高等代数（一）期中试卷参考答案 2018-11-25

姓名： 学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 P 是数域，$f(x), g(x), d(x) \in P[x]$. 如果存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

   解. 错误. 例如，$x^2 + x = 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x$, 但是 $x^2 + x$ 不是 x^2 与 x 的最大公因式.

2. 设 $f(x)$ 是有理系数多项式. 若 $f(x)$ 有有理根，则 $f(x)$ 在有理数域上可约.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x$ 有有理根 0, 但是 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

3. 设 $f(x)$ 是数域 P上的多项式，整数 $k \geqslant 1$. 如果不可约多项 $p(x)$ 是 $f'''(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+3$ 重因式.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x^{k+3} + 1, f'''(x) = (k+3)(k+2)(k+1)x^k$.

4. 设 p 是素数，$f(x) = x^p + (p+1)x^2 + p - 1$, $g(x) = x^3 + p$, 则 $(f(x), g(x)) = 1$.

   解. 正确. 注意 $g(x)$ 在有理数域上不可约. 如果 $(f(x), g(x)) \neq 1$, 则 $g(x)|f(x)$, 从而 $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x)$ 是整系数多项式. 比较常数项导出矛盾!

5. 多项式 $x^4 + 1$ 在实数域上不可约.

   解. 错误. 实数域上的不可约多项式最多为 2 次.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x)=x^3+tx^2+3x+1$, 则当 $t=\underline{\quad 3 \quad}$ 时，$(f(x),f'(x))$ 是二次多项式.

2. 设 s,t 是复数，则多项式 $x^3+3sx+2t$ 有重根的充要条件是 $\underline{\quad t^2+s^3=0 \quad}$.

3. 设行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & a & 8 \\ 16 & 11 & 6 & 2a \end{vmatrix}=200$, 则 $a=\underline{\quad \pm 7 \quad}$.

4. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 58 & 22 & 0 & 20 \\ 204 & 102 & 0 & 1 \\ 4x & 3x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 $\underline{\quad 2018 \quad}$.

5. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\underline{\quad 1 \quad}$.

三、(10 分) 设 $f(x)=x^5-5x^3+5x+1$, $g(x)=x^3-2x-1$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解. 由带余除法得，

$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$, 其中 $q_1(x)=x^2-3, r_1(x)=x^2-x-2$,

$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)$, 其中 $q_2(x)=x+1, r_2(x)=x+1$,

$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)$, 其中 $q_3(x)=x-2$,

于是, $(f(x),g(x))=r_2(x)=x+1$,

并且, $r_2(x)=g(x)-q_2(x)r_1(x)$

$$=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]=-q_2(x)f(x)+(1+q_2(x)q_1(x))g(x),$$

所以， $x+1=-(x+1)f(x)+(x^3+x^2-3x-2)g(x)$.

故 $u(x)=-(x+1), v(x)=x^3+x^2-3x-2$ 即为所求.

四、（10分）设 $f(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$, 证明 $f(x)$ 在实数域上有重根并求出重根及其重数.

证. $f'(x)=4x^3-15x^2+12x+4$

$f(x)=(\frac{1}{4}x-\frac{5}{16})f'(x)-\frac{27}{16}(x-2)^2$

$f'(x)=(4x+1)(x-2)^2$

故 $(f(x),f'(x))=(x-2)^2$.

由此可见，$f(x)$ 有 3 重根 2.

事实上，$f(x)=(x-2)^3(x+1)$.

五、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n+1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n+2 \end{vmatrix}$.

解. 原式 $=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (n!)\begin{vmatrix} 3+\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{2}{i} & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$

$=(n!)(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{i})$

六、（10分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

解. 设该行列式为 D_n. 令 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}$,

则 $f(x) = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)$, 从而 $f(x)$ 中 x 的系数为

$(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$.

另一方面，将 $f(x)$ 按最后一列展开得， $f(x)$ 中 x 的系数为

$(-1)^{2+n+1} D_n = (-1)^{n-1} D_n$.

故 $D_n = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{i=1}^{n} a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$.

七、（10 分）设 $s_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k, k=1,2,\ldots$. 计算 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & s_2 & s_1 \\ s_{n+1} & s_n & s_{n-1} & \cdots & s_3 & s_2 \\ s_{n+2} & s_{n+1} & s_n & \cdots & s_4 & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{2n-1} & s_{2n-2} & s_{2n-3} & \cdots & s_{n+1} & s_n \end{vmatrix}.$$

解. 原式 $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

$=(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\prod\limits_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)^2.$

八、（10分）设 P 为数域，$f(x)$ 是数域 P 上多项式，$p(x)$ 是数域 P 上不可约多项式，整数 $k \geqslant 1$. 证明：$p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式并且 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

证. “$\Rightarrow$” (必要性). 因为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式, 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

设 $f(x) = p^k(x)g(x)$, $p(x) \nmid g(x)$,

则 $f'(x) = (p^k(x))'g(x) + p^k(x)g'(x) = kp^{k-1}(x)p'(x)g(x) + p^k(x)g'(x)$

$\qquad = p^{k-1}(x)(kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)) = p^{k-1}(x)h(x)$,

其中 $h(x) = kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)$.

易见，$p^{k-1}(x)|f'(x)$, 但是，$p^k(x) \nmid f'(x)$ (若 $p^k(x)|f'(x)$, 则 $p(x)|h(x)$, 于是，$p(x)|p'(x)g(x)$, 从而，$p(x)|p'(x)$, 或 $p(x)|g(x)$, 矛盾！).

故 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

“$\Leftarrow$” (充分性). 因为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，可设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 s 重因式 $(s \geqslant 1)$.

由必要性知，$p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $s-1$ 重因式. 于是 $s-1 = k-1$, 即 $s = k$.

故 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

九、（10 分）设 n 为正整数，$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 并且

$$x^n - 1 \mid f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n).$$

证明：$(x-1)^n \mid f_0(x)f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)$.

证. 方法一.

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ 是 $x^n - 1$ 的 n 个不同的根，由条件知，

$$\begin{cases} f_0(1) & + & f_1(1)\epsilon_1 & + & f_2(1)\epsilon_1^2 & + \cdots & f_{n-1}(1)\epsilon_1^{n-1} & = & 0 \\ f_0(1) & + & f_1(1)\epsilon_2 & + & f_2(1)\epsilon_2^2 & + \cdots & f_{n-1}(1)\epsilon_2^{n-1} & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(1) & + & f_1(1)\epsilon_n & + & f_2(1)\epsilon_n^2 & + \cdots & f_{n-1}(1)\epsilon_n^{n-1} & = & 0 \end{cases}$$

由于上述方程组的系数行列式不等于零，所以它只有零解.

于是 $f_i(1) = 0$, 从而 $x - 1 \mid f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

故 $(x-1)^n \mid f_0(x)f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)$.

方法二.

设 $f_i(x) = q_i(x)(x-1) + r_i$, 其中 $q_i(x) \in P[x], r_i \in P$,

则 $f_i(x^n) = q_i(x^n)(x^n - 1) + r_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

于是 $f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i f_i(x^n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i(q_i(x^n)(x^n-1) + r_i)$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i q_i(x^n)(x^n-1) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i x^i$

因为 $x^n - 1 \mid f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$, 所以 $x^n - 1 \mid \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i$.

由此可见， $r_i = 0$, 从而 $x - 1 \mid f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

故 $(x-1)^n \mid f_0(x)f_1(x)\cdots f_{n-1}(x)$.

十、（10分）证明：多项式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2\cdots(x-2017)^2+2018$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证. 反证法. 假设$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约, 则存在非常数的整系数多项式 $g(x),h(x)$ 使得

$$f(x)=g(x)h(x).$$

因为 $f(x)$ 首一，不妨设 $g(x),h(x)$ 都是首一整系数多项式，从而当 x 充分大时，$g(x),h(x)$ 均为正，再由 $f(x)$ 无实根知 $g(x),h(x)$ 均无实根，从而对 $\forall\ x\in\mathbb{R}$, 都有 $g(x)>0,h(x)>0$. 又对任意 $i\in\{1,2,\dots,2017\}$, 都有 $g(i)h(i)=f(i)=2018$, 从而

$$(g(i),h(i))\in\{(1,2018),(2,1009),(1009,2),(2018,1)\}.$$

所以对任意 $i,j\in\{1,2,\dots,2017\}$, 有

$$|g(i)-g(j)|,|h(i)-h(j)|\in\{0,1,1007,1008,1009,2016,2017\}. \tag{1}$$

对任意 $i\neq j$ 及 $m\in\mathbb{N}^*$, 总有 $(i-j)|(i^m-j^m)$, 从而 $(i-j)|g(i)-g(j)$.

取 $j=1,i=1011,1012,\dots,2016$, 则由 $i-1|g(i)-g(1)$ 及 (1) 得

$$g(1)=g(1011)=g(1012)=\cdots=g(2016).$$

又对任意 $j\in\{2,3,\dots,1010\}$, 存在 $i\in\{1011,1012,\dots,2016\}$, 使得 $5|i-j$, 从而有 $5|g(i)-g(j)$, 再由 (1) 得

$$g(1)=g(2)=\cdots=g(2016).$$

再由 $5|g(2017)-g(2012)$ 得 $g(2017)=g(2012)$. 因此 $g(1)=g(2)=\cdots=g(2017)$. 同理

$$h(1)=h(2)=\cdots=h(2017).$$

由于 $g(x),h(x)$ 都是非常数多项式及 $\deg g(x)+\deg h(x)=2\times2017$, 得 $\deg g(x)=\deg h(x)=2017$. 所以

$$g(x)=\prod_{i=1}^{2017}(x-i)+a,\quad h(x)=\prod_{i=1}^{2017}(x-i)+b,\ \ a,b\in\mathbb{Z}.$$

因此

$$\prod_{i=1}^{2017}(x-i)^2+2018=f(x)=g(x)h(x)=\prod_{i=1}^{2017}(x-i)^2+(a+b)\prod_{i=1}^{2017}(x-i)+ab.$$

从而有 $a+b=0,ab=2018$ 这是不可能的. 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.