高等代数（一）期中试卷　2017-11-25

班级：　　　　　　　　　　　　姓名：　　　　　　　　　　　　学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集，则 $P=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$ 是数域，其中 $i=\sqrt{-1}$.

2. 设 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),g(x)$ 都是数域 P 上的多项式. 如果 $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=1$, 并且 $f_i(x)|g(x)$, $i=1,2,3$, 则 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)|g(x)$.

3. 设有理系数多项式 $f(x)\neq 0$. 若 $(f(x),f'(x))\neq 1$, 则 $f(x)$ 在有理域上有重根.

4. 多项式 x^4+4 在实数域上不可约.

5. 设 a_i,b_i,c_i,d_i 都是数域 P 中的数， $i=1,2$, 则

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x)=x^6-10x^5+6x^4-310x^3-580x^2-40x-383$, 则 $f(12)=$__________.

2. $f(x)=2x^3-3x^2+1$ 的全部有理根为________________________________.

3. 设实系数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有一个虚根 $4+3i$, 则 $f(x)$ 的其余两个根是____________________________.

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+2A_{12}+3A_{13}+4A_{14}=$__________.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x^7 \\ 1 & 1 & x^2-2 & x^8 \\ 2 & x^2+1 & 1 & x^9 \\ 0 & 0 & 0 & 2017 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的根为____________________.

三、（10 分）设 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$, $g(x)=x^2+x-2$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

四、（10分）写出多项式 x^4+1 在复数域、实数域及有理数域上的标准分解式，并说明理由.

五、（10 分）求 t 值使 $f(x)=x^3+tx^2+3x+1$ 有重根，并求出重根及其重数.

六、（10 分）计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$

七、（10 分）设 P 为数域, 整数 $n \geqslant 2$, $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + a_{i3}x^2 + \cdots + a_{in}x^{n-1} \in P[x]$, $i = 1, \cdots, n$.

已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$, 求 $\Delta = \begin{vmatrix} f_1(n) & f_1(n-1) & \cdots & f_1(1) \\ f_2(n) & f_2(n-1) & \cdots & f_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(n) & f_n(n-1) & \cdots & f_n(1) \end{vmatrix}$.

八、（10分）证明：两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

九、（10 分）设 P 是数域，$a, b, c_1, c_2, \ldots, c_n \in P$ 且 $a \neq b$. 令

$$f(x) = (c_1 - x)(c_2 - x)\cdots(c_n - x).$$

证明：

$$A = \begin{vmatrix} c_1 & a & \cdots & a & a \\ b & c_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b & b & \cdots & c_{n-1} & a \\ b & b & \cdots & b & c_n \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$

十、（10 分）设 P 是数域，$n \geqslant 3$, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in P[x]$. 若存在 P 中 n 个互不相同的数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 使得

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & f_1(\alpha_2) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ f_2(\alpha_1) & f_2(\alpha_2) & \cdots & f_2(\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(\alpha_1) & f_n(\alpha_2) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

证明：存在 $1 \leqslant i \leqslant n$ 使得 $f_i(x)$ 的次数 $\geqslant n-1$.