四、（10分）设 R 为交换幺环，且对每个 $a\in R$ 都有 $n>1$ 使得 $a^n=a$。试证 R 的素理想 P 必为 R 的极大理想。

$(a+P)^n=a+P$.

设 P 不是极大理想，则有理想 $M\neq R$ 真包含 P，取 $a\in M\setminus P$。依条件有 $n>1$ 使 $a^n=a$，于是 $a(a^{n-1}-1)=0\in P$，而 $a\notin P$ 且 P 为素理想，故必 $a^{n-1}-1\in P\subset M$，于是 $1=a^{n-1}-(a^{n-1}-1)\in M$

~~从而与 $M\neq R$ 矛盾~~

五、（10分）设交换幺环 R 为 Noether 环，I 为 R 的理想。证明商环 R/I 也是 Noether 环。

任给 R/I 中一个理想升链 $I_1/I\subseteq I_2/I\subseteq\cdots$，

显然 $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots$ 为 R 中理想升链。

因 R 为 Noether 环，必有 N 使 $I_N=I_{N+1}=\cdots$；

从而 $I_N/I=I_{N+1}/I=\cdots$

因此 R/I 满足理想升链条件，从而为 Noether 环。

六、（10分）证明 $R=\{a+b\theta: a,b\in\mathbb{Z}\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环，其中 $\theta=(-1+\sqrt{-7})/2$.

易见 R 对加减法与求负数封闭。$\theta+\bar\theta=-1$，$\theta\bar\theta=2$，故 $\theta^2+\theta+2=0$，因 $\theta^2=-\theta-2$，R 对乘法也封闭，因此 R 为整环。

任给 $\alpha\in R$，$\beta\in R\setminus\{0\}$，可写

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar\beta}{|\beta|^2}=r+s\theta,\ 这里\ r,s\in\mathbb{Q}.$$

取一个最靠近 r 的整数 m（满足 $|r-m|\le\frac12$），再取整数 n 使 $|s-n|\le\frac12$.

记 $\eta=m+n\theta$，则

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=|(r-m)+(s-n)\theta|^2=((r-m)+(s-n)\theta)((r-m)+(s-n)\bar\theta)$$

$$=(r-m)^2+(r-m)(s-n)(\theta+\bar\theta)+(s-n)^2\theta\bar\theta$$

$$=(r-m)^2-(r-m)(s-n)+2(s-n)^2<\frac14+\frac12\times\frac12+2\cdot$$

令 $\gamma=\alpha-\beta\eta\in R$，则 $|\gamma|^2<|\beta|^2$ 注意 $|a+b\theta|^2=a^2-ab+2b^2$.