16. 同第7题(1).

证明有所变化:

因为 $F^*=F\setminus\{0\}$ 为 p^n-1 阶循环群 且 $|E|=ch(F)=p$.

$\therefore F^*=\langle\gamma\rangle=\{\gamma^k: 1\le k\le p^n-1\}$.

$\forall\ \alpha\in F$.

~~1° $\alpha=0$ 时. $\alpha=0\cdot\gamma$.~~

2° $\alpha\neq 0$ 时 ~~$\exists\ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p^n-1}\in E$ s.t. $\alpha=a_1\gamma+a_2\gamma^2+\cdots+a_{p^n-1}\gamma^{p^n-1}$~~

~~即 $F=E(\gamma)$~~

~~从而 F/E 为域的单扩张.~~

$\forall\ a_i\in E\subseteq F$ $\quad a_i=m_ie=\gamma^{n_i}$

$\therefore\ \forall\alpha\in F^*=\langle\gamma\rangle$ 时, $\alpha=\gamma^{n_0}=\underbrace{a_1\gamma+a_2\gamma^2+\cdots+a_{p^n-1}\gamma^{p^n-1}}_{p(\gamma)}$ 或 $\gamma^0\cdots\gamma^{p^n-2}$

其中 $a_1,\cdots,a_{p^n-1}\in E$.

(因为诸 $a_i\gamma^i$ 中 总有 i s.t. $\gamma^{n_0-i}\in E$ 取 $a_i=\gamma^{n_0-i}\in E$ 即成立)

故 $F=E(\gamma)=\{p(\gamma): p(x)\in E[x]\}$.

从而 F/E 为域的单扩张.

$a_i\neq 0$ $\quad a_i\gamma^i=\gamma^{n_0}$ $\quad a_i=\gamma^{n_0-i}$

17. 设 R 为主理想整环, 证明 R 中非零非单位元 a 必有不可约因子. [提示利用 R 为 Noether 环].

证明:

$\because R$ 为主理想整环. $\therefore R$ 中不可约元与素元等价.

1° 若 a 本为不可约元则 a 的不可约因子即为 a.

2° 若 a 不为不可约元, 即 a 也不为素元

即 $\exists m,n$ s.t. $a\mid mn$ 但 $a\nmid m$ 且 $a\nmid n$.

因此 $a=a_1a_2$. $a_1\mid m$, $a_1\nmid n$; $a_2\nmid m$, $a_2\mid n$.

若 a_1 为不可约元则 a_1 为不可约因子; 若 a_1 不为不可约元则进一步行类似讨论. ~~在有限步后必定存在一个 a_k 为素元, 即为不可约元.~~

~~综上, 有 a 必有不可约因子.~~

$a_1=a_2a_3$ (不可约)

$a_2=a_3a_4'$

$a_3=a_4a_3'$

$a_1\mid a_2\mid a_3\cdots$