

# 南京大学数学系考试 A 卷 标准答案

2006/2007 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 近世代数

班级 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

考试时间 2007.6.22 任课教师 孙智伟 考试成绩 \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

## 一、填空题 (每格 2 分, 共 10 分)

1. 设  $\sigma = (13524)$ ,  $\tau = (12)(345)$ , 则  $\sigma\tau\sigma^{-1} = (125)(34)$  (要求写成不相交轮换的乘积).
2. 8 阶循环群与 12 阶循环群直积的幂指数  $\exp(C_8 \times C_{12}) = 24$ . [有限 Abel 群  $G$  的幂指数是满足  $\forall x \in G (x^n = e)$  的最小正整数  $n$ ]
3. 不同构的 72 阶 Abel 群共有 6 个.  $C_{72}, C_3 \times C_{24}, C_2 \times C_{36}, C_6 \times C_{12}, C_2 \times C_2 \times C_{18}, C_2 \times C_6 \times C_6$
4. Hilbert 基定理断言  $R$  为 Noether 环时  $R[x]$  也是这样的环.
5. 设  $A_1, \dots, A_n$  为交换幺环  $R$  的两两互素的理想, 依中国剩余定理,  $R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$  同构于  $R/A_1 \cap \dots \cap A_n$ .  $R/A_1 \cap \dots \cap A_n \cong R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$

## 二、判断题 (在右端括号内填 $\checkmark$ 或 $\times$ , 每小题 2 分, 共 20 分)

1. 设群  $G$  有合成群列  $G_0 = \{e\} \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$  与  $H_0 = \{e\} \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$ , 则对  $i = 0, 1, \dots, n-1$  都有  $G_{i+1}/G_i \cong H_{i+1}/H_i$ . ( $\times$ )
2. 设  $R$  为整环, 则  $R$  的极大理想都是素理想,  $R$  的不可约元都是素元. ( $\times$ )
3. 非零整数  $d$  不是完全平方时  $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  按数的加、乘法构成域, 其中  $\mathbb{Q}$  表示有理数域. ( $\checkmark$ )
4. 有至少两个元素的有穷整环必为域. ( $\checkmark$ )
5. 设  $F$  是恰有  $q$  个元素的有限域, 则对任何  $a \in F$  都有  $a^q = a$ . ( $\checkmark$ )
6. 设  $F$  为  $p^n$  元域 (其中  $p$  为素数), 则对  $d = 1, \dots, n$ , 域  $F$  都有  $p^d$  元子域. ( $\times$ )
7. 设  $F$  是特征为素数  $p$  的域, 则对任何  $a, b \in F$  总有  $(a-b)^p = a^p - b^p$ . ( $\checkmark$ )
8. 任给正整数  $n$ ,  $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  上一元  $n$  次方程在  $\mathbb{Z}_m$  中至多有  $n$  个不同的根. ( $\times$ )
9. 环  $R$  的所有理想依理想的加、乘法构成环. ( $\times$ )
10. 任何域都是主理想整环, 域的有限次扩张必是代数扩张. ( $\checkmark$ )