数学分析 期中试卷

2016/2017 学年第一学期　考试形式＿闭卷＿　课程名称＿数学分析＿

班级＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一．（$10\times 4=40$分）求极限.

1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}$;　2). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;　3). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-2^2}{x-2}$;　4) $\lim\limits_{\theta\uparrow\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\theta$.

二.（10分）设$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为双射. $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$. 证明: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

三. （10分）$\lim_{n\to\infty} \sin(n + \ln n)$ 是否存在?

四.（24分）设f 在$(0,1)$ 内连续, $f(0^+)$ 及$f(1^-)$ 存在. 证明:
1). f 有界; 2). f 一致连续; 3). 若还有$f(0^+)f(1^-)<0$, 则$\exists\zeta$ s.t. $f(\zeta)=0$.

五.（10分）设f 是$(0,+\infty)$ 内的有界函数. $\psi(x):=\sup_{0<t<x}f(t), \forall x>0$.
证明: ψ为左连续函数.

六.（6分） 设$a_n = \langle\sqrt{n}\rangle$（这里, $\langle\sqrt{n}\rangle$表示$\sqrt{n}$的小数部分）. 证明: 任给$L \in [0,1]$, $\exists n_k$ s.t. $a_{n_k} \to L$.

七.选做题（**选且只能选一题**）
(1).（5分）举例: $\psi \in C[0,1]$ 但非Hölder 连续函数.
(2).（20分）设f 是定义于$[0,+\infty)$ 上的Lipschitz 连续函数, 且$f(2x) = 2f(x), \forall x$. 问: f 是否必为线性函数? 如是, 给出证明; 如不是, 给出反例.
阁下选做第（　）题.