南京大学数学系期末试卷

2019/2020 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2020.8.19 任课教师________ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断下列叙述是否正确; 正确的在 ( ) 内打 $\surd$; 错误的在 ( ) 内打 $\times$. 每小题 2 分, 共 20 分.

1. 设 V_1, V_2, V_3 是线性空间 V 的子空间, 且 $V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3$, 则 $V_2 = V_3$. ( )

2. 设 $f(X) = X^T AX$ 是 n 元实二次型, 则 $f(X) = 0$ 的解集合是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. ( )

3. 设 A 是 n 阶复方阵, 如果 $A^2 + A - E = 0$, 则 A 可对角化. ( )

4. 设 A 是 n 阶实对称方阵，如果 $A = B^2$, 则 B 也是实对称的. ( )

5. 设 F 是一个数域, $f(\lambda)$ 是一个首一 $n(\geqslant 1)$ 次多项式, 则一定存在域 F 上的一个 n 阶方阵 A, 使得 A 的最小多项式为 $f(\lambda)$. ( )

6. 设 A, B 是两个 n 阶实对称方阵. 如果 A, B 相似, 那么它们一定正交相似. ( )

7. 正交矩阵在复数域上可以对角化. ( )

8. 设 A 为复对称方阵, 则存在矩阵 T 使得 $A = T'T$. ( )

9. 设 $f(\alpha, \beta)$ 是 V 上的非退化对称双线性函数, W 是 V 的子空间, 令

$$W^{\perp} = \{\alpha \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\},$$

则 $W \oplus W^{\perp} = V$. ( )

10. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $|A| = 0$, 且其他顺序主子式都是正的, 则 A 是半正定的. ( )

二. 填空题，每小题 4 分, 共 20 分.

1. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & a & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a =$ ____; $b =$ ____.

2. 设 4 阶数字矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda + 1)^3$. 则 A 的不变因子组为____________.

3. 假设 $A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $A^{2020} =$ ____________.

4. 设 $V = \mathbb{R}[x]_3$, 给定 V 上线性函数 $L_1(f(x)) = f(1)$, $L_2(f(x)) = f(2)$, $L_3(f(x)) = f(3)$, 则 V 中与 L_1, L_2, L_3 对偶的基为____________________.

5. 设 V 为 n 维线性空间, $\mathscr{A} \in \mathrm{End}\, V$, $\alpha \in V$, $\alpha, \mathscr{A}\alpha, \cdots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha$ 线性无关, 且

$$\mathscr{A}^n\alpha = a_0\alpha + a_1\mathscr{A}\alpha + \cdots + a_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\alpha,$$

则 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为____________________.

三. (20 分) 设 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 为实二次型.

(1) (15 分) 求正交线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 将 f 化为标准形;

(2) (5 分) 求 f 的规范形, 并求 f 的正、负惯性指数和符号差.

四. (20 分) 设 $\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(1,1,1,0),\alpha_3=(1,1,0,0),\alpha=(1,2,3,4)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的 4 个向量. 求 α 到子空间 $V=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的距离.

五. (15 分) 设 $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}|A=A'\}$, 定义 W 上的二元函数为

$$f(A,B)=\mathrm{tr}(AB).$$

(1) (10 分) 证明: $f(A,B)$ 是 W 上的内积;

(2) (5 分) 设 $S=\{A\in W|\,\mathrm{tr}(A)=0\}$, 试求 S 在 W 中的正交补 $S^{\perp}$.

六. (15 分) (1) (10 分) 证明实矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是相似的.

(2) (5 分) 证明 $A,\ B$ 不正交相似.

七. (10 分) 设 $A,\ B$ 都是 n 阶实对称矩阵且 B 正定, 证明: A 正定当且仅当 AB 的特征值全大于零.