南京大学数学系期末试卷(A)参考答案

2020/2021 学年第一学期　考试形式 闭卷　课程名称 高等代数
院系 数学　班级______　学号______　姓名______
考试时间 2021.1.14　任课教师______　考试成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. (20 分) 判断下列陈述是否正确, 并说明理由 (本题共 5 小题, 每小题 4 分).

1. 设 A, B 都是 n 级方阵, 则 $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

解. 错误. 例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^2 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (A+B)(A-B)$.

2. 设 A, B, C 都是 n 级方阵, $A \neq 0$, 如果 $AB = AC$, 则 $B = C$.

解. 错误. 例如, 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

易见, $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 但是 $B \neq C$.

3. 设 A, B 为数域 F 上 n 级方阵, 若矩阵方程 $AX = B$ 有解, 则 $\operatorname{rank}(A, B) = \operatorname{rank}(A)$.

解. 正确. 若矩阵方程 $AX = B$ 有解, 则 B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出, 从而 (A, B) 的列向量组与 A 的列向量组等价, 故 $\operatorname{rank}(A, B) = \operatorname{rank}(A)$.

4. 设 A 是 数域 F 上的 n 级方阵, $n \geqslant 2$, 则 A 可逆当且仅当 A 的伴随矩阵 A^* 可逆.

解. 正确. $|A^*| = |A|^{n-1}$.

5. 如果向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, $i = 1, 2, 3$, 线性无关，则向量组 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j})$, $j = 1, 2, 3$, 也线性无关.

解. 正确. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 $\beta_1', \beta_2', \beta_3'$ 分别是矩阵 $A = (\beta_1', \beta_2', \beta_3')$ 的行向量组和列向量组, 它们具有相同的秩.

二. (30 分) 填空题 (本题共 10 个空格，每个空格 3 分).

1. 设 A 为 n 级实对称矩阵，如果 $A^2 = 0$, 则 $A =$ __0__.

2. 设 $P = \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix}'$, $Q = \begin{pmatrix} 3, 2, 1 \end{pmatrix}$, $A = PQ$, 则 $A =$ __$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$__,

$A^{2021} =$ __$10^{2020}A$ 或 $10^{2020}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$__.

3. 设 A 为 n 级方阵并且 $|A| = -5$, A^* 为 A 的伴随矩阵，$A^3 - 3A^2 + \frac{1}{5}AA^* = 0$, 则 $A^{-1} =$ __$A^2 - 3A$__.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B = (4I + A)'(4I - A)^{-1}(16I - A^2)$, 其中 I 为 3 级单位矩阵，则 $|B| =$ __60^2__.

5. 设 a 为实数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2a-1 & 3-3a & a \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $AX = \beta$ 的通解为 __$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ 或 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$__, 其中 k 为任意实数.

6. 设 A 是 n 级方阵，I 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = I$, 并且 $A \neq I$, 则 $|A + I| =$ __0__.

7. 设 F 是数域, $A \in M_{n\times m}(F)$, $B \in M_{m\times n}(F)$, $m < n$, 则 $|AB| =$ __0__.

8. $\begin{vmatrix} 1 - a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1 - a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & 1 - a_nb_n \end{vmatrix} =$ __$1 - \sum_{i=1}^{n} b_ia_i$__.

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ __$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$__.

三. (15 分) 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,1,5)$, $\alpha_2=(2,-2,2,10)$, $\alpha_3=(1,0,2,5)$, $\alpha_4=(1,3,5,5)$, $\alpha_5=(2,-3,2,13)$, $\alpha_6=(0,-1,2,9)$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

解. 首先, 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ 转置得矩阵

$$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5',\alpha_6')=\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&0\\-1&-2&0&3&-3&-1\\1&2&2&5&2&2\\5&10&5&5&13&9\end{pmatrix}.$$

其次, 对上述矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&0\\-1&-2&0&3&-3&-1\\1&2&2&5&2&2\\5&10&5&5&13&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{(-1)\times r_1+r_3\\(-5)\times r_1+r_4}]{1\times r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&0\\0&0&1&4&-1&-1\\0&0&1&4&0&2\\0&0&0&0&3&9\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)\times r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&0\\0&0&1&4&-1&-1\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&3&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)\times r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&0\\0&0&1&4&-1&-1\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[(-2)\times r_3+r_1]{1\times r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&-6\\0&0&1&4&0&2\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)\times r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-3&0&-8\\0&0&1&4&0&2\\0&0&0&0&1&3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6).$$

显然 β_1,β_3,β_5 线性无关, 并且

$$\beta_2=2\beta_1,\ \beta_4=-3\beta_1+4\beta_3,\ \beta_6=-8\beta_1+2\beta_3+3\beta_5.$$

因此 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关, 并且

$$\alpha_2=2\alpha_1,\ \alpha_4=-3\alpha_1+4\alpha_3,\ \alpha_6=-8\alpha_1+2\alpha_3+3\alpha_5.$$

四. (15 分) 讨论 a,b 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-1)x_3-2x_4=2b\\3x_1+2x_2+x_3+(a+2)x_4=-1\end{cases}$$

1. 无解并说明理由;
2. 有唯一解并求其解;
3. 有无穷多解并求其通解.

解. $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&3&1\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-1&-2&2b\\3&2&1&a+2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&3&1\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-1&-2&2b\\0&-4&-8&a-7&-4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&3&3&1\\0&1&2&2&1\\0&0&a+1&0&2b+1\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

1. $a=-1$ 且 $b\neq-\frac{1}{2}$ 时, 方程组的系数矩阵和增广矩阵的秩不同, 所以方程组无解.
2. $a\neq-1$ 时, 方程组有唯一解：$x_1=\dfrac{2b-a}{a+1},x_2=\dfrac{a-4b-1}{a+1},x_3=\dfrac{2b+1}{a+1},x_4=0$.
3. $a=-1$ 且 $b=-\frac{1}{2}$ 时, 方程组有无穷多解, 此时原方程组同解于 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\end{cases}$

   其一般解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$, 其中 k_1,k_2 是任意实数.

五. (10 **分**) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是数域 F 上一组线性无关的 n 维向量, 令

$$\beta_i=\alpha_i+\alpha_{i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

其中 $\alpha_{m+1}=\alpha_1$. 如果 m 是奇数, 证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

证. 设 $k_1,\cdots,k_m\in F$ 使得

$$k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0,$$

则有

$$(k_m+k_1)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\alpha_m=0.$$

由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关, 故

$$\begin{cases} k_m+k_1=0\\ k_1+k_2=0\\ \cdots\\ k_{m-1}+k_m=0,\end{cases}$$

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+m}.$$

因为 m 为奇数, 所以上述行列式不等于零, 从而 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

六. (10 **分**) 设 F 是数域, $A\in M_{n\times m}(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$, 则 A 的任意 r 个线性无关的行向量与 r 个线性无关的列向量交叉处元素构成的 r 级子式非零.

证. 不妨设 A 的前 r 行和 r 列线性无关, $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$, 其中 A_1 是 r 级方阵. 由 A 的秩等于 A 的列秩知, A 的后 $n-r$ 列可由 A 的前 r 列线性表出, 从而 A_2 的列可由 A_1 的列线性表出, 所以分块矩阵 (A_1,A_2) 的列秩等于 A_1 的列秩. 因此

$$\mathrm{rank}(A_1)=A_1\text{ 的列秩}=(A_1,A_2)\text{ 的列秩}=(A_1,A_2)\text{ 的行秩}=r.$$

故 $|A_1|\neq 0$.

七. (10 **分**) 设 $A\in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{R})$, 证明: 矩阵方程 $AX=I_n$ 有解当且仅当 $\mathrm{rank}(A)=n$.

证. 方法一. 必要性. 由 $n=\mathrm{rank}I_n=\mathrm{rank}(AX)\leqslant\mathrm{rank}A\leqslant n$ 知, $\mathrm{rank}A=n$.

充分性. 由 $\mathrm{rank}A=n$ 知存在 $P\in\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ 使得 $A=(I_n,0)P$. 令 $B=P^{-1}\begin{pmatrix} I_n\\ 0\end{pmatrix}$, 则 $AB=I_n$, 从而矩阵方程 $AX=I_n$ 有解.

方法二. 更一般地, 矩阵方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A,B)$. 事实上, 矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Longleftrightarrow$ B 的列向量组可由 A 的列向量组线性表出 $\Longleftrightarrow$ (A,B) 的列向量组与 A 的列向量组等价 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A,B)=\mathrm{rank}(A)$.

因此 $AX=I_n$ 有解当且仅当 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A,I_n)=n$.

方法三. 由矩阵乘法的定义知矩阵 X 是 $(n+1)\times n$ 矩阵, 令 $X=(x_{ij})_{(n+1)\times n}=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1})$, $I_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$, 则

$$\begin{aligned} AX=I_n\text{ 有解 } &\Leftrightarrow AX_j=\varepsilon_j\text{ 有解, } j=1,2,\ldots,n,\\ &\Leftrightarrow x_{1j}\alpha_1+x_{2j}\alpha_2+\cdots+x_{n+1,j}\alpha_{n+1}=\varepsilon_j,\ j=1,2,\ldots,n,\\ &\Leftrightarrow \varepsilon_j\text{ 可由向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\text{ 线性表示, } j=1,2,\ldots,n,\\ &\Leftrightarrow \text{向量组 }\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\text{ 可由向量组 }\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\text{ 线性表示}\\ &\Leftrightarrow \text{向量组 }\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\text{ 与 }\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\text{ 等价}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n+1}\}=\mathrm{rank}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n\}=n.\end{aligned}$$

八. (10 **分**) 设 n 级方阵 A 满足 $\mathrm{rank}(A^2)=\mathrm{rank}(A)=r\geqslant 1$, 证明：存在 n 级可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 其中 B 是 r 级可逆矩阵.

证. 由于 $\mathrm{rank}(A)=r$, 故存在 P,Q 可逆使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$. 由条件可得

$$\mathrm{rank}\left(P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q\right)=r.$$

于是有 $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=r$. 令 $QP=\begin{pmatrix} B & C\\ D & E\end{pmatrix}$, 其中 B 为 r 级方阵, 则有 $\mathrm{rank}(B)=r$, 即 B 是可逆的. 从而有 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$. 注意到 $\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & -B^{-1}C\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & B^{-1}C\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$ 令 $S=\begin{pmatrix} I_r & -B^{-1}C\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix}$ 得 $A=PS\begin{pmatrix} B & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}S^{-1}P^{-1}$. 取 $T=PS$ 即可.