

一、用数学语言描述

(1){an}不是 Cauchy 列

(2)f 在正无穷处不趋于负无穷

二、求极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(\pi\sqrt{n^2 + n})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\tan(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x^2 \ln(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$$

三

1、设 $\emptyset \neq A \subseteq (0,1)$, 记 $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} | x \in A\}$, 求证: $\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$

2、设 f 与 g 在 $x=0$ 处连续, 且 $f(x) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$), $g(x) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$), 求证:
 $f(g(x)) = o(x)$ ($x \rightarrow 0$)

四

1、设 $c > 0$, $a > 0$, 已知 $a_{n+1} = \frac{ca_n+2}{a_n+c}$, 讨论 $\{a_n\}$ 是否收敛

2、证明: $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{\sin k}{k}\right)$ 收敛

3、证明: 任意数列都有单调子列

五

1、证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\cos k)^2 = 1$

2、已知 $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_{n+1} \leq \sqrt{a_n a_{n-1}}$, 问 $\{a_n\}$ 是否收敛