南京大学
偏微分方程期末考试

天影　　陈相相　　陈韵雯*

2023 年 2 月 24 日

评语: 这张试卷是杨孝平老师和徐兴旺老师一起出的, 主要考察内容为《数学物理方程讲义》的三, 四两章 (即从热传导方程开始). 考虑到整理同学的时间有限, 没有足够的时间做解答的工作, 且偏微分方程考核的内容难度也较大, 因此这张试卷暂时不做解答.

从笔者的角度来看, 数学系学生大三需要面临很多难度相当大的课程, 偏微分方程就位列其一, 学弟学妹们如果想要学好这门课, 课上的时间是远远不够的, 还需要在课后付出很多的时间. 另外, 由于培养方案的修改, 对于 21 级及之后选择统计学的学生来说, 偏微分方程的分数不再算入核心学分绩, 请同学们在复习时做好时间规划.

想要为这份试卷提供解答的同学, 请通过邮箱与本文档作者联系 (见脚注).

一、(12 分) 求解半无界问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x), & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = b, & 1 \le x \le 2, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x < 1, \quad x > 2, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

*邮箱地址: yunwen_chen@qq.com

二、(15 分) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, $c(x,t) \geq 0$, $\alpha(x,t) \geq \alpha_0 > 0$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $T > 0$, $u \in C(\overline{Q_T} \cap C^{2,1}(Q_T))$, 满足

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \overline{\Omega}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x,t)u = g(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

其中 n 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向, 求证

$$\max_{Q_T} |u(x,t)| \leq FT + B.$$

其中 $F = \max\limits_{Q_T} |f|$, $B = \max\left\{ \max\limits_{\overline{\Omega}} |\varphi|, \dfrac{1}{\alpha_0} \max\limits_{\partial\Omega \times [0,T]} |g| \right\}$.

三、(15 分) 设 $u(r,\theta)$ 是圆 $B_R(0)$ 外的有界调和函数, 证明 u 的 Kelvin 变换 $v(r,\theta) = u\left(\dfrac{R^2}{r}, \theta\right)$ 是圆 $B_R(0)$ 内的有界调和函数, 并解如下 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \backslash \overline{B_R(0)}, \\ u|_{\partial B_R(0)} = \varphi(\theta), \\ |u| \leq M < \infty. \end{cases}$$

四、(14 分)

(1) 设 u 在有界区域 Ω 上调和, 求证 $\{x \in \Omega, u(x) = 0\}$ 不是 Ω 中的简单封闭曲线.

(2) 设一个调和函数列 $\{u_k(x)\}$ 在 $P \in \Omega$ 上收敛, 且 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \Omega$, 有 $u_{k+1}(\theta) \geq u_k(\theta)$, 求证 $\{u_k(x)\}$ 在 Ω 上处处收敛于某个调和函数 $u(x)$.

五、(15 分) 记上半空间 $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_n > 0\}$. 证明: 如果 $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ 是如下边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\ u(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

的有界解, 则 u 是唯一的.

六、(15 分) (二维调和函数的奇点可去性) 设 Ω 为 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域, u 为 $\Omega \backslash \{P\}$ 上的调和函数且 $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{u(Q)}{\ln \frac{1}{|Q-P|}} = 0$. 证明可以重新定义 $u(P)$, 使 u 在 Ω 上调和.

七、(12 分) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 记 $Q = \Omega \times (0, \infty)$, $\Gamma = \partial\Omega \times [0, \infty)$, $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \quad \text{in } Q, \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = 0 \quad \text{in } \Gamma, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{in } \Omega. \end{cases}$$

其中 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ 且不同时为 0. 设

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x.$$

求证: $E(t)$ 不增且满足上面方程组的解 u 对初值稳定.