八. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式 $H_3(x)$，使其满足插值条件：

$$H_3(a)=f(a), H_3(b)=f(b), H_3(c)=f(c), H_3'(c)=f'(c),$$

其中 $c=\dfrac{a+b}{2}$，并求其余项 $f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

设 $H_3(x) = N_2(x) + A(x-a)(x-c)(x-b) = f[a] + f[c,a](x-a) + f[a,b,c](x-a)(x-c)$
$+ A(x-a)(x-c)(x-b)$

由 $H_3'(c)=f'(c) \Rightarrow f'(c) = f[c,a] + f[a,b,c](c-a) + A(c-a)(c-b)$

$$\Rightarrow A = \frac{f'(c)-f[a,c]-f[a,b,c](c-a)}{(c-a)(c-b)}$$

余项：$r(x) = f(x) - H_3(x)$. a, b 单根，c 二重根

设 $r(x) = K(x)(x-a)(x-b)(x-c)^2$

令 $F(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t-a)(t-b)(t-c)^2$

则 $F(t)$ 在 a,b,c,x 为零，由 Rolle 定理 $F'(t)$ 在 $[a,b]$ 上有三个不同于 c 的零点，又 $F'(c)=0 \Rightarrow F''(t)$ 在 $[a,b]$ 上有三个零点，反复应用 Rolle 定理，知 $F^{(4)}(t)$ 有一个零点，记为 $\xi\in(a,b)$，即 $F^{(4)}(\xi)=0$.

$\Rightarrow K(x) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$

即 $r(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)(x-b)(x-c)^2$，$\xi\in(a,b)$.