南京大学
常微分方程期中考试

天影　　　　DiMersified

2021 年 12 月 14 日

说明: 我们发现, 南京大学数学系的同学们在考试前出于对试卷难度的误判, 预估的难度偏高则会导致心理压力过大, 考场发挥失常; 偏低则又会导致不认真进行复习, 特别是 ODE 这一科目, 在没有往年卷的情况下, 复习中会产生很多问题. 因此, 整理这一份 2021 年的 ODE 试卷作为参考是十分必要的, 希望它能给学弟学妹们一点帮助. 在分析试题前, 我们要先感谢以下同学为我们抄录试卷原题: 陈韵雯, 陈 165, 天影, 已过不落昏, 汪逸夫, Unicorn.

一、(10 分) 求解微分方程.

$$(2x\sin y + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 + x^2\cos y + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

分析: 这是一个恰当方程, 属于送分题, 可直接秒杀.

解: 由于 $\dfrac{\partial(2x\sin y + 3x^2y)}{\partial y} = 2x\cos y + 3x^2 = \dfrac{\partial(x^3 + x^2\cos y + y^2)}{\partial x}$, 故直接积分得出结果

$$\mathrm{d}\left(x^2\sin y + x^3y + \frac{y^3}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2\sin y + x^3y + \frac{y^3}{3} = C.$$

二、(10 分) 求解微分方程.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$$

分析: 这是一道常规的题目, 可通过坐标平移换元为齐次方程. 此题主要考察计算.

解:

$$\text{先令}\begin{cases}2y - x + 5 = 0\\ 2x - y - 4 = 0\end{cases},\ \text{解得}\begin{cases}x = 1\\ y = -2\end{cases}.\ \text{作换元}\begin{cases}u = x - 1\\ v = y + 2\end{cases},\ \text{得}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2v-u}{2u-v}\Rightarrow(2v-u)\,\mathrm{d}u+(v-2u)\,\mathrm{d}v=0. \tag{2.1}$$

两边同乘积分因子 $\dfrac{1}{v^2-u^2}$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{2v-u}{v^2-u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{v-2u}{v^2-u^2}\,\mathrm{d}v=0\Rightarrow\mathrm{d}\Big(\ln\Big|\frac{(v+u)^3}{v-u}\Big|\Big)=0\\&\Rightarrow\ln{(v+u)^3}=\ln{(C(v-u))}\Rightarrow(x+y+1)^3=C(y-x+3)\ (\text{通解})\end{aligned}$$

还有特解 $y=x-3$ (当 $u=v$ 时).

或者在得到 (2.1) 后用换元 $v=tu$ 得

$$(t^2-1)\,\mathrm{d}u+u(t-2)\,\mathrm{d}t=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u+\frac{t-2}{t^2-1}\,\mathrm{d}u=0\ \Rightarrow\ \mathrm{d}\Big(\ln\Big|\frac{u^2(t+1)^3}{t-1}\Big|\Big)=0$$

即得到与前述方法相同的结果.

三、(10 分) 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\cos x$ 的 2π 周期解.

分析: 容易看出这是一个标准的一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的形式, 可直接使用求解公式

$$y=e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\Big(C+\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\Big).$$

解: 使用求解公式得

$$y=e^{-2x}\Big[\frac{e^{2x}}{5}(2\cos x+\sin x)+C\Big]=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x+Ce^{-2x}.$$

由于要求 2π 周期解, 因此取 $x=0$ 和 $x=2\pi$, y 值相等

$$\frac{2}{5}+C=\frac{2}{5}+Ce^{-4\pi}\Rightarrow C=0,$$

因此, 方程的 2π 周期解为

$$y=\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

四、(10 分) 求解微分方程.

$$(x^3y-2y^2)\,\mathrm{d}x+x^4\,\mathrm{d}y=0$$

分析: 显然这个方程并不是一个恰当方程, 但是可以通过等式两边同乘积分因子的方法凑出恰当方程.

解: 先在等式两边同乘积分因子 $\dfrac{1}{x^5y^2}$, 得到

$$\mathrm{d}\Big(-\frac{1}{xy}+\frac{1}{2x^4}\Big)=0\Rightarrow -\frac{1}{xy}+\frac{1}{2x^4}=C.$$

和特解 $x=0$; $y=0$.

五、(10 分) 证明微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^4+y^2$ 的任一解的存在区间都是有界的.

分析: 有些人可能会疑惑: 这里的 $f(x,y)=x^4+y^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 是连续可导的, 那么由解的延伸定理不是可以推出任一解都可以延伸至边界吗? 这句话本身没有错误, 但定理所述 "边界" 或 "无限远" 的含义是, 任给 $\mathbb{R}^2$ 内的一个有界闭区域 G, 使初值在 G 内的任一解都可以达到其边界. 即便是每个解在 x 方向上都有界, 而在 y 方向上趋于 ∞, 这样也可以逾越 $\mathbb{R}^2$ 内任一有界闭区域, 因此不与定理相悖.

证明: (反证法) 假设该方程的某个解 $y=\varphi(x)$ 的右侧存在区间为 $[x_0,+\infty)$, 则显然存在 $\beta>\max\{4\pi,x_0+4\pi\}$, 使得 $\varphi(x)$ 在 $[\beta-2\pi,\beta]$ 上存在. 当 $x\in[\beta-2\pi,\beta]$ 时, 由于 $\beta-2\pi>1$, 有

$$\begin{aligned}
&\varphi'(x)=x^4+\varphi^2(x)>1+\varphi^2(x)\\
\Rightarrow\quad &\int_{\beta-2\pi}^{\beta}\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,\mathrm{d}x>\int_{\beta-2\pi}^{\beta}1\,\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\quad &2\pi<\arctan\varphi(\beta)-\arctan\varphi(\beta-2\pi)<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi
\end{aligned}$$

导出矛盾, 从而该微分方程任一解的右侧存在区间有界. 同理可证任一解的左侧存在区间有界, 即得结论. □

六、(10 分) 用参数法求解微分方程 $2y^2+5\Big(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2=4$.

分析: 直接用参数法换元求解即可.

解: 设 $\begin{cases}\sqrt{2y^2}=2\cos t\\ \sqrt{5\Big(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2}=2\sin t\end{cases}$, 则 $\begin{cases}y=\sqrt{2}\cos t\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin t\end{cases}$, 故

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\\
\Rightarrow\quad &-\sqrt{2}\sin t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t\\
\Rightarrow\quad &x=\frac{\sqrt{10}}{2}t+C\ (\text{通解})
\end{aligned}$$

还有特解 $y = \pm\sqrt{2}$(即 $\sin t = 0$ 时). 综上, 微分方程有通解 $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}t + C \\ y = \sqrt{2}\cos t \end{cases}$ 和特解 $y = \pm\sqrt{2}$. 用非参数的写法即为通解 $y = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}x + C\right)$ 与特解 $y = \pm\sqrt{2}$.

七、(10 分) 用参数法求解微分方程 $y = 2x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$ 的奇解.

分析: 使用判别式求出 p-判别曲线后, 还需要验证其是否为奇解.

解: 令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$, 则由 p-判别式得

$$\begin{cases} F(x,y,p) := y - 2xp - p^2 = 0 \\ F'_p(x,y,p) = -2x - 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2.$$

但容易验证 $y = -x^2$ 并不是该微分方程的解, 从而不是奇解. 因此, 该微分方程没有奇解.

八、(15 分) 求解微分方程.

$$x = e^{y''} + y''$$

分析: 此题特征明显, 方程只显含 y'' 和 x, 因此可以设 $y'' = p$ 来做.

解: 设 $y'' = p$, 则有 $\begin{cases} x = e^p + p \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = p \end{cases}$, 所以 $\mathrm{d}x = (e^p + 1)\,\mathrm{d}p$, 所以

$$\begin{aligned} p = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{1}{e^p+1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{1}{e^p+1}\right) \\ &= \frac{1}{(e^p+1)^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}p^2} - \frac{e^p}{(e^p+1)^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}. \end{aligned}$$

令 $t = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} - \frac{e^p}{e^p+1}t = (e^p+1)^2 p.$$

可以发现这是一个一阶非齐次线性微分方程, 因此直接代入求解公式

$$
\begin{aligned}
& t = e^{\int \frac{e^p}{e^p+1}\,\mathrm{d}p}\left[\int (e^p+1)^2 e^{-\int \frac{e^p}{e^p+1}\,\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p + C_1\right] \\
\Rightarrow\quad & t = (e^p+1)\Big[(p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + C_1\Big] \\
\Rightarrow\quad & \mathrm{d}y = (e^p+1)\Big[(p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + C_1\Big]\,\mathrm{d}p \\
\Rightarrow\quad & y = \Big(\frac{p}{2}-\frac{3}{4}\Big)e^{2p} + \Big(C_1 - 1 + \frac{1}{2}p^2\Big)e^p + \frac{1}{6}p^3 + C_1 p + C_2.
\end{aligned}
$$

故通解为

$$
\begin{cases}
x = e^p + p \\
y = \Big(\frac{p}{2}-\frac{3}{4}\Big)e^{2p} + \Big(C_1 - 1 + \frac{1}{2}p^2\Big)e^p + \frac{1}{6}p^3 + C_1 p + C_2.
\end{cases}
$$

或者可以用 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 + \int p\,\mathrm{d}x = C_1 + \int p(e^p+1)\,\mathrm{d}p,\ \ y = C_2 + \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(e^p+1)\,\mathrm{d}p$ 的方法得出同样结果.

九、(15 分)

(1) 设

$$\phi(t) \le \delta \int_a^t \psi(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s + \varepsilon,\ \ a \le t \le b,$$

且

$$\phi(t), \psi(t) \in C^0[a,b],\ \ \phi(t) \ge 0,\ \ \psi(t) \ge 0,\ \ \delta > 0,\ \ \varepsilon > 0,$$

证明:

$$\phi(t) \le \varepsilon e^{\delta \int_a^t \psi(s)\,\mathrm{d}s}.$$

(2) $f(t,\mathbf{Y})$ **关于** $t,\mathbf{Y}$ **连续, 关于** $\mathbf{Y}$ **李普希兹连续 (李普希兹常数** L**).**
初值问题:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{Y}} = f(t,\mathbf{Y}), \mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_0 \text{ 的解} \mathbf{Y}_1(t) \text{, 存在区间} [a,b], \\
&\dot{\mathbf{Y}} = f(t,\mathbf{Y}), \mathbf{Y}(a) = \mathbf{Y}_0 + \eta \text{ 的解} \mathbf{Y}_2(t) \text{, 存在区间} [a,b],
\end{aligned}
$$

证明: 若 $\|\eta\| \le \varepsilon$**, 则** $\|\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_2(t)\| \le \varepsilon e^{L(t-a)}$, $t \in [a,b]$.

分析: 在解答第一问时, 下面提供的两种方法都比较直观:
第一种方法: 把原式右边看成一个函数, 然后考虑右边函数的导数和左边函数之间的关系;
第二种方法: 可以发现条件中 $\phi(t)$ 在不等式两边都有出现, 且一个在积分号中, 与皮卡序列的构造有相似性, 因此使用皮卡序列. 步骤虽然比第一种方法更麻烦, 但思路其实也很清晰.

第二问借助李普希兹条件和第一问结论就可以做出来.

(1) **证明**: 这里提供两种方法.

方法一. 设 $F(t)=\delta\int_a^t\psi(s)\phi(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon$, 则由 $\phi(t)\le F(t)$ 知 $F'(t)=\delta\psi(t)\phi(t)\le\delta\psi(t)F(t)$. 由积分因子法知 $\left(e^{-\delta\int_a^t\psi(s)\,\mathrm{d}s}F(t)\right)'\le 0$. 从而当 $a\le t\le b$ 时,

$$e^{-\delta\int_a^t\psi(s)\,\mathrm{d}s}F(t)\le e^{-\delta\int_a^a\psi(s)\,\mathrm{d}s}F(a)=\varepsilon,$$

故有

$$\phi(t)\le F(t)\le\varepsilon e^{\delta\int_a^t\psi(s)\,\mathrm{d}s}.$$

方法二. 按如下方法构造皮卡序列:

$$f_0(t)=\phi(t),\quad f_{n+1}(t)=\delta\int_a^t\psi(s)f_n(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon\ (n\in\mathbb{N}),$$

由 δ 和 $\psi(t)$ 的非负性知, 若 $f(t)\le g(t)$, 则 $\delta\int_a^t\psi(s)f(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon\le\delta\int_a^t\psi(s)g(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon$. 由此以及题目条件可得

$$\phi(t)=f_0(t)\le f_1(t)\le f_2(t)\le\cdots\le f_n(t)\le\cdots \tag{9.1}$$

下面证明 $f_n(t)$ 一致收敛. 设 $\sup\limits_{x\in[a,b]}\psi(x)=M$, $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_1(x)-f_0(x)|=L$, 则

$$\begin{aligned}\left|f_{n+1}(t)-f_n(t)\right|=\delta\left|\int_a^t\psi(s)\big(f_n(s)-f_{n-1}(s)\big)\,\mathrm{d}s\right|&\le\delta\int_a^t\psi(s)\left|f_n(s)-f_{n-1}(s)\right|\mathrm{d}s\\&\le M\delta\int_a^t\left|f_n(s)-f_{n-1}(s)\right|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

由数学归纳法易得 $\left|f_{n+1}(t)-f_n(t)\right|\le L\dfrac{(M\delta(t-a))^n}{n!}\le L\dfrac{(M\delta(b-a))^n}{n!}$. 从而对任意 $\phi(t)$, 都有 $f_n(t)$ 在 $t\in[a,b]$ 上一致收敛. 设其收敛到 $f(t)$, 则由皮卡序列的构造可知

$$f(t)=\delta\int_a^t\psi(s)f(s)\,\mathrm{d}s+\varepsilon. \tag{9.2}$$

对两边同时求导得 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\delta\psi(t)f(t)$, 由积分因子法和 (9.2) 式所给出的初值条件 $f(a)=\varepsilon$ 知 $f(t)=\varepsilon e^{\delta\int_a^t\psi(s)\,\mathrm{d}s}$, 由 (9.1) 式即知结论成立. □

(2) **证明**: 原方程 $\dot{\mathbf{Y}}=f(t,\mathbf{Y})$ 可写作 $\mathbf{Y}(t)=\int_a^t f(s,\mathbf{Y}(s))\,\mathrm{d}s$, 所以

$$\|\mathbf{Y}_1(t)-\mathbf{Y}_2(t)\|=\left\|\int_a^t f(s,\mathbf{Y}_1(s))-f(s,\mathbf{Y}_2(s))\,\mathrm{d}s\right\|\le\int_a^t L\|\mathbf{Y}_1(s)-\mathbf{Y}_2(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

设 $\phi(t)=\|\mathbf{Y}_1(t)-\mathbf{Y}_2(t)\|$, 则由第 (1) 问知结论成立. □