$= 1 - ba + b(1-ab)^{-1}(1-ab)a$.
$= 1 - ba + ba$
$= 1$.

故 $1+b(1-ab)^{-1}a$ 为其逆元

~~✗13. Hilbert 基定理断言 R 为主理想整环时，R[x] 也是这样的环.~~

见 P_{117} 定理 3.7.2.

R 为 Noether 环时，R[x] 为 Noether 环.

✓ 14. 设 E 为 q 元域，$f(x) \in E[x]$ 为 n 次不可约多项式，则商环 $F = E[x]/(f(x))$ 为 q^n 元域

$= \{a(x) + (f(x)),\ a(x) \in E[x]\}$

$(f(x)) = \{g(x)f(x),\ g(x) \in E[x]\}$

$F = E[x]/(f(x)) = \{a(x) + (f(x)) : a(x) \in E[x]\}$.

F 中元素对加减法封闭且显然满足结合律与交换律.

对乘法封闭且满足结合律与交换律.

乘法对加法有分配律：

$[a_1(x)+(f(x))][a_2(x)+(f(x))+a_3(x)+(f(x))]$

$= a_1(x)(a_2(x)+a_3(x)) + a_1(x)(f(x)) + a(f(x))(a_2(x)+a_3(x)) + (f(x))$.

$= a_1(x)a_2(x) + a_1(x)(f(x)) + a_2(x)(f(x)) + (f(x))(f(x))$

$+ a_1(x)a_3(x) + a_1(x)(f(x)) + a_3(x)(f(x)) + (f(x))(f(x))$

$= [a_1(x)+(f(x))][a_2(x)+(f(x))] + [a_1(x)+(f(x))][a_3(x)+(f(x))]$ □

∴ F 为交换环. 又 $1+(f(x))$ 为乘法单位元，$(f(x))$ 为加法零元

∴ F 为交换幺环. 又 $[a(x)+(f(x))][b(x)+(f(x))] = (f(x))$.

$\Rightarrow a(x) = 0$ 或 $b(x) = 0$.

∴ F 为整环.

而 ~~F~~ 按乘法构成 Abel 群 不一定？~~不为域~~ 。(待进一步讨论).

$F^* = F \backslash \{0\}$

而 $(f(x))$ 为极大理想. ∵ $f(x)$ 不可约.

E[x] 必为整环

综上 $E[x]/(f(x))$ 为域（见 P_{107} 定理 3.4.3）