

1. 写出 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的一个合成群列 $12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \triangleleft 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \triangleleft 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$
2. 设 $\sigma = (13542)$, $\tau = (14)(325)$ 则 $\sigma\tau\sigma^{-1} = (145)(23)$
3. 设 p 为素数 则 p 阶群是循环群 p 阶群是 Abel 群 p^n 阶群是可解群

1. 任何 n 阶循环群都同构于加法群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 所有无穷循环群都同构于整数加群

2. 把群 G 中元映到其逆元的映射 $\sigma: g \mapsto g^{-1}$ 是群 G 的自同构

3. 设 H 与 K 为群 G 的不同子群且 $|H|$ 与 $|K|$ 均为素数, 则 $H \cap K = \{e\}$

4. 设群 G 有合成群列 $G_0 = \{e\} \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ 与 $H_0 = \{e\} \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$

对 $i = 0, 1, \dots, n-1$, $G_{i+1}/G_i \cong H_{i+1}/H_i$

5. 如果 H 为群 G 的正规子群 则对 $a \in G$, $aH \in G/H$ 生成的子群为 $\langle a \rangle H/H$

6. 设 H 为群 G 的正规子群, 则 G 可解当且仅当 H 与 G/H 都可解

7. 对于群 G , 与群 G' 在 G 中正规, 但一般的 n 阶导群 $G^{(n)}$ 未必是 G 的正规子群

8. 群 G 的子群 H 与 K , HK 为 G 的子群当且仅当 $HK = KH$

9. 对于有限群 G , 如果 p 为 $|G|$ 的素因子, 则 G 有 p 阶元

10. 阶大于 1 的群 G 中必有元素 $a \neq e$ 使得 $b \in G$ ($ax = xa$)

三. 设 H 与 K 为群 G 的子群, $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$ 证明 $H \cup K$ 不是 G 的子群

证: 设 $a \in H$, $a \notin K$, $b \in K$, $b \notin H$ (由 $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$ 知存在这样的 a, b)

下证 $ab \notin H \cup K$.

若 $ab \in H \cup K$, 必有 $x \in H \cup K$ 且 $ab = x$.

若 $x \in H$, 则 $ab = x$ 且 $b = a^{-1}x \in H$ 矛盾.

若 $x \in K$, 则 $ab = x$ 且 $a = xb^{-1} \in K$ 矛盾.

故 $ab \notin H \cup K$ 从而 $H \cup K$ 不是 G 的子群.

四.

设 A, B 为群 G 的有限非空子集且 $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} \neq \emptyset$ 证 $|A| + |B| \leq |G|$

由 $AB \neq \emptyset$ 知 $\exists g \in G$ 且 $g \in AB$, $\Rightarrow gB^{-1} \cap A \neq \emptyset$. 设 $gB^{-1} \cap A = \{a\}$ 则 $g = ab$ 且

故 $|A| + |gB^{-1}| \leq |G|$ 即 $|A| + |B| \leq |G|$