6.(1) 设整数 $m>1$ 有素数分解式 $p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$，其中 $p_1,\cdots,p_r$ 为不同素数，$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 为正整数。证明 $U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cong U(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z})\times\cdots\times U(\mathbb{Z}/p_r^{a_r}\mathbb{Z})$，其中 $U(R)$ 表示环 R 的单位群.

证明：

由中国剩余定理知：$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p_r^{a_r}\mathbb{Z}$.

~~于是~~ $\cancel{U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})\cong U(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p_r^{a_r}\mathbb{Z})}$

(见 P99 例3.3.4) $=U(\mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z})\times U(\mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z})\times\cdots\times U(\mathbb{Z}/p_r^{a_r}\mathbb{Z})$.

$=\{a\in R:\exists n>0\,(a^n=0)\}=\{R$中幂零元$\}$

(2). 设交换幺环 R 为 Noether 环，$I=r(R)$ 为其诣零根，证明有正整数 m 使得 I^m 为零理想. $I^m=I\cdot I\cdot I\cdot I\cdot I\cdots=\{\sum\prod_{i=1}^{m} b_i : a_i^{n_i}=0,\in R\}=0$.

证明： $\{\sum_{i=1}^{k} r_i a_i : r_i\in R\}$ $IJ=\{\sum a_i b_j\}$

∵ R 为 Noether 环 ∴ 至由定义知 I 必为有限生成的.

设 $I=(a_1,\cdots,a_k)$: $a_1,\cdots,a_k\in I=r(R)$.

因此有正整数 $n_1,\cdots,n_k$ s.t. $a_i^{n_i}=0$. $(i=1,2,\cdots,k)$

取 $m=n_1+\cdots+n_k$.

当 $j_1,j_2,\cdots j_k$ 为自然数且 $j_1+j_2+\cdots+j_k=m$ 时.

$a_1^{j_1}\cdots a_k^{j_k}=0$. $\exists i$ s.t. $a_i^{j_i}=0\Rightarrow a_1^{j_1}\cdots a_i^{j_i}\cdots a_k^{j_k}=0$

因为 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 中总有一个 $j_i\geq n_i$.（否则 $\sum_{i=1}^{k}j_i<\sum_{i=1}^{k}n_i=m$，矛盾！）

由此可知：$c_1,\cdots,c_m\in I$ 时 $c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_m=0$. $c_i=\sum_{j=1}^{k}r_ja_j$ $=\sum^{m^k}\square a_1^{j_1}a_2^{j_2}\cdots a_k^{j_k}$, $j_1+j_2+\cdots+j_k=m$

因此 I^m 为零理想.

~~且 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 均不为0时.~~

7. 设 F 为 p^n 元有限域，其中 p 为素数，n 为正整数.

(1). 证明域 F 的特征为 p，且 F/E 是单扩张（即有 $\gamma\in F$ 使得 $F=E(\gamma)$）

这里 $E=\{me: m\in\mathbb{Z}\}$. 使 $ne=0$ 的最小 n

$\sigma:\mathbb{Z}\to F$, $\sigma(m)=me$ $\mathrm{Im}\,\sigma$

证明：

∵ F 为有限域 ∴ $|F|<\infty$ 从而 F 的特征是一个素数.

$F^*=\langle\gamma\rangle$

有限子群为循环群.