南京大学数学系期中试卷

2018/2019 学年第一学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级____ 学号____ 姓名____

考试时间 2018.5.12 任课教师____ 考试成绩____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（判断下列叙述是否正确；并给出理由。每小题4 分，共20分）.

1. 两个同级λ-方阵相似当且仅当它们有相同的行列式因子.

   错误。条件只能给出等价。

2. n级数字方阵的特征矩阵是满秩的从而可逆.

   错误。由定义知道$|\lambda E-A|$ 不是常数。

3. 设V 是数域P 上的n维线性空间，V_1,V_2,V_3 都是V的子空间，满足$V_1\oplus V_2=V_1\oplus V_3$, 则$V_2=V_3$.

   错误。任意举例即可：如二维空间，取不同的基$\{\alpha,\beta\}$ 和$\{\alpha,\gamma\}$.

4. 最小多项式相同的矩阵是相似的。

   错误。举例即可：例如取$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

5. 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的一个线性变换，则V的任意子空间都是$\mathscr{A}$-子空间当且仅当$\mathscr{A}$ 是数乘变换.

   正确。需证明：“$\Leftarrow$:” 显然。

   “$\Rightarrow$:” 由条件，每个向量都是特征向量。设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是基且 $\mathscr{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$, $1\le i\le n$. 如果 $\lambda_1\neq\lambda_i$, 则 $\alpha_1+\alpha_i$不是$\mathscr{A}$的特征向量，矛盾。故 $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda$. 从而 $\mathscr{A}=\lambda id_V$.

二. 填空题（每空 4 分，共 40 分）.

1. 设$\alpha_1=(1,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,0,1,1)$, $\beta_1=(0,0,1,1)$, $\beta_2=(0,1,1,0)$. 令$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 则$\dim L_1\bigcap L_2=\underline{0}$, $\dim L_1+L_2=\underline{4}$.

2. 设矩阵A的特征多项式为$(\lambda-1)(\lambda+1)^4$, 最小多项式为$(\lambda-1)(\lambda+1)^3$，则 A的所有不变因子为 $\underline{1,1,1,(\lambda+1),(\lambda-1)(\lambda+1)^3}$，所有初等因子为 $\underline{(\lambda+1),(\lambda-1),(\lambda+1)^3}$.

3. 设$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，则$A$的最小多项式为$\underline{\quad x^2-1\qquad}$。

4. 在$\mathbb{R}^3$中定义线性变换$\mathscr{A}$: $(x,y,z)\mapsto(x+y+z,x+z,z)$, 则$\mathscr{A}$的秩= $\underline{3\qquad}$, 则$\mathscr{A}$ 的零度= $\underline{0\qquad}$,.

5. 设空间$P[x]_n$中，线性变换$\mathscr{D}$: $f(x)\mapsto f'(x)$的迹为 $\underline{0\qquad}$.

6. 设A 是数域P上的n阶方阵，令$V=M_n(P)$是数域P上的所有n阶方阵构成集合，对任意$X\in V$, 定义$\mathscr{A}(X)=AX$, $\mathscr{A}$ 是线性空间V的线性变换，则$|\mathscr{A}|=\underline{|A|^n\qquad}$.

7. 设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. $C(A)$ 表示全体与A可交换的矩阵，则$\dim C(A)=\underline{5\qquad}$

三.（15分）设$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. 求$A$ 的特征值和特征向量。

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-(1+\sqrt{3}))(\lambda-(1-\sqrt{3}))$. 所以全体特征值为$2, 1\pm\sqrt{3}$ ———(5分)
当$\lambda=2$ 时，得特征向量为$(5,-2,1)$;
当$\lambda=1+\sqrt{3}$ 时，得特征向量为$(-3-3\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$;
当$\lambda=1-\sqrt{3}$ 时，得特征向量为$(-3+3\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.

四.（10分）证明根子空间分解定理：设线性变换$\mathscr{A}\in L_F(V)$ 的特征多项式为$f(\lambda)$, 它可以分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in F$ 互不相同. 证明：

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中$V_i=\{v\in V|(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}v=0\}$.
证明： 令 $g_i(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{r_i}}$ 和 $W_i=\mathrm{Im}(g_i(\mathscr{A}))$, $i=1,2,\ldots,s$. 由 $0=f(\mathscr{A})=(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}g_i(\mathscr{A})$知 $W_i\subseteq V_i$, $1\le i\le s$.
另一方面，由 $(g_i(\lambda),(\lambda-\lambda_i)^{r_i})=1$知存在 $a_i(\lambda),b_i(\lambda)\in F[\lambda]$ 使得

$$g_i(\lambda)a_i(\lambda)+b_i(\lambda)(\lambda-\lambda_i)^{r_i}=1, \tag{1}$$

所以对任意 $\alpha\in V_i=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}$, 有

$$\alpha=g_i(\mathscr{A})a_i(\mathscr{A})\alpha+b_i(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}\alpha=g_i(\mathscr{A})a_i(\mathscr{A})\alpha\in \mathrm{Im}g_i(\mathscr{A})=W_i.$$

故 $W_i\subseteq V_i$, 从而 $W_i=V_i, 1\le i\le s$.
由 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in F$ 互不相同知 $(g_1,g_2,\ldots,g_s)=1$, 从而存在 $u_1,u_2,\ldots,u_s\in F[\lambda]$使得

$$g_1(\lambda)u_1(\lambda)+g_2(\lambda)u_2(\lambda)+\cdots+g_s(\lambda)u_s(\lambda)=1.$$

所以对任意 $\alpha\in V$, 有

$$\alpha=g_1(\mathscr{A})u_1(\mathscr{A})\alpha+g_2(\mathscr{A})u_2(\mathscr{A})\alpha+\cdots+g_s(\mathscr{A})u_s(\mathscr{A})\alpha\in W_1+W_2+\cdots+W_s.$$

因此 $V\subseteq W_1+W_2+\cdots+W_s=V_1+V_2+\cdots+V_s\subseteq V$. 从而

$$V=W_1+W_2+\cdots+W_s=V_1+V_2+\cdots+V_s.$$

再设 $0=\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_s\in V=V_1+V_2+\cdots+V_s$, 其中 $\alpha_i\in V_i=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}$.
当 $1\le i\ne j\le s$时，$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}|g_j(\lambda)$, 因此对任意 $1\le i\le s$, 有

$$0=g_i(\mathscr{A})(0)=g_i(\mathscr{A})(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_s)=g_i\mathscr{A})(\alpha_i).$$

故由 (1)式得

$$\alpha_i=a_i(\mathscr{A})g_i(\mathscr{A})(\alpha_i)+b_i(\mathscr{A})(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}(\alpha_i)=0+0=0.$$

所以

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s.$$

五.（15分）求下列矩阵A的若尔当标准形和有理标准形：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

解：**方法一.** A的特征多项式为 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$. 所以 $-1,1,2$是 3阶方阵 A的 3个不同的特征值, 因此

(1) A的不变因子为 $d_1=d_2=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$, 从而 A的有理标准形为$\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

(2) A的初等因子为 $\lambda-2,\ \lambda-1,\ \lambda+1$, 从而 A的若尔当标准形为$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

方法二. $\lambda E-A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)\end{pmatrix}$.

(1) A的不变因子为 $d_1=d_2=1, d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$, 从而 A的有理标准形为$\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

(2) A的初等因子为 $\lambda-2,\ \lambda-1,\ \lambda+1$, 从而 A的若尔当标准形为$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

六.（10分）设A,B 是数域P 上的两个n级方阵，且满足$AB=BA$. 证明：如果存在可逆矩阵Q 使得

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

其中$\lambda_i\neq\lambda_j$ 对$1\leq i\neq j\leq n$，则$Q^{-1}BQ$ 也是对角阵。

证明：设$X=Q^{-1}BQ=(x_{ij})_{n\times n}$. 由 $AB=BA$得 $Q^{-1}AQ\cdot Q^{-1}BQ=Q^{-1}BQ\cdot Q^{-1}AQ$, 即

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

所以对任意 $1\leq i,j\leq n$, 有 $\lambda_i x_{ij}=\lambda_j x_{ij}$, 即 $(\lambda_i-\lambda_j)x_{ij}=0$. 因此当 $i\neq j$时，$x_{ij}=0$. 从而 $Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}x_{11}&0&\cdots&0\\0&x_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix}$为对角阵.

七.（10分）设 σ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换，λ 是 σ 的一个特征根，对应的特征向量为 α.

证明：对于 P 中任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 都存在 V 的一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 使得

$$\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_n\eta_n.$$

证明：由 α 是特征向量知 $\alpha\neq0$, 从而 α可扩充为V的一组基：$\alpha,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

令 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$, 则 $\varepsilon_1\neq0$. 从而 ε_1可扩充为 P^n的一组基：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,

令 $A=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$, 则 A是 n阶可逆矩阵。

令 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^{-1}$,

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V的一组基且

$$(\alpha,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A.$$

从而有 $\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots k_n\eta_n$.