南京大学

数值计算与实验 I 期末考试

天影　　　DiMersified

2022 年 9 月 11 日

评语: 这张试卷是徐勤武老师出的, 内容为《数值计算方法》下册的第十章和第十二章, 也有部分期中考试的内容. 整体来说, 大部分题目 (包括新题) 都主要考察计算, 难度都不大, 只要对书上各种定义和定理比较熟悉就会做. 因此, 有同学称这张试卷的题目做起来就像高中题, 题目难度由此可见一斑.

一、(每小题 3 分, 共 12 分) 填空题.

1. 初值问题 $y' = f(t, y)$, $y(0) = \eta_0$ 的显式单步法 $y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$; $y_0 = \eta_0$ 的相容性条件为 ____________________.

2. 一个 p 进制的规格化浮点数系统 F 的字长为 t, 阶的范围 $-L \le J \le U$, p, t, L, U 均为正整数, 则规格化浮点数系统 F 中共有 ____________ 个浮点数.

3. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的零次最佳一致逼近多项式为 __________________________.

4. 最为常用的 Runge–Kutta 方法是四级四阶方法, 又称为经典的 Runge–Kutta 方法, 其计算公式为 ________________________________ ________________________________ _________________________ _________________________ _________________________.

分析: 这四道题都是考察基本概念的掌握, 有书上作业题以及往年卷上原题, 甚至还有一道默写题. 难度不大, 因此这里只提供答案.

答案:

1. $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$.
2. $2(L + U + 1)p^{t-1}(p - 1) + 1$.
3. $\dfrac{M + m}{2}$, 其中 $M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x), m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
4. $$K_1 = f(t_n, y_n), \quad K_2 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hK_1\Big), \quad K_3 = f\Big(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hK_2\Big),$$
$$K_4 = f(t_n + h, y_n + hK_3), \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

二、**(8 分)** 求二级二阶隐式 Runge-Kutta 法

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2), \\ K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2). \end{aligned}$$

的绝对稳定区间.

分析: 此题的考察目标主要是绝对稳定区间的定义, 其余的部分主要代入计算即可, 计算量较小且教材上有类似例题, 难度较低.

首先, 给出教材上对于**绝对稳定**的定义: 对给定的微分方程和给定的步长 h, 如果由单步法 (显式或隐式) 计算 y_n 时有误差 δ, 即计算得 $\tilde{y}_n = y_n + \delta$, 而引起其后值 y_m $(m > n)$ 的变化小于 δ（即 $|\tilde{y}_m - y_m| < \delta$）, 则说该单步法是**绝对稳定**的.

其次, 一般来说, **绝对稳定区间**只限于对典型微分方程 $y' = \mu y$ 求取, 其中 μ 为复常数 (若无特殊情况, 认为 μ 为实数). 若对于所有的 $\mu h \in (\alpha, \beta)$, 单步法都绝对稳定, 则称 (α, β) 为**绝对稳定区间**.

最后, 根据上述定义, 可以轻易看出, 若要求取某一单步法的绝对稳定区间, 只需令 $f(t, y) = \mu y$, 然后利用下一项误差比该项误差小这一条件, 推出 μh 的取值范围.

解: 令 $f(t, y) = \mu y$, 则该单步法化为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(\mu y_n + K_2), \\ K_2 &= \mu y_n + \frac{\mu h}{2}(\mu y_n + K_2), \end{aligned}$$

得到 $K_2 = \dfrac{2 + \mu h}{2 - \mu h}\mu y_n$. 将 K_2 代入, 则有 $y_{n+1} = \dfrac{2 + \mu h}{2 - \mu h} y_n$.

现引入摄动 δ, 即 $\tilde{y}_n = y_n + \delta$, 则

$$\tilde{y}_{n+1} = \frac{2 + \mu h}{2 - \mu h}\tilde{y}_n = y_{n+1} + \frac{2 + \mu h}{2 - \mu h}(\tilde{y}_n - y_n),$$

从而有

$$|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}| = \left|\frac{2 + \mu h}{2 - \mu h}\right| |\tilde{y}_n - y_n|.$$

可以看出, 满足误差逐项减小条件当且仅当 $\left|\dfrac{2 + \mu h}{2 - \mu h}\right| < 1$, 解之可得 $\mu h \in (-\infty, 0)$. 根据定义, 该单步法的绝对稳定区间为 $(-\infty, 0)$.

三、**(8 分)** 作适当变换, 把积分

$$\int_1^3 x\sqrt{4x - x^2 - 3}\,\mathrm{d}x$$

化为能应用 n 点 Gauss–Chebyshev 求积公式的形式, 并利用 Gauss–Chebyshev 求积公式计算其精确值.

分析: 此题考察的知识点是对积分的 Gauss–Chebyshev 求积公式, 该类题型已经在很多往年卷中重复出现, 且难度较低, 只要保证计算不出错即可.

解: 先对被积函数换元, 使其积分上下限为 -1 和 1, 即令 $x=t+2$, 有

$$\int_1^3 x\sqrt{4x-x^2-3}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=t+2} \int_{-1}^1 (t+2)\sqrt{4(t+2)-(t+2)^2-3}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{(t+2)(1-t^2)}{\sqrt{(1-t^2)}}\,\mathrm{d}t.$$

因此, 令 $f(t)=(t+2)(1-t^2)=-t^3-2t^2+t+2$, 为三次多项式. 由于 n 阶 Gauss–Chebyshev 求积公式的代数精确度为 $2n-1$, 故使用二阶 Gauss–Chebyshev 求积公式即可. 取

$$x_1=\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

则积分的精确值为

$$\int_1^3 x\sqrt{4x-x^2-3}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\pi.$$

四、(10 分) 求次数不大于 3 的多项式 $p(x)$, 使其满足条件

$$p(0)=0,\quad p'(0)=1,\quad p(1)=1,\quad p'(1)=2.$$

分析: 此题可以采用 Hermite 插值公式正常代入, 但因为该插值公式计算的复杂性, 这样的方式并不是最佳解法. 首先, 我们可以对一般的三次多项式利用待定系数法求解. 更进一步, 假如我们发现了多项式 $f(x)=x$ 满足本题四个条件中的三个, 那么本题的解法就可以更简单, 考场上甚至可以在一分钟之内完成.

解: 方法一: Hermite 插值公式

回顾 Hermite 插值公式的计算方法. 已知函数 $f(x)$ 在插值基点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值分别为 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)$, 一阶导数值分别为 $f'(x_0),f'(x_1),\cdots,f'(x_n)$. 若要构造不超过 $2n+1$ 次的多项式 $H_{2n+1}(x)$, 使得

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad H_{2n+1}'(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n,$$

我们只需构造一系列不超过 $2n+1$ 次的多项式 $A_i(x)$, $B_i(x)$, $i=0,1,\cdots,n$, 使得

$$A_i(x_j)=\delta_{ij},\quad A_i'(x_j)=0,\quad B_i(x_j)=0,\quad B_i'(x_j)=\delta_{ij},\quad i,j=0,1,\cdots,n,$$

这样, 取 $H_{2n+1}(x)=\sum\limits_{i=0}^n f(x_i)A_i(x)+\sum\limits_{i=0}^n f'(x_i)B_i(x)$ 即可满足要求.

记 $l_i(x)$ 为函数 $f(x)$ 在插值基点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的第 i 个 Lagrange 插值多项式, $i=0,1,\cdots,n$, 即

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)},\quad i=0,1,\cdots,n,$$

则由课本上的计算过程知,

$$A_i(x)=\left(1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}\right)l_i^2(x),\quad B_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x),\quad i=0,1,\cdots,n.$$

用 $x_0=0$, $x_1=1$ 代入本题, 得 $l_0(x)=1-x$, $l_1(x)=x$, $A_0(x)=(1+2x)(1-x)^2$, $A_1(x)=(3-2x)x^2$, $B_0(x)=x(1-x)^2$, $B_1(x)=(x-1)x^2$. 因此

$$p(x)=A_1(x)+B_0(x)+2B_1(x)=x^3-x^2+x.$$

方法二: 待定系数法求解

由 $p(0)=0$, 可以得出 $p(x)=x\cdot p_0(x)$, 其中 $p_0(x)$ 满足:

$$\begin{cases}p_0(x)\text{ 次数不大于 }2,\\ p_0(1)=1,\\ p_0(0)=1,\\ p_0'(1)+p_0(1)=2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_0(x)=ax^2+bx+c,\\ p_0(1)=1,\\ p_0'(1)=1,\\ p_0(0)=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\\ c=1.\end{cases}$$

由此解出 $p_0(x)=x^2-x+1$, 故所求多项式即为 $p(x)=x\cdot p_0(x)=x^3-x^2+x$.

方法三: 更快捷的方法

注意到 $f(x)=x$ 满足 $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=1$, $f'(1)=1$, 因此只需找 $p_0(x)$ 使得

$$p_0(0)=p_0'(0)=p_0(1)=0,\quad p_0'(1)=1,$$

之后取 $p(x)=f(x)+p_0(x)$ 即可. 因此, 不妨设 $p_0(x)=Ax^2(x-1)$, 则 $p_0'(1)=A=1$, 故 $p(x)=f(x)+p_0(x)=x^3-x^2+x$.

五、(10 分) 求 $f(x)=x^3$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=1$ 的二次最佳平方逼近多项式.

分析: 此题主要考察最佳平方多项式的求法, 根据定义计算即可, 且此类题型在往年卷中多次出现, 故难度较低.

解: 取 $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_2(x)=x^2$, 设其系数分别为 a_0, a_1, a_2, 则有

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&(\varphi_0,\varphi_2)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&(\varphi_1,\varphi_2)\\(\varphi_2,\varphi_0)&(\varphi_2,\varphi_1)&(\varphi_2,\varphi_2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\(\varphi_2,f)\end{pmatrix},$$

其中, $(f,g):=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$, 当 $f,g\in C^0([-1,1])$ 时. 计算得 $(\varphi_0,\varphi_0)=2$, $(\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\frac{2}{3}$, $(\varphi_2,\varphi_2)=(\varphi_1,f)=\frac{2}{5}$, $(\varphi_0,\varphi_1)=(\varphi_1,\varphi_2)=(\varphi_0,f)=(\varphi_2,f)=0$. 代入解得 $a_0=a_2=0$, $a_1=\frac{3}{5}$, 故 $f(x)$ 的二次最佳平方逼近多项式为 $\sum_{i=0}^{2}a_i\varphi_i(x)=\frac{3}{5}x$.

六、(10 分) 求差分方程

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 3^n$$

的通解.

分析: 此题是一道经典的常系数线性非齐次差分方程求通解问题, 其解法与微分方程极为相似. 对于此题的非齐次差分方程, 可以先求其对应的齐次差分方程的通解, 再求出一个非齐次差分方程的特解, 两者相加即得该非齐次差分方程的通解. 题目难度不大, 题型也比较常规, 在往年卷中多次出现.

解: 写出该差分方程的特征方程:

$$z^2 - 2z + 1 = 0.$$

解得特征根为 $z_1 = z_2 = 1$ 为重根, 故齐次差分方程的通解为 $y(n) = C_1 \cdot 1^n + n \cdot C_2 \cdot 1^n = C_1 + nC_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

观察非齐次差分方程的非齐次项, 设其特解为 $y(n) = a \cdot 3^n$, 代入原方程中, 则有

$$a \cdot 3^{n+2} - 2a \cdot 3^{n+1} + a \cdot 3^n = 3^n \quad \Rightarrow \quad 4a = 1.$$

解得 $a = \dfrac{1}{4}$, 故特解为 $y(n) = \dfrac{1}{4} \cdot 3^n$, 从而原非齐次差分方程的通解为

$$y(n) = C_1 + nC_2 + \frac{1}{4} \cdot 3^n.$$

七、(10 分) 判断常微分方程初值问题 $y' = f(t, y), y(t_0) = \eta_0$ 的线性多步法

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}(3f_n - f_{n-1} + 4f_{n-2})$$

是否收敛? 为什么?

分析: 此题看似考察线性多步法的收敛性的定义, 实际上是考察线性多步法的相容性、数值稳定性和收敛性的相互关系, 即线性多步法收敛当且仅当其稳定且相容. 因此证明其收敛的问题就转化为了证明其相容且稳定的问题. 难度不能说很小吧, 只能说是几乎没有.

证明: 先证明相容性. 根据该多步法的特征方程得出:

$$\rho(\lambda) = \lambda^3 - \lambda, \quad \sigma(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda + \frac{4}{3}.$$

则 $\rho(1) = 0$, $\rho'(1) = 2 = \sigma(1)$, 满足相容性的充要条件, 故相容性成立.

再证明稳定性. 令 $\rho(\lambda) = 0$, 解得 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$, 故 $\rho(\lambda)$ 的所有根都在单位圆中且圆周上的根均为单重根, 满足特征根条件, 稳定性成立.

由于该多步法相容且稳定, 故该方法收敛. □

八、(10 分) 求常数 a, b, 使 $\max\limits_{1\le x\le 2}|\ln x-a-bx|$ 取得最小值, 并计算最小值.

分析: 此题看起来形式较新颖, 但如果熟悉最佳一致逼近的定义, 就可以很快辨认出此题考察的是求函数在某个区间上的一次最佳一致逼近多项式. 虽然本题在思考难度上依旧不大, 但计算较为复杂.

解: 由最佳一致逼近的定义, 此题转化为求函数 $f(x)=\ln x$ 在 $[1,2]$ 上的一次最佳一致逼近多项式, 设为 $g(x)=a+bx$. 由 Chebyshev 定理, 存在 $1\le x_1<x_2<x_3\le 2$ 为 $f(x)-g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的交错点组. 而因为 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ 在 $[1,2]$ 上符号恒不变, 故区间的端点属于交错点组, 即 $x_1=1$, $x_3=2$. 再由交错点组的定义, 有

$$f(x_1)-g(x_1)=-f(x_2)+g(x_2)=f(x_3)-g(x_3),\quad f'(x_2)-g'(x_2)=0.$$

将 x_1, x_3 代入, 有

$$\begin{cases}-a-b=a+bx_2-\ln x_2=\ln 2-a-2b\\ \dfrac{1}{x_2}-b=0\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}-a-\ln 2=a+1+\ln\ln 2\\ b=\ln 2\end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}\big(1+\ln 2+\ln\ln 2\big)$, $b=\ln 2$. 因此, 最小值为

$$|f(1)-g(1)|=|-a-b|=\frac{1}{2}\big(-1+\ln 2-\ln\ln 2\big).$$

九、(10 分) 取正整数 n, 记 $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, 证明求解初值问题 $y'=f(x,y), a\le x\le b; y(0)=\eta$ 的变形 Euler 方法

$$y_{i+1}=y_i+hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right)$$

是二阶的, 并求出局部截断误差的主项.

分析: 此题难度较大, 主要考察离散化方法中的 Taylor 级数法, 还需清晰掌握局部截断误差以及单步法的阶数的定义. 此题主要的难度在于, 由于该迭代方法右端出现的

$$\Phi=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right)$$

并不是 y' 在某点处的取值, 故无法对原迭代法直接使用一元函数的 Taylor 展开. 如要解出本题, 可以采用对 f 进行二元函数 Taylor 展开的方法, 也可以按下述解答的方式, 先估计 Φ 与 $y'\left(x_i+\dfrac{h}{2}\right)$ 之间的误差, 再对 $y'\left(x_i+\dfrac{h}{2}\right)$ 采用一元函数 Taylor 展开并对比各项.

由于本题所得到的答案形式较为复杂, 因此, 虽然下述解答的过程相当严谨, 但笔者仍然对该答案的正确性存疑. 假如我们 "忽视" 了 Φ 与 $y'\left(x_i+\dfrac{h}{2}\right)$ 之间的误差, 则本题的答案将为 $\dfrac{1}{24}\left|y'''(x_i)\right|$.

证明: 我们设 $y(x)$ 为原微分方程的精确解. 由局部截断误差的定义, 对 $i=0,1,2,\cdots n-1$, 我们取 $y_i=y(x_i)$, 并应用该迭代法得到数值解

$$\tilde{y}_{i+1}=y_i+hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right),$$

然后分析 $\tilde{y}_{i+1}$ 和 $y(x_{i+1})$ 之间的误差, 即为该迭代法的局部截断误差.

首先, 我们对 $y(x_{i+1})$ 使用 Taylor 展开, 有

$$y(x_{i+1})=y_i+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{6}y'''(x_i)+O(h^4),\quad h\to 0. \tag{9.1}$$

对 $\tilde{y}_{i+1}$, 我们需要将变形 Euler 方法中的 $f\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{h}{2}f(x_i,y_i)\right)$ 与 $y(x)$ 各阶导数在 x_i 处的取值相比较. 我们假定 f 有足够好的可微性. 设

$$d_i=y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)-y\left(x_i+\frac{h}{2}\right),$$

由 Taylor 展开可知

$$d_i=-\frac{h^2}{8}y''(x_i)+O(h^3),\quad h\to 0,$$

我们取

$$\varepsilon_i=f\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right)-f\left(x_i+\frac{h}{2},y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right),$$

则由一元函数 Taylor 展开的 Lagrange 余项公式知

$$\varepsilon_i=d_i\cdot\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x_i+\frac{h}{2},y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right)}+\frac{1}{2}d_i^2\cdot\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\left(x_i+\frac{h}{2},\xi_i\right)}, \tag{9.2}$$

其中

$$\xi_i=(1-\theta_i)\cdot y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+\theta_i\left(y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\right),\quad \theta_i\in[0,1].$$

设

$$L_i=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_i,y_i)},$$

由于 f 充分可微, 因此

$$\lim_{h\to 0}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(x_i+\frac{h}{2},y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right)}=L_i,\quad \lim_{h\to 0}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\left(x_i+\frac{h}{2},\xi_i\right)}=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_i,y_i)},$$

代入 (9.2) 式得 $\varepsilon_i = -\frac{L_i h^2}{8} y''(x_i) + O(h^3),\ h \to 0.$

回到原题中的迭代法, 观察式子可以发现

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot \left(f\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) + \varepsilon_i \right) = y_i + hy'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + h\varepsilon_i,$$

对上式也进行 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{i+1} &= y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{8} y'''(x_i) + h\varepsilon_i + O(h^4) \\ &= y_i + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{8}\big(y'''(x_i) - L_i y''(x_i)\big) + h\varepsilon_i + O(h^4), \quad h \to 0. \qquad (9.3)\end{aligned}$$

对比 (9.1) 与 (9.3), 可以发现, 它们从 h^3 项开始有差别, 因此该方法是二阶方法, 且其局部截断误差的主项为

$$\begin{aligned}|R_n| &= \left| \frac{h^3}{8}\big(y'''(x_i) - L_i y''(x_i)\big) - \frac{h^3}{6} y'''(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{24}\Big| y'''(x_i) + 3L_i y''(x_i) \Big| = \frac{1}{24}\Big| f''(x_i, y_i) + 3L_i f'(x_i, y_i) \Big|,\end{aligned}$$

其中, $L_i = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_i, y_i)}$. □

十、(12 分) 考虑常微分方程初值问题 $y' = f(y), a < x \le b, y(0) = \eta$, 取正整数 n, 令 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $0 \le i \le n$, 求参数 A, B, C, 使求解公式

$$y_{i+1} = y_{i-1} + h[Af(x_{i+1}, y_{i+1}) + Bf(x_i, y_i) + Cf(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

具有尽可能高的精度, 给出局部截断误差表达式, 并指出该公式是一个几阶公式.

分析: 此题与上一题类似, 都可以用 Taylor 级数法硬算, 然后将系数一一对应至不可再对应为止即可. 本题与上题的区别在于, 上一题需要对二元函数 f 进行分析, 需要使用二元函数的 Taylor 展开或类似方法, 而本题不需要分析二元函数, 但计算量更大. 需要注意的一点是, 在 Taylor 展开时, 展开的项数需要预先进行估计 (猜), 再根据与题目比对结果决定是否要继续向后展开, 别看解答直接给出了要展开的项数, 其实这是不断尝试才得出的结果.

解: 与上题类似地, 我们设 $y(x)$ 为原微分方程的精确解. 由局部截断误差的定义, 对 $i = 0, 1, 2, \cdots n-1$, 我们取 $y_i = y(x_i)$, 并应用该迭代法得到数值解

$$\tilde{y}_{i+1} = y_{i-1} + h[Af(x_{i+1}, y_{i+1}) + Bf(x_i, y_i) + Cf(x_{i-1}, y_{i-1})],$$

然后分析 $\tilde{y}_{i+1}$ 和 $y(x_{i+1})$ 之间的误差, 即为该迭代法的局部截断误差.

首先我们对 $y(x_{i+1})$ 使用 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) = {} & y_{i-1} + 2hy'(x_{i-1}) + 2h^2y''(x_{i-1}) + \frac{4h^3}{3}y'''(x_{i-1}) \\ & + \frac{2h^4}{3}y^{(4)}(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{4h^5}{15}y^{(5)}(x_{i-1}, y_{i-1}) + O(h^6), \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

之后我们研究 $\tilde{y}_{i+1}$. 对 $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ 进行 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y'(x_{i+1}) = {} & y'(x_{i-1}) + 2hy''(x_{i-1}) + 2h^2y'''(x_{i-1}) \\ & + \frac{4h^3}{3}y^{(4)}(x_{i-1}) + \frac{2h^4}{3}y^{(5)}(x_{i-1}, y_{i-1}) + O(h^5), \quad h \to 0, \end{aligned}$$

对 $f(x_i, y_i)$ 也使用 Taylor 展开, 有

$$\begin{aligned} f(x_i, y_i) = y'(x_i) = {} & y'(x_{i-1}) + hy''(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}y'''(x_{i-1}) \\ & + \frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_{i-1}) + \frac{h^4}{24}y^{(5)}(x_{i-1}) + O(h^5), \quad h \to 0. \end{aligned}$$

将得到的结果代入求解公式, 有

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{i+1} = {} & y_{i-1} + (A+B+C)hy'(x_{i-1}) + (2A+B)\,h^2y''(x_{i-1}) \\ & + \left(2A + \frac{1}{2}B\right)h^3y'''(x_{i-1}) + \left(\frac{4}{3}A + \frac{1}{6}B\right)h^4y^{(4)}(x_{i-1}) \\ & + \left(\frac{2}{3}A + \frac{1}{24}B\right)h^5y^{(5)}(x_{i-1}, y_{i-1}) + O(h^6), \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

将 (10.1) 与 (10.2) 对比, 使两式等号右边系数相同的项数尽可能多, 则有

$$\begin{cases} A+B+C = 2, \\ 2A+B = 2, \\ 2A + \frac{1}{2}B = \frac{4}{3}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = \frac{4}{3}, \\ C = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

因为 $\frac{4}{3}A + \frac{1}{6}B = \frac{2}{3}$, 而 $\frac{2}{3}A + \frac{1}{24}B = \frac{5}{18} \neq \frac{4}{15}$, 故 A, B, C 可以这样取值, 使得求解公式的精度最高. 此时局部截断误差为

$$|R_n| = \left|\tilde{y}_{i+1} - y(x_{i+1})\right| = \frac{h^5}{90}\left|y^{(5)}(x_{i-1}, y_{i-1})\right| + O(h^6), \quad h \to 0.$$

由于从 h^5 项起, 两式等号右边的系数开始不同, 因此该公式为四阶公式.