五、（10分）设 R 为交换幺环，$r(R)$ 为它的诣零根（即所有素理想的交）。假设 R 的每个元不是单位就是幂零元，证明 $R/r(R)$ 为域。

只需证 $r(R)$ 为极大理想。假如不然，则有理想 M 使 $r(R) \subset M \subset$

取 $a \in M \setminus r(R)$. 由于 $r(R)$ 由幂零元构成，a 不是幂零元从而是单位.

于是 $M=R$, 这与 $M \neq R$ 矛盾。

六、（10分）证明多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 中理想 $I=(2,x)$ 不是主理想。

假如 $I=(f(x))$, 这儿 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 则 $f(x)\mid 2$ 且 $f(x)\mid x$.

于是 $\deg f(x)=0$, $f(x)=\pm 1$. 由于 $2g(x)+xh(x)$ $(g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x])$

常数项为偶数，$\pm1 \notin I=(2,x)$. 故得矛盾。

因此环为主理想。

七、（10分）证明 $R=\left\{\frac{a+b\sqrt{-11}}{2} : a,b\in\mathbb{Z}\ \&\ a\equiv b \pmod 2\right\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环。

易见 R 对加减法与和负数封闭. 注意 $a\equiv b \pmod 2$ 且 $c\equiv d \pmod 2$ 时

$$\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{c+d\sqrt{-11}}{2}=\frac{(ac-11bd)+(ad+bc)\sqrt{-11}}{4}$$

由于 $a(c-d)\equiv b(c-d) \pmod 4$, $ad+bc\equiv ac-11bd \pmod 4$

由此可见 R 对乘法也封闭. 因此 R 为整环.

任给 $\alpha\in R$, $\beta\in R\setminus\{0\}$. 可写

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar\beta}{|\beta|^2}=r+s\sqrt{-11},\quad 这儿\ r,s\in\mathbb{Q}$$

取一个最靠近 $2s$ 的整数 n（即让 $|2s-n|\le\frac12$），再取与 n 奇偶性相同的整数 m 使 $|2r-m|\le 1$. 让 $\eta=\frac{m+n\sqrt{-11}}{2}\in R$, 则

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=\left|\left(r-\frac{m}{2}\right)+\left(s-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-11}\right|^2=\frac{(2r-m)^2}{4}+\frac{11}{4}(2s-n)^2$$

$$\le\frac14+\frac{11}{4}\times\left(\frac12\right)^2=\frac{15}{16}<1$$

令 ~~[illegible]~~ 由于奇偶性相同的整数由 $\left|\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\right|^2=\frac{a^2+11b^2}{4}\in\mathbb{Z}$