常微分方程 2022 期末考试

Zavalon from TG

2023.02.18

一.(15 分) 设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

求 $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$.

二.(15 分) 给定方程 $y'''+5y''+6y'=f(x), f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 为方程的两个解, 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_2(x)-y_1(x))$ 存在并给出其表达式.

三.(15 分) 求方程 $y''-2y'+y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+\sin x$ 的一个特解.

四.(15 分) 确定方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z-3t-1\\ \dot{y}=3x-2y-3z-t^2+2t-4\\ \dot{z}=-x+y+2z+t^2-5t+3\end{cases}$$

的通解.

五.(20 分) 设 $f\in C^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$, 设 $\mathbf{x}(t,x)$ 为方程

$$\dot{\mathbf{x}}=f(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}(0)=x$$

的解.

1. 请说明何种条件下能保证解的存在唯一性并且极大解区间为 $\mathbb{R}$?
2. 证明

$$\det\frac{\partial\mathbf{x}(t,x)}{\partial x}=\mathrm{e}^{\int_0^t\nabla\cdot f(s,\mathbf{x}(s,x))\,\mathrm{d}s},\quad\forall t.$$

六.(20 分) 假设 $f(x,y)$ 为 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上的实值连续函数且关于 y 满足 Lipshitz 条件:

$$|f(x,y)-f(x,y')|\le L|y-y'|,\quad L<\pi^2.$$

考虑边值问题

$$u'' = f(x,u), x \in [0,1], u(0) = u(1) = 0. \tag{BP}$$

1. 证明对算子

$$(Tu)(x) = \int_0^1 \Gamma(x,\xi) f(\xi, u(\xi)) \, \mathrm{d}\xi,$$

问题 (BP) 的解恰为算子 T 的不动点, 其中 Γ 为边值问题 $Lu := u'' = 0, u(0) = u(1) = 0$ 对应的 Green 函数.

2. 试用压缩映像原理证明问题 (BP) 的解的唯一性.(这里，你可能需要使用一个加权的范数 $\|u\| = \sup\limits_{0<x<1} \dfrac{|u(x)|}{\sin \pi x}$.)