群论题 近世代数期中

1. $Stab(x) = H$

$Stab(g \circ x) = gHg^{-1}$

2. $\sigma = (1352)(4)$ $\tau = (12)(345)$, $\Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} = (125)(34)$

3. p^2 Abel, p 可解. $|Aut(G)| = p-1$

判断

元素循环群 $\langle a \rangle$ 是 $\langle a \rangle$ 子群

$AB \neq G \Rightarrow |A| + |B| \leq G$

若 $|A| + |B| > G$, 且 $AB \neq G$, $\exists g \neq ab$. $a^{-1}g \neq b$ $A^{-1}g \cap B = \emptyset$

$|G| \geq |A^{-1}gUB| = |A^{-1}g| + |B| = |A| + |B|$

1. $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \triangleright 2\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \triangleright 6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \triangleright 18\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

2. $HK \leq G$. $H \not\subseteq K$, $K \not\subseteq H$, $H \cup K \leq G$.

$h \in H \setminus K$, $k \in K \setminus H$ $hk \notin H \cup K$

3. $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq L \trianglelefteq G \Rightarrow HK \trianglelefteq HL$

4. $|G| = 5^2 \times 7^2$ 非有必阶正规子群

5. $HK = G \Leftrightarrow \forall a, b \in G\ (aH \cap bK \neq \emptyset)$

$aH \cap bK = a(H \cap a^{-1}bK) \Leftrightarrow \forall g \in G\ (H \cap gK \neq \emptyset)$

$\Rightarrow HK$, $g = hk$ $h = gk^{-1} \in H \cap gK$

$\Leftarrow h \in H \cap gK$, $h = gk$, $g = hk^{-1} \in HK$

6. G 有限 Abel 群, $o(a) = p^\alpha m$, $o(x) = p^\beta n$

(1) $y = a^{p^\alpha} x^n$. $o(a^{p^\alpha}) = m$ $o(x^n) = p^\beta$

则 $o(y) = p^\beta m > p^\alpha m = o(a)$

(3) $\forall m$ ($x^m = e$ 在 G 中解数 $\leq m$) $\Rightarrow G$ 为循环群

取 a 使 $o(a)$ 最大, $\forall x \in G$ $o(x) \mid o(a)$

设 $m = o(a)$, $x^m = e$ $|G| \leq m = |\langle a \rangle| \leq |G|$

$\therefore G = \langle a \rangle$

8. $H, K \leq G$ $(|H|, |K|) = 1$ (1) 证 $H \cap K = \{e\}$

$|H \cap K| \mid |H|$, $|H \cap K| \mid |K|$, $|H \cap K| = 1$, $H \cap K = \{e\}$

(2) $H \trianglelefteq G$, $K \leq G \Rightarrow \forall h \in H \forall k \in K\ (hk = kh)$

$hk = kh \Leftrightarrow hk(kh)^{-1} = e \Leftrightarrow hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K$