五、（10分）设 R 为交换幺环，$r(R)$ 为它的诣零根（即所有素理想的交）。假设 R 的每个元不是单位就是幂零元，证明 $R/r(R)$ 为域。

只需证 $r(R)$ 为极大理想。假如不然，则有理想 M 使 $r(R)\subset M\subset$

取 $a\in M\setminus r(R)$，由于 $r(R)$ 由幂零元构成，a 不是幂零元从而是单位。

于是 $M=R$，这与 $M\neq R$ 矛盾。

六、（10分）证明多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 中理想 $I=(2,x)$ 不是主理想。

假如 $I=(f(x))$，这里 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$，则 $f(x)\mid 2$ 且 $f(x)\mid x$。

于是 $\deg f(x)=0$，$f(x)=\pm1$。由于 $2g(x)+xh(x)$ $(g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x])$

常数项为偶数，$\pm1\notin I=(2,x)$，故得矛盾。

因此 I 不为主理想。

七、（10分）证明 $R=\left\{\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}: a,b\in\mathbb{Z}\ \&\ a\equiv b \pmod 2\right\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环。

易见 R 对加减法与和复数共轭封闭。注意 $a\equiv b \pmod 2$ 且 $c\equiv d \pmod 2$ 时

$$\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{c+d\sqrt{-11}}{2}=\frac{(ac-11bd)+(ad+bc)\sqrt{-11}}{4}$$

由于 $a(c-d)\equiv b(c-d) \pmod 4$，$ad+bc\equiv ac-11bd \pmod 4$

由此可见 R 对乘法也封闭。因此 R 为整环。

任给 $\alpha\in R$，$\beta\in R\setminus\{0\}$，可写

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\beta|^2}=r+s\sqrt{-11},\quad \text{这里 } r,s\in\mathbb{Q}$$

取一个最靠近 $2s$ 的整数 n（即让 $|2s-n|\le\frac{1}{2}$），再取与 n 奇偶性相同的整数 m 使 $|2r-m|\le 1$。记 $\eta=\frac{m+n\sqrt{-11}}{2}\in R$，则

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=\left|\left(r-\frac{m}{2}\right)+\left(s-\frac{n}{2}\right)\sqrt{-11}\right|^2=\frac{(2r-m)^2}{4}+\frac{11}{4}(2s-n)^2$$

$$\le\frac{1}{4}+\frac{11}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{16}<1$$

令 [illegible] $|\gamma|^2<|\beta|^2$ [illegible] 的整数由 $\left|\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\right|^2=\frac{a^2+11b^2}{4}\in\mathbb{Z}$