三. (10分) 设$\xi, \xi_n, n=1,2,\ldots$是定义在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量，ξ服从泊松分布$P(\lambda)$而ξ_n服从n-重伯努利分布$B(n, p_n)$。证明：若$\lim\limits_{n\to+\infty} E\xi_n = \lambda$，则$\xi_n \xrightarrow{L} \xi$（依分布收敛）。

证明：$E\xi_n = np_n \to \lambda$ 当 $n\to\infty$.

由泊松定理知 $b(k; n, p_n) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

故 $F_{\xi_n}(k) \to F_\xi(k)$ as $n\to\infty$.

因此，$\xi_n \xrightarrow{L} \xi$.

$\phi_n(t) = Ee^{it\xi_n} = \sum\limits_{j=0}^{n} e^{i}$

$= (q_n$

$\phi(t) = \sum\limits_{k=0} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$

$\square$

四. (10分) 设随机变量ξ具有连续的分布函数$F(x)$。证明：$\theta = F(\xi)$服从均匀分布$U[0,1]$。

证明：定义 $F^{-1}(y) = \sup\{x : F(x) < y\}$ $(0 \le y \le 1)$.

则 $P\{\theta < y\} = P\{F(\xi) < y\}$

$= P\{\xi < F^{-1}(y)\}$

$= F(F^{-1}(y)) = y$

$\therefore$ $\theta \sim U[0,1]$.

$P\{\theta < Y\} = P$