南京大学
偏微分方程期中考试

天影　　陈相相　　陈韵雯*

2023 年 2 月 24 日

评语: 这张试卷是杨孝平老师和徐兴旺老师一起出的, 主要考察内容为《数学物理方程讲义》的一至二章. 考虑到整理同学的时间有限, 没有足够的时间做解答的工作, 且偏微分方程考核的内容难度也较大, 因此这张试卷暂时不做解答.

从笔者的角度来看, 数学系学生大三需要面临很多难度相当大的课程, 偏微分方程就位列其一, 学弟学妹们如果想要学好这门课, 课上的时间是远远不够的, 还需要在课后付出很多的时间. 另外, 由于培养方案的修改, 对于 21 级及之后选择统计学的学生来说, 偏微分方程的分数不再算入核心学分绩, 请同学们在复习时做好时间规划.

想要为这份试卷提供解答的同学, 请通过邮箱与本文档作者联系 (见脚注).

一、**(**20 **分)** 考虑一阶微分方程

$$xu_x + (y + x^2)u_y = u.$$

(1) 找出该方程的通解.

(2) 求该方程的 Cauchy 问题: $u(2, y) = y - 4$.

二、**(**20 **分)** 考虑二阶波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

定义函数 $e = \dfrac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_x^2)$ 和 $p = u_t u_x$.

(a) 如果 u 是二阶连续可微函数, 证明 $e_t = a^2 p_x$ 以及 $p_t = e_x$;

(b) 如果 u 是三阶连续可微函数, 证明 e 和 p 都满足给定的二阶波动方程.

*邮箱地址: yunwen_chen@qq.com

三、(20 **分**) 利用特征线方法求解 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xt} - 12u_{xx} = 0; \\ u(x,0) = \phi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

四、(20 **分**) 利用分离变量法形式地求解混合问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u_t, & 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x); & u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = 0; & u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

证明对所有的 $x \in (0,\pi)$ 都有 $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

五、(20 **分**) 假设 Ω 是平面上的有界光滑区域. 考虑第三边界混合问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \\ u(x,y,0) = \phi(x,y) \quad u_t(x,y,0) = \psi(x,y), \\ (b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu)|_{\partial\Omega} = \mu(x,y,t), \end{cases}$$

其中 b 和 c 是正常数, f, ϕ, ψ 和 μ 是它们定义域上的光滑函数以及 η 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向向量场. 定义它的能量为

$$E(u)(t) = \iint_\Omega [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{a^2c}{b}\int_{\partial\Omega} u^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是曲面上诱导的测度.

(a) 如果函数 f 和 μ 都是零, 证明能量是常数;

(b) 利用 (a) 证明这个问题的解是唯一的.