南京大学数学系试卷

2016/2017 学年第二学期(中) 考试形式 闭卷 课程名称 计算方法

班级________ 学号________ 姓名________

考试时间 2017.4.22 任课教师________ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. 分析与简述题 ($6\times 5=30$分)

(1) 设 $x=0.0001$，应如何计算 $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$ 才能保证计算结果至少具有15位有效数字. 可取 $f(x)\approx$________（要求表达为最简形式），这是因为________.

(2) 设 x^*, $y^*\neq 0$ 分别为 x, y 的具有4位和5位有效数字的近似数，给出计算 $\frac{x^*}{y^*}$ 的绝对误差限________.

(3) 给出在字长为二位的十进制计算机上用浮点运算分别从左到右和从右到左计算 $1+0.4+0.3+0.2+0.04+0.03+0.02+0.02+0.01$ 的结果并对计算结果作出合理的解释________.

(4) 假设有一台电子计算机，字长 $t=6$, 阶码：$-5=-L\leq J\leq U=5$, 基数 $p=2$.
则这台计算机的规格化浮点数的个数 $N=$________.

(5) 验证方程 $x^3-2x-5=0$ 在区间 $[2,3]$ 内有唯一根 p 且对任意的初值 $x_0\in[2,3]$, $Newton$ 序列都收敛于 p:________.

二. 求解题 ($10\times 4=40$分)

(1) 用高斯列主元消去法（给出计算过程）解方程组 $Ax=b$, 其中 $b=[4,7,6]^T$,
$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 6\\ 10 & -7 & 0\\ 5 & -1 & 5\end{bmatrix}$.

(2) 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

的 Crout 分解（给出 L 和 U）.

(3) 用 LDL^T 分解求 $Ax=b$, 其中 $b=[10,16,30]^T$, $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 9\\ 5 & 9 & 17\end{bmatrix}$.

(4) 计算$\| A\|_1, \| A\|_\infty, \| A\|_F, \rho(A)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

三. 分析证明题 $(8+12=20$分)

(1) 证明方程 $f(x)=2e^{-x}-\sin x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中有唯一根 p, 并且存在 $r>0$, 使得对任意的 $x_0,x_1\in[p-r,p+r]$, 由割线法产生的序列都收敛于 p.

(2) 设 $P\in R^{n\times n}$非奇异. (i) 证明 $\| x \|_P=\| Px \|_1$ 是 R^n中的一种向量范数; (ii) 证明 $R^{n\times n}$ 中的矩阵范数 $\| A \|_P=\max\limits_{\|x\|_P=1}\| Ax \|_P=\| PAP^{-1} \|_1$, 它与向量范数 $\| x \|_P$ 是相容的.

四. 算法描述分析题 $(5+5=10$ 分)

(i) 阐述求解函数 $g(x)$ 的不动点迭代法、算法和相关收敛性定理.

(ii) 分析求函数 $g(x)=\frac{2-e^x+x^2}{3}$ 在区间 $[0,1]$ 上的不动点迭代 $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=0,1,\dots$ 的收敛性.