2014 数学分析 A 期中试题

Zavalon from TG

2014.11

一. 基本概念题 ($5\times 8=40$ 分)

1. 求 $\{(-1)^n+\frac{2}{\sqrt{n}}\}$ 的上下极限.

2. 用定义求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

3. 设函数 f 定义在 $I=[a,+\infty)$ 上. 说明 f 在 I 上一致连续和连续的区别与联系.

4. 设函数 f 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义, $\underset{r\to 0^+}{\omega}(x_0):=\lim\limits_{r\to 0^+}\sup\limits_{\substack{x_1,x_2\in\\ [x_0,x_0+\delta)}}|f(x_1)-f(x_2)|$.
若 f 在 x_0 处右连续, 证明: $\underset{r\to 0^+}{\omega}(x_0)=0$.

5. 证明: 无限集 A 为可数集当且仅当 A 与其任一无限真子集间存在双射.

二. 计算题 ($2\times 10=20$ 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$.

三. 证明题 ($4\times 10=40$ 分)

1.(1). 设 A 为集合. 求证: A 为闭集当且仅当 A 中收敛点列的极限都属于 A.
(2). 把 $\mathbb{R}$ 分成 A,B 两个非空集合, 求证:A 中有收敛点列的极限属于 B 或 B 中有收敛点列的极限属于 A.

2. 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 为有界函数. $h(x):=\sup\limits_{t\in[0,x]}f(t)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.
问 $h(x)$ 是否在 $(0,+\infty)$ 上连续?

3. 证明下面两个声明等价:
(1). 设非空集合 A,B 满足 $A\cap B=\mathbb{R}$, 且 A 中所有元素均小于 B 中所有元素, 则 A 有最大数,B 无最小数, 或者 A 无最大数,B 有最小数.
(2). 确界原理成立.

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,$f(0)=0$. 求证: 存在 $M>0$, 使得

$$|f(x)|\le 1+M|x|,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$