(2). 利用(1)证明有 $1\le i\le n$ 便得 $I\subseteq P_i$.

证明:

1° $n=1$ 时 由题知 $I\subseteq P_1$. 显成立.

2° 假设 $n-1$ 时成立. ~~由(1)知有 $1\le j\le n$ 使 $I\subseteq \bigcup_{i\ne j}P_i$~~.

即有 $1\le i\le n-1$ 使得 $I\subseteq P_i$.

~~3° n 时, 由(1)知有 $1\le j\le n$ 使得 $I\subseteq\bigcup_{i\ne j}P_i$. (这里 P_i 共 $n-1$ 个).~~

所以应用 $n-1$ 时的假设可知 $\exists\, i_0$ 使 $I\subseteq P_{i_0}$.

9. 设 R 为交换幺环, I,J 为其互素的理想, 证明 $IJ=I\cap J$

证明:

$IJ=\{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i : a_i\in I, b_i\in J, n=1,2,\cdots\}\subseteq I, J$.

$\therefore IJ\subseteq I\cap J$.

又 $\because I,J$ 互素. $\therefore \exists\, i\in I, j\in J$ $i+j=1$. $I+J=R=(1)$

$\forall\, k\in I\cap J$. 有

$k=1\cdot k=(i+j)k=ik+jk\in IJ$ ($\because i\in I, k\in J, j\in J$ 且 $jk=kj$).

故 $I\cap J\subseteq IJ$.

综上可知 $IJ=I\cap J$.

P11. 10. 设 R 为交换幺环, $a\in R$ 且诸 $1-ax$ $(x\in R)$ 都是 R 的单位; 试证 $a\in J(R)$

这儿 $J(R)$ 是 R 的所有极大理想的交.

证明:

假设 $a\notin J(R)$. 则有 R 的极大理想 M 使得 $a\notin M$. 于是 $(a)+M\trianglelefteq R$.

又 $(a)+M\supsetneq M$

故 $(a)+M$ 为极大理想 与 M 极大矛盾

☆ 于是 $M+(a)=R=(1)$ 从而有 $1-ax\in M$. $1=\underset{\in M}{\underline{1-ax}}+\underset{\in (a)}{\underline{ax}}$

又 $1-ax$ 为单位 从而 $(1-ax)=R$ 故 $M=R$ 与 M 为极大理想矛盾!

注意结合第2题(2)知 等价.

$1-ax$ 单位 $\Longleftrightarrow a\in J(R)$