

南京大学数学系试卷

2018/2019 学年第二学期(期中) 考试形式 闭卷 课程名称 计算方法
 班级_____ 学号_____ 姓名_____
 考试时间 2019.4.28 任课教师_____

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. 填空与分析简述题 ($4 \times 7 = 28$ 分)

1. 当_____时, 精度的损失称为相减相消. 当 $|x|$ 很小时, 计算 $f(x) = \sin(x) - \tan(x)$ 应取 $f(x) =$ _____才能避免相减相消.

2. 如用 $\pi^* = \frac{2198810}{699903}$ 作为 π 的近似值, 分析 π^* 具有几位有效数字?

3. 机器精度 $\varepsilon_{\text{mach}}$ 代表了计算机的单位舍入误差, 它说明了用浮点数系统表示一个非零实数的最大可能的_____; 一个浮点数系的上溢值 OFL 、下溢值 UFL 和机器精度 $\varepsilon_{\text{mach}}$ 的大小关系为_____.

4. 给出在字长为二位十进制的计算机上, 用浮点运算分别从左到右和从右到左计算 $1 + 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.04 + 0.03 + 0.02 + 0.01$ 的结果, 并对你的结果作出解释.

5. 设 I 为 n 阶单位方阵, 则其从属范数 $\|I\| =$ _____. 对任意矩阵 $A \in C^{n \times n}$, 其谱半径 $\rho(A)$ 是该矩阵所有矩阵范数集合的_____.

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, 当 $a \in$ (_____)时, 必有分解式 $A = LL^T$, 其中 L 为下三角阵, 当其对角线元素 l_{ii} 满足条件_____时,这种分解是唯一的.

7. 在一定条件下, 求解非线性方程的Newton迭代法, 对于单根情形其收敛阶数至少为_____; 对于重根情形其收敛阶数是_____, 此时如用修改的Newton法, 其收敛阶数至少是_____; 割线法的收敛阶数为_____.

二. 求解题 ($10 + 14 + 10 = 34$ 分)

1. 用高斯列主元消去法 (给出计算过程) 解方程组 $Ax = b$, 其中 $b = [3, 3, 10]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. 已知方程组 $Ax = b$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 有解 $x = [2 \ 0]^T$.

(1) 求 $\text{Cond}(A)_\infty$.

(2) 求右端有微小扰动的方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的解 $x + \Delta x$;

(3) 计算 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ 结果说明了什么问题?

3. 用牛顿迭代法求方程

$$x^3 - x - 1 = 0$$

在区间(1, 2)内的近似解. 取初值 $x_0 = 1.5$, 要求近似解精确到小数点第五位.

三. 分析证明题 (14 + 10 = 24分)

1. 设 A 是实的 n 阶方阵, 证明

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq \|A\|_2 \leq n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

2. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(p) = 0$, $f'(p) \neq 0$, $f''(p) \neq 0$, $\{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列, 证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2} = -\frac{1}{2} \frac{f''(p)}{f'(p)}.$

四. 数值方法和算法推导题 (14分)

设 $Ax = b$ 是对称的五对角方程组, 即

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_2 & a_3 & & \\ b_2 & c_2 & b_3 & \ddots & \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ & & a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}.$$

试按照 LDL^T 分解推导出其求解算法的计算公式（包括最后回代求解）, 并分析其乘除法的工作量.