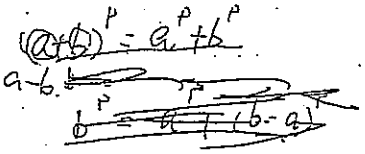
中国剩余定理：

$A_1, \cdots A_k$ 互素理想

则 $R/\cap A_i \cong R/A_1 \oplus R/A_2 \oplus \cdots \oplus R/A_k$



作业

~~证~~ (10分) 设 R 为交换幺环，I, J 为其互素的理想，证明 $IJ = I \cap J$.

证：易知 $IJ \subseteq I$, $IJ \subseteq J$. 故 $IJ \subseteq I \cap J$

作业.

P96

引理2.3.1

另外，由于 I, J 互素且 R 为交换幺环 故 $I + J = R$

则 $\exists i \in I$, $j \in J$ s.t $i + j = 1$

则 $\forall a \in I \cap J$ $a = a \cdot 1 = a \cdot (i+j) = ai + aj \subseteq IJ + IJ = IJ$

故 $IJ = I \cap J$

~~证~~ (10分) 设 R 为交换幺环，$a \in R$，且诸 $1 - ax\ (x \in R)$ 都是 R 的单位，试证 $a \in J(R)$，这儿 $J(R)$ 是 R 的所有极大理想的交.

作业

P105. (3).

证：假设 $\exists a \notin J(R)$

作业(做在

即 $\exists$ 一个极大理想 $M \neq R$ s.t $a \notin M$

则 $(a) + M = R$

从而 $\exists m \in M$, $x \in R$ s.t $m + ax = 1 \Rightarrow m = 1 - ax$

由题设 $\forall x$ 都有 $1 - ax \in U(R)$ 故 $m \in U(R)$

推论3.2.2

从而 $M = R$ 矛盾，故 $a \in J(R)$

P99. 和最下面 ~~证~~ (10分) 设整数 $m > 1$ 有素数分解式 $p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$，其中 $p_1, \ldots, p_r$ 为不同素数，$a_1, \ldots, a_r$ 为正整数. 证明 $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times U(\mathbb{Z}/p_r^{a_r}\mathbb{Z})$，其中 $U(R)$ 表示环 R 的单位群.

a ∨ p ⊥

~a, p~b

证：$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ 由题知 $p_1^{a_1}, p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ 两两互素，

$U(R_1 \oplus \cdots \oplus R_n)$

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \mid \{1 + m\mathbb{Z}\}$

由中国剩余定理

同构映射将单位元映到单位元.

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{a_r}\mathbb{Z}$ $U((\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z})^{\times} \times U(R_2) \times \cdots \times U(R_n)$

$U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \{n + n\mathbb{Z} : a \equiv 1 \pmod n\}$ 从而 $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \cdots$

b=1

$\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab) = \sigma(1) = 1$

~~证~~ (10分) 设 L/M 与 M/K 都是域的有限次扩张，则 $[L:K] = [L:M][M:K]$.

证：L/M M/K 均为域的有限次扩张 不妨设 $[L:M] = r$ $[M:K] = s$ L/M M/K

设 L/M 的一组基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r \in L$; M/K 的为 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s \in M$

r s

$\alpha_1 \cdots \alpha_r \in L$. $\beta_1 \cdots \beta_s \subset M$

P129. (1).

作业(倒用题)

中 L 中元素可由 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 及 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_s$ 相生一系列为

现证明 L/K 中一组基为 $\alpha_i\beta_j$ $(1 \le i \le r, 1 \le j \le s)$

$L = \{\sum a_i \alpha_i : a_i \in M\}$

$(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\alpha_i)\beta_j$ $M = \{\sum b_j \beta_j : b_j \in K\}$

前证明 $\alpha_i\beta_j$ 线性无关，令 $0 = \sum_{i,j} a_{ij}\alpha_i\beta_j = \sum_j (\sum_i a_{ij}\alpha_i)\beta_j$

由 β_j 线性无关 $\sum_i a_{ij}\alpha_i \in K$ 故 $\sum_i a_{ij}\alpha_i = 0$

$L = \{\sum_{j=1}^{s} (\sum_{i=1}^{r} b_{ij}\alpha_i)\beta_j : \beta_j \in M, \alpha_i \in L\}$

同理 由 α_i 线性无关，则 $a_{ij} = 0$ 从而 $\alpha_i\beta_j$ 线性无关

下证 $\forall x \in L$ 必可由 $\alpha_i\beta_j$ 表示，$x \in L$ 故 $x = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r$ $(c_i \in M)$

而 $\forall c_i \in M$, c_i 可由 $\beta_1 \cdots \beta_s$ 表示，即 $c_i = c_{i1}\beta_1 + \cdots + c_{is}\beta_s$ 其中 $c_{ij} \in K$

于是 $x = \sum_{i,j} c_{ij}\alpha_i\beta_j$

从而 $[L:K] = [L:M][M:K]$