南京大学数学系期末试卷参考答案

2015/2016 学年第一学期　考试形式 闭卷　课程名称 高等代数

院系 数学 班级______ 学号__________ 姓名______

考试时间 2016.1.12 任课教师_______ 考试成绩_______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打“+”；若错误，请在括号内打“−”.

1. 已知任一 n 维向量都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. (+)
2. 设齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 r，未知量的个数为 n，则该方程组的任意 $n-r$ 个解向量都是它的一个基础解系. (−)
3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 n 维列向量，A 是 n 级可逆矩阵，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关 且仅当 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r$ 线性相关. (+)
4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的任一线性组合还是该方程组的解. (−)
5. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵, 则 A 的秩大于等于 r $(r\geq 1)$ 当且仅当 A 中有一个非零的 r 级子式. (+)
6. 设 A 为 n 级方阵 $(n\geq 2)$, 则 $|A|\neq 0$ 当且仅当 A 的行向量组线性无关. (+)
7. 两个 $s\times n$ 矩阵等价当且仅当它们的秩相同. (+)
8. 设 A 为 n 级方阵，则 A 是对角矩阵当且仅当 A 与所有 n 级方阵可交换. (−)
9. 方阵 A 可逆当且仅当 A 可表为有限个初等矩阵的乘积. (+)
10. 设 A,B 为 n 级方阵，E 为 n 级单位矩阵. 如果 $(AB)^2=E$, 则 $(BA)^2=E$. (+)

二. 填空题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）.

1. 设正整数 $n\geqslant 2$, 则 $\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}^n = \underline{\begin{pmatrix}1&n\lambda&c_n^2\lambda^2\\0&1&n\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}}$.
2. 设矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&0\\2&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$ 不可逆，则 $a=\underline{\frac{1}{2}}$.
3. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=\underline{\pm\frac{1}{2}A^*}$.
4. 设 $\alpha_1=(2,1,0),\alpha_2=(3,2,5),\alpha_3=(5,4,t)$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关的充要条件是 $t=\underline{15}$.
5. 设 $A=\begin{pmatrix}1-a_1^2&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_2a_1&1-a_2^2&\cdots&-a_2a_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&1-a_n^2\end{pmatrix}$, 则 $|A|=\underline{1-\sum_{i=1}^n a_i^2}$.
6. 设 A 为 3 级方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵，并且 $|A|=2$, 则 $|A^*-(\frac{1}{4}A)^{-1}|=\underline{-4}$.
7. 设 3 级方阵 A 的秩为 1, $B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&3&7\\3&2&k\end{pmatrix}$, 并且 $AB=0$, 则 $k=\underline{8}$.
8. 设 A 为 n 级非零方阵，E 为 n 级单位矩阵，并且 $A^2=A$, 则 $|A-E|=\underline{0}$.
9. 矩阵方程 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$ 的解为 $\underline{\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}}$.
10. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$, 则 $A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}}$.

三. （10 分）设向量组 $\alpha_1 = (1,-1,2,4)$, $\alpha_2 = (0,3,1,2)$, $\alpha_3 = (3,0,7,14)$, $\alpha_4 = (1,-1,2,0)$, $\alpha_5 = (2,1,5,6)$.

1. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；
2. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；
3. 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

解. $$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为3.
2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ($\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 或$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 或$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 或$\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$ 或$\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 或$\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$)是一个极大线性无关组.
3. $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$.

四. （10 分）讨论 λ 为何值时实数域上的线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases}$$

1. 无解并说明理由;
2. 有唯一解并求其解;
3. 有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解.

解. $$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

1. $\lambda = 2$ 时，方程组无解.
2. $\lambda \neq 2$ 且$\lambda \neq 1$ 时，方程组有惟一解：$x_1 = \frac{\lambda^2+\lambda-8}{\lambda-2}, x_2 = -1, x_3 = \frac{3-\lambda}{\lambda-2}$.
3. $\lambda = 1$ 时，方程组有无穷多解.

   此时，原方程组同解于方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$

   一个特解为$\gamma_0 = (5,0,-2)$, 导出组的一个基础解系为$\eta = (-1,1,0)$.

   所以一般解为$\gamma = \gamma_0 + k\eta = (5,0,-2) + k(-1,1,0)$, 其中$k$为任意常数.

五.（10 分）证明：非齐次线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$有解的充要条件是该方程组的系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 有相同的秩.

证明. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$,

则上述方程组可改写为向量方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta.$$

由此可见，方程组有解当且仅当 β 是 $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的线性组合且仅当 $A = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 与 $\overline{A} = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$ 有相同的秩.

六.（10 分）设 $A = (a_{ij})_{sn}$, $B = (b_{ij})_{tn}$. 如果 秩$(A) <$ 秩(B)，证明：存在非零的 n 维列向量 γ 使得 $A\gamma = 0$ 但是 $B\gamma \neq 0$.

证明. 如果结论不成立，则 $AX = 0$ 的解都是 $BX = 0$ 的解.
令 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, 则方程组 $AX = 0$ 与 $CX = 0$ 同解. 因此 A 与 C 有相同的秩.
事实上，当它们只有零解时，它们的秩都是 n；
当它们有非零解时，它们有相同的基础解系，从而秩相同.
所以 A 的行向量组的一个极大线性无关组就是 C 的行向量组的一个极大线性无关组,
从而 B 的行向量组可由 A 的行向量组线性表出.
因此，秩$(B) \leqslant$ 秩(A)，矛盾！本题得证.

七.（10 分）设 A 为 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 证明：

$$A^2 + A - 6E = 0 \iff \text{秩}(A+3E) + \text{秩}(A-2E) = n.$$

证明. 因为 $\quad$ 秩$(A+3E)$ + 秩$(A-2E)$

$= \text{秩}(A+3E) + \text{秩}(2E-A) = \text{秩}\begin{pmatrix} A+3E & 0 \\ 0 & 2E-A \end{pmatrix}$

$= \text{秩}\begin{pmatrix} A+3E & 0 \\ A+3E & 2E-A \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} A+3E & A+3E \\ A+3E & 5E \end{pmatrix}$

$= \text{秩}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(A^2+A-2E) & 0 \\ A+3E & 5E \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5}(A^2+A-6E) & 0 \\ 0 & 5E \end{pmatrix}$

$= \text{秩}(A^2+A-6E) + n,$

所以 $A^2 + A - 6E = 0 \iff \text{秩}(A+3E) + \text{秩}(A-2E) = n.$

必要性也可以这样证明：

因为 $(A+3E)(A-2E) = A^2 + A - 6E = 0,$

所以 秩$(A+3E)$ + 秩$(A-2E) \leq n.$

又因为 $\text{秩}(A+3E) + \text{秩}(A-2E) = \text{秩}(A+3E) + \text{秩}(2E-A)$

$\geq \text{秩}(A+3E+2E-A)$

$= \text{秩}(5E) = n.$

故 秩$(A+3E)$ + 秩$(A-2E) = n.$

八.（10 分）设 n 为正整数，A 为 数域 P 上 n 级方阵. 证明：秩(A^n) = 秩(A^{n+1}).

证明. 考虑方程组 $A^nX = 0 \quad (1)$
与方程组 $A^{n+1}X = 0 \quad (2)$
显然,（1）的解是（2）的解.
下证（2）的解也是（1）的解.
假设 ξ 是（2）的解，即 $A^{n+1}\xi = 0$.
如果 $A^n\xi \neq 0$, 则 $\xi, A\xi, A^2\xi, \ldots, A^n\xi$ 线性无关.
事实上，假设 $k_0\xi + k_1A\xi + k_2A^2\xi + \cdots + k_nA^n\xi = 0$.
上式两边左乘 A^n, 则 $k_0A^n\xi = 0$, 从而 $k_0 = 0$.
于是， $k_1A\xi + k_2A^2\xi + \cdots + k_nA^n\xi = 0$.
上式两边左乘 A^{n-1}, 得 $k_1A^n\xi = 0$, 从而 $k_1 = 0$. 如此继续下去可得 $k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$.
因此 $\xi, A\xi, A^2\xi, \ldots, A^n\xi$ 线性无关, 这与任意 $n+1$ 个 n 维向量线性无关矛盾.
所以， $A^n\xi = 0$, 即 ξ 是（1）的解.
故 (1) 与(2) 同解.
若它们只有零解，则它们的秩都是 n.
若它们有非零解，则它们的基础解系中含有相同个数的向量，从而它们的秩相等.
总之，秩(A^n) = 秩(A^{n+1}).