高等代数（一）期中试卷参考答案　2020-11-28

一、(20**分**) 判断下列陈述是否正确, 并说明理由 (本题共 5 小题, 每小题 4 分).

1. 设 F 是数域, $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$. 如果 $f(x)|g(x)h(x)$ 并且 $f(x) \nmid g(x)$, 则 $f(x)|h(x)$.

   解.　错误. 例如, $f(x) = x^2$, $g(x) = h(x) = x$.

2. 设 $f(x)$ 是实数域上的不可约多项式，则 $f(x)$ 无实根.

   解.　错误. 例如，$f(x) = x - 1$ 是实数域上的不可约多项式，但是 $f(x)$ 有实根 1.

   大约 12 人出错

3. 设 p 是素数，$f(x) = x^p + (p+1)x^2 + p - 1$, $g(x) = x^2 + p$, 则 $(f(x), g(x)) = 1$.

   解.　正确.

   方法一. 注意 $g(x)$ 在有理数域上不可约. 如果 $(f(x), g(x)) \neq 1$, 则 $g(x)|f(x)$, 从而 $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x)$ 是整系数多项式. 比较常数项导出矛盾!

   方法二. 验证 $x^2 + p$ 的根都不是 $f(x)$ 的根.

   方法三. $h(x) = f(x) - g(x) = x^p + px^2 - 1$, 利用 $x = y + 1$ 和 Eisenstein 判别法.

   大约 20 人出错

4. 设 F 是数域, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), g(x) \in F[x]$. 如果 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 1$ 并且 $f_i(x)|g(x)$, $i = 1, 2, 3$, 则 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)|g(x)$.

   解.　错误. 例如，$f_1(x) = f_2(x) = x$, $f_3(x) = 1$, $g(x) = x$.

   大约 12 人出错, 典型错误: 有理系数多项式没有根就不可约

5. 设 a_i, b_i, c_i, d_i 都是数域 F 中的数, $i = 1, 2$, 则

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

   解.　错误. 例如，$\begin{vmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{vmatrix} = 3$, 但是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

   1 人出错

二、(30分) 填空题 (本题共 5 小题，每小题 6 分).

1. 设 $f(x) = x^6 - 10x^5 + 6x^4 - 310x^3 - 7000x - 379$, 则 $f(12) = \underline{\quad 2021 \quad}$.
22 人出错

2. 设 $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$, 则 $(f(x), g(x)) = \underline{\quad 1 \quad}$.
当 $u(x) = \underline{\quad -(x+1) \quad}$, $v(x) = \underline{\quad x^3 + x^2 - 3x - 2 \quad}$ 时, $(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.
15 人出错

3. 设 $f(x) = x^3 + tx^2 + 3x + 1$, 则当 $t = \underline{\quad -\frac{15}{4} \quad}$ 时, $f(x)$ 恰好有二重根.
39 人出错

4. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, 则 $A_{41} + A_{42} + 2A_{43} + 3A_{44} = \underline{\quad 0 \quad}$.
28 人出错

5. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 20 & 11 & 28 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 172 & x+3 & 4 \\ 0 & 198 & 5 & x+4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 $\underline{\quad 6 \quad}$，常数项等于$\underline{\quad 16 \quad}$.
13 人出错

三、(10分) 写出 $f(x) = x^4 + 1$ 在复数域、实数域及有理数域上的标准分解式，并说明理由.

解. $f(x) = x^4 + 1$ 在复数域上有 4 个根：

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

$f(x)$ 在复数域上的标准分解式为：

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right).$$

$f(x)$ 在实数域上的标准分解式为：$(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

$f(x)$ 在有理域上的标准分解式为：x^4+1.

事实上，$f(x)=x^4+1$ 在有理域上不可约：令 $x=y+1$,

则 $x^4+1=(y+1)^4+1=y^4+C_4^1y^3+C_4^2y^2+C_4^1y+2$.

取 $p=2$, 由 Eisenstein 判别法知，x^4+1 在有理域上不可约.

利用实数域上的分解式也可以直接得到有理数上不可约.

本题得分率 73%, 很多人不知道复数域、实数域上不可约多项式的分类! 而复数域、实数域和有理数域是我们重点提到的三个数域，有一节内容就是其中的不可约多项式的判别. 顺便说一下：无理数域不存在!

四、(20**分**) 设整数 $n \geqslant 3$, 计算下列 n 级行列式 (本题共 2 小题, 每小题 10 分).

$$1.\ D_n=\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -3 & 7 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 7 & -4 & \ddots & & & \vdots\\ 0 & 0 & -3 & 7 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 7 & -4 & 0\\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -3 & 7 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

解. $D_n=7D_{n-1}-12D_{n-2}$.

因此
$$\begin{aligned} & D_n-3D_{n-1}\\ &=4(D_{n-1}-3D_{n-2})\\ &=4^2(D_{n-2}-3D_{n-3})=\cdots=4^{n-2}(D_2-3D_1)=4^n, \end{aligned}$$

即 $D_n-3D_{n-1}=4^n$. 同理, $D_n-4D_{n-1}=3^n$. 所以 $D_n=4^{n+1}-3^{n+1}$.

本题得分率 73%, 这是我们讲过的，一个特例是 Fibonacci 数列, 也讲了一般情形，对角线上是 $b+c$, 对角形上下分别为 b,c.

$$2.\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3}\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

解. 作 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} & x^{n-3} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} & x^{n-1} \\ a_1^{n} & a_2^{n} & a_3^{n} & \cdots & a_n^{n} & x^{n} \end{vmatrix}$,

则 $f(x) = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$,

从而 $f(x)$ 中 x^{n-2} 的系数为 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_i a_j$.

另一方面，将 $f(x)$ 按最后一列展开, x^{n-2} 的系数为 $(-1)^{n-1+n+1}D_n = D_n$.

所以 $D_n = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_i a_j$.

这是一道作业题的延申, 作业题是求 $f(x)$ 的因式分解.

五、(10**分**) 试求满足 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f'(4)=4$ 的所有 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 这里 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数.

解. 利用 Lagrange 插值公式, 满足前三个条件的多项式为

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x-2)(x-3) - 2(x-1)(x-3) + \frac{3}{2}(x-1)(x-2) + F(x)g(x), \\ &= x + F(x)g(x), \end{aligned}$$

这里, $F(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. 再利用 $f'(4)=4$ 得

$$1 + F'(4)g(4) + F(4)g'(4) = 4.$$

把 $g(x)$ 写成

$$g(x) = a_0 + a_1(x-4) + a_2(x-4)^2 + \cdots + a_n(x-4)^n,$$

则有 $g(4)=a_0$, $g'(4)=a_1$, 从而得

$$11a_0 + 6a_1 = 3.$$

故 $a_0 = \dfrac{3-6a_1}{11}$. 因此, 所有满足条件的多项式为

$$f(x) = x + F(x)\left(\frac{3-6a_1}{11} + a_1(x-4) + (x-4)^2 h(x)\right),$$

这里, $a_1 \in \mathbb{Q}$, $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 为任何多项式.

这是 Lagrange 插值公式的变形而已.

六、(10**分**) 设 n 为正整数, $D = |a_{ij}|_n$, 其中 $a_{ij} = |i-j|$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, 试求 D.

解. 根据假设,

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-5 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解法一: 将 D 的第 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 行依次减去第 $i+1$ 行得

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

再将最后一列分别加到第 $1, 2, \cdots, n-1$ 列得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

于是 $D = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

解法二: 第 1 行减去第 2 行的 2 倍再加上第 3 行得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

再将第 1 列减去第 2 列的 2 倍再加上第 3 列得

$$D=\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

令 $D=D_n$, 则按第一行展开得

$$D_n=-4D_{n-1}-4D_{n-2},\quad D_1=0,\quad D_2=-1.$$

于是有

$$D_n+2D_{n-1}=(-2)(D_{n-1}+2D_{n-2})=(-2)^{n-2}(D_2+2D_1)=-(-2)^{n-2}.$$

故有

$$\frac{D_n}{(-2)^n}-\frac{D_{n-1}}{(-2)^{n-1}}=-\frac{1}{4}.$$

故 $\dfrac{D_n}{(-2)^n}=-\dfrac{n-1}{4}$, 从而有 $D_n=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

七、(10**分**) 设整数 $n\geqslant 2$, $D=|a_{ij}|_n=2$, $\Delta=|A_{ij}|_n$, 其中 A_{ij} 是 D 中 a_{ij} 的代数余子式, $i,j=1,2,\dots,n$. 已知 $a_{nn}=4$, 求 A_{nn} 在 $\Delta=|A_{ij}|_n$ 中的代数余子式.

解.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n-1,1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & 0 \\ A_{1n} & \cdots & A_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} D & & & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & D & a_{n-1.n} \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{n-1}\cdot a_{nn}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n-1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=a_{nn}\cdot D^{n-2}=2^n.$$

故 A_{nn} 在 $\Delta=|A_{ij}|_n$ 中的代数余子式 $\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n-1,1} & \cdots & A_{n-1,n-1} \end{vmatrix}=2^n.$ □

八、(10**分**) 设 F 是数域, $A, B \subseteq F[x]$ 是两个非空集合, 定义集合

$$A + B = \{g(x) + h(x) \in F[x] \mid g(x) \in A, h(x) \in B\}.$$

令 $M_k = \{f(x) \in F[x] \mid f(k) = f(k+1) = 0\}$, $k = 1, 2, 3.$

证明: 存在 $d(x) \in F[x]$ 使得

$$(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) = \{d(x)g(x) \in F[x] \mid g(x) \in F[x]\} .$$

证. 由因式-零点定理及 $(x-k, x-k-1) = 1$ 易知,

$$f(k) = f(k+1) = 0 \iff (x-k)(x-k-1) | f(x).$$

因此

$$M_1 = \{(x-1)(x-2)f(x) \mid f(x) \in F[x]\},$$
$$M_2 = \{(x-2)(x-3)f(x) \mid f(x) \in F[x]\},$$
$$M_3 = \{(x-3)(x-4)f(x) \mid f(x) \in F[x]\}.$$

由 $x-1, x-2, x-3, x-4$ 两两互素得

$$M_1 \cap M_2 = \{(x-1)(x-2)(x-3)f(x) \mid f(x) \in F[x]\},$$

$$M_2 \cap M_3 = \{(x-2)(x-3)(x-4)f(x) \mid f(x) \in F[x]\}.$$

令 $d(x) = (x-2)(x-3)$ 及 $N = \{d(x)g(x) \in F[x] \mid g(x) \in F[x]\}$.

下证 $(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) = N$.

一方面, 任取 $m(x) \in (M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3)$, 即存在 $f_1(x), f_2(x) \in F[x]$ 使得

$$m(x) = (x-1)(x-2)(x-3)f_1(x) + (x-2)(x-3)(x-4)f_2(x).$$

令 $g(x) = (x-1)f_1(x) + (x-4)f_2(x)$, 则 $m(x) = d(x)g(x) \in N$,

因此 $(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) \subseteq N$.

另一方面, 任取 $m(x) \in N$, 即存在 $g(x) \in F[x]$ 使得 $m(x) = d(x)g(x)$.

由 $(x-1, x-4) = 1$ 及 Bezout 定理知, 存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得

$$(x-1)u(x) + (x-4)v(x) = 1.$$

所以

$$\begin{aligned} m(x) &= d(x)(x-1)u(x)g(x) + d(x)(x-4)v(x)g(x) \\ &= (x-2)(x-3)(x-1)u(x)g(x) + (x-2)(x-3)(x-4)v(x)g(x) \\ &\in (M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3). \end{aligned}$$

故 $(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) \supseteq N$, 从而

$$(M_1 \cap M_2) + (M_2 \cap M_3) = N = \{(x-2)(x-3)g(x) \in F[x] \mid g(x) \in F[x]\}.$$

$\square$

见到结论 $\{d(x)g(x) \in F[x] \mid g(x) \in F[x]\}$ 应该能想到最大公因式的存在唯一性的另一个证明, 类似地还有一道习题, 考虑多项式的子集 I, 满足 $f(x), g(x) \in I$, 则 $f(x) + g(x) \in I$; 任意$f(x) \in I$, $h(x) \in F[x]$, 则 $f(x)h(x) \in I$. 这样的集合都是由某个多项式的倍式构成，所以可以不用上述构造方法, 直接验证题目中的子集满足这里的 I 的性质, 用带余除法即可.