班级 ______ 学号 ______ 姓名 ______

考试时间 2019.1.13 任课教师 梅加强等 考试成绩 ______

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

(3) 求积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; (4

(5) 利用高阶导数的 Leibniz

一. 简答题. (每题 15 分, 共 30 分)

(1) 请完整地叙述 Newton-Leibniz 公式, 并谈谈你对它的认识和体会.

(2) 请完整地叙述 Lagrange 中值定理, 并举一例以展现其应用.

二. 计算题. (每题 8 分, 共 40 分)

(1) 求函数 $f(x) = x^{2018}e^{-x}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的极值; (2) 求积分 $\int_a^b (x-a)\left[x-\frac{a+b}{2}\right]^2(b-x)\,dx$;

(3) 求积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; (4) 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\ln^2(1+x)}{x\sin^2 x}$;

(5) 利用高阶导数的 Leibniz 公式求 $g(x) = \ln^2(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式.

三. 综合题. (每题 10 分, 共 20 分)

(1) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $\sin^2 x - x^2 + \frac{1}{3}x^4 \geq 0$.

(2) 记 $f(x) = \int_0^x \ln(t + \sqrt{1+t^2})\,\mathrm{d}t$, 求 f 的显式表达式, 并证明它是凸函数.

四. 证明题. (每题 5 分, 共 10 分)

(1) 设 f 在 $[0,\infty)$ 中二阶可导, 且 $|f''| \le |f|$. 如果 $f(0)=f'(0)=0$, 证明 $f\equiv 0$.

(2) 设 $\alpha \ge 1$. 证明 $\dfrac{1}{\alpha+1/2} < \int_0^1 e^t(1-t)^\alpha \,dt < \dfrac{1}{\alpha}$.

五. 附加题 (10 分): 设 f 在 $(0,\infty)$ 中二阶可导. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\beta\in\mathbb{R}$, 且 $f''(x)=O(1/x)$ $(x\to\infty)$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\beta$.