南京大学数学系试卷

2012/2013 学年第二学期期中　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法

班级________ 学号__________ 姓名________

考试时间 2013.4.24 任课教师______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一. 填空题 (20分)

1. 当______________ 时, 精度的损失称为相减相消. 当 $|x|$ 很小时, 计算 $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, 应取 $f(x) =$ ______________ 才能避免相减相消.

2. 规格化浮点数系是一个离散的有限集合，它由4 个整数 p, t, L, U 表示. p 代表基数, t 代表精度, $[-L, U]$ 代表指数范围。若 $t = 3$, 阶码: $-2 = -L \le J \le U = 2$, 基数 $p = 10$，则该浮点数系共有________ 个浮点数.

3. 机器精度 $\varepsilon_{\text{Mach}}$ 代表了计算机的单位舍入误差, 它说明了用浮点数系统表示一个非零实数 x 的最大可能的______________.

4. 如用 $\pi^* = \dfrac{21988}{6999}$ 作为 π 的近似值，则 π^* 具有________ 位有效数字.

5. 设 $f(1) = -2$, $f(2) = -3$, $f(3) = -2$, $f(4) = 3$, 则 $f(x)$ 带余项的 3 次 *Lagrange* 插值公式（化到最简形式）为______________________________.

6. 已知

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	1	0
$f'(x)$	1			2

则 $f(x)$ 的三次样条插值函数(只要求写出 M 方程组)为________。

7. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$个互异的插值基点, $l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^n l_i(x) =$ ______.

8. 设 $f(x) = 3x^7 + 4x^5 + 1$, 则 $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7] =$ ___, $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7, 2^8] =$ ___.

二. (10分) 设n 次多项式$f(x)$ 有互异的n 个实根$x_1, x_2, \cdots, x_n$. 试证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le n-2; \\ a_n^{-1} & k = n-1, \end{cases}$$

其中a_n 为$f(x)$ 的首项系数.

三. (10分) 试导出计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的中点公式 $I_0(f) = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$, 并给出它的余项 $E_0(f)$.

四. (10分) 试利用上题的中点公式推导 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复合中点公式 $I_n(f)$ 及其余项.

五. (10分) 设 $f(x)$ 在点 a 的某个邻域内具有 n 阶连续导数，且记 $x_i = a + ih$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 证明： $\lim\limits_{h\to 0} f[a, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $1 \le k \le n$.

六. (10分) 对于积分$\int_0^1 24x^5\mathrm{d}x$, 若采用复合辛普森公式需要使用多少个求积基点才能使积分近似值的误差不超过10^{-8}?

七. (10分) 将积分区间 $[a, b]$ 分成 n 等分. 如果计算函数值 $f(x_i)$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$ 时有误差 ϵ_i, 且 $\max\limits_{0\le i\le n} |\epsilon_i| = \frac{1}{2} \times 10^{-t}$，分析复合梯形公式的数值稳定性.

八. (10分) 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项$f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

九. (10分) 对区间$[a,b]$ 作等距剖分, 基点为$x_0=a, x_1, \cdots, x_n=b$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, 即$x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 试证明当n 为偶数时, $\int_a^b w_{n+1}(x)\mathrm{d}x=0$, 其中$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 进一步, 利用证到的结论说明当$n$ 为偶数时闭Newton-Cotes型求积公式的代数精度为$n+1$.