高等代数（一）期中试卷　2020-11-28

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　任课教师：

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一、(20**分**) 判断下列陈述是否正确, 并说明理由 (本题共 5 小题, 每小题 4 分).

1. 设 F 是数域, $f(x), g(x), h(x) \in F[x]$. 如果 $f(x)|g(x)h(x)$ 并且 $f(x) \nmid g(x)$, 则 $f(x)|h(x)$.

2. 设 $f(x)$ 是实数域上的不可约多项式，则 $f(x)$ 无实根.

3. 设 p 是素数，$f(x) = x^p + (p+1)x^2 + p - 1$, $g(x) = x^2 + p$, 则 $(f(x), g(x)) = 1$.

4. 设 F 是数域, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), g(x) \in F[x]$. 如果 $(f_1(x), f_2(x), f_3(x)) = 1$ 并且 $f_i(x)|g(x)$, $i = 1, 2, 3$, 则 $f_1(x)f_2(x)f_3(x)|g(x)$.

5. 设 a_i, b_i, c_i, d_i 都是数域 F 中的数, $i = 1, 2$, 则

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

二、(30分) 填空题 (本题共 5 小题，每小题 6 分).

1. 设 $f(x)=x^6-10x^5+6x^4-310x^3-7000x-379$, 则 $f(12)=$ ______________.

2. 设 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $g(x)=x^2-x-1$, 则 $(f(x),g(x))=$ _____. 当 $u(x)=$ ______________, $v(x)=$ ______________ 时, $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

3. 设 $f(x)=x^3+tx^2+3x+1$, 则当 $t=$ _________ 时, $f(x)$ 恰好有二重根.

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ 中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$, 则 $A_{41}+A_{42}+2A_{43}+3A_{44}=$ ________.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & 20 & 11 & 28 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ 0 & 172 & x+3 & 4 \\ 0 & 198 & 5 & x+4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 ________, 常数项等于________.

三、(10分) 写出 $f(x)=x^4+1$ 在复数域、实数域及有理数域上的标准分解式，并说明理由.

四、(20**分**) 设整数 $n \geqslant 3$, 计算下列 n 级行列式 (本题共 2 小题, 每小题 10 分).

1. $$D_n = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & -4 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & -3 & 7 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 7 & -4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$

2. $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & a_3^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

五、(10**分**) 试求满足 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$, $f'(4)=4$ 的所有 $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$, 这里 $f'(x)$ 表示 $f(x)$ 的导数.

六、(10**分**) 设 n 为正整数, $D=|a_{ij}|_n$, 其中 $a_{ij}=|i-j|$, $i,j=1,2,\ldots,n$, 试求 D.

七、(10**分**) 设整数 $n \geqslant 2$, $D = |a_{ij}|_n = 2$, $\Delta = |A_{ij}|_n$, 其中 A_{ij} 是 D 中 a_{ij} 的代数余子式, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. 已知 $a_{nn} = 4$, 求 A_{nn} 在 $\Delta = |A_{ij}|_n$ 中的代数余子式.

八、(10分) 设 F 是数域, $A, B \subseteq F[x]$ 是两个非空集合, 定义集合

$$A+B=\{g(x)+h(x)\in F[x] \mid g(x)\in A, h(x)\in B\}.$$

令 $M_k=\{f(x)\in F[x] \mid f(k)=f(k+1)=0\}$, $k=1,2,3.$

证明: 存在 $d(x)\in F[x]$ 使得

$$(M_1\cap M_2)+(M_2\cap M_3)=\{d(x)g(x)\in F[x] \mid g(x)\in F[x]\}.$$