令 $J = \{g(x) \in K[x] : g(\sigma(x)) = 0\}$ 由上述过程可知：

则 $J = \{g(x) \in K[x] : \sigma(g(x)) = 0\}$

$= \{g(x) \in K[x] : g(x) = 0\} = (f(x))$ ⇐ 由极小多项式定义知

从而 $f(x)$ 为 $\sigma(x)$ 的极小多项式

(p)为R素理想

~~19. 设 R 为主理想整环，p 为 R 中素元，a 为 R 中非零元. 用反证法说明~~
必有自然数 m 使得 $p^m \mid a$ 但 $p^{m+1} \nmid a$.

证明：

① $m=0$ 时 $p^m = e \mid a$. ∃p s.t. $p \nmid a$ ~~m的~~ 必然存在 m 使 $p^m \mid a$.

② 现假设不存在 m 使 $p^m \mid a$ 但 $p^{m+1} \nmid a$. ~~即 ∀m, $p^m \mid a$, ($p^{m+1} \nmid a$)~~

令 $M = \{m : p^m \mid a\} \neq \emptyset$. $m=0 \in M$

即 $\forall m \in M$ $p^{m+1} \mid a$. 则 $m+1 \in M$.

∵ $0 \in M$ ∴ $M = \mathbb{N}$. 为自然数集. $p^m \mid a$

? 1° 若 p 的循环阶为 ∞. 则 a 必为零元. 与题设矛盾!

? 2° 若 ∃ $m \geq 1$ s.t. $p^m = e$. ⇒ $p = p^{m+1}$ 与 p 为素元矛盾! $p = p \cdot p^m$ 则 $p = pu$ 或 $p = p^m \cdot u$

综上可知假设错误. 故存在 m 使 $p^m \mid a$ 但 $p^{m+1} \nmid a$. ?

20. 设 R 为幺环，a 为 R 中幂零元，证明 $1-a$ 为单位.（即乘法可逆元）

证明：

设 $a^n = 0$，这儿 n 为正整数. 则

$(1-a)(1+a+\cdots+a^{n-1}) = (1+a+\cdots+a^{n-1})(1-a) = 1-a^n = 1$.

于是 $1-a$ 有乘法逆元 $1+a+\cdots+a^{n-1}$. 从而 $1-a$ 为单位.

21. 设幺环 R 是其理想 $R_1, \cdots, R_n$ 的内直和，I 为 R 的任意一个理想.
证明 I 是 $I \cap R_1, \cdots, I \cap R_n$ 的内直和.

证明：

∵ $I \cap R_1, I \cap R_2, \cdots, I \cap R_n$ 为 R 的理想 ∴ 也为 I 的理想.