高等代数（一）期中试卷 2021-11-27

班级： 姓名： 学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 m, n 是正整数，则 m 与 n 互素当且仅当 $x^m - 1$ 与 $x^n - 1$ 没有异于 1 的公共根.

2. 设 $f(x), g(x)$ 是数域 F 上的多项式. 如果 $f(x) \nmid g(x)$, 则存在 $\alpha \in F$ 使得 α 是 $f(x)$ 的根, 但是 α 不是 $g(x)$ 的根.

3. 设 $p(x)$ 是不可约的有理系数多项式，则 $p(x)$ 在有理数域中没有根.

4. 设 F 是数域, $0 \neq f(x) \in F[x]$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$, 则 $(g(x), g'(x)) = 1$.

5. 多项式 $x^4 + 4$ 在实数域上不可约.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）.

1. 设 n 是正整数，多项式 $x^{2n}-1$ 在实数域上的标准分解式是

   ______________________________________.

2. 设 $p,q\in\mathbb{R}$, 多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有一个复根 $4+3\mathrm{i}$, 则 $f(x)$ 的其余两个根是 ____________________.

3. $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ 的全部有理根为 ____________________.

4. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则

   $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ __________.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的根为____________________.

三、（10 分）设 $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$, $g(x)=x^3-2x+1$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

四、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & 3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix}$.

五、（10 分）设 F 为数域, $f_i(x) = a_{i1}x^{n-1} + a_{i2}x^{n-2} + \cdots + a_{i,n-1}x + a_{in} \in F[x]$, $i = 1, \cdots, n$. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$, 求 $\Delta = \begin{vmatrix} f_1(1) & f_1(2) & \cdots & f_1(n) \\ f_2(1) & f_2(2) & \cdots & f_2(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(1) & f_n(2) & \cdots & f_n(n) \end{vmatrix}$.

六、（10 分）设 $n \in \mathbb{N}^*$. 计算 $n+1$ 级行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ddots & & 0 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & x^{n-2} \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \cdots & \cdots & C_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

七、（10 分）设 F 为数域, n 为正整数, $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x) \in F[x]$, 并且

$$(x^n + x^{n-1} + \cdots + 1) | (f_1(x^{n+1}) + x f_2(x^{n+1}) + \cdots + x^{n-1} f_n(x^{n+1})),$$

证明: $(x-1)^n | f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$.

八、（10 分）试求所有正整数 n 使得 $x^n + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约.

九、（10 分）设 $f(x) = (x^6 + x^4)^n - x^{4n} - x^6,\ g(x) = x^4 + x^2 + 1$, 求大于 2021 的最小的正整数 n 使得 $g(x)|f(x)$.