11. 设 R 为交换幺环，$r(R)$ 为它的诣零根（即所有素理想的交）。假设 R 的每个元素不是单位就是幂零元，证明 $R/r(R)$ 为域.

证明：

只需证 $r(R)$ 为极大理想。假设不是，则有^极大^理想 M 使 $r(R)\subseteq M\subset R$.

取 $a\in M\setminus r(R)$ 由于 $r(R)$ 由幂零元组成.

~~∴ a 不为幂零元，∴ a 为单位.~~

∴ $\underset{R=}{(a)}\subseteq M\subseteq R \Rightarrow M=R$ 与 $M\neq R$ 矛盾！

12. 证明多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 中理想 $I=(2,x)$ 不是主理想 $=\{2p(x)+xq(x): p(x),q(x)\in\mathbb{Z}[x]\}$

证明：是主理想

假设 $I=(f(x))$，设 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$. 则 $f(x)\mid 2$ 且 $f(x)\mid x$.

于是 $\deg(f(x))=0$，$f(x)=\pm1$.

由于 $2g(x)+xh(x)$ $(g(x),h(x)\in\mathbb{Z}[x])$ 常数项为偶数.

∴ $\pm1\notin I=(2,x)$. 故矛盾.

故 I 不为主理想.

13. 证明 $R=\left\{\frac{a+b\sqrt{-11}}{2} : a,b\in\mathbb{Z}\text{ 且 } a\equiv b \pmod 2\right\}$ 关于复数的加、乘法构成 Euclid 整环.

证明：

① 第一步先证 R 为整环.

R 关于加减法封闭，~~对共轭封~~求复共轭封闭. 对乘法封闭.（证明时取 a,b,c,d 满足 $a=2k_1+b$，$c=2k_2+d$ 代入计算证明即可）

加之结合律交换律显然成立且必有乘法幺元 1. ~~故为~~且无零因子. 故为整环.

② 第二步找映射使之满足 Euclid 整环条件

任给 $\alpha,\beta\in R\setminus\{0\}$. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar\beta}{|\beta|^2}=r+s\sqrt{-11}$，$r,s\in\mathbb{Q}$.

取一个最靠近 $2s$ 的整数 n（即使 $|2s-n|\le\frac12$），再取与 n 奇偶性相同的整数 m 使 $|2r-m|\le 1$. $\eta=\frac{m+n\sqrt{-11}}{2}$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=\left|\frac{2r-m}{2}+\frac{2s-n}{2}\cdot\sqrt{-11}\right|^2=\left(\frac{2r-m}{2}\right)^2+11\left(\frac{2s-n}{2}\right)^2=\frac{\cdots}{4}<1$$