数学分析 期末试卷B 2021

院系:__________ 姓名:__________ 学号:____________ 成绩:________

一、计算题（每题10分，共30分）

1. 求函数 $f(x,y)=4x-3y$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最值.

2. 设方程 $u+e^u+x+2y=0$ 确定了隐函数 $u(x,y)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

3. 求三元积分 $\iiint\limits_A x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中区域 A 由曲面 $x^2+y^2=z$ 与 $z=1$ 围成.

二. (15 分) 求如下曲面的面积: $2x+2y-z=0$, $x^2+y^2\le 1$.

三. (15 分) 设 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 其定向为外法向, 用 Gauss 公式求如下第二型曲面积分.

$$\int_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+e^{xz}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\cos\left(y^3\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

四. (1). (5 分) 设函数 f 在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上连续可微. 记圆周 $x^2+y^2=1$ 为 C, 其定向为逆时针. 求证:

$$\int_C\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

(2). (5 分) 求证: 不存在 $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的连续可微函数 f, 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

五. （10分）设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数. 求证:

$$\int_a^b \left(\int_a^x f(y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b (b-y)f(y)\mathrm{d}y.$$

六. （20分）设 $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 且 F 的雅可比矩阵处处非奇异. 设 $\Phi, \Psi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 且存在 $p \in \Omega$ 使得 $\Phi(p) = \Psi(p)$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为道路连通集. 证明: 若 $F \circ \Phi = F \circ \Psi$, 则 $\Phi = \Psi$.

七. （10分）设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为具有 C^1 边界的有界区域. $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\Delta u = 0$. 证明: 对任意内点$p \in \Omega$,

$$u(p) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} u + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS,$$

其中$\mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

八. （10分）计算四维欧氏空间中单位球面的面积.