七、（10分）证明 $R=\{\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}: a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\equiv b \pmod 2\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环.

证：首先证 R 关于加乘法封闭 设 $b=2k+a$

P111 3.6.1

和 P115 (1).

$$\frac{a_1+(2k_1+a_1)\sqrt{-11}}{2}+\frac{a_2+(2k_2+a_2)\sqrt{-11}}{2}=\frac{(a_1+a_2)+(2(k_1+k_2)+(a_1+a_2))\sqrt{-11}}{2}\in R$$

$$\frac{a_1+(2k_1+a_1)\sqrt{-11}}{2}\times\frac{a_2+(2k_2+a_2)\sqrt{-11}}{2}=\frac{-22k_1k_2-11(k_1a_2+k_2a_1)-5a_1a_2}{2}+(a_1a_2+a_1k_2+a_2k_1+2k_1k_2)\sqrt{-11}\in R$$

显然 $\alpha \mid [(-22k_1k_2-11(k_1a_2+k_2a_1)-5a_1a_2)-(a_1a_2+a_1k_2+a_2k_1+2k_1k_2)]$

又对乘法封闭 故 R 为整环

$\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}$

$$N\left(\frac{a+b\sqrt{-11}}{2}\right)=\frac{a^2+11b^2}{4}\in\mathbb{Z}$$

$a+b$

$p\alpha=0$

八、（每小题5分，共10分）设 F 为 $q=p^n$ 元有限域，其中 p 为素数。

(1) 对 $\alpha\in F$ 让 $\sigma(\alpha)=\alpha^p$. 试证 σ 属于域 F 的自同构群 $\mathrm{Aut}(F)$. [先说明 p 为域 F 的特征.]

~~char(F) 为素数.~~

证：由题意，F 的特征为 p 且 F^* 为 $q-1$ 阶循环群

于是 $\forall\alpha\in F$，$p\alpha=0$

$\sigma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^p=\alpha^p+\beta^p=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

$\sigma(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^p=\sigma(\alpha)\cdot\sigma(\beta)$ ⟹ 同态

同态，+单射

又显然 σ 为 $F\to F$ 的双射，故 $\sigma\in\mathrm{Aut}(F)$

F 域：$p^n e=0$.

$(p^{n-1}e)\cdot(pe)=0$ 无零因子

$pe=0$ 或 $p^{n-1}e=0$

对乘法封闭 $\sigma(\alpha)\in F$

$\alpha=0$ $\sigma(\alpha)=0=\alpha\in F$

F 为 $q-1$ 阶循环群 (Abel)

$\alpha^p=\beta^p$

$(\alpha-\beta)^p=0$

$\alpha-\beta=0$

$\sigma(a+b)=(a+b)^p=a^p+b^p=\sigma(a)+\sigma(b)$

$\sigma(a\cdot b)=(ab)^p=\sigma(a)\sigma(b)$ ⟹ 同态

又若 $a^p=b^p \Leftrightarrow (a-b)^p=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ 单射

无零因子

$ab=$

F 有限域，又单射，故满射