数学分析 A 期中考试

2018.11.11

一、判断题（2 分 x10）

（1）如果任给$\varepsilon > 0$，均存在N，当$n > N$时$|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$，则$\{a_n\}$收敛于$\alpha$。

（2）如果数列$\{a_n\}$既不发散到$+\infty$，也不发散到$-\infty$，则$\{a_n\}$为有界数列。

（3）区间[0,1]中的有理数不能按照从小到大的顺序排成一列。

（4）设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别收敛于α，β，如果$a_n > b_n$都成立，则$\alpha > \beta$。

（5）设$\{a_n\}$为数列，如果对于每一个正整数 p，均有$\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_{n+p} - a_n\right| = 0$，则$\{a_n\}$为 Cauchy 列。

（6）设函数$g(x)$在x_0处的极限为y_0，$f(y)$在y_0处的极限为α，则$f\big(g(x)\big)$在x_0处的极限为α。

（7）设 f 在x_0附近有定义，如果任给收敛于x_0的数列$\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$都收敛，则 f 在x_0处连续。

（8）设 f 是区间中定义的连续函数，如果 f 是单射，则 f 是严格单调函数。

（9）设 f 是区间中定义的函数，如果 f 在每一点附近都是单调函数，则 f 是单调函数。

（10）设 f 是闭区间中定义的连续函数，如果 f 处处大于 0，则 f 有正下界。

二、证明下列结论（10 分 x2）

（1）设$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$，则$\{a_n\}$收敛。

（2）设$\{a_n\}$收敛于α，$\{b_n\}$收敛于β，则$\big\{\max\{a_n, b_n\}\big\}$收敛于$\max\big\{\alpha，\beta\big\}$。

三、计算下列极限（5 分 x4）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin(x^2)}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[2]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

四、（10 分 x2）

（1）设$a_1\in\mathbb{R}$，$a_{n+1}=\cos a_n$。证明$\{a_n\}$收敛，且极限存在于$\sqrt{3}-1$和 1 之间

（2）证明有界数列必有单调子列。

五、（10 分 x2）

（1）在$\mathbb{R}$中定义函数$f(x)$为：$f(0)=1$，$f(x)=\frac{\sin x}{x}(x\neq 0)$，证明 f 一致连续

（2）设$f\in C^0[a,b]$，如果任给$x\in[a,b)$，均存在$x'>x$使得$f(x')\geq f(x)$，证明$f(b)\geq f(a)$。