

# 南京大学数学课程试卷

2017-2018 学年度第 二 学期 考试形式： 闭卷 课程名称： 数值计算与试验 I

考试时间： 2018 年 5 月 8 日 考试成绩： \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	总分
得分					

## 一、填空与简述题（每题 6 分，计 30 分）

1. 设  $\tilde{x} = 2.670$  为某个数四舍五入得到的近似值，则  $\tilde{x}$  具有\_\_\_\_\_位有效数字，其绝对误差限为\_\_\_\_\_，相对误差限为\_\_\_\_\_.
2. 利用等价变换使下列表达式的计算结果比较精确：（1）  $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\ (x \gg 1)$  = \_\_\_\_\_；  
（2）  $\ln(x-\sqrt{x^2-1}), (x \gg 1)$  = \_\_\_\_\_；（3）  $\frac{1-\cos x}{\sin x} (|x| \ll 1)$  = \_\_\_\_\_.
3. 求解非线性方程的 Newton 法, 对于单根情形其收敛阶数至少是\_\_\_\_\_, 对于重根情形其收敛阶数是\_\_\_\_\_, 割线法的收敛阶数是\_\_\_\_\_.
4. 若  $p=2$  ,  $t=3$  ,  $L=1$  ,  $U=2$  , 则相应的规格化浮点数共有\_\_\_\_\_个浮点数.
5. 非奇异矩阵一定存在  $LU$  分解吗? 如果一定存在, 给出证明, 如果不一定存在, 请举出反例.

## 二、求解题（每题 10 分，共 40 分）

- （1）应用牛顿法于方程  $f(x)=x^n-a=0\ (a>0)$  , 请导出求  $\sqrt[n]{a}$  的迭代公式, 并求极限  $\lim_{k\rightarrow\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}$  , 其中  $e_k=\sqrt[n]{a}-x_k$  .

- （2）用高斯列主元消去法解方程组系  $Ax=b, Ay=c, Az=d$  , 其中  $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  ,  $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  ,  $c=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  ,

$d=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

- （3）将矩阵  $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 2 & 10 \\ 4 & 8 & 3 & 6 \\ 12 & 6 & 11 & 20 \end{pmatrix}$  进行 **Doolittle** 分解（给出  $L$  和  $U$ ）.

(4) 给定矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ，求  $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_F$ 。

三、分析证明题（8+12=20 分）

(1) 给定函数  $f(x)$ ，设对于一切  $x$ ， $f'(x)$  存在且  $0 < m \leq f'(x) \leq M$ ，试证明对于  $0 < \lambda < \frac{2}{M}$  的任意  $\lambda$ ，

迭代过程  $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$  均收敛于  $f(x) = 0$  的根  $x^*$ 。

(2) 设  $n$  阶矩阵  $Q$  对称正定，则  $f(x) = \sqrt{x^T Q x}$  是向量  $x$  的一种范数。

四、（本题 10 分）设  $Ax = B$  是对称的五对角方程组，即 
$$\begin{pmatrix} c_1 & b_2 & a_3 & & \\ b_2 & c_2 & b_3 & \ddots & \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ & & a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$
，试按照  $LDL^T$  分解推导出其分解算法的计算公式（不包括最后的回代求解），并分析分解算法乘除法的运算量。

密封线内不要答题