2020.05.10 高等代数期中试题

一. (20 分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个 3 阶方阵.

(1) 求 A 与 B 的特征值、特征子空间的维数及一组基;

(2) 判断 A 与 B 是否相似, 如果不相似说明理由，如果相似，求可逆矩阵 P 使得 $B=P^{-1}AP$.

二. (20 分) 设 V 是域 F 上所有 $n(n\geq 2)$ 阶方阵构成的集合. 给定矩阵 $A\in V$. 定义映射：

$$\sigma: V\longrightarrow V,\ B\longrightarrow \sigma(B)=AB-BA.$$

如果 A 可对角化, 判断 σ 是否可对角化并说明理由.

三. (20 分) 设 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{-2}\in\mathbb{C}$, $\mathbb{F}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 中包含 α 的最小数域. 将 $\mathbb{C}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

(1) 证明: $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{Q}$-线性子空间;

(2) 求 $\mathbb{Q}$-线性空间 $\mathbb{F}$ 的一组基;

(3) 证明: $L_\alpha:\mathbb{F}\longrightarrow\mathbb{F},\beta\longrightarrow L_\alpha(\beta)=\alpha\beta$ 是 $\mathbb{Q}$-线性空间 $\mathbb{F}$ 上的线性变换, 并求它的特征多项式.

四. (20 分) 设 A 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n\times n$ 矩阵.

(1) 若 A 可逆, 证明: 存在复数域 $\mathbb{C}$ 上的 $n\times n$ 矩阵 B 使得 $B^2=A$;

(2) 若 A 不可逆, 上述结论是否成立? 说明理由.

五. (20 分) 已知 A 是复数域上的 5×5 矩阵, 特征多项式为 $t^5+t^4-2t^3-2t^2+t+1$, 最小多项式是一个四次多项式. 求 A 的有理标准形的所有可能的情况.

六. (20 分) 已知 n 维复线性空间 V 上的幂零线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵表示为 A. 求证 $\mathscr{A}$ 总共有 $n+1$ 个不变子空间当且仅当 A 的特征方阵 $\lambda I-A$ 的第 $n-1$ 级行列式因子 $D_{n-1}(\lambda)=1$.