南京大学数学系试卷

2019/2020 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法（B 卷）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

考试时间 2020.8.12 任课教师 ________ 考试成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 $(22' = 2' \times 3 + 4' \times 4$ 分)

1. 设 $f(x) = 2^x$, 步长 $h = 1$, 则 $\Delta^3 f(n) =$ ___ 2^n ___。

2. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个相异的插值节点, $l_i(x)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 为 Lagrange 基本多项式, 则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) =$ ___ 1 ___。

3. 假设函数 $f(x) \in C^6[a, b]$, 且 $x_i = a + (i-1)h, h = (b-a)/n, i = 1, 2, \cdots, n+1$, 且 $f'(a) = f'(b)$。则利用复合梯形公式计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差余项为 $O(h^\eta)$, 其中 $\eta =$ ___ 4 ___。

4. 利用复合梯形公式计算积分时, $h = \frac{b-a}{2^{m-1}}$, 若把区间 $[a, b]$ 分别进行 2^{m-1} 等分和 2^{m-2} 等分可得到积分结果 $T_{m,1}$ 和 $T_{m-1,1}$, 则通过 Romberg 积分法可进一步提高精度, 即取 $T_{m,2}=$ ___ $\frac{4T_{m,1} - T_{m-1,1}}{3}$ ___, 记此时离散误差为 $O(h^\eta), \eta =$ ___ 4 ___

5. 设 $f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 4$, 则 $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7] =$ ___ 7 ___, $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7, 2^8] =$ ___ 0 ___.

6. 设 I 为 n 阶单位方阵, 则其从属范数 $\|I\| =$ ___ 1 ___. 谱半径 $\rho(A)$ 是 $C^{n\times n}$ 中矩阵范数 $\|A\|$ 的 ___ 下确界 ___.

7. 非奇异矩阵一定存在 LU 分解吗？如果一定存在, 给出理由, 如果不一定存在, 请举出反例.

   不一定, 例如 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 既不存在 Doolittle 分解, 也不存在 Crout 分解.

二. (10 分) 应用 Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

解:

$S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 10$, $\frac{|a_{11}|}{S_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{|a_{21}|}{S_2} = \frac{3}{4}$, $\frac{|a_{31}|}{S_3} = \frac{1}{5}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xRightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} l_{21} = \frac{1}{3}, l_{31} = \frac{2}{3} \text{ 消元 } \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 2 \\ 2/3 & 22/3 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$\frac{|a_{22}|}{S_2} = \frac{1}{4}$, $\frac{|a_{32}|}{S_3} = \frac{11}{15}$, 故第三行为第二次消元的主行,

$$\xRightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & 2 \end{bmatrix} l_{32} = \frac{1}{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 1/11 & 7/11 & 14/11 \end{bmatrix},$$

回代得 $x_3 = 2$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.

三. (10 分) 在 $-4 \le x \le 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表, 若用分段二次插值求 $f(x_i)$ 的近似值, 要使截断误差不超过 $\frac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 问使用函数表的步长 h 应满足什么条件？

解：以 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 为节点做二次插值多项式, 则插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

式中 $x = x_i + th$ 则 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 分别对应于 $t = -1, 0, 1$, 且 $(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1}) = (t-1)t(t+1)h^3$ 则

$$\begin{aligned} |R_2(x)| &= \left|\frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\right| \\ &\le \frac{e^4}{6} \max_{x_{i-1} \le x \le x_{i+1}} |(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})| \\ &\le \frac{e^4}{6} h^3 \max_{-1 \le t \le 1} |(t-1)t(t+1)| \\ &\le \frac{e^4}{6} h^3 \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{e^4}{9\sqrt{3}} h^3 \end{aligned}$$

令 $\frac{e^4}{9\sqrt{3}} h^3 \le \frac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 则 $h \le 0.5$

四. (10 分) 判断能否使用有限个节点 Gauss 积分方法计算得到 $\int_1^2 \frac{4x^3 - 16x^2 + 21x - 9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} \mathrm{d}x$ 的精确解, 并给出理由或者计算过程。

解：令 $x = \frac{y+3}{2}$, 将积分区间变换到 $[-1, 1]$,

$\int_1^2 \frac{4x^3 - 16x^2 + 21x - 9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{y^3 + y^2}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{dy}$

令权函数 $w(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, 则 $f(y) = y^3 + y^2$ 为三次函数, 因此本题只需取二次 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点进行 Gauss 积分即可得到精确解。

由 Chebyshev 多项式零点公式：$y_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, k = 0, 1, \cdots$ 得

$y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $\int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \approx A_0 f(\frac{\sqrt{2}}{2}) + A_1 f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$A_0 = A_1 = \frac{\pi}{2}$ 则 $\int_{-1}^1 \frac{f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy \approx \frac{\pi}{2} \left[f(\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(-\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$

因此原积分 $= \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{\pi}{4}$

五. (12 分) 已知 $x_0=\frac{1}{4}, x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{4}$.。推导以这三个点为求积节点在 $[0,1]$ 上地插值型求积公式；分析求积公式的代数精度。

解:

过这三点的插值多项式为

$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$

则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^1 L_2(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=0}^{2} A_k f(x_k)$，其中

$A_0=\int_0^1 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

$A_1=\int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$

$A_2=\int_0^1 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$

所以求积公式为

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{2}{3}f(\frac{1}{4})-\frac{1}{3}f(\frac{1}{2})+\frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$

上述积分公式至少具有二次精度，将 $f(x)=x^3, x^4$ 分别代入验证，可得对 $f(x)=x^3$ 精确成立，对 $f(x)=x^4$ 数值积分与精确积分不能严格相等，故积分公式具有三次代数精度。

六. (12 分) 确定下列求积公式中的参数使其精度尽量高，并且指出其代数精度。并基于此积分公式给出复合型积分公式。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\alpha(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

解：求积公式中只有一个待定参数 α，当 $f(x)=1$，左边 $=b-a=$ 右边；

当 $f(x)=x$，左边 $=\frac{b^2-a^2}{2}=$ 右边；

故令 $f(x)=x^2$ 时求积公式准确成立，即

$\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3}=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)+\alpha(b-a)^2(2a-2b)$, 解得

$a=\frac{1}{12}$.

将 $f(x)=x^3$ 代入上述求积公式，有

左边 $=\frac{b^4-a^4}{4}=$ 右边；

当 $f(x)=x^4$，左边 $=\frac{b^5-a^5}{5}\neq$ 右边；

所以代数精度为 3.

将 $[a,b]$ 作 n 等分，记 $h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, 0\le i\le n.$，复化求积公式为

$\int_{\mathrm{a}}^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]+\frac{h^2}{12}\left[f'(x_i)-f'(x_{i+1})\right]\right\}$

$=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]+\frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]$

七. (10 分) 设 $f(x)=e^{x^2}$. 任取 $a<b$, 证明应用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所得结果比准确值大，并说明几何意义。

证明：$f''(x)=(e^{x^2}\cdot 2x)'=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}>0, \quad \forall x$

梯形公式 $I_1(f)=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

其离散误差为

$E_1(f)=I(f)-I_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \quad \xi\in[a,b]$

由 $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, 故有 $I(f)-I_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)<0, \quad \xi\in[a,b]$

即梯形公式计算结果比实际结果大。

$f(x)$ 为上凹函数，利用直边代替曲边计算由 $x=a,b$ 和曲线以及 x 轴围成的面积时，计算结果大于实际面积。

八. (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足插值条件，

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项 $f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

解:

设 $H_3(x)=N_2(x)+A(x-a)^3$，其中 $N_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$，

显然 $H_3(a)=f(a)$，$H_3'(a)=f'(a)$，$H_3''(a)=f''(a)$，

又 $H_3''(x)=f''(a)+6A(x-a)$，将 $H_3''(b)=f''(b)$ 代入得 $A=\dfrac{1}{6}\dfrac{f''(b)-f''(a)}{b-a}$，

从而得

$$H_3(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}(x-a)^3,$$

设 $r(x)=f(x)-H_3(x)$，a 为三重根，

记 $w(x)=(x-a)^3(x-c)$，设 $w''(b)=0$，则可得 $c=2b-a$，

于是 $r(x)=k(x)w(x)$，作辅助函数 $g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)w(t)$，

显然 $g(a)$，$g'(a)$，$g''(a)$，$g(x)$，$g''(b)$ 均为零,

反复应用 Roll 定理得 $\xi\in[a,b]$，使得 $g^{(4)}(\xi)=0$，

从而推出 $r(x)=\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)^3(x-2b+a)$.