南京大学
数学分析 3 期中考试

天影 DiMersified

2021 年 11 月 20 日

1 (20 分) 判断下列广义积分敛散性.

1.1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1-\sin x)}$$

分析: 这是一个瑕积分, 因此可以使用瑕积分的比较判别法. 下面列出其极限形式:

$$\lim_{n\to a^+}(x-a)^p f(x)=\lambda$$

其中 a 是函数 $f(x)$ 的瑕点, 若 p, λ 满足:
$0<p<1$, $0\le\lambda<+\infty$, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛; $p\ge 1$, $0<\lambda\le+\infty$, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

解: 可以发现被积函数有 0 和 $\dfrac{\pi}{2}$ 两个瑕点, 因此均需验证. 因为 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sin x)}=1$, 从而在 $x=0$ 处收敛; 但因为 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-1}{\frac{1-\sin x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\cos x}\to+\infty$, 从而在 $\dfrac{\pi}{2}$ 处发散. 综上, 该瑕积分发散.

1.2

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\cos^2 x}$$

分析: 对这样的积分, 有一个很常规的解法. 由于 $\cos x$ 在 $[0,\infty)$ 取值很难选择, 因此要将其按照 π 分段积分.

解: 先研究一个更加普遍的情形: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\lambda \cos^2 x}$, 其中 $\lambda > 0$, 显然有

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\lambda \cos^2 x} = \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\lambda \cos^2 x} =: \sum_{n=1}^\infty a_n$$

则有

$$\begin{aligned}
a_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\lambda \cos^2 x} &\le \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n-1)^\lambda \pi^\lambda \cos^2 x} \\
&= \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+(n-1)^\lambda \pi^\lambda \cos^2 x} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n-1)^\lambda \pi^\lambda \cos^2 x} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\sec^2 x+(n-1)^\lambda \pi^\lambda} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\tan x}{1+\tan^2 x+(n-1)^\lambda \pi^\lambda} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+(n-1)^\lambda \pi^\lambda} \\
&< 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+(n-1)^\lambda \pi^\lambda} \\
&= \frac{2}{(n-1)^{\frac{\lambda}{2}}\pi^{\frac{\lambda}{2}}} \arctan \frac{t}{(n-1)^{\frac{\lambda}{2}}\pi^{\frac{\lambda}{2}}}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi^{1-\frac{\lambda}{2}}}{(n-1)^{\frac{\lambda}{2}}}
\end{aligned}$$

因此, 当 $\lambda > 2$ 时, $\sum_n \frac{1}{(n-1)^{\frac{\lambda}{2}}} < +\infty$; 当 $0 < \lambda \le 2$ 时, 有

$$a_n \ge \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^\lambda \pi^\lambda \cos^2 x}$$

同理可得, $a_n \ge \frac{\pi^{1-\frac{\lambda}{2}}}{\sqrt{2}n^{\frac{\lambda}{2}}}$, 因此, $0 < \lambda \le 2$ 时, 有 $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{\lambda}{2}}} \to +\infty$.
对于本题, 只需要取这里的 λ 为 4, 由前面的讨论可知, 该无穷积分收敛.

2 (10 分) 判断下列数项级数敛散性.

2.1

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

分析: 这是一个典型的可以使用根式判别法判断的数项级数.

解: $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$, 故由根式判别法 (**Cauchy** 判别法) 可知, 该数项级数收敛.

2.2

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

分析: 所有无穷乘积均可以通过取对数的方式变为数项级数.

解: $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}$, 故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 同敛散于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, 故有:

$$\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\ln\Big(1+\frac{-1}{\sqrt{n^2+1}(n+\sqrt{n^2+1})}\Big)\xlongequal{\text{Taylor}}\frac{-1}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\ (n\to\infty)$$

由 $\sum\limits_{n}\frac{1}{n^2}$ 收敛知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛, 即 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

3 (15 分)

求函数 $f(x)=\sqrt{1-x}$ 在 0 处的 **Taylor** 级数, 假设其表达式为 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$, 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 的值.

分析: 可以应用 $(1+x)^\alpha$ 的 **Taylor** 展开, 此题的难点在于如何证明该级数在 $x=1$ 处收敛.

解:

$$\begin{aligned}f(x)=(1+(-x))^{\frac{1}{2}}&\xlongequal{\text{Taylor}}1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}-1\big)\cdots\big(\frac{1}{2}-n+1\big)}{n!}(-x)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n\end{aligned}$$

因此, $c_n=-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$(这里定义 $(-1)!!=1$), 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big|-\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\Big|^{\frac{1}{n}}=1$, 从而该幂级数的收敛半径为 1. 又因为 c_n 符号恒负, 因此由梅加强《数学分析》第二版习题 8.3/12 结论知, $\lim\limits_{x\to1^-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cdot1^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$, 从而该幂级数在 $x=1$ 处收敛, 故 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=f(1)=\sqrt{1-1}=0\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=-1$.

4 (15 分)

假设对于数列 $\{a_n\}$, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 x_0 处收敛, 证明: 该函数项级数的和函数在 $[x_0, +\infty)$ 上连续, 在 $(x_0, +\infty)$ 上可导.

分析: 我们知道 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 为 **Riemann ζ 函数**, 具有良好的性质, 本题将 a_n 与之相乘, 有装神弄鬼之效. 由于 a_n 的正负性并不清楚, 因此 **Weierstrass** 判别法失效. 那么怎么办呢? 观察题目, 有级数收敛的条件, 因此可以考虑使用 **Abel** 判别法.

证明. 由题意, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 因此, 当 $x > x_0$ 时, 有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}} =: \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$$

其中, $f_n(x)$ 一致收敛, $g_n(x)$ 一致单调有界, 因此由 **Abel** 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[x_0, +\infty)$ 一致收敛, 从而由 $\frac{a_n}{n^x}$ 连续性知和函数在 $[x_0, +\infty)$ 连续. 下证可导性:
因为 $\left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\frac{\ln n}{n^x}$, 所以由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{-\ln n}{n^{x-x_0}}$ 且 $\forall x_1 > x_0$, $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\frac{-\ln n}{n^{x-x_0}}$ 在 $[x_1, +\infty)$ 随 n 一致单调递减, 故仍然使用 **Abel** 判别法, 该级数一致收敛, 从而求导与求和可以换序, 因此和函数可导. □

5 (10 分)

假设 g_n, $h_n \in C^0[a, b]$, 满足: 对任意 $x \in [a, b]$ 和任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$, $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$, 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$, $\forall x \in [a, b]$. 证明: 函数列 $g_n(x)$, $h_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上一致收敛.

分析: 看到此题后, 很容易想到使用 **Dini** 定理证明, 因此较为简单. 但由于 **Dini** 定理要求极限函数也有连续性, 而此题没有给出这个条件, 所以容易犯错. 有同学就因为记错定理导致此题不得分 (是的这个同学就是我).

证明. 设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$, 由题意, $g_n(x)$ 一致单调递减, $h_n(x)$ 一致单调递增, 故有不等式 $0 \leq g_n(x) - f(x) \leq g_n(x) - h_n(x)$ 和 $0 \leq f(x) - h_n(x) \leq g_n(x) - h_n(x)$. 因为 $g_n(x) - h_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续且单调递减, 且极限函数 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) - h_n(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 连续, 由 **Dini** 定理可知, $g_n(x) - h_n(x)$ 关于 n 一致收敛于 0, 从而, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, $\forall n > N$, $\forall x \in [a, b]$, 都有 $\big|g_n(x) - h_n(x)\big| < \varepsilon$. 因此, $\forall x \in [a, b]$, $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 即 $g_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 同理, $h_n(x)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛于 $f(x)$. □

6 (10 分)

考虑 $\mathbf{x}_n = (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. 称向量值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ 收敛, 若 $\sum_n a_n$ 和 $\sum_n b_n$ 都收敛. 此时如果还有 $\sum_n ||\mathbf{x}_n|| < +\infty$, 则称 $\sum_n \mathbf{x}_n$ 绝对收敛, 否则称为条件收敛.

(1) 举一个条件收敛的向量值级数 $\sum_n \mathbf{x}_n$ 的例子, 使得对任意 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, 存在 $\sum_n \mathbf{x}_n$ 的重排级数收敛到 (a,b);

(2) 是否任意条件收敛的向量值级数 $\sum_n \mathbf{x}_n$ 都满足 (1) 中性质? 如果是请给出证明, 如果不是请举出反例.

分析: 此题是对一维的 **Riemann** 重排定理在二维情况的推广, 第一题分奇偶再使用 **Riemann** 重排定理即可; 第二题稍加举例就可知道答案, 较为简单.

(1) 解: 令 (a_n, b_n) 满足 $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n}$, $a_{2n+1} = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{n}$, 易证其条件收敛, 则二维就可以转变为一维. 此时, $\forall a \in \mathbb{R}$, 由 **Riemann** 重排定理, 可将 (a_n, b_n) 的偶数项重排, 使得其趋于 $(a, 0)$; 同理, $\forall b \in \mathbb{R}$, (a_n, b_n) 的奇数项重排后趋于 $(0, b)$. 因此, $\sum_n \mathbf{x}_n$ 重排后收敛于 (a,b).

(2) 解: 不成立. 反例: 取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则无论如何重排, 只要 $a \neq b$, $\sum_n \mathbf{x}_n$ 均不收敛于 (a,b).

7 (10 分)

讨论是否存在函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in [-1,1]$ 满足 $f\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{(-1)^n}{n^{2021}}, n \in \mathbb{N}$.

分析: 此题较有难度, 需要较深的分析功底. 需要注意到当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 不变号才能做出此题.

证明. 反证法: 易知 $f(x)$ 不是零函数. 假设该幂级数存在, 不妨设 $a_i > 0$ 满足 $\forall n \leq i-1, a_n = 0$. 因为 $x \to 0$ 时, 有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_i x + o(x)(x \to 0)$$

从而 $\exists \delta > 0, \forall 0 < x < \delta$, $f(x)$ 恒正. 但显然当 $n > \frac{1}{\delta}$ 时, $f\big(\frac{1}{n}\big)$ 不定号$\Big(f\big(\frac{1}{n}\big) \cdot f\big(\frac{1}{n+1}\big) < 0\Big)$, 从而推出矛盾, 故不存在. $\square$

8 (10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{e}}}$.

分析: 本题是一道“特殊难于一般”的问题. 解决题目这一“特殊情形”的难点就在于利用 **Taylor** 展开将 $e^{\frac{x}{e}}$ 变为幂级数, 进而将原题转化为一般幂级数的除法问题, 而幂级数的除法问题本身并不难做. 最后再由 **Stirling** 公式: $n!\sim\sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n=\sqrt{2\pi}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ 得出计算结果.

解: 我们先考虑如下幂级数的除法问题: 若 a_n, $b_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L>0$, 且级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $x\in\mathbb{R}$ 上均收敛, 下面证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon$. 记 $f_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n$, 则

$$\frac{f(x)}{g(x)}\le\frac{f_N(x)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}+\frac{(L+\varepsilon)\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}b_nx^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n}\le\frac{f_N(x)}{b_{N+1}x^{N+1}}+L+\varepsilon$$

令 $x\to+\infty$ 和 ε 的任意性即得 $\limsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\le L$. 类似可知 $\limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}\le\dfrac{1}{L}$, 综合两式即得.

题目中,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{\frac{x}{e}}}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{e^{\frac{x}{e}}}\xlongequal{\textbf{Taylor}}\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!e^n}}$$

由 **Stirling** 公式以及上述结论, 得出原式的值为 $\sqrt{2\pi}$.

9 附加题

9.1 (10 分)

设 $f\in C^{\infty}(-1,1)$, $f^{(2n)}\ge0, n\in\mathbb{N}$. 证明: $f\in C^{\omega}(-1,1)$.

分析: 本题是 **Bernstein** 定理的推广 (见梅加强《数学分析》第二版定理 8.3.8), 难度很大. 证明的核心思想在于利用偶数阶导数非负的条件对奇数阶导数加以限制.

证明. 先证明下面的结论: 设 $x_0\in\mathbb{R}$, $a>0$, $h\in C^2[x_0-a,x_0+a]$, 则 $\forall\varepsilon\in(0,a]$,

$$\left|h'(x_0)\right|\le\frac{1}{\varepsilon}\sup_{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}\left|h(x)\right|+\frac{\varepsilon}{2}\sup_{x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}\left|h''(x)\right| \tag{1}$$

在 $x=x_0$ 处做 **Taylor** 展开, 有

$$h(x_0+\varepsilon)=h(x_0)+\varepsilon h'(x_0)+\frac{\varepsilon^2}{2}h''(x_0+\xi)$$
$$h(x_0-\varepsilon)=h(x_0)-\varepsilon h'(x_0)+\frac{\varepsilon^2}{2}h''(x_0-\eta)$$

其中 $\xi,\eta\in(0,a)$. 两式相减, 有

$$2h'(x_0)=\frac{1}{\varepsilon}\big(h(x_0+\varepsilon)-h(x_0-\varepsilon)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\big(h''(x_0-\eta)-h''(x_0+\xi)\big)$$

即得. 另外, 若 $h\in C^2(\mathbb{R})$ 且 $\big|h(x)\big|\le A$, $\big|h''(x)\big|\le B$, 则由类似方法和 ε 的任意性知 $\big|h'(x)\big|\le\sqrt{2AB}$.

记 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, 则 $g^{(2n+1)}(0)=0$, $g^{(2n)}(0)=f^{(2n)}(0)$. 从而 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+\frac{g^{(2n+2)}(kx)}{(2n+2)!}\ge\frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}=\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n}$$

$k\in(0,1)$. 故对于任意给定的 $\delta\in(0,1)$, 任取 $x\in(-1+\delta,1-\delta)$, 有

$$\frac{f^{2n}(0)}{(2n)!}\le\frac{g(x)}{x^{2n}}\le\frac{1}{(1-\delta)^{2n}}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|g(x)\big|\le\frac{1}{(1-\delta)^{2n}}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|f(x)\big|$$

类似地, 对任意给定的 $x_0\in(-1+\delta,1-\delta)$, 对函数 $\dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}$ 使用 **Taylor** 展开可得

$$\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}\le\frac{1}{(1-\delta-|x_0|)^{2n}}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|f(x)\big| \tag{2}$$

取 $\varepsilon(x)=\dfrac{1-\delta-|x|}{2}$, 将 $h=f^{(2n)}$, x_0 与 $\varepsilon_0=\varepsilon(x_0)$ 代入 (1), 得

$$\frac{\big|f^{(2n+1)}(x_0)\big|}{(2n+1)!}\le\frac{1}{(2n+1)\varepsilon_0}\frac{\sup\limits_{|x|\le|x_0|+\varepsilon_0}\big|f^{(2n)}(x)\big|}{(2n)!}+\frac{(2n+2)\varepsilon_0}{2}\frac{\sup\limits_{|x|\le|x_0|+\varepsilon_0}\big|f^{(2n+2)}(x)\big|}{(2n+2)!}$$

再对上式右边利用 (2) 得

$$\frac{\big|f^{(2n+1)}(x_0)\big|}{(2n+1)!}\le\frac{\frac{1}{2n+1}+n+1}{\varepsilon_0^{2n+1}}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|f(x)\big|\le\frac{2n+2}{\varepsilon_0^{2n+1}}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|f(x)\big|$$

即为对奇数阶导数大小的估计. 与偶数阶导数的情形相结合, 即有 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\big|f^{(n)}(x)\big|}{n!}\le\frac{n+1}{\varepsilon_0^n}\sup_{|x|\le1-\delta}\big|f(x)\big|$$

所以

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|=\left|\frac{f^n(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n\right|\le\frac{(n+1)|x-x_0|^n}{\varepsilon^n(|x-x_0|+|x_0|)}\sup_{|t|\le1-\delta}\big|f(t)\big|$$

其中 $\theta\in(0,1)$. 当 $|x-x_0|\le\dfrac{\varepsilon_0}{2}$ 时, $\dfrac{|x-x_0|}{\varepsilon(|x_0|+|x-x_0|)}\le\dfrac{2}{3}<1$, 所以原函数 $f(x)$ 在 x_0 处的余项

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right|$$

在 $\left[x_0-\dfrac{\varepsilon_0}{2},x_0+\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right]$ 上一致收敛到 0. 由 δ 的任意性即知 $f\in C^\omega(-1,1)$. □

9.2 (10 分)

假设幂级数 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ 满足 $a_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \cdots$, 并且 $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x) \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 1$. 证明: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=0}^{n} a_j = 1$.

注: 由于两位任课老师均未讲解本题, 故解答略. 这两道附加题难度都很大. 除非前面的题目都能准确做出, 否则不建议同学冲刺附加题.

10 说明:

写这份解答的目的是让南大数学系的学弟学妹们能够对期中考试的难度有一个大体的了解. 这份解答写得断断续续, 也请教了一些同学, 最后终于完成了. 感谢为这份解答纠错和提供思路的 20 级南大学子!