数值计算二期中试题

我真的不懂计算

“老师，你认为这份试卷难度正常吗？是不是太过棘手了?”
“不难呀，都是课上作业遇到的基本内容。”

1. 请使用 LDL^T 方法求解方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ 30 \end{pmatrix}$$

要求写出每一步具体的过程.

解： 首先对系数矩阵作 LDL^T 分解. 记系数矩阵为 (a_{ij}),$L=(l_{ij})$,$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,d_3)$.

$$d_1 = 3.$$

$$g_{21} = a_{21} = 3.l_{21} = \frac{g_{21}}{d_1} = 1.d_2 = a_{22} - g_{21}l_{21}.$$

$$g_{31} = a_{31} - 0 = 5.g_{32} = a_{32} - g_{31}l_{21} = 4.l_{31} = \frac{g_{31}}{d_1} = \frac{5}{3}.l_{32} = \frac{g_{32}}{d_2} = 2.d_3 = \frac{2}{3}.$$

再逐步解三对角方程可得, 解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{41}{2} \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. $A=(a_{ij})$ 是严格对角占优矩阵. 经过一步 Gauss 消去法, 得到矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & c^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 请证明,$A_2$ 也是严格对角占优矩阵.

解： 只需证明,$i \geq 2$ 时, 有下式成立:

$$|a_{ii} - \frac{a_{1i}a_{i1}}{a_{11}}| > \sum_{j\neq i, j\geq 2} |a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}|.$$

不难发现

$$\begin{aligned} |a_{11}a_{ii} - a_{1i}a_{i1}| &> |a_{11}a_{ii}| - |a_{1i}a_{i1}| \\ &> |a_{11}| \sum_{j\geq 1, j\neq i} |a_{ij}| - |a_{1i}a_{i1}| \\ &= \sum_{j\geq 2, j\neq i} (|a_{11}a_{ij}| + |a_{1j}a_{i1}|) + (|a_{11}| - \sum_{j\geq 1, j\neq i} |a_{1j}|)|a_{i1}| \\ &= \sum_{j\geq 2, j\neq i} (|a_{11}a_{ij} - a_{1j}a_{i1}|) \end{aligned} \tag{1}$$

证毕.

3. (1) 若 $I+A$ 是奇异矩阵, 证明对任意矩阵范数 $||\cdot||$, 有 $||A|| \geq 1$;

   (2) 给出矩阵 B, 使得对任意矩阵范数 $||\cdot||$, 有 $||B|| > \rho(B)$;

   (3) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 H 的 1-范数和 1-条件数.

解: (1) 若存在 $||A|| < 1$, 则谱半径 $\rho(A) \leq ||A|| < 1$.$\rho(A) < 1$ 时,$I+A$ 是非奇异的, 矛盾.

   (2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (3) $||H||_1 = 4$,$\kappa_1 = 16$.

4. (1) A 是严格对角占优矩阵, 证明

$$\min_{1\leq i\leq n}(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|) \leq \frac{1}{||A^{-1}||_\infty}$$

   (2) 证明：对任意矩阵 A,

$$||A||_2 = \max \frac{|y^TAx|}{||x||_2||y||_2}$$

解: (1) 注意到,

$$||A^{-1}||_\infty = \max_{||x||_\infty=1} ||A^{-1}x||_\infty = \max_{||Ay||=1} ||y||_\infty.$$

设 $|y_i| = ||y||_\infty$, 而

$$1 \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j| \geq |a_{ii}||y_i| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}||y_j| \geq |y_i|(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|).$$

从而

$$||y||_\infty \leq \frac{1}{|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|} \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|}.$$

得证.

   (2) 注意到,

$$|y^TAx| \leq ||y^TA||_2||x||_2 \leq ||A||_2||y||_2||x||_2.$$

取等是显然的.

5. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 且 $a_{11}a_{22} \neq 0$. 考虑唯一可解的线性方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

   (1) 给出 Jacobi 方法和 GS 方法的迭代公式, 并给出相应的迭代矩阵;

   (2) 证明两种方法要么同时收敛, 要么同时发散;

   (3) 若收敛, 求出两种方法的渐近收敛速度.

注: 送分题, 请读者自己计算.

6. 已知线性方程组 $Ax = b$. 其系数矩阵 A 具有相容次序. 若 A 是对称的四阶矩阵, 具有相同的对角线元素, 相应的全部特征值为 6,4,4,2. 请回答:

   (1) 给出 SOR 方法的迭代公式, 并给出最佳松弛因子;

   (2) 取 $m = 3$, 给出相应的变系数 R 方法的迭代公式与相应的最佳参数;

   (3) 给出 CG 算法的计算公式, 并给出开始至少几步一定可以得出真解.

注: 送分题, 翻书.

7. 设 G 为实对称矩阵, 若存在正定矩阵 H, 使得 $H - GHG$ 正定, 证明 $x_{n+1} = Gx_k + g$ 收敛.

解: 设 μ 是 G 的特征值, 对应的特征向量为 x, 则 $Gx = \mu x$. 于是

$$x(H - GHG)x = xHx - \mu^2 xHx = (1 - \mu^2)xHx > 0$$

恒成立. 从而 $|\mu| < 1$. 因此迭代收敛.

8. A 为满秩矩阵, 矩阵序列 $\{X_n\}$ 满足

$$X_{n+1} = X_n(2I - AX_n), \forall n \in \mathcal{N}.$$

证明若 $\rho(I - AX_0) < 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} X_n = A^{-1}$.

解: 显然,

$$I - AX_{n+1} = (I - AX_n)^2$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} I - AX_n = 0.$$

得证.