南京大学
常微分方程期末考试

天影

2022 年 1 月 29 日

评语: 这张试卷是耿建生老师出的, 整体上来说难度适中 (该送的分都送到位了), 主要考察计算和书本上公式和定理的最基本运用. 同学们做题或者看题的时候不难发现, 很多题目都是书本上的例题或作业进行略微改编. 所以, 大家知道复习的重点是什么了吗? [doge]

感谢陈韵雯同学的题目记录和纠错以及南京大学数学系 20 级的多位同学在题目解答方面的帮助.

一、(10 分) 求解微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y + z, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x - z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x + y + 2z. \end{cases}$$

分析: 这是一道常见的一阶常系数齐次线性微分方程组求解问题, 直接求出基解矩阵即可. 需注意此题矩阵 A 有 2 重特征根, 计算方式较为特殊.

解: 先将原方程转化为 $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\mathbf{x}$ 的形式, 则有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

使用 $|A-\lambda I_3|=0$, 求出该矩阵特征值, 有

$$\begin{aligned}&\lambda_1=2,\ \text{对应特征向量为}(1,-2,2)^{\mathrm{T}},\\&\lambda_2=\lambda_3=1\ \text{为 2 重特征根},\end{aligned}$$

对应解向量的计算公式为:

$$\begin{cases}(A-I_3)^2v=\mathbf{0}\Rightarrow v_{10},v_{20},\\ v_{11}=(A-I_3)v_{10},v_{21}=(A-I_3)v_{20},\\ v_1=v_{11}t+v_{10},v_2=v_{21}t+v_{20}.\end{cases}$$

求得 $v_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $v_2=(1,-t,t-1)^{\mathrm{T}}$, 由此得出该方程通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^{2t}\\-2e^{2t}\\2e^{2t}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\e^t\\-e^t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}e^t\\-te^t\\(t-1)e^t\end{pmatrix}.$$

二、(10 分) 已知 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1+x}{x}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{x-1}{x^2}y=0$ 的一个解, 求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1+x}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{x-1}{x^2}y=0$$

的通解.

分析: 这是一道二阶齐次线性微分方程, 题目已经明显提示了该方程的一个解, 只要是认真看过书上第六章的同学就能立刻想到通解公式:

$$y=\varphi(x)\left(C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi^2(s)}e^{-\int_{s_0}^{s}p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s\right).$$

解: 根据题目, 有 $p(x)=\dfrac{1+x}{x}$, 由通解公式,

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{x}\left(C_1+C_2\int x^2e^{-\int\frac{1+x}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{x}\left(C_1+C_2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{x}(C_1-C_2(x+1)e^{-x})\\&=\frac{1}{x}C_1-C_2\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x}.\end{aligned}$$

三、(10 分) 求解微分方程

$$x^3\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}-x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2y=x^3\quad(x>0).$$

分析: 这是一道典型的三阶欧拉方程, 一般方法是通过 $x=e^t$ 换元将原方程转化为易求解的常系数线性微分方程, 此题难点在于换元的计算.

解: 作换元 $x=e^t$ 即 $t=\ln x$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\\
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\\
&=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\\
\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right]\\
&=-\frac{2}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)\\
&=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),
\end{aligned}$$

则原方程转化为三阶常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2y=e^{3t}.$$

先考虑对应齐次方程 $y'''-4y''+5y'-2y=0$ 的解, 令 $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$, 解得 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$, 则齐次方程通解为

$$y=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{2t}.$$

由于 $3\neq2, 3\neq1$, 故设对应非齐次方程特解为 $y=ae^{3t}$, 代入方程, 解得 $a=\dfrac{1}{4}$, 故原方程通解为

$$\begin{aligned}
&y=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}\\
\Rightarrow\ &y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3.
\end{aligned}$$

四、(10 分) 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-4y=e^{-4x}+xe^{-x}.$$

分析: 这是一道二阶常系数非齐次线性微分方程, 做法基本与上题换元后相同, 不再赘述. 此题非平凡之处在于非齐次项有两项, 但将这两项分开处理后合并会极大的简化计算.

解: 先求出对应齐次方程 $y''+3y'-4y=0$ 的通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$, 然后将非齐次项分开, 分别求特解, 即

$$y''+3y'-4y=e^{-4x} \quad \text{和} \quad y''+3y'-4y=xe^{-x}.$$

由于 -4 是 $\lambda^2+3\lambda-4=0$ 的一个根, 而 -1 不是, 故分别设上述两方程的特解为 $y=axe^{-4x}$ 和 $y=(bx+c)e^{-x}$, 分别代入方程后, 解得 $a=-\frac{1}{5}$, $b=-\frac{1}{6}$, $c=-\frac{1}{36}$, 则所求方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{1}{5}xe^{-4x}-\frac{1}{6}\Big(x+\frac{1}{6}\Big)e^{-x}.$$

五、(10 分)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\dfrac{1}{2}x^2.\end{cases}$$

求平衡点, 并判断平衡点的稳定性.(渐近稳定, 稳定非渐近稳定, 不稳定)

分析: 此题主要考察动力系统平衡点稳定性的知识, 判断平衡点有两种方法: 一种是线性化方法, 较为简单; 另一种是李雅普诺夫第二方法, 需要构造李雅普诺夫函数, 操作较为复杂. 这两种方法都只是研究零解稳定性的方法, 对于非零解, 可以使用平移变换将其变为零解进行研究. 此题为课本上作业原题稍加改动 (向右移动了一个单位, 但做法完全相同).

解: 首先求平衡点, 根据平衡点定义, 有 $y=-x+\frac{1}{2}x^2=0$, 解得两个平衡点: $(2,0)$ 和 $(0,0)$. 先看 $(0,0)$: 由于矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 的特征值实部均为 0, 故线性化方法失效, 考虑使用李雅普诺夫第二方法, 观察题目, 容易发现

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x+\frac{1}{2}x^2\\ \Rightarrow\ & y\,\mathrm{d}y=\Big(-x+\frac{1}{2}x^2\Big)\,\mathrm{d}x\\ \Rightarrow\ & \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}x^3=C.\end{aligned}$$

由此得到首次积分, 构造李雅普诺夫函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{6}x^3$, 则全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$, 故该平衡点是稳定的. 但 $\exists\delta>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时, $\frac{1}{4}x^2<\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3<x^2$, 即有

$$0<\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2<V(x,y)<x^2+\frac{1}{2}y^2,$$

注意到这里的 $V(x,y)$ 是原微分方程组的首次积分, 由首次积分的性质可知, 以任何 $(0,0)$ 附近的点为初值的非零解都会被限制在两个椭圆中间, 即 $(0,0)$ 稳定非渐近稳定.

对于 $(2,0)$: 先通过平移变换 $\begin{cases}x=u+2\\ y=v\end{cases}$ 将平衡点变为零解, 此时原方程组变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v,\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u+\dfrac{1}{2}u^2,\end{cases}$$

则因为 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 ±1 有正根, 由线性化方法可知 $(2,0)$ 不稳定.

六、(10 分) 求解微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+x(x^2+y^2-1),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y(x^2+y^2-1).\end{cases}$$

分析: 此题为课本上例题, 有两种做法: 一种是使用极坐标换元; 第二种是通过求其首次积分求解, 此解答使用极坐标换元来做.

解: 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则原微分方程组化为

$$\cos\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-r\sin\theta+r\cos\theta(r^2-1), \tag{6.1}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r\cos\theta+r\sin\theta(r^2-1), \tag{6.2}$$

令 $\cos\theta\times(6.1)+\sin\theta\times(6.2)$ 和 $\cos\theta\times(6.2)-\sin\theta\times(6.1)$, 有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(r^2-1)\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt{\dfrac{1}{1-C_1e^{2t}}}\\ \theta=t+C_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\cos(t+C_2)}{\sqrt{1-C_1e^{2t}}}\\ y=\dfrac{\sin(t+C_2)}{\sqrt{1-C_1e^{2t}}}\end{cases}.$$

七、(10 **分**) **已知微分方程** $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)y=0, Q(x)\in C[0,+\infty), Q(x)>25.$ **证明方程的任何非零解在** $\left(0,\dfrac{\pi}{5}\right)$ **内必有一零点.**

分析: 此题是课本上 Sturm 比较定理的一个简单推广, 区别在于将零点存在的区间从闭区间改为开区间, 课后作业题中有相关证明.

证明: 考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+25y=0,$$

由 $\lambda^2+25=0$ 解得 $\lambda=\pm 5i$, 则微分方程通解为 $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$. 当 C_1,C_2 不都为 0 时, 此非零解相邻零点间距为 $\dfrac{\pi}{5}$, 选取适当 C_1,C_2, 使 0 和 $\dfrac{\pi}{5}$ 为对应非零解的相邻零点, 而因为 $Q(x)>25$, 所以由 Sturm 比较定理的推广可知, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)y=0$ 的任何非零解在 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+25y=0$ 的非零解的两个相邻零点间至少有一个零点, 即方程的任何非零解在 $\left(0,\dfrac{\pi}{5}\right)$ 内必有一零点. $\square$

八、(15 **分**)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-xy,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=xy-y.\end{cases}$$

求平衡点, 并判断平衡点的稳定性.(渐近稳定, 稳定非渐近稳定, 不稳定)

分析: 同第五题.

解: 由平衡点的定义, 令 $x-xy=xy-y=0$, 解得平衡点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

先看 $(0,0)$: 由于矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 有正特征值 1, 故由线性化方法, $(0,0)$ 不稳定.

再看 $(1,1)$: 作平移变换 $\begin{cases}x=u+1\\y=v+1\end{cases}$, 则原方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-v-uv,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=u+uv.\end{cases}$$

可以发现此方程组的对应矩阵和第五题的零解对应矩阵互为转置, 故特征值实部均为 0, 线性化方法失效, 因此考虑使用李雅普诺夫第二方法, 将上下两式相除, 分离变量后积分, 得到

首次积分:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\frac{v(u+1)}{u(v+1)}\\
\Rightarrow&\int\frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u=-\int\frac{v}{v+1}\,\mathrm{d}v\\
\Rightarrow&\,u+v-\ln(u+1)-\ln(v+1)=C.
\end{aligned}$$

因此, 构造李雅普诺夫函数 $V(u,v)=u+v-\ln(u+1)-\ln(v+1)$, 显然 $V(0,0)=0$, 且当 $(u,v)\neq(0,0)$ 但趋近于 $(0,0)$ 时, 由 Taylor 展开公式可得

$$\begin{aligned}
V(u,v)&=u+v-\Big(u-\frac{1}{2}u^2-o(u^2)\Big)-\Big(v-\frac{1}{2}v^2-o(v^2)\Big)\\
&=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2+o(u^2)+o(v^2)>0,\quad\big((u,v)\to(0,0)\big)
\end{aligned}$$

故 $V(u,v)$ 是李雅普诺夫函数, 且其全导数 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$, 从而可以判断出平衡点至少是稳定的, 由于前面已经得到

$$V(u,v)=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2+o(u^2)+o(v^2),\quad\big((u,v)\to(0,0)\big)$$

故有

$$\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}v^2<V(u,v)<u^2+v^2,\quad\big((u,v)\to(0,0)\big)$$

从而与第五题类似, 以非原点为初值的任意解都不可能趋于原点, 即 $(1,1)$ 稳定但非渐近稳定.

九、(15 分) 求解微分方程组 $(x>0,y>0,z>0)$

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(y^2-z^2),\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(z^2-x^2),\\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z(x^2-y^2).
\end{cases}$$

分析: 此题为课本上原题改编, 可以通过凑三个首次积分的方法解决.

解: 将 x,y,z 分别乘题目中微分方程组的三个等式后相加, 得到第一个首次积分

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2=C_1,$$

再将 yz,zx,xy 分别乘这三个等式后相加, 得到第二个首次积分

$$yz\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+zx\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+xy\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow xyz=C_2,$$

第三个首次积分需要将前两次计算出的首次积分代入方程组, 首先有 $y=\dfrac{C_2}{zx}$, 则 $x^2+z^2+\dfrac{{C_2}^2}{z^2x^2}=C_1$, 从而解得

$$\begin{aligned}
x^2&=\frac{1}{2}\left(C_1-z^2\pm\sqrt{(z^2-C_1)^2-\frac{4{C_2}^2}{z^2}}\right),\\
y^2&=\frac{1}{2}\left(C_1-z^2\mp\sqrt{(z^2-C_1)^2-\frac{4{C_2}^2}{z^2}}\right).
\end{aligned}$$

将这两个等式代入第三个式子消去 x,y, 即可得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\pm z\sqrt{(z^2-C_1)^2-\frac{4{C_2}^2}{z^2}}.$$

这是一个变量可分离方程, 理论上可将其分离变量后积分, 但该方程实际无法计算, 在考试后有同学询问老师, 回答是只需要化出此式即可算满分.