南京大学
离散数学期中考试

天影 DiMersified

2022 年 8 月 24 日

评语: 这张试卷是孙智伟老师出的, 考试范围是逻辑运算和集合论, 整体难度不大且有原题. 只要课上好好听, 考前记住知识点的定义基本可以过关, 这里给学弟学妹们一个忠告: 一定要好好看往年卷!

由于疫情原因, 这次期中考试开始时间较晚, 再加上整理试卷的同学时间很紧张, 所以这张试卷整理得比较仓促, 有一些需要学弟学妹们对照课本上知识点才能看明白.

备注: 本文档中 $A \subset B$ 表示 "A 是 B 的真子集", 这与孙智伟老师在离散数学课上采用的记号一致.

一、填空题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 用一阶逻辑语言表达 "存在唯一的 x 使得 $\psi(x)$ 成立".

____.

2. 用一阶逻辑语言表达 "(实函数)$f(x)$ 在区间 I 上一致连续".

____.

3. 集合论中有序对 $\langle x, y\rangle$ 被定义成 ____________________.

4. 叙述 ZF 集合论中的无穷公理 (其中记号要解释清楚).

____.

5. 叙述 ZFC 集合论的选择公理.

____.

分析: 这五题都是对基础知识的考察, 有些是原题, 有些则稍作改动, 故直接给出答案.

答案:

1. $\exists x(\psi(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg\psi(y)))$ 或 $\exists x(\psi(x) \wedge \forall y(\psi(y) \rightarrow y = x))$.

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in I \forall x_2 \in I(|x_1 - x_2| < \delta \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

3. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

4. 存在一个归纳集, 即 $\exists A(\varnothing \in A \wedge \forall x(x \in A \rightarrow x' = x \cup \{x\} \in A))$.

5. 设 $X \neq \varnothing, \forall x \in X(x \neq \varnothing), \forall x, y \in X(x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$, 则 $\exists Y \forall x \in X \exists! y \in x(y \in Y)$.

二、判断题 (在右端括号内填✔或✘, 每题 2 分, 共 20 分)

1. 命题公式 $((p \vee q) \to r) \longleftrightarrow ((p \to r) \vee (q \to r))$ 永真. (✘)
2. 在一阶逻辑中, 恒有 $\exists x(\alpha(x) \to \beta(x)) \equiv \forall x\alpha(x) \to \exists x\beta(x)$. (✔)
3. $\varnothing^{\varnothing} = \varnothing$. (✘)
4. 集合 A 与 B 相等当且仅当 A 的幂集与 B 的幂集相等. (✔)
5. 集合间比较势大小的 $\preccurlyeq$ 是半序. (✘)
6. 关系 R 为等价关系 $\Longleftrightarrow R^{-1} \circ R = R$. (✔)
7. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 上 $\leq$(小于或等于) 是良序. (✘)
8. 集合 X 为无穷集当且仅当它有个与之等势的真子集. (✔)
9. ZF 集合论中任何自然数都不属于它自己. (✔)
10. 全体从自然数集 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数构成的集合基数为 $\aleph$. (✔)

分析: 这十道判断题大部分是原题以及原题的改编, 认真复习书本 (或往年卷) 的同学应该可以发现这一点.

解:

1. 只需找出合适的 (p,q,r) 的取值, 使等价号两端不同时成立即可. 使用 $p \to q \equiv \neg p \vee q$, 可以将左式和右式分别化为 $(\neg p \wedge \neg q) \vee r$ 和 $\neg p \vee r \vee \neg q \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$, 因此可取 $(p,q,r) = (1,0,0)$ 或 $(0,1,0)$, 使得左右式不同时成立, 从而该等式不是永真公式.

2. 将式子进行化简即可:

$$\begin{aligned}\exists x(\alpha(x) \to \beta(x)) &\equiv \exists x(\neg\alpha(x) \vee \beta(x)) \equiv (\exists x\neg\alpha(x)) \vee (\exists x\beta(x)) \\ &\equiv \neg(\forall x\alpha(x)) \vee (\exists x\beta(x)) \equiv \forall x\alpha(x) \to \exists x\beta(x).\end{aligned}$$

3. 首先要了解笛卡尔积和集合乘方的定义:

$$\begin{aligned}A \times B &:= \{z \in \mathcal{P}\mathcal{P}(A \cup B) : \exists x \in A \exists y \in B(\langle x,y\rangle = z)\}, \\ A^B &:= \{f \subseteq B \times A : \forall x \in B \exists! y(\langle x,y\rangle \in f)\}.\end{aligned}$$

A^B 即为 B 到 A 的所有映射组成的集合. 将 A, B 都换成 $\varnothing$ 后, 可以发现

$$\begin{aligned}\varnothing \times \varnothing &= \big\{z \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\} : \exists x \in \varnothing \exists y \in \varnothing(\langle x,y\rangle = z)\big\} = \varnothing, \\ \varnothing^{\varnothing} &= \{f \subseteq \varnothing : \forall x \in \varnothing \exists! y(\langle x,y\rangle \in f)\},\end{aligned}$$

即 $\varnothing^{\varnothing}$ 中元素都是 $\varnothing$ 的子集. 而 $\varnothing$ 的唯一子集就是其本身, 且 $\forall x \in \varnothing \exists! y(\langle x,y\rangle \in \varnothing$ 成立, 故 $\varnothing^{\varnothing} = \{\varnothing\}$.

4. 本题为作业原题 (参见课件第十五讲 Ex.1). 注意到, 对于任意集合 A 都有 $A = \cup\mathcal{P}(A)$, 即可判断.

5. 本题也是对半序定义的考察, X 上的半序 $\leq$ 应满足自反性 $(\forall x \in X(x \leq x))$, 反对称性 $(\forall x, y \in X((x \leq y \wedge y \leq x) \to x = y))$ 和传递性 $(\forall x, y, z \in X((x \leq y \wedge y \leq z) \to x \leq z))$. 但集合间比较势大小的 $\preccurlyeq$ 只满足 $\forall x, y \in X((x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x) \to x \approx y)$, 显然集合间势相等不一定能推出集合相等, 故不满足反对称性, 从而 $\preccurlyeq$ 不是半序.

6. 本题为作业原题 (参见课件第十七讲 Ex.2). 此处给出证明:

"$\Rightarrow$": 对于任意 $\langle x,y\rangle \in R$, 一定有 xRy 且 $yR^{-1}y$, 所以 $x(R^{-1}\circ R)y$, 因此 $R \subseteq R^{-1}\circ R$; 对于任意 $\langle x,y\rangle \in R^{-1}\circ R$, 存在 z 使得 xRz 且 $zR^{-1}y$, 即 xRz 且 yRz, 由 R 是等价关系知 xRy, 因此 $R^{-1}\circ R \subseteq R$. 综上所述, $R^{-1}\circ R = R$.

"$\Leftarrow$": 先证明对称性. 对于任意 $\langle x,y\rangle \in R$, 都存在 z 使得 xRz 且 $zR^{-1}y$, 即 $zR^{-1}x$ 且 yRz, 因此 $y(R^{-1}\circ R)x$, 即 yRx. 再证明传递性. 若 xRy 且 yRz, 由对称性知 zRy, 即 $yR^{-1}z$, 因此 $x(R^{-1}\circ R)z$, 即 xRz. 再证明自反性. R 在 $\mathrm{Fld}(R) = \mathrm{Dom}(R)\cup\mathrm{Ran}(R)$ 上的自反性很容易由其对称性和传递性推出.

7. 回顾良序的定义: X 中的良序应为半序, 且在 X 的任一非空子集 A 内都存在最小元. 显然, 有理数集本身不存在最小元, 从而 $\leq$ 不是良序.

8. 若 X 不是无穷集, 则 X 显然与它的任一真子集不等势. 若 X 是无穷集, 则由选择公理知 X 中存在可数子集 A. 而 $\mathbb{N}$ 与 $2\mathbb{N}$ 等势, 故可数集中总存在与其等势的真子集. 因此我们可以找到 $B \subset A$ 和从 A 到 B 的双射 φ_0. 定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \notin A, \\ \varphi_0(x), & x \in A, \end{cases}$$

易知 φ 是从 X 到其真子集的双射, 原命题成立.

9. 在 ZF 集合论中, 对自然数 m, n, 有 $m \in n \iff m < n \iff m \subset n$. 因此原命题正确.

10. 首先, $\aleph = \left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$; 另外, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$. 故 $\aleph \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \aleph$, 命题成立.

三、(10 分) 设 R 为关系, 在 ZF 集合论中利用分出公理证明有集合 A (它叫 R 的定义域) 使得 $x \in A \Leftrightarrow \exists y(xRy)$.

分析: 分出公理: 设 $\varphi(x)$ 是不以 Y 为自由变元的一阶公式, 则

$$\exists Y \forall x(x \in Y \leftrightarrow (x \in X \wedge \varphi(x))).$$

证明: 首先, 我们注意到

$$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\} \in R \Rightarrow \{x,y\} \in \cup R \Rightarrow x, y \in \cup\cup R,$$

依分出公理, 有集合 A 使得

$$x \in A \Leftrightarrow x \in \cup\cup R \wedge \exists y(xRy),$$

而由于 $xRy \Rightarrow x \in \cup\cup R$, 故 $x \in A \Leftrightarrow \exists y(xRy)$. $\square$

四、(10 分) 不用真值表求命题公式 $p \to ((p \to q) \wedge \neg(\neg p \vee \neg q))$ 的主析取范式与成真赋值.

分析: 这是一道很基础的送分题, 记住公式和定义即可.

解:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\equiv \neg p \vee ((\neg p \vee q) \wedge p \wedge q) \\
&\equiv \neg p \vee ((\neg p \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge q)) \\
&\equiv \neg p \vee (p \wedge q) \\
&\equiv (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q) \\
&\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q).
\end{aligned}$$

其成真赋值为 $(p, q) = (0, 1), (0, 0), (1, 1)$.

五、(10 分) 将一阶公式 $\exists x \neg \alpha(x) \to (\forall x \beta(x) \to \neg \gamma(x))$ 化成等价于它的前束范式.

分析: 记得前束范式的定义即可. 需要注意的是, $\gamma(x)$ 中的 x 为自由变元, 是不可以更改名称的; 而 $\exists x, \forall x$ 中的 x 为约束变元, 需将其修改为不同于自由变元 x 的新名字. 据孙老师在考试后反映, 有很大一部分同学在本题中因自由变元与约束变元的改名问题而出错, 因此希望各位学弟学妹们对此格外留心!

解:

$$\begin{aligned}
&\exists x \neg \alpha(x) \to (\forall x \beta(x) \to \neg \gamma(x)) \\
\equiv&\exists y \neg \alpha(y) \to (\forall z \beta(z) \to \neg \gamma(x)) \\
\equiv&\neg(\exists y \neg \alpha(y)) \vee (\neg(\forall z \beta(z)) \vee \neg \gamma(x)) \\
\equiv&\forall y \alpha(y) \vee (\exists z \neg \beta(z) \vee \neg \gamma(x)) \\
\equiv&\forall y \exists z (\alpha(y) \vee \neg \beta(z) \vee \neg \gamma(x)).
\end{aligned}$$

六、(10 分) 在 Peano 算术 (撇开 ZF 集合论中对自然数的定义) 中对 $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ 指 $\exists d \in \mathbb{N}(m + d = n)$, 证明 $k, m, n \in \mathbb{N}$ 时总有 $k + m \leq k + n \Leftrightarrow m \leq n$.

分析: 该题用数学归纳法就可以证明. 需要注意, 这道题目的本意是利用数学归纳法做证明, 而不是直接使用加法的消去律. 因此, 虽然老师在课堂上证明了加法的消去律, 但直接使用消去律解答本题是无法得分的, 只能利用其他的性质对本题进行推导.

证明: "$\Leftarrow$": 如果 $m \leq n$, 则存在 $d \in \mathbb{N}$, 使得 $m + d = n$, 于是 $(k+m)+d = k+(m+d) = k+n$, 从而有 $k + m \leq k + n$.

"$\Rightarrow$": 对 k 归纳证明 $k + m \leq k + n \Rightarrow m \leq n$. 当 $k = 0$ 时, $m = 0 + m \leq 0 + n = n$, 命题成立. 设已有 $k+m \leq k+n \Rightarrow m \leq n$, 则当 $k'+m \leq k'+n$ 时, $\exists d \in \mathbb{N}$, s.t. $k'+m+d = k'+n$, 即 $(k+m+d)' = (k+n)'$, 从而 $k + m + d = k + n$, 故 $k + m \leq k + n$, 由归纳假设知 $m \leq n$. 即证 $k + m \leq k + n \Rightarrow m \leq n$. □

七、(10 分) (不用正规公理) 用反证法证明没有集合 X 满足

$$\forall x(x \notin X \longleftrightarrow \exists y(y \in x \wedge x \in y)).$$

分析: 此题按照提示证明即可. 本题的思想与罗素悖论的导出有异曲同工之妙, 在假定“病态” 集合存在之后, 通过讨论该集合是否属于自身, 得到自相矛盾的结果, 进而完成证明.

证明: 反证: 假设存在这样的集合 X, 满足 $\forall x(x \notin X \longleftrightarrow \exists y(y \in x \wedge x \in y))$, 则可分为以下两种情况进行讨论.

情形一: 若 $X \in X$, 取 $x = X$, 则存在 $y = X$, 使得 $y \in X \wedge X \in y$, 由 X 的定义知 $X \notin X$, 因此该情形不成立.

情形二: 若 $X \notin X$, 则由 X 的定义知 $\exists Y(Y \in X \wedge X \in Y)$, 从而有 $X \in Y \wedge Y \in X$. 在原式中取 $x = Y$, 则存在 $y = X$, 使得 $y \in Y \wedge Y \in y$, 由 X 的定义知 $Y \notin X$. 这与上面所得的 $Y \in X$ 相矛盾, 因此该情形不成立.

综上所述, 这样的集合 X 不存在. □

八、(每题 5 分, 共 10 分) 设 A, B, C 为集合, 对 $f \in (A^B)^C$, 让 $\varphi(f)$: $B \times C \longrightarrow A$ 如下给出: $\varphi(f)(\langle b, c\rangle) = f(c)(b)$. $(b \in B)(c \in C)$

(1) 证明 φ 是 $(A^B)^C$ 到 $A^{B\times C}$ 的单射.

(2) 证明 φ 是 $(A^B)^C$ 到 $A^{B\times C}$ 的满射.

分析: 此题为往年卷原题, 经统计多次出现. 学弟学妹们懂了吗? [doge]

(1) **证明:** 设 $f, g \in (A^B)^C$ 且 $f \neq g$, 则有 $c \in C$ 使 $f(c) \neq g(c)$, 从而有 $b \in B$ 使 $f(c)(b) \neq g(c)(b)$, 即 $\varphi(f)(\langle b, c\rangle) \neq \varphi(g)(\langle b, c\rangle)$, 于是 $\varphi(f) \neq \varphi(g)$.

另外一种证明方式:

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = \varphi(g) &\Rightarrow \forall b \in B \forall c \in C(\varphi(f)(\langle b, c\rangle) = \varphi(g)(\langle b, c\rangle)) \\
&\Rightarrow \forall b \in B \forall c \in C(f(c)(b) = g(c)(b)) \\
&\Rightarrow \forall c \in C(f(c) = g(c)) \\
&\Rightarrow f = g.
\end{aligned}$$

即证明 φ 为单射. □

(2) **证明:** 任给 $h : B \times C \to A$, 要找 $f \in (A^B)^C$ 使 $\varphi(f) = h$. 对 $c \in C, b \in B$, 令 $f(c)(b) = h(\langle b, c\rangle) \in A$, 则 $f(c) \in A^B$, $f \in (A^B)^C$ 且 $\varphi(f) = h$. 因此 φ 为满射. □

九、(每题 5 分, 共 10 分) 让 $C(\mathbb{R}) = \{$实数集 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数$\}$,

(1) 证明 f, g 为 $C(\mathbb{R})$ 中不同元素时 $f \upharpoonright \mathbb{Q} \neq g \upharpoonright \mathbb{Q}$. ($f \upharpoonright \mathbb{Q}$ 指把 f 的定义域限制到有理数集 $\mathbb{Q}$ 上)

(2) 利用 (1) 及第八题结果计算 $|C(\mathbb{R})|$.

分析: 本题也是往年卷原题. 第一小问是简单的微积分问题, 第二小问的思路是通过“放缩” 对集合的基数进行估计, 得出 $\aleph \leq |C(\mathbb{R})| \leq \aleph$.

(1) **证明:** 由于 $f \neq g$, 故有实数 x_0 使得 $f(x_0) \neq g(x_0)$, 由 f, g 的连续性, 取足够小的 $\delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta$ 且 $x \in \mathbb{Q}$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2}, \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2},$$

从而 $f \upharpoonright \mathbb{Q} \neq g \upharpoonright \mathbb{Q}$. (否则 $f(x) = g(x)$, 从而

$$\begin{aligned} |g(x_0) - f(x_0)| &= |(f(x) - f(x_0)) - (g(x) - g(x_0))| \\ &< \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2} + \frac{|f(x_0) - g(x_0)|}{2} = |f(x_0) - g(x_0)|, \end{aligned}$$

推出矛盾!)

另外一种证明方式: 如果 $f \upharpoonright \mathbb{Q} \neq g \upharpoonright \mathbb{Q}$, 对任何实数 x, 存在趋于它的一列有理数列 $\{x_n\}$, 从而

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x),$$

从而 $f = g$, 与所给假设矛盾. $\square$

(2) **解:** 由 (1) 知, $|C(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$. 由第八题结果知当 A, B, C 为集合时有 $(A^B)^C \approx A^{B \times C}$, 因此 $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. 同时, 任给实数 c, 均可找到常值函数 $g(x) = c \in C(\mathbb{R})$, 因此存在 $\mathbb{R}$ 到 $C(\mathbb{R})$ 的单射, 故 $\aleph = |\mathbb{R}| \leq |C(\mathbb{R})|$. 因此 $|C(\mathbb{R})| = \aleph = 2^{\aleph_0}$.