

南京大学数学系期中试卷

南

2007/2008 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 近世代数
院系 年级 姓名 学号 得分

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	合计
得分									

一、填空题 (每格 2 分, 共 10 分)

1. 设群 G (左) 作用于非空集 X 上, 如果 $x \in X$ 的稳定化子为 G 的子群 H , 则 $g \in G$ 时 $g \circ x$ 的稳定化子为 gHg^{-1} . (34)(12)(5)

2. 设 $\sigma = (13524)$, $\tau = (12)(345)$, 则 $\sigma\tau\sigma^{-1} = (12)(345)$ (写成不相交轮换的乘积).

3. 设 p 为素数, 则 p 阶群是循环群, p^2 阶群是阿贝尔群, p^n 阶群是可解群 (要求所填内容反映相应群的特性, 不能是“有限”、“ p ”等空泛词语).

二、判断题 (在右端括号内填 或 \times , 每小题 2 分, 共 20 分)

- 任何两个 n 阶循环群都同构, 所有无穷循环群彼此同构. (✓)
- 把群 G 中元映到它逆元的映射 $\sigma: g \mapsto g^{-1}$ 是群 G 的自同构. (X)
- 设 G 为群, 则对 $a, b \in G$, ab 与 ba 有相同的阶. (X) ✓
- 100 群必有 25 阶子群但不可能有 75 阶子群. (✓)
- 如果 H 为群 G 的正规子群, 则对 $a \in G$, $aH \in G/H$ 生成的子群为 $\langle a \rangle H/H$. (✓)
- 设群 G 有合成群列 $G_0 = \{e\} \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ 与 $H_0 = \{e\} \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$, 则对 $i = 0, 1, \dots, n-1$ 都有 $G_{i+1}/G_i \cong H_{i+1}/H_i$. (X) $\exists \sigma \in S_n$ 使 $G_i/G_{i-1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}$
- 对于群 G , 导群 G' 在 G 中正规, 但一般的 n 阶导群 $G^{(n)}$ 未必是 G 的正规子群. (X)
- 设 H 为群 G 的正规子群且指标 $[G:H]$ 有穷, 则对 G 的子群 K , 指标 $[K:H \cap K]$ 整除 $[G:H]$. (✓)
- 对于群 G 的子群 H , 正规化子 $N_G(H)$ 是 G 的正规子群. (X)
- 45 阶群必有 9 阶正规子群. (✓) $N_G(H) = \text{stab}_G(H) = \{g \in G, gH = H\}$
 $H \in \text{Con}(G) = \{g \in G, gHg^{-1} = H\}$
 $= \{g \in G, gH = H\}$

三、(每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 写出群 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ 的一个合成群列.

$$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{a}, a \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$$