南京大学数学系期末试卷(A)

2016/2017 学年第一学期　考试形式 闭卷　课程名称 高等代数

院系 数学 班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2016.12.29　任课教师________　考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

本试卷中， P 表示一个数域. 不加说明，所有的多项式、向量...等均为 P 上多项式、向量...等.

一. 判断题（本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打 “+”；若错误，请在括号内打 “−”.

1. 不可约多项式没有重根. (+)
2. 设 A 为一个 $n\ (n>1)$ 级方阵. 如果对所有的正整数 m 都有 $A^m \neq 0$，则 $|A| \neq 0$. (-)
3. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 的秩相等，则它们等价. (-)
4. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出，并且 $s \le t$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关. (-)
5. 设 A 为 $s \times n$ 矩阵, 则 A 的秩 $\ge r$ 当且仅当 A 中有一个 r 级子式不为零. (+)
6. 设 A 为 n 级实对称矩阵，则秩 $r(A) =$ 秩 (A^2). (+)
7. 退化反对称矩阵一定是奇数阶的. (-)
8. 等价矩阵的行向量组也是等价的. (-)
9. 设 A, B 为 n 级方阵，则 $|E_n + AB| = |E_n + BA|$. (+)
10. 如果 n 阶非退化方阵 A, B 的伴随矩阵相同，则 $A = B$. (-)

二. 填空题（本题共 10 个空格，每个空格 4 分，共 40 分）.

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = |xE_3 - A|$， 则$AB - BA = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 0 \end{pmatrix}}$, $f(A) = \underline{0_{3\times 3}}$.

2. 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$; $a_{ij} = s_{i+j-2}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, 则 $|a_{ij}| = \underline{\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2}$.

3. 设 $P = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \end{pmatrix}'$, $Q = \begin{pmatrix} b_1, b_2, \ldots, b_n \end{pmatrix}$, 则 $(PQ)^{2016} = \underline{(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^{2015}(a_i b_j)}$.

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = (3E + A)'(3E - A)^{-1}(9E - A^2)$, 其中 E 为 3 级单位矩阵，则 $|B| = \underline{0}$.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, 则秩 $(A) = \underline{3}$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$,

   $A^* = \underline{2A^{-1}}$, $X = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ -15 & 11 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}}$.

7. 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 + tx - 1$ 有重根，则 $t = \underline{3, -\frac{15}{4}}$.

三.（10 分）设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,-1,7,10)$, $\alpha_4=(-2,4,-3,-10)$, $\alpha_5=(1,-2,2,0)$.

1. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；
2. 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；
3. 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

解：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 10 & -10 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

故：1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为3；
2. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个极大无关组（不唯一）；
3. $\alpha_4=-5\alpha_1+\alpha_3,\quad \alpha_5=-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

四.（10 分）讨论 λ 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + (4+\lambda)x_3 = \lambda+1 \end{cases}$$

1. 无解并说明理由;
2. 有唯一解并求其解;
3. 有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解.

解：$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4+\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)\frac{\lambda}{2} & (\lambda-1)\frac{\lambda-3}{2} \end{pmatrix}$.

所以，1：当 $\lambda=0$ 时无解，原因是增广矩阵的秩与系数矩阵的秩不等；
2：当 $\lambda\neq 0,1$ 时有唯一解： $x_1=\frac{2}{\lambda}$, $x_2=\frac{2}{\lambda}$, $x_3=\frac{\lambda-3}{\lambda}$.
3: 当 $\lambda=1$ 时有无穷多解，导出组的基础解系为 $\xi=(-\frac{1}{2},-1,1)$。所有解为 $(1,0,0)+k\xi$，其中k 为任意常数.

五. （10 分）设 A, B 为 n 阶方阵. 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|.$$

证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \begin{vmatrix} E & E \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \begin{vmatrix} E & E \\ 0 & A-B \end{vmatrix} =$
$|A+B||A-B|$.

或者

$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

六. （10 分）设 W 为 n 维向量空间 P^n 的一个子集. 假设 1） W 在向量加法和数乘下封闭；2） W 中每个非零向量的零分量的个数不超过 r. 证明： W 中不存在 $r+2$ 个线性无关的向量.

证明：反证. 设 $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})', \cdots, \alpha_{r+2} = (a_{1,r+2}, a_{2,r+2}, \ldots, a_{n,r+2})'$ 为 W 中$r+2$ 个线性无关的向量. 考虑如下方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,r+2}x_{r+2} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{r+1,1}x_1 + \cdots + a_{r+1,r+2}x_{r+2} & = 0 \end{cases}$$

该方程组有非零解（因为未知量的个数大于秩），令$(k_1, \ldots, k_{r+2})$ 为一个非零解。则向量$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{r+2}\alpha_{r+2}$ 是一个属于W 的非零向量但有超过r 个分量为0.

七. （10 分）设 n 级方阵 A 满足 $A^3 = A$. 证明: 当数 $a \neq 0, \pm 1$ 时， $A + aE_n$ 是非退化矩阵；并举例说明当 $a = 0$ 或 ± 1 时， $A + aE_n$ 可以是退化矩阵.

证明：可以直接发现$(A + aE_n)(A^2 - aA + (a^2-1)E_n) = a(a^2-1)E_n$.

举例如下：1）$a = 0$ 时就取 $A = 0$;

2）$a = 1$ 时就取 $A = -E$;

3）$a = -1$ 时就取 $A = E$.

设 A 一个 $n \times (n+1)$ 级矩阵. 证明:

$$A \text{ 是行满秩的} \iff \text{ 存在 } (n+1) \times n \text{ 级矩阵 } B \text{ 使得} AB = E_n.$$

证明：$\Leftarrow$: $\quad \because n = r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$

$\therefore r(A) = n$ 从而A 是行满秩的.

$\Rightarrow$: $\quad$ 令$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0)', \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0)', \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)'$ 分别为 n 个标准单位向量，考虑如下线性方程组

$$AX_i = \varepsilon_i.$$

由 A 行满秩，可以知道上述方程组总是有解，设其解为 β_i, 则

$$B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

满足$AB = E_n$.