NJU 数学分析 B 期末考试

2014.06.25

一、(20 分)1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}}{x}$; 2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ 是否存在?

二、(20 分) 设 f 为周期为 2π 的函数, 且当 $x\in[-\pi,\pi)$ 时,$f(x)=x$.

1. 求 f 的 Fourier 级数;

2.f 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上是否一致收敛?

三、(20 分) 考虑函数序列 $f_n(x)=x^n(1-x)^n, x\in[0,1], n\in\mathbb{N}$.

1. 给定 $n\in\mathbb{N}$, 求 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值;

2. 求 f_n 的逐点极限 f; 3. 证明 $f_n \rightrightarrows f$.

四。(15 分) 设 $\mathscr{A}=\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\sin\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]\}$.

1. 求 $\overline{\mathscr{A}}$; 2.$\mathscr{A}$ 是否为路连通集?

五、(15 分) 判断如下级数是否为某 Riemann 可积的 Fourier 级数:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^n}$; 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{\ln n}$.

六、(10 分) 设 $\mathscr{V}$ 是内积空间 $(C[0,1],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的有限维线性子空间, 这里 $\langle f,g\rangle=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. 记 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|, \|f\|_2=\sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x}$. 证明存在 $\phi\in\mathscr{V}$ 使得 $\|\phi\|_2=1$ 且 $\|\phi\|_\infty\geq\sqrt{\dim\mathscr{V}}$.

七、(8 分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\displaystyle\int_0^1\sqrt[n]{1+x^n}-1)\,\mathrm{d}x$.

八、(12 分) 设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=1$. 证明存在区间 $I\subset[0,1]$, 使得 $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x=\int_I g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$.