高等代数（一）期中试卷 2017-11-25

班级：　　　　　　　　姓名：　　　　　　　　学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集，则 $P=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是数域，其中 $i=\sqrt{-1}$.

   解. 错误. P 关于除法不封闭，例如，$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}\notin P$.

2. 设 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), g(x)$ 都是数域 P 上的多项式. 如果 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))=1$, 并且 $f_i(x)|g(x)$, $i=1,2,3$, 则 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)|g(x)$.

   解. 错误. 例如，$f_1(x)=x(x-1), f_2(x)=x(x-2), f_3(x)=(x-1)(x-2), g(x)=x(x-1)(x-2)$. 易见，$(f_1(x), f_2(x), f_3(x))=1$, 并且 $f_i(x)|g(x)$, $i=1,2,3$, 但 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)\nmid g(x)$.

3. 设有理系数多项式 $f(x)\neq 0$. 若 $(f(x), f'(x))\neq 1$, 则 $f(x)$ 在有理域上有重根.

   解. 错误. 例如，$f(x)=(x^2+1)^2$, $(f(x), f'(x))=x^2+1$, 但 $f(x)$ 在实数域上没有（重）根.

4. 多项式 x^4+4 在实数域上不可约.

   解. 错误. 实数域上的多项式最多为 2 次.

5. 设 a_i, b_i, c_i, d_i 都是数域 P 中的数， $i=1,2$, 则

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

   解. 错误. 例如，$\begin{vmatrix} 1+(-1) & 0+0 \\ 0+0 & 1+(-1) \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x)=x^6-10x^5+6x^4-310x^3-580x^2-40x-383$, 则 $f(12)=\underline{\quad 2017 \quad}$.

2. $f(x)=2x^3-3x^2+1$ 的全部有理根为$\underline{\quad 1,1,-\frac{1}{2} \quad}$.

3. 设实系数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有一个虚根 $4+3i$, 则 $f(x)$ 的其余两个根是 $\underline{\quad 4-3i,-8 \quad}$.

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=\underline{\quad 0 \quad}$.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x^7 \\ 1 & 1 & x^2-2 & x^8 \\ 2 & x^2+1 & 1 & x^9 \\ 0 & 0 & 0 & 2017 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的根为 $\underline{\quad \pm 1, \pm 2 \quad}$.

三、（10 分）设 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$, $g(x)=x^2+x-2$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解. 由带余除法得，

$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$, 其中 $q_1(x)=x+1, r_1(x)=-4(x+1)$,

$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$, 其中 $q_2(x)=-\frac{1}{4}x, r_2(x)=-2$,

于是, $(f(x),g(x))=1$,

并且, $(f(x),g(x))=(-\frac{1}{8}x)f(x)+\frac{1}{8}(x^2+x-4)g(x)$,

故所要求的 $u(x),v(x)$ 为

$u(x)=-\frac{1}{8}x$,

$v(x)=\frac{1}{8}(x^2+x-4)$.

四、（10分）写出多项式 x^4+1 在复数域、实数域及有理数域上的标准分解式，并说明理由.

解. x^4+1 在复数域上有4个根：$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

在复数域上的标准分解式为：

$x^4+1=(x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))(x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i))(x+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))(x+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i))$.

在实数域上的标准分解式为：$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

在有理数域上的标准分解式为：$x^4+1=x^4+1$.

事实上，x^4+1 在有理数域上不可约：令 $x=y+1$, 则

$x^4+1=(y+1)^4+1=y^4+C_4^1y^3+C_4^2y^2+C_4^3y+2$.

取 $p=2$, 由 Eisenstein 判别法知，x^4+1 在有理数域上不可约.

五、（10 分）求 t 值使 $f(x)=x^3+tx^2+3x+1$ 有重根，并求出重根及其重数.

解. 方法一. $f'(x)=3x^2+2tx+3$, $f(x)=f'(x)(\frac{x}{3}+\frac{t}{3})+(2-\frac{2}{9}t^2)x+1-\frac{t}{3}$.

当 $(2-\frac{2}{9}t^2)x+1-\frac{t}{3}=0$, 即 $t=3$ 时，$f'(x)=(x+1)^2$,

$f(x)=(x+1)^3$ 有 3 重根 -1.

当 $t\neq 3$ 时，$f(x)$ 有重根 $\Rightarrow (f(x),f'(x))\neq 1$. 于是 $(2-\frac{2}{9}t^2)x+1-\frac{t}{3}\mid f'(x)$.

令 $f'(x)=[(2-\frac{2}{9}t^2)x+1-\frac{t}{3}](ax+b)$,

则 $(2-\frac{2}{9}t^2)a=3, (1-\frac{t}{3})b=3, (1-\frac{t}{3})a+(2-\frac{2}{9}t^2)b=2t$,

解之得，$t=-\frac{15}{4}, a=-\frac{8}{3}, b=\frac{4}{3}$, 此时 $f(x)=(x-2)^2(x+\frac{1}{4})$ 有 2 重根 2.

方法二. 设 $f(x)$ 有重根 a, 则可设 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$.

于是 $f(x)=(x^2-2ax+a^2((x-b)=x^3-(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x-a^2b$,

比较系数得, $2a+b=-t, a^2+2ab=3, -a^2b=1$,

解之得，$a=-1, b=-1, t=3$, 或 $a=2, b=-\frac{1}{4}, t=-\frac{15}{4}$.

故当 $t=3$ 时，$f(x)=(x+1)^3$ 有 3 重根 -1.

当 $t=-\frac{15}{4}$ 时，$f(x)=(x-2)^2(x+\frac{1}{4})$ 有 2 重根 2.

方法三. $f(x)$ 有重根 $a \Longleftrightarrow a$ 是 $(f(x),f'(x))$ 的根 $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(a) &=& 0 \\ f'(a) &=& 0 \end{array}\right.$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^3+ta^2+3a+1 &=& 0 \\ 3a^2+2ta+3 &=& 0 \end{array}\right.$. 解之得，$\left\{\begin{array}{rcr} a &=& -1 \\ t &=& 3 \end{array}\right.$ 或 $\left\{\begin{array}{rcr} a &=& 2 \\ t &=& -\frac{15}{4} \end{array}\right.$.

故当 $t=3$ 时，$f(x)=(x+1)^3$ 有 3 重根 -1.

当 $t=-\frac{15}{4}$ 时，$f(x)=(x-2)^2(x+\frac{1}{4})$ 有 2 重根 2.

六、（10 分）计算行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$.

解. 方法一. (按第一列展开)

$$D_5 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$= (x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_2) - 2(x_4 - x_1)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)$.

$= (x_4 - x_3)[(x_4 - x_2)(x_3 - x_2) - 2(x_4 - x_1)(x_3 - x_1)]$.

方法二. (Laplace 定理)

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$= (x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_2) - 2(x_4 - x_1)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)$.

$= (x_4 - x_3)[(x_4 - x_2)(x_3 - x_2) - 2(x_4 - x_1)(x_3 - x_1)]$.

七、(10 分)设 P 为数域, 整数 $n \geqslant 2$, $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + \cdots + a_{in}x^{n-1} \in P[x]$, $i = 1, \cdots, n$.

已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$, 求 $\Delta = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_1(n-1) & \cdots & f_1(1) \\ f_2(n) & f_2(n-1) & \cdots & f_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(n) & f_n(n-1) & \cdots & f_n(1) \end{vmatrix}$.

解. $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 1 \\ n^2 & (n-1)^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n^{n-1} & (n-1)^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= D \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & (n-1)^{n-2} & n^{n-2} \\ 1 & \cdots & (n-1)^{n-1} & n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot D \cdot \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (i-j)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot D \cdot (n-1)!(n-2)! \cdots 2!1! = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot D \cdot \prod_{k=1}^{n-1} k!.$$

八、（10分）证明：两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

证. 设 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0, g(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ 都是本原多项式，

$$h(x)=f(x)g(x)=d_{m+n}x^{m+n}+\cdots+d_{i+j}x^{i+j}+\cdots+d_1x+d_0.$$

若 $h(x)$ 不是本原的，则存在素数 p 使得 $p|d_k, k=0,1,2,\ldots,m+n.$

由于 $f(x)$ 是本原的，所以存在 $0\leqslant i\leqslant m$ 使得 $p|a_0, p|a_1,\cdots,p|a_{i-1}, p\nmid a_i.$

同理，存在 $0\leqslant j\leqslant n$ 使得 $p|b_0, p|b_1,\cdots,p|b_{j-1}, p\nmid b_j.$

因为 $h(x)=f(x)g(x)$, 所以 $d_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\cdots$

$$+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\cdots.$$

由于 $p|d_{i+j}$, 所以 $p|a_ib_j$, 从而 $p|a_i$ 或 $p|b_j$ 矛盾!

九、（10 分）设整数 $n \geqslant 2$, P 是数域，$a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in P$ 且 $c_i \neq a,\ i = 1, 2, \dots, n$.

计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} c_1 & a & \cdots & a & a \\ b & c_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & \cdots & c_{n-1} & a \\ b & b & \cdots & b & c_n \end{vmatrix}$.

解. 方法一.

$D_n = (c_n - a)D_{n-1} + a(c_1 - b)(c_2 - b)\cdots(c_{n-1} - b)$,

同理 $D_n = (c_n - b)D_{n-1} + b(c_1 - a)(c_2 - a)\cdots(c_{n-1} - a)$,

从而 $(a - b)D_n = a(c_1 - b)(c_2 - b)\cdots(c_n - b) - b(c_1 - a)(c_2 - a)\cdots(c_n - a)$.

因此，当 $a \neq b$ 时，$D_n = \frac{a(c_1-b)(c_2-b)\cdots(c_n-b)-b(c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a)}{a-b}$.

当 $a = b$ 时，$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & a & \cdots & a & a \\ a & c_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & a & \cdots & c_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & c_n \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & c_1 & a & \cdots & a & a \\ 0 & a & c_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & a & a & \cdots & c_{n-1} & a \\ 0 & a & a & \cdots & a & c_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ -1 & c_1 - a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & c_2 - a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} - a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n - a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{c_i - a} & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & c_1 - a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 - a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n - a \end{vmatrix}$$

$= \prod\limits_{i=1}^{n}(c_i - a)(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a}{c_i - a})$.

方法二. 设 $A(x)=\begin{vmatrix} c_1+x & a+x & \cdots & a+x & a+x \\ b+x & c_2+x & \cdots & a+x & a+x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b+x & b+x & \cdots & c_{n-1}+x & a+x \\ b+x & b+x & \cdots & b+x & c_n+x \end{vmatrix}$.

令 $r=\sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}$ 为 D_n 的所有代数余子式之和，则按行列式的分行可加性以及按行展开得

$$A(x)=D_n+x\sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}=D_n+rx.$$

令$x=-a$, 则

$$\begin{aligned} D_n-ra &= A(-a) \\ &= \begin{vmatrix} c_1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b-a & c_2-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b-a & b-a & \cdots & c_{n-1}-a & 0 \\ b-a & b-a & \cdots & b-a & c_n-a \end{vmatrix} \\ &= (c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a). \end{aligned} \tag{1}$$

同理

$$D_n-rb=(c_1-b)(c_2-b)\cdots(c_n-b). \tag{2}$$

当 $a\ne b$ 时，由 (1) 及 (2) 解得 $D_n=\frac{a(c_1-b)(c_2-b)\cdots(c_n-b)-b(c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a)}{a-b}$.

当 $a=b$ 时，$D_n = \begin{vmatrix} c_1 & a & \cdots & a & a \\ a & c_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & a & \cdots & c_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & c_n \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} c_1-a+a & a & \cdots & a & a \\ a & c_2-a+a & \cdots & a & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a & a & \cdots & c_{n-1}-a+a & a \\ a & a & \cdots & a & c_n-a+a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_1-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1}-a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n-a \end{vmatrix} + a(c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i-a}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(c_i-a)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{c_i-a}).$$

十、（10 分）设 P 是数域，整数 $n \geq 3$, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in P[x]$. 若存在 P 中 n 个互不相同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(\alpha_1) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(\alpha_1) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

证明：存在 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使得 $f_i(x)$ 的次数 $\geqslant n-1$.

证. 首先由条件知 $f_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

反证法. 假设对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$, 都有$\deg(f_i(x)) \leqslant n-2$.

证法一. 令

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(x) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix},$$

则由条件知 $f(\alpha_1) \neq 0$, 从而 $f(x) \neq 0$. 按第一列展开得 $\deg(f(x)) \leqslant n-2$. 但 $f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = \cdots = f(\alpha_n) = 0$, 即 $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ 是 $f(x)$ 的 $n-1$ 个不同的根，这与 $\deg(f(x)) \leqslant n-2$ 矛盾. 故结论成立.

证法二. 设$f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + \cdots + a_{in-1}x^{n-2} \in P[x]$, $i = 1, \cdots, n$, 令$a_{in} = 0, i = 1, \ldots, n$. 则

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(\alpha_1) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(\alpha_1) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix} &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

与已知矛盾.