Will

2017 数学分析 C

Will　　　　匿名群友
NanJing University　　NanJing University
某平凡的数学讨论群

版本：0.10

日期：2022 年 11 月 6 日

注　意

这套题贡献了" 泥瓦匠都能做的事", 见文档尾部.

一、计算题 (每题 15 分, 共 30 分)

(1) 设 $x=x(u,v), y=y(u,v)$ 由 $x+f(u,y)=0$ 和 $v+g(u,y)=0$ 确定。其中 f,g 是可微函数。求偏导数 x_u, x_v, y_u, y_v.

(2) 设 D 是由 $y=\pi-x, x=\pi, y=\pi$ 围成的区域。求 $\iint_D \frac{\sin x}{x} dxdy$.

二、(10 分) 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0), \\ 0, (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 问 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ 是否相等? 三、(10 分) 设函数 $f:\overline{B_1(0)}\to\mathbb{R}$ 连续, 在边界上恒等于 0 并在 $B_1(0)$ 内部可微。证明 f 在球的内部至少存在一个驻点。

四、(10 分) 若 m 元函数 f 在原点附近连续可微且 $f(0)=0$。证明存在 m 个函数 $g_i, i=1,2,\ldots,m$ 使得 $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=\sum_{i=1}^m x_i g_i(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, 并且满足 $g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$。

五、(10 分) 设 $f(x,y), g(x,y)$ 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上黎曼可积。$\forall(x,y)\in I$, $f(x,y)\leq g(x,y)$, 且 $\int_I f=\int_I g$。证明: 存在零测集 $I_0\subset I$, 使得对 $\forall(x,y)\in I\backslash I_0$, 有 $f(x,y)=g(x,y)$。

六、(10 分) 设 $F(x,y,z)=xy+yz+zx, G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 其中 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$。求 F 在曲面 $G^{-1}(1)$ 上的极小值。

七、(10 分) 证明如下方程

$$\Phi(x,y)=1+\iint_{[0,x]\times[0,y]}\Phi, \forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$$

有唯一的 (Riemann 可积) 的解, 并求之。

八、(10 分) 设 $F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 为 C^1 映射, $\lim_{\|x\|\to\infty}\|F(x)\|=+\infty$, 且 F 的 Jacobian 矩阵处处非奇异。证明: $\forall\eta\in\mathbb{R}^d, F^{-1}(\eta)$ 为非空有界集。

九、(10 分) 设 $D=\left\{u\in\mathbb{R}^2 \mid \|u\|\leq\frac{1}{2}\right\}$, $F:D\to\mathbb{R}$ 为 C^1 映射, $\|\nabla f(0)\|=1, \|\nabla f(u)-\nabla f(v)\|\leq\|u-v\|, \forall u,v\in D$。证明: 存在唯一 $\xi\in D$, 使得 $F(\xi)=\max_D F$。