南京大学数学课程试卷

2017-2018 学年度第 二 学期 考试形式： 开卷 课程名称： 数值计算与试验 I

考试时间： 2018 年 7 月 3 日 考试成绩：____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空与简述题（每题 6 分，计 30 分）

1. 设 $f(x)=2^x$, 步长 $h=1$，则 $\Delta^4 f(n)=$________。

2. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个相异的插值节点， $l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 为 Lagrange 基本多项式，则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=$________。

3. 假设函数 $f(x)\in C^6[a,b]$, 且 $x_i=a+(i-1)h, h=(b-a)/n, i=1,2,\cdots,n+1, f'(a)=f'(b)$。则利用复化梯形公式计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差余项为 $O(h^\eta)$，其中 $\eta=$________。

4. 区间 $[a,b]$ 上的三次样条插值函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上是具有直到________阶导数的连续函数。

5. $P_0(x)=1, P_1(x)=x$, 则关于权函数 $W(x)=1$ 的首一正交多项式 $P_2(x)=$ ____________。

二、求解题（每题 10 分，共 40 分）

（1）已知函数列表

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	-5	-6	3

用差商法求满足上述插值条件的 Newton 插值多项式（要求写出差商表）.

（2）求 x_1 和 c_0, c_1，使下列求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx c_0 f(0)+c_1 f(x_1)$$

具有尽可能高的代数精度，并指出其代数精度。

（3）求次数小于 3 的多项式 $P(x)$，使其满足条件：

$$P(0)=0, P'(0)=1, P(1)=1, P'(1)=2.$$

任课教师：________ 学号：________ 姓名：________ 系别：________

密 封 线 内 不 要 答 题

（4）判断能否使用有限个节点数值积分方法计算得到$\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\mathrm{d}x$的精确解，并给出理由或者计算过程。

三、分析证明题（8+12=20 分）

（1）设 $f(x)=\ln(1+x), x\in[0,1]$, $p_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $n+1$ 个节点 $x_i=\frac{i}{n}, i=0,1,\cdots,n$ 为插值节点的 n 次插值多项式，证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|f(x)-p_n(x)\right|=0.$$

（2）设 $f\in C^1[a,b]$，证明左矩形公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi).$

并以此构造一个复合求积公式，证明该复合求积公式是收敛的。

四、（本题 10 分）若 $f(x)\in C^2[a,b], S(x)$ 是三次样条函数，$f(x_i)=S(x_i)(i=0,1,\cdots,n)$, 式中 x_i 为插值节点，且 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 证明：

$$\int_a^b S''(x)[f''(x)-S''(x)]\mathrm{d}x=S''(b)[f'(b)-S'(b)]-S''(a)[f'(a)-S'(a)].$$