高等代数（一）期中试卷　2019-11-23

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　任课教师：

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 F 是数域，$f(x), g(x) \in F[x]$. 如果 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根, 则 $f(x) \mid g(x)$.

2. 设 F 是数域，$f(x) \in F[x]$. 如果 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 互素, 则 $f(x)$ 的重因式都是 2 重因式.

3. 设 $f(x), g(x)$ 都是有理数域上的不可约多项式，则 $f(g(x))$ 在有理数域上不可约.

4. 多项式 x^6+6 在实数域上不可约.

5. 设 $f(x), g(x)$ 都是整系数多项式， $h(x)$ 是有理系数多项式，并且 $f(x)=g(x)h(x)$, 则 $h(x)$ 是整系数多项式.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x) = x^6 - 2018x^5 - 2020x^4 + 2020x^3 - 2018x^2 - 2018x + 1$, 则 $f(2019) =$ _____.

2. 设 p 是素数，$f(x) = x^p + (p+1)x^2 + p - 1$, $g(x) = x^3 + p$, 则 $(f(x), g(x)) =$ _____.

3. 设 $i = \sqrt{-1}$, 则以 $1, -1, -1, 2+3i, 2+3i, 2+3i$ 为根的次数最低的首一实系数多项式的标准分解式是 ______________________________.

4. $f(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ 的全部有理根为 ________.

5. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 & 7 \\ 1 & 3x & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的首项系数是 ________.

三、(20 分) 设 $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

(1) (10分) 求 $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$;

(2) (10分) 求所有的 $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得

$$\begin{cases} F(x) \equiv 2x^2 + x + 1 & \pmod{f(x)}, \\ F(x) \equiv -15x - 8 & \pmod{g(x)}. \end{cases}$$

四、（10 分）设整数 $n \geqslant 2$, 计算 n 级行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$.

五、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & \dfrac{1}{2}+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & \dfrac{1}{3}+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & \dfrac{1}{n}+a_n^2 \end{vmatrix}$.

六、(20 分) 设整数 $n \geqslant 2$, $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x_1} & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \frac{1}{1+x_2} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \frac{1}{1+x_3} & 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1+x_n} & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$, A_{ij} 是 D 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式， $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

(1) (10分) 求 D 的值；

(2) (10分) 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

七、（10 分）设 F 为数域，$f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x) \in F[x]$. 如果 $(f_1(x), g_2(x)) = 1$, $(f_2(x), g_1(x)) = 1$, 证明：$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))$.

八、（10 分）设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是整系数多项式且 $|a_0|>\sum_{i=1}^n|a_i|$. 如果 a_0 为素数或 $\sqrt{|a_0|}-\sqrt{|a_n|}<1$, 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约.