2020 数学分析 C 期中考试

Zavalon from TG

2014.11.05

一. 简答题 (每题 5 分, 共 20 分, 简要说明理由).

1. 设 $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为互逆可微映射, 则 f, g 的 Jacobi 矩阵均非退化.
2. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可微且恒有 $\|\mathrm{D}f(x)\| < 1$, 则 $g(x) = x + f(x)$ 为单射.
3. 设 $\{A_i\}_{i=1}^k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中有限个可求体积的集合. 证明其的交集也可求体积.
4. 用多元函数的积分解释一元函数 e^{-x^2} 在 $\mathbb{R}$ 上的积分等于 $\sqrt{\pi}$.

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 设函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, 计算其一阶和二阶偏导数.
2. 方程 $x^2 - xy + yz + \mathrm{e}^z = 0$ 在 $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 0)$ 附近决定了隐函数 $z = z(x, y)$, 在 $(1, 2)$ 处计算 z 关于 x, y 的一阶和二阶偏导数.
3. 在约束条件 $2x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1$ 下求函数 $f(x, y, z) = 3y + z$ 的最值.
4. 设 $a, b > 0, q > p > 0$. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2$ 以及直线 $y = px, y = qx$ 在平面第一象限所围区域的面积.

三. 综合题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足 $|f(x) - f(y)| \le \|x - y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. 证明:
(1).f 可微且微分恒为 0; (2).f 为常值函数.
2. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为可微函数, 且满足 $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \ge 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准内积. 证明 f 为凸函数.
3. 设函数 $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, 记 $\varphi(r) = \displaystyle\iint_{\{x^2+y^2 \le r^2\}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \forall r \ge 0$. 证明: 当 $r \to 0^+$ 时, 有 $\varphi(r) = \pi r^2 f(0, 0) + \dfrac{1}{8}\pi r^4 [f''_{xx}(0, 0) + f''_{yy}(0, 0)] + o(r^4)$.
4. 设函数 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 且满足 $\|f(x) - f(y)\| \ge \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. 证明:
(1).f 的 Jacobi 矩阵 $\mathrm{D}f(x)$ 处处非退化.
(2). 如果 A 可求体积, 则 $f(A)$ 也可求体积, 且 $v(f(A)) \ge v(A)$.