南京大学
数值计算与实验 I 期中考试

天影　　　DiMersified

2022 年 10 月 31 日

评语: 这张试卷是徐勤武老师和邓卫兵老师一起出的, 内容为第一章, 第四章, 第五章, 由于教学内容进行过修改 (去年是一二三章), 因此往年的期中卷用处不大, 但是期末卷却可以覆盖. 经过对比, 原题复现率较高, 且难度并不大, 学弟学妹们复习的时候记得多看看往年卷.

感谢南京大学数学系 20 级的多位同学在题目解答方面的帮助.

一、(每小题 4 分, 共 28 分) 填空题.

1. 截至 2021 年底, 世界上最快的计算机为 ____(A. 美国 Summit; B. 中国神威 · 太湖之光; C. 日本 Fugaku(富岳)), 其计算速度至少每秒 ____(A. 9 亿亿; B. 50 亿亿; C. 500 亿) 次浮点运算 (本题填选项).

2. 机器精度 ε_{mach} 代表了计算机的单位舍入误差, 它说明了用浮点数系统表示一个非零实数的最大可能的 ____(A. 绝对误差; B. 相对误差; C. 最小误差); 一个浮点数系的上溢值 OFL, 下溢值 UFL 和机器精度 ε_{mach} 的大小关系为 ________________________.

3. 设 $f(x)\in C^6[a,b]$, 且 $x_i=a+(i-1)h$, $h=(b-a)/n$, $i=1,2,\cdots,n+1$, 且 $f'(a)=f'(b)$, 则计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的修正复合梯形公式为 ________________________________, 其收敛阶为 ________.

4. 设 $f(x)=2^x$, 步长 $h=1$, 则 $\Delta^3 f(n)=$___________.

5. 当 ___________________________ 时, 精度损失称为相减相消. 当 $|x|$ 很小时, 计算 $f(x)=\sin x-\tan x$ 应取 $f(x)=$___________________ 才能避免相减相消.

6. 设 $S(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的自然三次样条插值函数, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上是具有至少 ____ 阶连续导数的函数, 且 $S''(a)=$___________.

7. 在区间 $[-1,1]$ 上, 取权函数 $W(x)=1+x^2$, 记首项系数为 1 的直交多项式的前三项为 $P_0(x),P_1(x),P_2(x)$, 取 $P_0(x)=1$, 则 $P_1(x)=$____________, $P_2(x)=$________________.

分析: 这些题目中, 除了第一题是某节课的讲座内容外, 其余的题目要么是在往年卷中经常出现, 要么考察书上的基本知识, 难度不是很大, 故这里只提供答案.

解:

1. C, B.
2. B, $UFL < \varepsilon_{mach} < OFL$.
3. $\dfrac{h}{2}\Big[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\Big]$, 4.
4. 2^n.
5. 两个大小相近的数相减, $-2\sin^2\dfrac{x}{2}\tan x$. (第二空填 $-\dfrac{x^3}{2}$ 之类等价无穷小近似也可.)
6. 2, 0.
7. x, $x^2-\dfrac{2}{5}$.

二、(8 分) 设 $x=0.43920, y=1.5324, z=11.5012$ 均是具有四位有效数字的近似值, 分析 xyz 的绝对误差限, 相对误差限和有效数字.

分析: 本题主要考察第一章绝对误差限, 相对误差限, 有效数字的定义. 当然, 由于考试不能带计算器, 本题也被认为是这张试卷中最考验同学们计算能力的一题, 因此解答中的做法会尽力减少计算量.

解: 设 x, y, z 的精确值分别为 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. 由 x, y, z 都具有四位有效数字, 知它们的绝对误差限分别为

$$|e_x| = |x-\hat{x}| \le 5\times 10^{-5}, \quad |e_y| = |y-\hat{y}| \le 5\times 10^{-4}, \quad |e_z| = |z-\hat{z}| \le 5\times 10^{-3}.$$

由误差传播公式 $e_{xy} = ye_x + xe_y$ 可得 xyz 的绝对误差限

$$|e_{xyz}| = |ze_{xy}| + |xye_z| = |zye_x| + |zxe_y| + |xye_z| \approx 6.77\times 10^{-3} < 5\times 10^{-2},$$

经计算得 $xyz \approx 7.7407$, 因此得到相对误差限

$$|r_{xyz}| = \left|\frac{e_{xyz}}{xyz}\right| \approx 8.75\times 10^{-4}.$$

由于其绝对误差限大于 5×10^{-3} 且小于 5×10^{-2}, 故只能保留到小数点后一位, 即 $xyz = 7.7$, 有效数字为 2 位.

当然, 也可以先分别计算出各未知数的相对误差限

$$|r_x| = \frac{|e_x|}{x}, \quad |r_y| = \frac{|e_y|}{y}, \quad |r_z| = \frac{|e_z|}{z},$$

并利用相对误差传播公式 $r_{xy} = r_x + r_y$ 计算出相对误差限

$$|r_{xyz}| = |r_x| + |r_y| + |r_z|,$$

再由 $|e_{xyz}| = |xyz \cdot r_{xyz}|$ 计算出绝对误差限. 这种方法至少需要计算三次乘法和三次除法, 而第一种方法至少需要计算四次乘法和一次除法, 因此从计算量上看, 第一种方法或许更好一些.

三、(8 分) 已知数据

j	1	2	3	4
x_j	-1	0	1	2
$f(x_j)$	1	0	-1	2

计算 Newton 均差表, 并由以上数据计算在 $x=\dfrac{3}{2}$ 处的三次多项式插值.

分析: 此题主要考察 Newton 插值公式和均差定义, 较为简单.

解: 由均差公式

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_n]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0},$$

根据给出的表格得到均差表:

j	x_j	一阶均差	二阶均差	三阶均差	四阶均差
1	-1	1			
2	0	0	-1		
3	1	-1	-1	0	
4	2	2	3	2	2/3

因此可以直接得出 Newton 插值多项式:

$$N_3(x)=1-(x+1)+0+\frac{2}{3}x(x+1)(x-1)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}x^3.$$

将 $x=\dfrac{3}{2}$ 代入 $N_3(x)$ 可得插值结果为 $-\dfrac{1}{4}$.

四、(10 分) 判断能否仅用有限个基点的数值积分方法得到

$$\int_1^2\frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\,\mathrm{d}x$$

的精确解. 给出计算过程或不能数值计算精确解的理由.

分析: 本题考察 Gauss-Chebyshev 求积公式的使用. 该类积分的特征较为明显, 即被积函数都含有 $((b-x)(x-a))^{-\frac{1}{2}}$ 形式的因子, 其中 b 为积分上限, a 为积分下限. 这是因为可以通过换元的方法凑出 Chebyshev 多项式的权函数 $W(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 从而可以把复杂的根式分母去掉, 简化运算.

解: 首先有

$$\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\,\mathrm{d}x \xlongequal{t=2x-3} \int_{-1}^1 \frac{t^2(t+1)}{2\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^2(t+1)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

则令 $f(t)=t^2(t+1)$, 由于 $f(t)$ 为三次多项式, 只需要数值积分公式的代数精度不小于 3 即可得到精确解, 因此, 使用两点 Gauss-Chebyshev 求积公式, 设 I 为所求积分值, 有

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right]=\frac{\pi}{4}.$$

五、(10 分) 在 $-4\le x\le 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表. 若用分段二次插值求 $f(x_i)$ 的近似值, 要使截断误差不超过 $\dfrac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 问使用函数表的步长 h 应满足什么条件？

分析: 此题为 2020 数值期末 B 卷的原题, 难度不大.

解: 以 x_{i-1},x_i,x_{i+1} 为节点作二次插值多项式, 则插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad \xi\in[-4,4].$$

做变换令 $x=x_i+th$, 则 x_{i-1},x_i,x_{i+1} 分别对应于 $t=-1,0,1$, 且

$$(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})=(t-1)t(t+1)h^3,$$

则

$$\begin{aligned}|R_2(x)| &= \left|\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|\\ &\le \frac{e^4}{6}h^3\max_{-1<t<1}|(t-1)t(t+1)|\\ &\le \frac{e^4}{6}h^3\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3.\end{aligned}$$

令 $\dfrac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3\le\dfrac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 得到 $h\le 0.5$.

六、(12 分) 给定求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)+\beta(b-a)^4(f'''(a)-f'''(b)),$$

求参数 β, 使上述求积公式具有尽可能高的代数精度, 并指出能达到的最高精度是多少.

分析: 本题考察代数精度的定义, 只需要按部就班地分别令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3, \cdots$ 逐一代入该公式, 验证积分精确值与数值结果是否一致, 并在需要时求解 β 的值, 以尽可能使低次的 $f(x) = x^n$ 积分精确值与数值结果一致. 另外, 为减少计算量, 我们所逐一验证的多项式也可以改为 $f(x) = 1, x-c, (x-c)^2, (x-c)^3, \cdots$, 其中 $c = \dfrac{a+b}{2}$. 这样也可以得到完全相同的结论.

解: 当 $f(x) = 1$ 时, 左式 $= b - a =$ 右式, 结果一致.

当 $f(x) = x$ 时, 左式 $= \dfrac{b^2 - a^2}{2} =$ 右式, 结果一致.

当 $f(x) = x^2$ 时, 左式 $= \dfrac{b^3 - a^3}{3} =$ 右式, 结果一致.

当 $f(x) = x^3$ 时, 左式 $= \dfrac{b^4 - a^4}{4} =$ 右式, 结果一致.

(备注: 目前为止, 各项中含 β 的系数一直是 0, 这的确很无趣. 但是, 如果在确定出 β 的值之前, 就有某个式子结果不一致, 那么此公式的代数精确度就已经确定, 且 β 的值也不会对其产生影响. 因此, 前面的验证是必要的. 但这只需快速带过, 不必认真计算.)

当 $f(x) = x^4$ 时, 左式 $= \dfrac{b^5 - a^5}{5}$, 右式 $= \dfrac{b-a}{6}\left(a^4 + b^4 + \dfrac{(a+b)^4}{4}\right) - 24\beta(b-a)^5$, 为使左式和右式相等, 应有

$$\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5} = \frac{5}{24}(a^4 + b^4) + \frac{2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3}{12} - 24\beta(b-a)^4.$$

因此等式两端 a^4 前系数需对应相等, 有

$$\frac{1}{5} = \frac{5}{24} - 24\beta \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2880}.$$

将 $\beta = \dfrac{1}{2880}$ 代入原式, 得到左右式相等.

当 $f(x) = x^5$ 时, 因为 β 的值已定为 $\dfrac{1}{2880}$, 故代入得左式 $= \dfrac{b^6 - a^6}{6} =$ 右式, 结果一致.

当 $f(x) = x^6$ 时, 将 $\beta = \dfrac{1}{2880}$ 代入, 得到左式 $= \dfrac{b^7 - a^7}{7} \neq$ 右式. 由于此时左右两式值已无法相等, 故停止验证. 综上所述, 在 $\beta = \dfrac{1}{2880}$ 时代数精确度最高, 此时代数精确度为 5.

七、($12 = 7 + 5$ 分) 设 $f \in C^1[a,b]$, 已知左矩形公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi),$$

其中 $\dfrac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$ 为余项, $\xi \in (a,b)$.

(1) **对区间 $[a,b]$ 做均匀分割构造复合求积公式, 证明由左矩形公式构造的复合求积公式是收敛的.**

(2) **证明 (1) 中由左矩形公式构造出来的复合求积公式是稳定的.**

分析: 本题主要考察复合求积公式的定义, 以及用余项随 n 增大趋于 0 来证明收敛性. 第二小问的数值稳定性直接使用定义验证即可.

(1) **解:** 将 $[a,b]$ 均匀地分割为 n 个区间, 设分割点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

则对 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上使用左矩形公式, 有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = hf(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}f'(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中 $h = \dfrac{b-a}{n}$, 将这 n 项求和, 得到复合求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + R(x),$$

其中 $R(x)$ 为余项, 且有

$$R(x) = \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i), \quad \xi_i \in (a,b).$$

由于 $f \in C^1[a,b]$, 故 f' 连续且在 $[a,b]$ 内有界. 设 $|f'| \le M$, 则

$$|R(x)| \le \frac{h^2}{2}nM = \frac{(b-a)^2 M}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故得到的复合求积公式是收敛的.

(2) **证明:** $\forall \varepsilon > 0$, 设 $g \in C^1[a,b]$ 满足 $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x) - g(x)| < \delta$, 则代入求积公式得到

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \sim h\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i).$$

由于

$$\left|h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - h\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\right| < hn\delta = (b-a)\delta,$$

故只要取 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$(与 n 无关) 即可使

$$\left|h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) - h\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\right| < \varepsilon,$$

从而该复合求积公式是数值稳定的. □

八、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有四阶连续导数, 试构造三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足插值条件

$$H_3(a)=f(a), H_3(b)=f(b), H_3(c)=f(c), H_3'(c)=f'(c)$$

其中 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 并求其余项 $f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

分析: 本题虽然无法借助课本上的结论直接解决, 但其解题思想与 Lagrange 和 Hermite 多项式构造及其余项求解的思路如出一辙. 因此本题考察的是对插值多项式推导过程的理解程度. 对原理印象深刻的同学, 也应当很熟悉此处设出余项后反复使用 Rolle 定理的操作.

解: 先构造函数满足前三个插值条件, 只需用 Lagrange 插值即可, 因此得到插值多项式

$$\begin{aligned}H(x)&=f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\\&=f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{2h^2}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{2h^2}-f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{h^2},\quad h=\frac{b-a}{2}.\end{aligned}$$

再令 $H_3(x)=H(x)+S(x)$, 其中 $S(x)$ 满足

$$S(a)=0, S(b)=0, S(c)=0, S'(c)=f'(c)-H'(c),$$

则设 $S(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$, 由 $S'(c)=f'(c)-H'(c)$, 有

$$-kh^2=k(c-a)(c-b)=S'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

则可计算得 $k=\dfrac{4}{(b-a)^2}\Big[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(c)\Big]$, 从而

$$\begin{aligned}H_3(x)=\frac{4}{(b-a)^2}\bigg[&f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{2}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{2}-f(c)(x-a)(x-b)\\&+\Big(f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big)(x-a)(x-b)(x-c)\bigg].\end{aligned}$$

设余项 $R(x)=f(x)-H_3(x)$, 因为 $R(a)=0, R(b)=0, R(c)=0, R'(c)=0$, 故可设

$$R(x)=k(x)(x-a)(x-b)(x-c)^2.$$

令

$$g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)(t-a)(t-b)(t-c)^2,$$

则由于 $g(a)=g(b)=g(c)=g'(c)=g(x)=0$, 故可反复使用 Rolle 定理, 得到存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $g^{(4)}(\xi)=0$, 从而有

$$k(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Longrightarrow R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)(x-c)^2.$$