南京大学数学系期中试卷

2018/2019 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级______ 学号______ 姓名______

考试时间 2019.5.11 任课教师______ 考试成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（判断下列叙述是否正确；并给出理由. 每小题 6 分，共 30 分）.

1. 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\sigma \in L(V)$, 则 $V = \mathrm{Ker}(\sigma) + \mathrm{Im}(\sigma)$.

   错误. 设 $V = F_n[x]$, σ 是形式求导，则

$$\mathrm{Ker}(\sigma) + \mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Im}(\sigma) = F_{n-1}[x] \subsetneqq F_n[x].$$

2. 设 $f(x)$ 是域 F 上的首一 n 次多项式，则存在 $A \in M_n(F)$ 使得 $f(x)$ 就是 A 的特征多项式.

   正确. 取 A 为 $f(x)$ 的有理矩阵即可.

3. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间，如果 $n \geq 2$, 则 V 至多有 2^n 个不同的 $\mathbb{R}$-线性子空间.

   错误.例如 V 是 2 维平面时, 通过原点的任一直线都是 V 的子空间，从而 V 有无穷多子空间.

4. 设 σ 是域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 σ 可能没有特征值.

   正确. 例如：设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V = \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 2 维列向量空间. 令 σ 是由 A 诱导的线性变换，即 $\forall\, \alpha \in V$, $\sigma(\alpha) = A\alpha$. 则 σ 的特征多项式

$$f_\sigma(\lambda) = f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & +1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

   在 $\mathbb{R}$ 内无根，故 σ 没有特征值.

5. 域 F 上两个 n 阶方阵相似当且仅当它们的特征多项式和最小多项式分别相等.

   错误. 例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   则 A 的不变因子为 $1, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda-1)^2$; B 的不变因子为 $1, 1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$. 从而 A 与 B 不相似，但$f_A(\lambda) = (\lambda-1)^4 = f_B(\lambda)$, $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2 = m_B(\lambda)$.

二. 填空题（每小题 6 分，共 42 分）.

1. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -5 & -8 & -7 \end{pmatrix}$. 则 A 的有理标准型为 $\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$. 如果将$A$看成复数域上的矩阵，则其 Jordan标准型为 $\underline{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是不可约多项式 $\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 13$ 的三个根.

2. 设 4 级数字矩阵 A 的最小多项式为 $(\lambda+1)^3$. 则 A 的全部行列式因子为 $\underline{D_1 = D_2 = 1,\ D_3 = (\lambda+1),\ D_4 = (\lambda+1)^4}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则 $a = \underline{0}$, $b = \underline{-2}$.

4. 设 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (1,1,1)$ 和 $\eta_1 = (1,1,0)$, $\eta_2 = (1,2,0)$, $\eta_3 = (0,0,1)$.

   则由 ε_1 ε_2, ε_3 到 η_1 η_2, η_3 的过渡矩阵为 $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$，向量 (x_1, x_2, x_3) 在 η_1 η_2, η_3 下的坐标为 $\underline{(2x_1 - x_2, x_2 - x_1, x_3)^T}$.

5. 设 $\alpha_1 = (1,1,0,0)$, $\alpha_2 = (0,1,0,1)$, $\beta_1 = (0,1,1,0)$, $\beta_2 = (0,0,1,1) \in \mathbb{R}^4$. 令 $V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$, $V_2 = L(\beta_1, \beta_2)$. 则 $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 + V_2) = \underline{4}$, $\dim_{\mathbb{R}}(V_1 \bigcap V_2) = \underline{0}$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $|A^3 + A - E| = \underline{261}$, A^* 的迹为 $\underline{11}$. (其中 A^* 为 A 的伴随矩阵)

7. 设 n 阶方阵 A 的最小多项式为 $x^3 + x$. 则矩阵 $\begin{pmatrix} A & -A & 0 \\ A & -A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$ 的最小多项式为 $\underline{x^2(x^2+1)}$.

三.（8 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 令

$$W=\{f(A)\in M_4(\mathbb{R}) \mid f(x)\in \mathbb{R}[x]\}.$$

(1) 证明：W 是 $M_4(\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$-线性子空间;
(2) 求 W 的一组 $\mathbb{R}$-基.

(1) 证明：$\forall\ k\in\mathbb{R}$ 及 $\forall\ \alpha,\beta\in W$, 则存在 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x]$, 使得 $\alpha=f(A)$, $\beta=g(A)$. 令 $h(x)=f(x)+g(x), u(x)=kf(x)\in\mathbb{R}[x]$, 则

$$\alpha+\beta=f(A)+g(A)=h(A)\in W,\ k\alpha=kf(A)=u(A)\in W.$$

因此 W 是 $M_4(\mathbb{R})$ 的子空间.
(2) 解：显然 $E,A\in W$. 又直接计算得：$A^2-2A+E=0$, 而对任意 $k\in\mathbb{R}$, $A+kE\neq 0$, 因此 E,A 是 W 中 $\mathbb{R}$-线性无关的两个元素，且 A的最小多项式为 $m(x)=x^2-2x+1$. 对任意 $\alpha\in W$, 即存在 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $\alpha=f(A)$. 由带余除法得

$$f(x)=q(x)m(x)+r(x),\ \ r(x)=kx+l,\ k,l\in\mathbb{R}.$$

因此 $f(A)=q(A)(A)+r(A)=r(A)=kA+lE$, 即 $\alpha=f(A)$ 可由 E,A 线性表示.
所以 E,A 是 W 的一组基.

四.（10分）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 求 A^{10}.

解： 矩阵 A 的特征多项式

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda+2).$$

所以矩阵 A 的特征根: $\lambda_1=4,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$.
对于 $\lambda_1=4$, 解方程组 $(4E-A)X=0$ 得矩阵 A 的属于特征值 $\lambda_1=4$ 的特征向量$\varepsilon_1=(-2,2,-1)^T$;
同理可得 $\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\varepsilon_2=(2,1,-2)^T$;
同理可得 $\lambda_2=-2$ 对应的特征向量为 $\varepsilon_3=(1,2,2)^T$.
令 $P=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, 则 P 是可逆矩阵且

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ \ A=P\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

所以,

$$\begin{aligned} A^{10} &= P\begin{pmatrix} 4^{10} & & \\ & 1 & \\ & & 2^{10} \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^{10} & & \\ & 1 & \\ & & 2^{10} \end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4^{11}+4+2^{10} & -4^{11}+2+2^{11} & 2\cdot 4^{10}-4+2^{11} \\ -4^{11}+2+2^{11} & 4^{11}+1+2^{12} & -2\cdot 4^{10}-2+2^{12} \\ 2\cdot 4^{10}-4+2^{11} & -2\cdot 4^{10}-2+2^{12} & 4^{10}+4+2^{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 466148 & -465806 & 233244 \\ -465806 & 466489 & -232562 \\ 233244 & -232562 & 116964 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

五.（10分）设 V 是 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，$\sigma \in L(V)$, 且存在 V 的子空间 V_1, V_2 满足 $\mathrm{Ker}(\sigma) = V_1 \cap V_2$. 求证：存在 $\sigma_1, \sigma_2 \in L(V)$ 使得 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 且 $V_i = \mathrm{Ker}(\sigma_i)$, $i = 1, 2$.

证明： 设 $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(\sigma) = r$, $\dim_{\mathbb{R}} V_i = n_i$, $i = 1, 2$. 由题意知 $r \le n_1, n_2 \le n$. 不妨设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 的一组基，并分别扩充为 V_1, V_2 的一组基：

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n_1} \text{ 是 } V_1 \text{ 的一组基},$$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{n_2} \text{ 是 } V_2 \text{ 的一组基}.$$

则易知

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n_1}, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{n_2}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基, 再扩充为 V 的一组基：

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n_1}, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{n_2}, \gamma_1, \ldots, \gamma_s, \tag{1}$$

其中 $n_1 + n_2 - r + s = n$. 令 $\sigma_1, \sigma_2 \in L(V)$ 在 V 的基 (1) 下的像定义如下：

$$\sigma_1(\alpha_i) = 0,\ 1 \le i \le n_1,\ \sigma_1(\beta_j) = \sigma(\beta_j),\ r+1 \le j \le n_2,\ \sigma_1(\gamma_k) = \frac{1}{2}\sigma(\gamma_k),\ 1 \le k \le s;$$

$$\sigma_2(\alpha_i) = 0,\ 1 \le i \le r,\ \sigma_2(\beta_j) = 0,\ \ r+1 \le j \le n_2,\ \sigma_2(\alpha_l) = \sigma(\alpha_l),\ r+1 \le l \le n_1,\ \sigma_2(\gamma_k) = \frac{1}{2}\sigma(\gamma_k),\ 1 \le k \le s.$$

显然 σ 和 $\sigma_1 + \sigma_2$ 在 V 的基 (1) 上的像相等，从而 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$.

由维数公式知

$$\sigma(\alpha_{r+1}), \ldots, \sigma(\alpha_{n_1}), \sigma(\beta_{r+1}), \ldots, \sigma(\beta_{n_2}), \sigma(\gamma_1), \ldots, \sigma(\gamma_s)$$

是 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 的一组基，因此

$$\sigma_1(\beta_{r+1}), \ldots, \sigma_1(\beta_{n_2}), \sigma_1(\gamma_1), \ldots, \sigma_1(\gamma_s) \text{ 是 } \mathrm{Im}(\sigma_1) \text{ 的一组基},$$

$$\sigma_2(\alpha_{r+1}), \ldots, \sigma_2(\alpha_{n_1}), \sigma_2(\gamma_1), \ldots, \sigma_2(\gamma_s) \text{ 是 } \mathrm{Im}(\sigma_2) \text{ 的一组基}.$$

所以

$$\mathrm{Ker}(\sigma_1) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n_1}) = V_1,$$

$$\mathrm{Ker}(\sigma_2) = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_{n_2}) = V_2.$$

六.（10分）假设$A = (a_{ij})$ 是一个$n \times n$ 的复数矩阵, 求证A 可以被可对角化的矩阵逼近, 即存在一个由$n \times n$ 的复数矩阵组成的矩阵序列$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})$, $A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)})$, ..., $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, ..., 满足下面两个条件:

(1) 对固定的$(i,\ j)$, $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, ..., $a_{ij}^{(k)}$, ..., 是一个复数柯西序列;

(2) 对每个正整数k, $A^{(k)}$ 都是可对角化的.

证明： 假设A是一个若尔当块

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

那么

$$A_m = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{1}{m} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda + \frac{n-1}{m} & 1 \\ & & & \lambda + \frac{n}{m} \end{pmatrix},\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

构成了一个可对角化的矩阵序列, 因为有n 个互异的特征值. 容易看出来, 对矩阵序列A_m 的每个位置$(i,\ j)$, 都是一个柯西序列. 所以命题对若尔当块是成立的, 因此对若尔当标准形也是成立的.

假设$J_A = PAP^{-1}$ 是A 的若尔当标准形, $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, ...是逼近J_A 的可对角化的矩阵序列, 那么$P^{-1}J^{(1)}P$, $P^{-1}J^{(2)}P$, ... 就是逼近A 的可对角化的矩阵序列.

七.（10分）假设A是一个2×2 的整数矩阵(即矩阵的每个位置都是整数), 而且$A^{120} = I$ 是2×2 的单位矩阵. 求A 的特征多项式所有可能的情形.

解： 由题意知道A 的特征值都是n次单位根. 由于A的特征多项式是个首一的整系数二次多项式$\lambda^2 + \lambda x + b$. 根据韦达定理, b是单位根的乘积, 所以只能是± 1.

(1) 如果A的特征根都是实数, 那么只能是± 1. 所以A 的特征多项式可能是$x^2 - 1$, $(x+1)^2$, $(x-1)^2$. 考虑对角矩阵, 可知这三种情况都会发生.

(2) 如果A的特征根是共轭的复数$e^{\pm i\theta}$, 那么$b = 1$, $a = 2\cos\theta$是个整数, 所以$\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$或者$\cos\theta = 0$. 所以$\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, 或者$\frac{\pi}{2}$. 因此特征多项式有可能是$x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x^2 + 1$. 对应得A依次是

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

都满足$A^{120} = I$, 因此以上就是所有的情形.