南京大学数学系期末试卷 (A)

2018/2019 学年第一学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级______ 学号______ 姓名______

考试时间 2019.1.12 任课教师______ 考试成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

约定：本试卷中，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A' 表示矩阵 A 的转置.

一. 判断题（本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打"+"；若错误，请在括号内打"−".

1. 设向量组 $\alpha_i=(1,t_i,t_i^2,\ldots,t_i^{n-1})$, $i=1,2,\ldots,n$, 其中 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 为互不相同的数，则任一 n 维向量都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出. ( )

2. 设 A,B 为 n 级方阵 $(n>1)$，则 $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$. ( )

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 n 维列向量，A 是 $n\times n$ 非零矩阵，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关 当且仅当 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r$ 线性无关. ( )

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，则 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ 也是该方程组的解. ( )

5. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵, 则 $r(A)>r$ $(r\geq 1)$ 当且仅当 A 中有一个非零 r 级子式. ( )

6. 给定矩阵 A,B. 如果 AB 是单位矩阵，则 BA 也是单位矩阵. ( )

7. 设 A,B 为 n 级方阵，则 $|AB|=|BA|$. ( )

8. 初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵. ( )

9. 设 A 是 n 级实方阵，并且 $AA'=0$, 则 $A=0$. ( )

10. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵, 并且 $r(AB)=r(B)$, 则对于任一 $m\times t$ 矩阵 C, 总有 $r(ABC)=r(BC)$. ( )

二. 填空题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）.

1. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4})$, $i=1,2,3$; $\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})$, $j=1,2,3,4$. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为______.

2. 设 n 为正整数，则 $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=$ ______.

3. 设矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$, 则 A 的伴随矩阵 $A^*=$ ______.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=3\alpha_1+(k+1)\alpha_2+5\alpha_3$, $\beta_2=k\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=k\alpha_2+4\alpha_3$, 则 β_1,β_2,β_3 线性相关的充要条件是 $k=$______.

5. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, E 是 n 级单位矩阵, 则 $|E+\alpha'\alpha|=$______.

6. 设 A 为 n 级方阵并且 $|A|=5$, A^* 为 A 的伴随矩阵，$A^2-3A+\frac{1}{5}AA^*=0$, 则 $A^{-1}=$ ______.

7. 设 3 级方阵 A 的秩为 2, $B=\begin{pmatrix}2&1\\4&2\\6&k\end{pmatrix}$, 并且 $AB=0$, 则 $k=$______.

8. 设 A 为 n 级方阵，E 为 n 级单位矩阵，$A\neq E$, 但 $A^2=A$, 则 $|A|=$______.

9. 矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的解为 ______.

10. 设 $A=\begin{pmatrix}1&3&1&4\\4&\lambda&10&1\\7&1&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$, 则当 $\lambda=$______ 时，A 的秩最小.

三. (15分) 设向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$.

1. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩;
2. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组;
3. 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

四. (15分) 讨论 a,b 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

1. 无解并说明理由;
2. 有唯一解并求其解;
3. 有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解.

五.（10分）证明：非齐次线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$
有解的充要条件是该方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 有相同的秩.

六.（10分）设 A 是数域 P 上 n 级方阵， 证明：$r(A^n) = r(A^{n+k})$， $k = 1, 2, \cdots$.

七.（10分）设 A 是 $s \times n$ 实矩阵且 $r(A) = s < n$. 证明：

1. 若 $n \times m$ 实矩阵 C 是矩阵方程 $AX = 0$ 的一个解，并且 $m > n - s$, 则 C 的列向量组线性相关.
2. 存在 $(n-s) \times n$ 实矩阵 B 使得 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ 是 n 级可逆矩阵，并且 $AB' = 0$.