∴ $H \trianglelefteq G$ $P \le G$ $P/H\cap P \cong HP/H$ $HP \le G$ 有 $\frac{|P|}{|H\cap P|} = \frac{|HP|}{|H|} \Rightarrow \frac{|H|}{|H\cap P|} = \frac{|HP|}{|P|} \mid \frac{|G|}{|P|}$

即 $[H:H\cap P] = [HP:P] \mid [G:P] = m$ $(p\nmid m)$ 即 $H\cap P$ 是 H 的 Sylow p 子群

五

证明 45阶群G必有9阶正规子群.

$|G| = 3^2\cdot 5$. 从而G存在Sylow 3-子群 即9阶子群.

设Sylow 3-子群的个数为n, 由Sylow第三定理知 $n \mid 5$, $n\equiv 1 \pmod 3$

从而 $n=1$. 仅存在一个Sylow 3-子群.

故G有正规的9阶正规子群.

六.

设H为群G的正规子群且指标 $[G:H]$ 有限, 又设K为G的子群. 证明 $[K:H\cap K]$ 整除 $[G:H]$ (G未必有限)

证 $H \trianglelefteq G$, $K \le G$. 由第二同构定理 $H\cap K \trianglelefteq K$ 且 $K/H\cap K \cong HK/H$.

故 $[K:H\cap K] = [HK:H]$. 又知当 $H\trianglelefteq G$ $K\le G$ 时 $HK \le G$

从而 $HK/H \le G/H$. 由拉格朗日定理知 $[HK:H] \mid [G:H]$

故 $[K:H\cap K] \mid [G:H]$

七 设G为循环群. 证明对任何正整数m, 方程 $x^m=e$ 在G中至多有m个解;

① $|G|=m$ 则 $|G|$ 中有m个元素 结论成立

② $|G|<m$ 则 $x^m=e$ 至多有 $|G|$ 个解 $|G|<m$ 结论成立

~~或 $m=q|G|+r$, $0\le r<m$ $x^m = x^{q|G|+r} = (x^{|G|})^q \cdot x^r = e \Rightarrow x^r=e$, $r<m$~~

③ $|G|>m$. $G=\langle a\rangle$ 若 $|G|=\infty$ $x^m=e$ 只有 $x=e$ 一个解

ii) $|G|<\infty$. 于是 x可用 a^k 表示 有 $(a^k)^m=e \Leftrightarrow a^{km}=e \Leftrightarrow |G| \mid km$

又 $0\le k<|G|-1$. 故 $km \in \{0, |G|, 2|G|, \ldots |G|(m-1)\}$.

且 $|G|m > (|G|-1)m > |G|(m-1)$ 故 km至多有m个. #

八(a). H为有限群G正规子群. $|H|$ 与 $[G:H]$ 互素. 又设K为G子群. $|K|=|H|$ 证 $K=H$

[设法证明 $H\cap K=K$].

$H\trianglelefteq G$. $K\le G \Rightarrow HK\le G$. 由第二同构定理 $H\cap K \trianglelefteq K$ 且 $K/(H\cap K) \cong HK/H \le G/H$.

故 $[K:H\cap K] \mid [G:H]$. 又G有限 $\frac{|K|}{|H\cap K|} = \frac{|H|}{|H\cap K|} \mid [G:H]$.

且H与 $[G:H]$ 互素 于是 $\frac{|H|}{|H\cap K|} = 1$. 即 $H\cap K=K$. $K\subseteq H$. $|K|=|H|$ 故 $H=K$.

(b) 设P为有限群G的Sylow p-子群. H为G次正规子群. 试证 $P\cap H$ 为H的Sylow p-子群

H在G中次正规 ⇒ ∃正规列 $H=H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m \lhd G$ 若能证明

对于 $H\trianglelefteq G$ P是G Sylow p-子群 ⇒ $P\cap H$ 是 H Sylow p-子群 (*)

则知 $P\cap H_m$ 是 H_m 的 Sylow p-子群 再令 $P\cap H_m$ 对应(*)中P H_m 对应(*)中G.