、群$G_1 \cdots G_n$ 外直积 $G_1 \times G_2 \times \cdots G_n = \{(\ ,\ ,\ )\}$

$\trianglelefteq G$ 内 —— $G_1 G_2 \cdots G_n = \{x_1 x_2 \cdots x_n\}$.

环R_1 — R_n

外直和 5. 设R为交换幺环，$I \neq R$为R的理想，则I为R的极大理想当且仅当 R/I 为 域 ；I为R的素理想当且仅当R/I为整环

$\oplus$ $R_1 \oplus \cdots \oplus R_n$ 见P_{102}. 定理3.4.3

$\times$ $\times$

$=(\ ,\ ,\ )$

6. 交换幺环R的诣零根（所有素理想的交）由R中幂零 元构成

~~内直和 (⊕) 见P_{104}. 定理3.4.6.~~

$R_1 + \cdots + R_n = R$

唯一表成

7. m阶循环群C_m与n阶循环群C_n的直积为循环群当且仅当 m与n互素 .

"⇒" $\boxed{exp(C_m \times C_n) = [m,n]\ (\text{最小公倍数})}$ $C_m \times C_n = \{x = (x_i, y_i) : x_i \in C_m\ y_i \in C_n\}$

$|C_m \times C_n| = |C_m| \cdot |C_n| = mn$.

$\because C_m \times C_n$ 为循环群 $\therefore \max\limits_{g \in C_m \times C_n} o(g) = mn = exp(C_m \times C_n) = [m,n]$

⇒ m与n互素 。（以上用到 P_{78} 定理2.8.4）.

"⇐": $\boxed{m与n互素则\ C_m \times C_n \cong C_{mn}.}$ $\therefore C_m \times C_n$ 为mn阶循环群 .

（以上用到 P_{79} 推论2.8.2）.

8. 对于交换幺环R的 极大 理想I，商环R/I为域.

见 P_{102}. 定理3.4.3

9. 整环 $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 仅有的单位是 $\pm1, \pm i$.

单位：对于幺环R，$a|b$是指存在$q \in R$ 使 $aq = b = qa$，由$a|b$可得 $(b) \subseteq (a)$. 如果$u \in R$且 $u|1$ 即有 $v \in R$ 使 $uv = 1 = vu$（u有乘法逆元）. 则称u为R的一个单位。（见P_{99}，定义3.3.7）

据定义可知 单位 $a+bi$ 满足 $\frac{1}{a+bi} \in \mathbb{Z}[i]$

$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

⇔ $\frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}$ $\frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}$.

≤ 1

⇔ $a = \pm1$ $b = 0$. 或 $a = 0$, $b = \pm1$.

⇒ $\pm1, \pm i$ 为仅有的单位