20200621 数学分析二

某平凡的数学讨论群

May 2022

一、计算题 (每题 10 分，共 30 分)

1. (10 分) 求函数 $f(x,y,z)=xy-yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最值.

2. (10 分) 设方程 $u+e^u-xy=0$ 确定了隐函数 $u(x,y)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$.

3. (10 分) 求三元积分 $\iiint_A z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, 其中区域 A 由曲面 $x^2+y^2=z$ 与 $z=1$ 围成.

二. (15 分) 设 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 其定向为外法向, 求如下第二型曲面积分.

$$\int_S x^3\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+e^{z^2}\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\sin\left(y^2\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

三. (15 分) 求如下曲面的面积: $x^2-y^2-2z=0,x^2+y^2\leq 1$.

四. (10 分) 设 f 为 $[-1,1]$ 上的连续函数. 求证:

$$\iint_{|x|+|y|\leq 1} f(x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u.$$

五. (10 分) 设函数 P 与 Q 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微. 对 $r>0$, 记圆周 $x^2+y^2=r^2$ 为 C_r, 其定向为逆时针. 求证:

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}\frac{P(x,y)}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x+\frac{Q(x,y)}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}y=\pi\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)-\frac{\partial P}{\partial y}(0,0)\right).$$

六、(10 分) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ 为开集, $F\in C^2(\Omega,\mathbb{R})$ 满足

$$\sum_{1\leq k,j\leq d} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_k}(x)+\sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)>0,\quad x\in\Omega,$$

其中 $A=(a_{kj})$ 为正定矩阵. 证明: F 不能在 Ω 内取到极大值.

七、(10 分) 设 $F\in C^1\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right), dF$ 可逆且 $\lim_{\|x\|\to\infty}\|F(x)\|=\infty$. 证明: $F\left(\mathbb{R}^n\right)=\mathbb{R}^n$.

八、(15 分) 设 $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}, B\subset\mathbb{R}^4$ 为单位开球, $\Phi\in C^2\left(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4\right)$, $\{x:\Phi(x)\neq 0\}\subset B$.(1) 求 B 的体积. (2) 求积分 $\int_B\det(A+D\Phi)$.

九 (5 分) 设有限维线性子空间 $\mathbb{V}\subset C\left([0,1]^d,\mathbb{R}\right)$ 满足: $\int_{[0,1]^d} w=0,\forall w\in\mathbb{V}$. 给定 $\epsilon>0$. 证明: 存在 $\Omega\subset[0,1]^d$ 使得 (1). $0<|\Omega|<\epsilon$; (2). $w\in\mathbb{V},\sup_\Omega w\leq 0\Rightarrow w=0$.