南京大学数学系试卷

<u>2016 – 2017</u> 学年第二学期期末考试(A) 考试形式<u>闭卷</u>

课程名称<u>高等代数</u> 班级____ 学号______________ 姓名________

考试时间________任课教师______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 填空题，每个空格5分，共60分。

1. 设4级数字矩阵A的最小多项式为$(\lambda+1)^3$. 则(i)A的全部不变因子为$\underline{1, 1, \lambda+1, (\lambda+1)^3}$.

(ii) A的Jordan标准型为$\underline{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}}$.

(iii)A的有理标准型为$\underline{\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & -1 \\ & 1 & 0 & -3 \\ & & 1 & -3 \end{pmatrix}}$

2. 已知$\mathbb{R}_3[X]$在内积$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ $(f, g \in \mathbb{R}_3[X])$下构成3维欧氏空间且$1, x, x^2$ 和$1+x, 1-x, 1+x-x^2$是$\mathbb{R}_3[X]$的一组基.

(i) 将$1, x, x^2$施密特正交化得$\underline{1,\ 2\sqrt{3}(x-\frac{1}{2}),\ 6\sqrt{5}(x^2-x+\frac{1}{6})}$;

(ii) 从基$1, x, x^2$到基$1+x, 1-x, 1+x-x^2$的过渡矩阵为$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

(iii) 设$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$. 则$f(x)$在$\mathbb{R}_3[X]$的一组基$1+x, 1-x, 1+x-x^2$下的坐标为$\underline{(4,\ 6,\ -3)'}$;

(iv) 定义$\mathbb{R}_3[X]$上的线性变换σ为：对任意$g(x) \in \mathbb{R}_3[X]$, $\sigma(g(x)) = g(x-1)$, 则σ 在基$1+x, 1-x, 1+x-x^2$下的矩阵为$\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. 设3维欧氏空间V的一组基$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则向量$2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3$的长度为$\underline{\sqrt{13}}$.

4. 设A是3阶可逆矩阵，已知A^{-1}的特征值分别为$1, 2, 3$. 设A^*是A的伴随矩阵，则$\mathrm{tr}(A^*) = \underline{1}$.

5. 设$\alpha_1 = (1, 0, 1, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, 1)$ 以及$\alpha = (1, 2, 3, 4)$ 是$\Re^4$ 中的3个向量. 令$V = L(\alpha_1, \alpha_2)$. 则$\alpha$ 到子空间V 的距离为$\underline{2}$.

6. 设$\lambda = 0$ 是$n(n \geq 4)$ 阶复方阵A的4重特征根, 且秩$A = n - 3$. 如果k是满足秩$A^k =$秩A^{k+1} 的最小的正整数，则$k = \underline{2\quad\quad}$.

7. 二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$ 的符号差$= \underline{-1}$.

二. (16分) 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$的秩为2. (1) 求$a$的值；(2) 求正交变换将二次型$f(x_1, x_2, x_3)$化为标准型.

解：(1) 二次型的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 由秩$A = 2$ 知$(1-a)^2 - (1+a)^2 = 0$, 解得$a = 0$. 经检验$a = 0$满足题设条件，故所求a的值为0.

(2) 矩阵A的特征多项式$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda(\lambda-2)^2$, 从而矩阵$A$ 的特征根: $\lambda_1 = 2$是二重根, $\lambda_2 = 0$.

对于$\lambda_1 = 2$, 解方程组$(2E - A)X = 0$ 得矩阵A的属于特征值$\lambda_1 = 2$的两个正交的单位特征向量为$\varepsilon_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$, $\varepsilon_2 = (0, 0, 1)^T$

对于$\lambda_2 = 0$, 解方程组$(0E - A)X = 0$ 得矩阵A的属于特征值$\lambda_2 = 0$的单位特征向量$\varepsilon_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^T$;

令$T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, 则$T$是正交矩阵且$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

从而原二次型经过正交的线性替换$X = TY$化为标准型$g(Y) = 2y_1^2 + 2y_2^2$.

三. (14分) 设A是n阶实正交矩阵，如果A的特征值都是实数，证明: 存在正交矩阵P 使得$P^{-1}AP$是对角阵.

证明：对阶数n归纳证明. 当$n=1$时，$A=(a_{11})$结论显然成立. 假设对$n-1$阶正交阵结论成立，考虑特征值都是实数的n阶正交阵A. 设λ_1是A的一个实特征值，ε_1是A的对应于λ_1的单位特征向量，即$A\varepsilon_1=\lambda_1\varepsilon_1$, $|\varepsilon_1|=1$. 将ε_1扩张为$\mathbb{R}^n$的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$. 令$T_1=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$. 则

$$AT_1=A(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1, & * \\ \theta & A_1\end{pmatrix}.$$

所以由T_1正交知$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}\lambda_1, & \alpha \\ \theta & A_1\end{pmatrix}$是正交阵，所以$\alpha=\theta$, 而且$A_1$是$n-1$阶正交阵. 由$A$的特征值是实数知$n-1$阶正交阵$A_1$的特征值都是实数. 由归纳假设存在$n-1$阶正交阵$P_1$使得$P_1^{-1}A_1P_1=\mathrm{diag}(\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. 令$P=T_1\begin{pmatrix}1 & \\ & P_1\end{pmatrix}$. 则$P$是正交阵而且$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. □

四. (12分) 设A 是n阶实方阵，令V_A 是齐次线性方程组$AX=0$的解空间，即$V_A=\{\alpha\in\mathbb{R}^n\ \ |A\alpha=0\}$. 已知$AA^T=A^TA$.

证明：(1) $V_A=V_{A^T}$; (2) 秩A=秩A^2.

证明方法一：(1) 设$\alpha\in V_A$ 即$A\alpha=\theta$. 所以

$$0=\alpha^TA^TA\alpha=\alpha^TAA^T\alpha=(A^T\alpha)^T(A^T\alpha),$$

从而$A^T\alpha=\theta$, 即$\alpha\in V_{A^T}$. 所以$V_A\subset V_{A^T}$. 同理$V_{A^T}\subset V_A$. 所以$V_A=V_{A^T}$.

(2) 如果$A\alpha=\theta$, 则显然$A^2\alpha=\theta$.

反过来，如果$A^2\alpha=\theta$, 则由(1)知$A^TA\alpha=\theta$.

所以

$$(A\alpha)^TA\alpha=\alpha^TA^TA\alpha=\theta,$$

所以$A\alpha=\theta$.

因此$AX=\theta$ 与$A^2X=\theta$ 同解. 从而$n-r(A^2)=n-r(A)$, 即$r(A^2)=r(A)$.

方法二.用规范阵的标准形也算对.

五. (10分)设$V=\mathbb{Q}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{Q}\}$. 令

$$\sigma:V\longrightarrow V,\alpha=(x,y,z)\longrightarrow\sigma(\alpha)=(2z,x-6z,y+2z).$$

证明：V没有非平凡的σ-不变子空间.

证明：令$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$. 则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是$V$ 的一组基且

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A,\quad A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&-6\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

所以V有非平凡的σ-不变子空间等价于A相似于$\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ \theta & A_1\end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix}A_1 & * \\ \theta & \lambda_1\end{pmatrix}$, 其中$A_1\in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$, $\lambda_1\in\mathbb{Q}$. 从而V有非平凡的σ-不变子空间等价于A有有理特征值. 另一方面A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-2.$$

由艾森斯坦判别法知$\lambda^3-2\lambda^2+6\lambda-2$在$\mathbb{Q}$上不可约，从而$f_A(\lambda)=0$无有理根，所以$A$没有有理特征值，即$V$没有非平凡的$\sigma$-不变子空间.

六. (8分) 设$A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$且$A^T=A,B^T=B$, 即$A,B$都是$n$阶复对称矩阵. 假设$A$与$B$相似, 即存在可逆矩阵$P\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$使得$B=P^{-1}AP$.

证明：存在可逆矩阵$O\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 满足(i) $O^TO=OO^T=E$, (ii) 使得$B=O^TAO$.

(注：可以用如下结论：设$X\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$是$n$阶可逆阵，则存在多项式$g(t)$使得$g(X)^2=X$, 即任意可逆方阵$X$都可开方，且开方后为$X$的多项式.)

证明： 由已知$A^T=A$ 和$(P^{-1}AP)^T=B^T=B=P^{-1}AP$, 则

$$P^{-1}AP=(P^{-1}AP)^T=P^TA(P^{-1})^T.$$

所以$APP^T=PP^TA$.

由提示中的结论可知，存在可逆方阵PP^T的多项式$S=g(PP^T)$, 使得$S^2=PP^T$. 显然S是复对称的而且$SA=AS$. 令$O=S^{-1}P$, 则$P=SO$ 且

$$OO^T=S^{-1}P(S^{-1}P)^T=S^{-1}PP^T(S^{-1})^T=S^{-1}S^2S^{-1}=E.$$

所以$B=P^{-1}AP=(SO)^{-1}ASO=O^{-1}S^{-1}ASO=O^{-1}AO.$ □