南京大学 2018-2019 学年第二学期

《概率论基础》期末试卷

本试卷共 6 页； 考试时间 120 分钟；

院系________ 班级________ 学号__________ 姓名_______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

一.（24 分） （1）叙述随机变量序列依分布收敛，依概率收敛，几乎必然（以概率 1）收敛的概念，并说明它们之间的强弱关系.

（2）假定随机变量序列$\{X_n\}_{n\geq 1}$独立同分布，且$X_1\sim P(\lambda)$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\leq n\right)=\frac{1}{2},$$

试确定λ的值并给出理由.

（3）假定随机变量序列$\{X_n\}_{n\geq 1}$独立同分布，且$\mathbb{E}X_1=0,\mathbb{D}X_1=\sigma^2$. 确定序列$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{X_i}^2\right\}$依概率收敛的极限并给出判断依据.

二.（10 分）设$X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(0,1)$，且X与Y独立. 求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度.

三. (10 分) 袋中有N张卡片，各记以数字Y_1，Y_2，⋯，Y_N，不放回地从中抽出n张，求其和的数学期望和方差。

四. (10 分) 假定随机向量(ξ_1, ξ_2)的联合密度函数为$p(x_1, x_2)$. 令

$$\eta_1 = a\xi_1 + b\xi_2, \qquad \eta_2 = c\xi_1 + d\xi_2,$$

其中$ad - bc \neq 0$. 求(η_1, η_2)的密度函数$q(y_1, y_2)$.

五 (10 分) 设ξ为一随机变量，证明：

$$\mathbb{E}\xi^2 = 2\int_0^\infty y\mathbb{P}(|\xi| > y)\mathrm{d}y.$$

六．(10 分) 假定$\{X_n\}_{n\geq 1}$为独立随机变量序列. 证明

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon) < \infty,\ \ \forall \epsilon > 0.$$

七. (6 分) 设 X 和 Y 为相互独立的随机变量，且 $\mathbb{E}X = 0$, 证明

$$\mathbb{E}|X+Y| \geq \mathbb{E}|Y|.$$

八. (10 分)一个复杂系统由 100 个相互独立工作的部件组成, 每个部件正常工作的概率为 0.9. 已知整个系统中至少有 85 个部件正常工作时系统才正常工作. 试求系统正常工作的概率. ($\Phi(1.83)=0.9656$, $\Phi(1.67)=0.9525$)

九．(10 分) 设函数$f:[0,\infty)\to(0,\infty)$单调不降．若随机变量序列$\{X_n,\ X\}_{n\geq1}$满足$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}f(|X_n-X|)<\infty$．证明$\{X_n\}_{n\geq1}$几乎必然(以概率 1)收敛到$X$.