高等代数（一）期中试卷 2018-11-25

姓名： 学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 P 是数域，$f(x), g(x), d(x) \in P[x]$. 如果存在 $u(x), v(x) \in P[x]$ 使得 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$，则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

2. 设 $f(x)$ 是有理系数多项式. 若 $f(x)$ 有有理根，则 $f(x)$ 在有理数域上可约.

3. 设 $f(x)$ 是数域 P上的多项式，整数 $k \geqslant 1$. 如果不可约多项 $p(x)$ 是 $f'''(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k+3$ 重因式.

4. 设 p 是素数，$f(x) = x^p + (p+1)x^2 + p - 1$, $g(x) = x^3 + p$, 则 $(f(x), g(x)) = 1$.

5. 多项式 $x^4 + 1$ 在实数域上不可约.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x)=x^3+tx^2+3x+1$, 则当 $t=$ ________ 时，$(f(x),f'(x))$ 是二次多项式.

2. 设 s,t 是复数，则多项式 $x^3+3sx+2t$ 有重根的充要条件是 ________.

3. 设行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & a & 8 \\ 16 & 11 & 6 & 2a \end{vmatrix}=200$, 则 $a=$ ________.

4. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 58 & 22 & 0 & 20 \\ 204 & 102 & 0 & 1 \\ 4x & 3x^2 & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 ________.

5. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 16 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=$ ________.

三、（10 分）设 $f(x)=x^5-5x^3+5x+1$, $g(x)=x^3-2x-1$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

四、（10分）设 $f(x)=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$，证明 $f(x)$ 在实数域上有重根并求出重根及其重数.

五、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n+1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n+2 \end{vmatrix}$.

六、（10分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

七、（10 分）设 $s_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k, k=1,2,\ldots.$ 计算 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & s_{n-2} & \cdots & s_2 & s_1 \\ s_{n+1} & s_n & s_{n-1} & \cdots & s_3 & s_2 \\ s_{n+2} & s_{n+1} & s_n & \cdots & s_4 & s_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{2n-1} & s_{2n-2} & s_{2n-3} & \cdots & s_{n+1} & s_n \end{vmatrix}.$$

八、（10分）设 P 为数域，$f(x)$ 是数域 P 上多项式，$p(x)$ 是数域 P 上不可约多项式，整数 $k \geqslant 1$. 证明：$p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式并且 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

九、（10 分）设 n 为正整数，$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 并且

$$x^n - 1 \mid f_0(x^n) + x f_1(x^n) + \cdots + x^{n-1} f_{n-1}(x^n).$$

证明：$(x-1)^n \mid f_0(x) f_1(x) \cdots f_{n-1}(x)$.

十、（10分）证明：多项式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2\cdots(x-2017)^2+2018$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.