六、(10 分) 证明 40 阶群 G 必有 5 阶正规子群。

由 Sylow 第一定理，G 有 Sylow 5-子群(即 5 阶子群)，

由 Sylow 第二定理，G 的 Sylow 5-子群个数 $n_5 \equiv 1 \pmod 5$

且 $n_5 \mid 8$. 因 $2,4,8 \not\equiv 1 \pmod 5$，所以 $n_5 = 1$

故 G 有唯一的 Sylow 5-子群 H，根据 Sylow 第二定理，

H 在 G 中正规。

七、(10 分) 设幺环 R 是其理想 $R_1,\dots,R_n$ 的内直和，I 为 R 的任一个理想，证明 I 是 $I\cap R_1,\dots,I\cap R_n$ 的内直和。

对于 $1\le i\le n$，$I\cap R_i$ 为 R 的理想，从而也为 I 的理想.

由于 R 是 $R_1,\dots,R_n$ 的内直和，1 可表成 $r_1+\cdots+r_n$ 的形式，

这里 $r_i\in R_i$. 于是每个 $a\in I$ 可表成 $ar_1+\cdots+ar_n$ 的形式.

而对 $1\le i\le n$ 时 ar_i 既属于 I 又属于 R_i. 因此 I 中每个

元 x 可表成 $x_1+\cdots+x_n$ 的形式，这里 $x_i\in I\cap R_i$.

这种表示是唯一的. 因为 x 作为 R 的元素表成 $r_1+\cdots+r_n$

$(r_i\in R_i)$ 的方式唯一. 因此 I 是 $I\cap R_1,\dots,I\cap R_n$

的内直和。