

数学分析

2017 年 1 月 4 日

计算题

1.

(1) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

(2) $\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^3 dx$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(4) 将 $\tan x$ 泰勒展开至 x^5 次方项。

不等式证明

2.

(1) $x \geq 0$ 时, $x \cos x - \sin x + \frac{x^3}{3} \geq 0$

(2) $x \geq 0$ 时, $\sin^2 x - x^2 + \frac{x^4}{3} \geq 0$

(3) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $(\frac{\sin x}{x})^3 \geq \cos x$

证明题

3. 设 f 在 $[a, b]$ 上可导, $f(a) = 0$ 。证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 满足

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} f'(\xi)(b-a)^2 \quad (1)$$

4. 设 f 是 R 上的凸函数, 且 f 有唯一极值点。证明:

(1) f 的极值点是最小值点;

(2) $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5. 设 f 在 (a, b) 上可微, 且 $|f'(x)| \leq M$, 则

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{b-a}{4} M \quad (2)$$

附加题

两题任选一题作答

6.

(1) 若有界函数 f 满足 $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$, 那么 f 是否是凸函数?

(2) 设 f 在 (a, b) 上二阶可导, 且 f 有驻点。证明: 存在 ξ , 满足

$$|f''(\xi)| \geq \frac{2|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2} \quad (3)$$