又F是E的[F:E]次扩张：

$\therefore |F| = |E|^{[F:E]} \Rightarrow |E| = ch(F) = p$.

$\because F^* = F \setminus \{0\}$ 是有限循环群. 设 γ 为其生成元，则 $F = E(\gamma)$.

(2). 设正整数 d 整除 n，试证 $E_d = \{\alpha \in F : \alpha^{p^d} = \alpha\}$ 为 F 的 p^d 元子域.

证明：

$\because$ 素 $ch(F) = p$ 为素数 $\therefore \forall \alpha, \beta \in E_d$. $(\alpha \pm \beta)^{p^d} = \alpha^{p^d} \pm \beta^{p^d} = \alpha \pm \beta$.

$(\alpha\beta)^{p^d} = \alpha^{p^d}\beta^{p^d} = \alpha\beta$. $(\alpha^{-1})^{p^d} = (\alpha^{p^d})^{-1} = \alpha^{-1}$. $\therefore E_d$ 为 F 的子域.

由于 $X^{p^d} - X$ 在域 F 中至多有 p^d 个根. $|E_d| \le p^d$.

$F^* = F \setminus \{0\}$ 为 $p^n - 1$ 阶循环群. $\therefore F^* = \langle a \rangle$ $a^{p^n-1} = e$ $(\because a^n = a)$

设 γ 是其生成元. 由于 $d \mid n$. $p^d - 1 \mid p^n - 1$

请 $\alpha_j = \gamma^{\frac{p^n-1}{p^d-1} j}$ $(j = 1, 2, \cdots, p^d - 1)$ 两两不同且均有 $\alpha_j^{p^d-1} = 1$.

故 E_d 中至少有 p^d 个元 $0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p^d-1}$.

因此 E_d 恰为 F 的 p^d 元子域.

8. 设 I 为交换幺环 R 的理想，且 $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$，其中 $P_1, \cdots, P_n$ 为 R 的素理想.

(1) 证明 $n > 1$ 时必有 $1 \le j \le n$ 使得 $I \subseteq \bigcup_{i \ne j} P_i$. [提示：不然可取 $a_j \in I \setminus \bigcup_{i \ne j} P_i$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，然后考察元素 ~~$a_1 + \cdots + a_n$~~].

证明：

假设 $I \not\subseteq \bigcup_{i \ne j} P_i$. 取 $a_j \in I \setminus \bigcup_{i \ne j} P_i$ 因 $I \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_n$

$\therefore a_j \in P_j$ 但 $i \ne j$ 时 $a_j \notin P_i$.

作 $a = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} + a_n$ $a_j \in P_j$

$\because a_j \in P_j$. 且 P_j 为理想. $\therefore a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \in P_j$ $(j = 1, 2, \cdots n-1)$

但 $a_n \notin P_j$. $\therefore$ 故 $a \notin P_j$. $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$.

又 $a_n \in P_n$. 但 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \notin P_n$. ($\because P_n$ 为素理想) $\therefore a \notin P_n$.

故 $a \notin P_1, \cdots P_n$ 但 $a \in I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ 矛盾!

否则 $a_1 \cdots a_{n-1}$ 中有一个 $\in P_n$ ×