$\alpha_m \quad \beta_n$

$K\le M\le L$

$a_{ij} \quad b_j$

于是 $\beta=\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i\beta_j$.

现证 诸 $\alpha_i\beta_j$ 线性无关.

假设有 $a_{ij}\in K$. s.t $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i\beta_j=0$.

则 $\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j=0$, $b_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i\in M$. ?

$\because \{\beta_j\}_{1\le j\le n}$ 为基底 $\therefore$ $b_j=0$, $\forall j=1,2,\cdots,n$.

$\cancel{\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i=0 \quad \forall j=1,2,\cdots,n.}$

而 $\{\alpha_i\}_{1\le i\le m}$ 为基底 $\therefore$ $\forall j=1,2,\cdots,n$. $\forall i=1,2,\cdots,m$, $a_{ij}=0$.

故 $\{\alpha_i\beta_j\}_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ 为线性无关的.

即 $\{\alpha_i\beta_j\}$ 为 K 上向量空间 L 的一组基底.

因此 $[L:K]=\underbrace{[L:M]}_{n}\underbrace{[M:K]}_{m}=mn$.

II. 证明 $R=\{a+b\theta : a,b\in\mathbb{Z}\}$ 依数的加、乘法构成Euclid整环,

其中 $\theta=(-1+\sqrt{-7})/2$.

R_{-7} Euclid环

证明.

R 必为整环(验证按加法满足结合律与交换律且封闭,有单位元0和逆元 $-a-b\theta$ 故按加法构成Abel群,再有乘法显然构成半群且满足分配率,故 R 为环。乘法可交换且有幺元 $(1+0\theta)$ 故为交换幺环。

又 $\forall\ (a_1+b_1\theta)(a_2+b_2\theta)=0 \Rightarrow a_1=b_1=0$ 或 $a_2=b_2=0$. 故为整环).

且对求复共轭封闭. 假如 $\alpha,\beta\in R$ 且 $\beta\neq 0$.

则 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\beta|^2}$ 可表成 $r+s\theta$ 的形式, $r,s\in\mathbb{Q}$.

取 $m,n\in\mathbb{Z}$ s.t $|r-m|\le\frac{1}{2}$, $|s-n|\le\frac{1}{2}$. 且当 $|r-m|=|s-n|=\frac{1}{2}$ 时,

$r-m$, $s-n$ 同号.

记 $\eta=m+n\theta$, 则 $\eta\in R$.

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=|(r-m)+(s-n)\theta|^2=((r-m)+(s-n)\theta)((r-m)+(s-n)\bar{\theta})$$

$$=(r-m)^2-(r-m)(s-n)+2(s-n)^2\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1.$$

从而 $\gamma=\alpha-\beta\eta$ 有 $|\gamma|^2<|\beta|^2$

因此 R 依映射 $N(w)=|w|^2$ $(w\in R\setminus\{0\})$ 构成Euclid整环.