

# 数学分析 A2022 期中考试 (程)

Bored Xue

Zavalon from TG

2022.11.11

一. 计算题 (每小题 10 分, 共 30 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right); 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; 3. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}.$$

二.(10 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

求  $f$  在  $x = 0$  处的任意  $k$  阶导数.

三.(10 分) 考虑一个无穷数列  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  如果该数列任一收敛子列都有同一极限  $a^* \in \mathbb{R}$ , 问: 该数列是否收敛? 如果认为收敛, 请给出证明; 如果认为不收敛, 请给出反例.

四.(10 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

研究该函数在  $x = 0$  以及  $x \neq 0$  处的极限.

五.(10 分) 若  $n$  次实多项式  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  的根均为实根, 证明它的逐次

导函数  $P'_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$  的根均为实根.

六.(10 分) 设  $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n^2}{1+x_n^2}, x_1 = \alpha$ , 证明  $\{x_n\}$  均收敛.

七.(10 分) 设  $f(x)$  二次可微,  $f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$ . 证明

$$\max_{x \in [0,1]} f''(x) \geq 8.$$

八.(10 分) 设  $f$  在  $[a, b]$  上可导. 证明  $f'$  在  $[a, b]$  上连续当且仅当  $f$  满足如下条件:  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [a, b]$ , 只要  $0 < |h| < \delta$ , 有:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon$$