五. (15 分) 试证 $f(t)=\cos^n t$ 是特征函数, $n\in N$.

证明: 先证 $\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

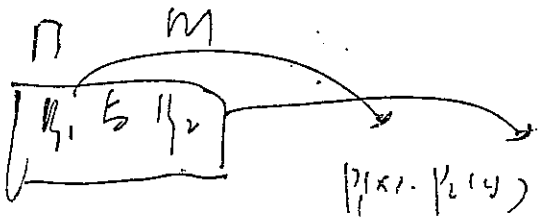
令 ξ 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

则 $f_\xi(t)=Ee^{it\xi}=\cos t$. $\cos t$ 为 ξ 的特征函数

令 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ 为相互独立, 且特征函数均为 $\cos t$.

则 $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n$ 的特征函数为

$f(t)=\cos^n(t)$. $n\in N$



$$P\{\eta_1<x,\eta_2<y\}=F=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\,dx\,dy.$$

$p(x,y)$ 即 $P_{\eta_3}(x)$

$\eta_3=\eta_1-\eta_2$.

$\eta_3\cdot\eta_2$