整 in P.I.D 素元 ⇒ 不可约元. 不可约 ⇒ 素

X 3. 设 R 为整环，则 R 的极大理想都是素理想，R 的不可约元都是素元.

前半句正确。因为整环必为交换幺环，依 P_{101} 定理 3.4.1 可知其正确。

后半句不正确，由 P_{113} 定理 3.6.3 可知：

R 为整环时，素元为不可约元，但不可约元不一定为素元.

~~R 为 P.I.D 时，不可约元与素元等价~~

X 4. 环 R 的所有理想依理想的加、乘法构成环.

{R 的理想} 关于理想加法不构成群. ∵无左逆元 ?

√ 5. 至少有两个元素的有穷整环 R 必为域.

有穷整环必有加法零元 0 与乘法幺元 e. 若再无其他元素则显然为域.

若有其他元素 a. 现证必有元素 a^{-1} 即 a 的乘法逆元。∵ $a\in R$. ∴ $a^k\in R$ $\forall k\in\mathbb{Z}$

∵ R 有穷. ∴ $a^k=a^l$ $(k\neq l)$. ⇒ $a^{k-l}=e$. ∴ a^{k-l-1} 即为 a 的逆元. 因此 R 为域.

$a^{k-l-1}\cdot a=a^{k-l}=e$

√ 6. 非零整数 d 不是完全平方时，$\mathbb{Q}[\sqrt{d}]=\{a+b\sqrt{d} : a,b\in\mathbb{Q}\}$ 按数的加乘法构成域，其中 $\mathbb{Q}$ 为有理数域.

$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 中元素显然按加乘法均满足结合律和交换律，且封闭

加法零元为 $0+0\sqrt{d}=0$；乘法幺元为 $1=1+0\sqrt{d}$.

∴ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 为交换幺环

$(a+b\sqrt{d})(c+e\sqrt{d})=0 \Rightarrow ac+bed+(ae+bc)\sqrt{d}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} ac+bed=0 \\ ae+bc=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c=0 \\ e=0 \end{cases}$ 即无零因子.

∴ 为整环.

又 1 为乘法单位元. $\forall a+b\sqrt{d}$ 可存在逆元 $\frac{a}{a^2-b^2d}-\frac{b}{a^2-b^2d}\sqrt{d}\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

$\frac{1}{a+b\sqrt{d}}$

∴ 按乘法构成 Abel 群

综上 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 为域.

⇓

整环 + 乘法逆元