南京大学数学系概率论期末试题(2020)

2019/2020 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论
院系______班级______ 学号__________姓名______
考试时间 2020/08/15 任课教师 代雄平 宋玉林 考试成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一(15**分**). 1. 陈述"概率空间"的定义。(10分)
2. 设$(\Omega, \mathscr{F})$是一可测空间，函数$\mu\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R}$满足条件：

(a) $\mu(A) \geq 0\ \forall A \in \mathscr{F}$。

(b) $\mu(\Omega) = 1$。

(c) （有限可加性）$\mu(A_1 + \cdots + A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$。

(d) μ是下半连续。

问$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$是否为一概率空间?（不必证明）(5分)

二(15**分**). 1. 证明抽签与顺序无关。(10分)
2. 设随机变量X服从超几何分布，求EX。(5分)

三(10**分**). 设E_n是p_n-型n-重Bernoulli试验，$n = 1, 2, \ldots$，满足$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$。证明Poisson逼近：对$k = 0, 1, 2, \ldots$有$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k; \lambda)$。

四(10**分**). 设$\xi \geq 0$是一连续型的随机变量。证明：$\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$当且仅当

$$P(\xi \geq s + t | \xi \geq s) = P(\xi \geq t) \quad \forall s, t \geq 0。$$

五(10**分**). 设$(\xi,\eta)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。求：1. ξ的分布？2. 在已知$\xi=x$, 条件密度$p_\eta(y|x)=$?

六(10**分**). 设$\xi\sim\Gamma(r_1,\lambda)$, $\eta\sim\Gamma(r_2,\lambda)$且$\xi,\eta$独立。令$\alpha=\xi+\eta$和$\beta=\frac{\xi}{\xi+\eta}$。证明：$\alpha$与$\beta$独立。

七(10**分**). 若随机变量ξ,η独立。证明特征函数满足$f_{\xi+\eta}(t)=f_\xi(t)+f_\eta(t)$。

八(10**分**). 设证明“Bernoulli弱大数定律”：设$\xi_1,\xi_2,\ldots$是i.i.d. 随机变量s.t. $\xi_1\sim B(1,p)$。则

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1\quad \text{as } n\to\infty,\quad \forall\varepsilon>0。$$

九(10**分**). 设 证 明“中 心 极 限 定 理”： 设$X_1, X_2, \ldots$是i.i.d. 随 机 变 量 s.t. $EX_1 = \mu$和$DX_1 = \sigma^2$都是有限数。则对任意$a \in \mathbb{R}$有

$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le a\right) \to \Phi(a) \quad \text{as } n \to \infty。$$