$h\in H\setminus K$　　若 $hk\in H\cup K$

$k\in K\setminus H$　　则 $hk\in H$ 或 $hk\in K$

$h\in H\cup K$　　$k\in h^{-1}H=H$ ~~矛盾~~

$k\in H\cup K$　　$h\in k^{-1}K=$ 矛盾

(2) 设 H 与 K 为群 G 的子群，$H\nsubseteq K$ 且 $K\nsubseteq H$，证明 $H\cup K$ 不是 G 的子群。

取 $a\in H$ 但 $a\notin K$　$b\in K$ 但 $b\notin H$

则 $ab\notin H$　$ab\notin K$　∴

否则 $ab\in H$　$ab\in K$　　　ab 不 对乘法不封闭

则 $b\in a^{-1}H=H$ 矛盾　$a\in Kb^{-1}=K$ 矛盾　∴ $H\cup K$ 对 乘法不封闭 不是子群

四、（10 分）设 G 为群，$K\leqslant H\leqslant G$ 且 $L\leqslant G$. 证明 $H\cap KL=K(H\cap L)$.

∵ $K\leq H$ 故 $KH\cap KL=H\cap KL$.

$\forall a\in K(H\cap L)$ $\exists k\in K, h\in H\cap L$ s.t. $a=kh$.

则 $a\in KH$　$a\in KL$ ∴故 $a\in KH\cap KL$.

∴ $K(H\cap L)\subseteq KH\cap KL$　　$l\in L$.

$\forall a\in KH\cap KL$　$\exists k_1,k_2\in K$　$h\in H$ ~~$l\in L$~~

s.t. $a=k_1h=k_2l$

∴ $l=$ ~~k_2k_2~~ $k_2^{-1}k_1h\in KH=H$

故 $l\in H\cap L$

故 $a=k_2l\in K(H\cap L)$

$K(H\cap L)\supseteq KH\cap KL$

∴ $H\cap KL=KH\cap KL=K(H\cap L)$

五、（每小题 5 分，共 15 分）对于群 G 中元 a,x 让 $\sigma_a(x)=axa^{-1}$. 试证明

(1) 对每个 $a\in G$，σ_a 属于群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$.

∵ $\sigma_a(x)\sigma_a(y)=axa^{-1}aya^{-1}=axya^{-1}=\sigma_a(xy)$

故 σ_a 为同态

又 $\sigma_a(x)=\sigma_a(y)\Leftrightarrow axa^{-1}=aya^{-1}\Leftrightarrow x=y$

故 σ_a 为单射 且定义合理

$\forall g\in G$.　$\sigma_a(a^{-1}ga)=g$　故 σ_a 为满射　故 σ_a 为 $G\to G$ 的双射

∴ $\sigma_a\in\mathrm{Aut}(G)$

(2) 映射 $\sigma: a\mapsto\sigma_a$ 是群 G 到 $\mathrm{Aut}(G)$ 的同态，即 $a,b\in G$ 时 $\sigma_{ab}=\sigma_a\sigma_b$.

$\forall x\in G$　$\sigma_{ab}(x)=(ab)x(ab)^{-1}=abxb^{-1}a^{-1}=\sigma_a(bxb^{-1})=\sigma_a\sigma_b(x)$

即 $\sigma_{ab}=\sigma_a\sigma_b$

$\ker\sigma\trianglelefteq G$.　$\mathrm{Im}\,\sigma\leqslant G$　$G/\ker\sigma\cong\mathrm{Im}\,\sigma$

σ $G\to\mathrm{Aut}\,G$ 上 G 到 $\mathrm{Aut}\,G$ 上同态

(3) 利用 (2) 及同态基本定理来导出 $G/Z(G)\cong\mathrm{Inn}(G)=\{\sigma_a: a\in G\}\leqslant\mathrm{Aut}(G)$.

$\sigma_a=I$ (I 为恒等映射)　P19

$\Rightarrow\forall g\in G$　$aga^{-1}=g$

$\Rightarrow a\in Z(G)$

即 $\ker(\sigma)=Z(G)$

$Z(G)=\{g\in G:\forall x\in G\ gx=xg\}$

$\ker(\sigma)=\{\sigma_e\}$

$=$

$\forall\sigma_a,\sigma_b\in\mathrm{Inn}\,G$　封闭 $\sigma_{ab}=\sigma_a\sigma_b\in\mathrm{Inn}\,G$

$\forall x\in G$　$\sigma_e(x)=exe^{-1}=x$　故 $\sigma_e(x)\in\mathrm{Inn}\,G$

~~$\forall\sigma_a\sigma_b=\sigma_{ab}$~~

$\forall\sigma_a\in\mathrm{Inn}\,G$　$\forall x\in G$

$\sigma_{a^{-1}}\sigma_a(x)=x=\sigma_e(x)$