的子群, 对 $\langle h, k\rangle \in H \times K$ 与 $x \in G$, 让 $langleh, k\rangle \circ x = hxk^{-1}$.

(1). 证明群 $H \times K$ 按 $\circ$ 作用在集合 G 上.

(2). 证明 $x \in G$ 所在的轨道恰是 $[K : x^{-1}Hx \cap K]$ 个不同 H 的右陪集之并.

六.(10 分) 证明 5000 阶群必可解 (提示: 利用 Sylow 定理).

七.(10 分) 设 H 为群 G 的次正规子群,K 为群 G 正规子群, 证明 HK 在 G 中次正规 (不引用书上定理).

八.(10 分) 设 G 为有限 Abel 群, 证明 G 为循环群当且仅当对任意正整数 n 均有 $|\{x \in G : x^n = e\}| \leq n$.

九.(10 分) 设 H 与 K 为有限群 G 的正规子群. 假设 $G/(H \cap K)$ 有正规的 Sylow p-子群, 其中 p 为素数, 证明 G/H 也有正规的 Sylow p-子群.