NJU 数学分析 A 期中考试

zjc from $TRIVIALGROUP$

2019.11.19

一. 填空题 (每题 4 **分, 共** 24 **分)**

(1) **数列极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n}) =$ __________.

(2) **数列极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}^n+\pi^n} =$ __________.

(3) **数列极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n})^n =$ __________.

(4) **函数极限** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} =$ __________.

(5) **函数极限** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{x^3} =$ __________.

(6) **函数极限** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x} =$ __________.

二. 证明下列结论:(每题 12 **分, 共** 24 **分)**

(1) **设** $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt[3]{4+a_n^2}$, **则数列** $\{a_n\}$ **收敛.**

(2) **设** $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+\sin a_n)$, **则不论** a_1 **取什么实数, 数列** $\{a_n\}$ **均收敛于** 0.

三. 每小题 6 **分, 共** 12 **分:**

当 n **为正整数时, 记** $a_n = \sin\sqrt{n}$.

(1) **当** $p \geq 1$ **时, 证明数列** $\{a_{n+p}-a_p\}$ **收敛于** 0.

(2) **数列** $\{a_n\}$ **是否收敛? 请说明理由.**

四. 每小题 10 **分, 共** 20 **分:**

(1) **设数列** $\{a_n\}$ **收敛, 证明** $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ **中存在最大数或最小数.**

(2) **设函数** $f(y)$ **在** $(-1,1)$ **中连续,**$f(y) = o(y)(y\to 0)$. **证明如果函数** $g(x)$ **满足** $g(x) = O(x)(x\to 0)$, **则** $f(g(x)) = o(x)(x\to 0)$.

五. 每小题 10 **分, 共** 20 **分:**

设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ **为** $(0,1)$ **中的一列连续函数, 且对每一个** $x\in(0,1)$, **均有** $\lim\limits_{n\to+\infty}|f_n(x)| = 0$.

(1) **证明: 存在子区间** $I\subset(0,1)$ **以及** N, **使得在** I **中** $|f_N| \leq \frac{1}{2}$.

(2) **证明: 存在子区间** $I\subset(0,1)$ **以及** N, **使得** $n > N$ **时, 在** I **中** $|f_n| \leq \frac{1}{2}$.