李茜?? 1011100?

九. (10分) 设$F(x)$是一右(或者左)-连续的单调函数满足$F(-\infty)=0$且$F(+\infty)=1$。证明存在一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的随机变量ξ, 使ξ的分布函数恰为$F(x)$。

证明: 因为$F(x)$为右连续单调函数

故存在 $p(x)=F'(x)$

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,dt$

此时可构造一个随机变数 $P(w_i)=P\{\xi=w_i\}$ (w_i为样本点). $\xi\in(-\infty,+\infty)$

相应地 可得出概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$

不妨取一维Borel域 w_i为一维Borel点集.

此时 $P\{\xi\le x\}=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,dt$

$=F(x)$

故$F(x)$为ξ的分布函数

$\Omega=[0,1]$. $\mathscr{F}=\mathscr{B}[0,1]$.

$\xi(\omega)=F^{-1}\inf\{\theta:F^{-1}(\theta)$

$\theta(\omega)=\omega$. 为$(0,1)$上均匀

$\boxed{\xi=F^{-1}(\theta(\omega))}$

$F^{-1}(y)=\inf\{x:F(x)>y\}$

十. (10分) 若随机变量$\xi:\Omega\to\mathbb{N}$满足条件概率$P(\xi=k+1|\xi>k)\equiv\gamma$与$k$无关, 证明随机变量$\xi$服从几何分布。

证明: 几何分布 $b(k;p)=p\cdot q^{k-1}$ 具有无记忆性

即 $P(\eta=k+1\,|\,\xi>k)=p$ (与k无关).

$P(\xi=k+1|\xi>k)=\dfrac{P(\xi=k+1,\xi>k)}{P(\xi>k)}\equiv\gamma$ 也具有无记忆性

$=$ ~~$P(\xi=k)$~~

故 $\xi\sim b(k;\gamma)$. 得证.

$P(\xi=k+1\,|\,\xi>k)\equiv r$

$=\dfrac{P(\xi=k+1)}{P(\xi>k)}$

$=\dfrac{P(\xi>k)-P(\xi>k+1)}{P(\xi>k)}$

$=\dfrac{P_k-P_{k+1}}{P_k}=1-\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$

$\Rightarrow \dfrac{P_{k+1}}{P_k}=1-r$.

$P_{k+1}=(1-r)P_k$.

$\dfrac{q_{k+1}}{p_k}=p$.

$P_k=(1-p)^k$

$P_k=(1-p)^{k-1}\cdot p$.