# 南京大学
# 实变函数期中考试

天影　　陈韵雯　　陈相相

2023 年 2 月 13 日

**评语:** 这份试卷是 2022-2023 学年秋季学期, 吕勇老师班的实变函数期中考试题. 试卷总体难度并不大, 但是阅卷极为严格, 只要有一小步出错, 后面的部分就是零分, 即使这样, 两个班里也有三位满分的同学(真离谱啊).

纵观整张试卷, 可以发现有部分题目都是平时作业中的原题, 所以学弟学妹们在准备实变函数的复习时可以对复习重点进行一定的调整.

**备注:** 我们分别用 $A', A^c, \mathring{A}, \partial A, \bar{A}$ 表示 $A$ 的导集, 补集, 内部, 边界, 闭包; 用 $A \subset B$ 表示 $A$ 是 $B$ 的子集; 用 $B_\varepsilon(x)$ 或 $B(x,\varepsilon)$ 表示以 $x$ 为球心, $\varepsilon$ 为半径的开球.

一、**(10 分)** 记 $A \sim B$ 表示集合 $A$, $B$ 对等, 即存在 $A$, $B$ 间的一一映射. 证明: 1. $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

2. 若 $(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$, 则 $A \sim B$.

**分析:** 此题主要考察集合对等 (等势) 的概念, 只需按照题目条件构造双射即可. 题目难度很低, 其难度甚至不足以看作离散数学课上集合论部分的练习题. 同时, 本题第二小问是作业原题, 所以每位同学都理应拿到满分.

**1. 证明:** 考虑函数 $f(x) = \tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$. 因为 $\tan x$ 是 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射, 所以只需将 $(0,1)$ 线性映射到 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 即可. □

**2. 证明:** 因为 $(A \setminus B) \sim (B \setminus A)$, 所以存在双射 $f : A \setminus B \to B \setminus A$. 再取从 $A \cap B$ 到自身的单位映射 $g$, 显然 $g$ 是双射. 而因为 $A = A \setminus B + A \cap B$, $B = B \setminus A + A \cap B$, 故令

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus B, \\ g(x), & x \in A \cap B, \end{cases}$$

易验证, $h$ 为 $A$ 到 $B$ 的双射, 故 $A \sim B$. □

二、**(15 分)** 设 $X$ 是一个度量空间, $A$ 是 $X$ 中一个子集, $A'$ 表示 $A$ 的导集. 证明:

1. 若 $A \subset B$, 则 $A' \subset B'$.
2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
3. $(A')' \subset \bar{A}$.

**分析:** 此题主要考察度量空间中导集和闭包的定义和基本性质, 难度较低, 利用序列收敛性的语言很容易给出证明. 事实上, 本题的结论对于一般的拓扑空间也成立, 附录一中将用点集拓扑的语言对本题给出证明.

**1. 证明:** 由导集的定义知, $\forall x \in A'$, $A$ 中都有收敛于 $x$ 的互异点列 $\{x_n\}$, 由 $A \subset B$ 知 $\{x_n\}$ 也是 $B$ 中收敛于 $x$ 的互异点列, 故 $x \in B'$. 所以 $A' \subset B'$. □

**2. 证明:** 首先由第 1 问结论知 $A' \subset (A \cup B)'$ 及 $B' \subset (A \cup B)'$, 所以 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. 下面证明另一方向. 对于任意 $x \in (A \cup B)'$, $A \cup B$ 中有趋近于 $x$ 的互异点列 $\{x_n\}$, 由抽屉原理知 $\{n | x_n \in A\}$ 与 $\{n | x_n \in B\}$ 中至少有一个无限集, 故在 $A$ 中或 $B$ 中总能找到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 而该子列收敛于 $x$, 故 $x \in A' \cup B'$, 命题成立. □

**3. 证明:** 因为 $\bar{A}$ 为闭集, 所以 $(\bar{A})' \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A}$. 由 $A' \subset \bar{A}$ 及第 1 问结论有 $(A')' \subset (\bar{A})'$, 从而有 $(A')' \subset \bar{A}$. □

三、**(15 分)** 设 $X$ 是一个度量空间, $F$ 是 $X$ 中的闭子集. 说明下列函数是上半连续函数, 还是下半连续函数:

1. 集合 $F$ 的特征函数 $\chi_F(y)$.
2. 特征函数的下极限函数 $f(x) = \liminf\limits_{y \to x} \chi_F(y)$.

**分析:** 此题主要考察上 (下) 半连续函数的定义. 若能熟记上 (下) 半连续的定义, 那么第一小问就是送分题, 而第二小问则需要对极限函数以及闭包, 内部的概念有较好的理解.

**1. 解:** 上半连续函数. 只需考虑 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $S_\alpha = \{x | \chi_F(x) < \alpha\}$ 是否总是开集. 易得

$$S_\alpha = \begin{cases} \varnothing, & \alpha \le 0, \\ F^c, & 0 < \alpha \le 1, \\ X, & \alpha > 1. \end{cases}$$

因为 $\varnothing$, $F^c$, $X$ 均为开集, 所以 $\chi_F$ 是上半连续函数. 另外, 可以选取适当的度量空间 $X$ 和闭子集 $F$, 使得 $\{x | f(x) > 0\} = F$ 不为开集, 所以 $\chi_F$ 不总是下半连续函数.

**2. 解:** 下半连续函数. 与第一小问的证明思路类似, 我们先分析 $f(x)$ 的取值. 对于 $x \in X$, 若 $x$ 的任一邻域都有不属于 $F$ 的点, 则有

$$f(x) = \liminf_{y \to x} \chi_F(y) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf \{\chi_F(y) \big| y \in B_\varepsilon(x)\} = \sup_{\varepsilon > 0} 0 = 0.$$

另一方面, 若 $x$ 有一个邻域包含于 $F$, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$1=\inf\{\chi_F(y)\big|y\in B_{\varepsilon_0}(x)\}\le\sup_{\varepsilon>0}\inf\{\chi_F(y)\big|y\in B_\varepsilon(x)\}=f(x)\le\sup_{y\in X}\chi_F(y)\le 1,$$

因此可知 $f(x)$ 是仅取 $0,1$ 二值的函数, 且 $f(x)=1\iff x\in\mathring{F}$.

对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, 下面考虑集合 $T_\alpha=\{x|f(x)>\alpha\}$, 有

$$T_\alpha=\begin{cases}X, & \alpha<0,\\ \mathring{F}, & 0\le\alpha<1,\\ \varnothing, & \alpha\ge 1.\end{cases}$$

因为 $\varnothing$, $\mathring{F}$, $X$ 均为开集, 所以 $f$ 是下半连续函数. 另一方面, 可以选取适当的度量空间 $X$ 和闭子集 $F$, 使得 $\{x|f(x)<1\}=\big(\mathring{F}\big)^c$ 不是开集, 故 $f(x)$ 不总是上半连续函数.

**注记:** 在吕勇老师的讲义中, 函数的上下极限是通过非去心邻域的方式定义的, 即

$$\liminf_{y\to x}f(y):=\sup_{\varepsilon>0}\inf\{f(y)|y\in B_\varepsilon(x)\}.$$

若采用去心邻域定义上下极限, 第二小问的结论仍成立, 但证明过程略有不同. 详见附录二.

**四、(15 分)** 设 $f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ 为 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

1. 说明 $f(x)$ 是否为连续函数.
2. 说明 $f(x)$ 是否为可测函数.
3. 若 $G$ 为 $\mathbb{R}$ 中的开集, 说明 $f^{-1}(G)$ 一定是 $\mathbb{R}^d$ 中的下述哪种集合: 开集, 闭集, $G_\delta$ 集, 还是 $F_\sigma$ 集.

**分析:** 此题的前两问考察连续函数列的极限是否是连续函数或者可测函数, 最后一问则考察了几类特殊的集合. 第一小问属于 "钓鱼题", 很容易给出反例; 第二和第三小问可以放在一起证明, 需要对收敛性有较为深入的理解, 难度略大. 如果考试时无法一步证出第三小问, 可以参考附录三中第二小问的另一种较为简单的解答.

**1. 解:** $f(x)$ 不一定是连续函数. 例如, 若取 $f_n(x)=0$ 为常函数, 则 $f(x)$ 连续; 若取 $f_n(x_1,x_2,\dots,x_d)=e^{-n\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_d^2\right)}$, 则 $f_n$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上连续, 但是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\ne 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

不是 $\mathbb{R}^d$ 上的连续函数.

**2. 解:** $f(x)$ 是可测函数. 下面证明, 对 $\mathbb{R}$ 中任一开集 $G$, $f^{-1}(G)$ 都是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测集.

由于 $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 因此 $G$ 可写为可数多个不交开区间之并, 即

$$G=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i),\quad a_i<b_i,\qquad \text{故 } f^{-1}(G)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}((a_i,b_i)).$$

由极限的定义知, $f(x)\in(a,b)\Longleftrightarrow \exists n\geq 1,\exists m\geq 1,\forall k\geq m, f_k(x)\in\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$, 故

$$f^{-1}((a_i,b_i))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}f_k^{-1}\left(\left[a_i+\frac{1}{n},b_i-\frac{1}{n}\right]\right).$$

因为 $f_k$ 是连续函数, 所以 $f_k^{-1}\left(\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]\right)$ 为闭集, 而由上式观察到 $f^{-1}(G)$ 可写为可数多个形如 $\bigcap\limits_{k=m}^{\infty}f_k^{-1}\left(\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]\right)$ 的闭集之并, 故为 $F_\sigma$ 集, 从而 $f(x)$ 是可测函数.

**3. 解:** 由上一问的分析知, $f^{-1}(G)$ 一定是 $F_\sigma$ 集.

**注记:** 在考试时, 解答第三小问只需说明 $f^{-1}(G)$ 是 $F_\sigma$ 集即可得到满分. 但是出于严谨性, 我们有必要证明 $f^{-1}(G)$ 有可能不是另外三种集合, 以作为拓展. 由第一小问的两个例子可以说明 $f^{-1}(G)$ 可能不是开集, 也可能不是闭集. 而 $f^{-1}(G)$ 不是 $G_\delta$ 集的例子较为繁琐, 我们在附录四中将其呈现.

**五、(10 分)** 设 $(X,\Gamma,\mu)$ 为测度空间, $f$, $f_n$ $(n\in\mathbb{N})$ 是 $X$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测函数, 且对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $\mu(\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\})<\frac{1}{2^n}$, 证明 $f_n$ 几乎处处收敛于 $f$.

**分析:** 此题主要考察几乎处处收敛的定义, 解出题目需要一定的思考, 但题目本身其实并不难. 事实上可以发现题干所给的条件很强, $f_n$ 在 "绝大多数" 地方都和 $f$ 完全一致. 如果留意到 $f(x)$ 与 $\{f_n(x)\}_{n=k}^{\infty}$ 中的某一项出现不同的那些 $x$, 其测度不会超过 $2^{-k}+2^{-k-1}+\cdots=2^{-k+1}$, 那么由此联想到用 $\limsup$ 解决问题也相当自然了.

**证明:** 由收敛性的定义, 对任意 $x\in X$, 有 $f_n(x)\nrightarrow f(x)\Longrightarrow \forall N>0,\exists n>N, f_n(x)\neq f(x)$. 换言之, 若 $\{f_n(x)\}$ 不收敛到 $f(x)$, 则有无穷多个 $n$ 使得 $f_n(x)\neq f(x)$. 因此

$$\mu(\{x\in X|f_n(x)\nrightarrow f(x)\})\leq\mu\left(\limsup_{n\to\infty}\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\}\right).$$

而由题目条件可知, 对于任意 $k\in\mathbb{N}^+$ 都有

$$\begin{aligned}\mu\left(\limsup_{n\to\infty}\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\}\right)&\leq\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\}\right)\\&\leq\sum_{n=k}^{\infty}\mu(\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\})<\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{k-1}},\end{aligned}$$

故 $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\{x\in X|f_n(x)\neq f(x)\}\right)=0$.

由此可知, $\mu(\{x\in X|f_n(x)\nrightarrow f(x)\})=0$, 即 $f_n$ 几乎处处收敛于 $f$. □

**六、(15 分)** 设 $(X, \Gamma, \mu)$ 为测度空间, $\mu(X) < \infty$, $f$, $f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ 是 $X$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测函数, 且 $f_n$ 依测度收敛于 $f$. 求证:

$$\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|^2} \, \mathrm{d}\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

**分析:** 此题主要考察依测度收敛的基本概念和运用, 需要一些放缩的技巧. 题目的最主要思路是将全空间分为 $|f_n - f|$ 较大的一部分和较小的一部分, 两部分使用不同的放缩方法. 这种思路非常典型, 平常练习较多的同学应该能快速做出.

**证明:** 因为 $f_n$ 依测度收敛于 $f$, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists N_{\varepsilon,\delta} > 0$, $\forall n > N_{\varepsilon,\delta}$, 均有

$$\mu(\{|f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \varepsilon.$$

由于 $\mu(X) < \infty$, 故可取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mu(X) + 1}$, 则

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|^2} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\{|f_n(x) - f(x)| > \delta\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|^2} \, \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f_n(x) - f(x)| \le \delta\}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|^2} \, \mathrm{d}\mu \\
&\le \int_{\{|f_n(x) - f(x)| > \delta\}} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f_n(x) - f(x)| \le \delta\}} |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \\
&\le \frac{1}{2} \mu(\{|f_n(x) - f(x)| > \delta\}) + \int_X \delta \, \mathrm{d}\mu \le \frac{\varepsilon}{2} + \delta\mu(X) \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**七、(20 分)** 设 $(X, \Gamma, \mu)$ 为测度空间, $\mu(X) < \infty$, $f_n$ 为 $X$ 到 $\mathbb{R}$ 的可测函数, $n \in \mathbb{N}$ 且 $f_n \to f$ a.e. in $X$ $(n \to \infty)$. 设可测函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 一致可积, 即: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得对所有 $E \in \Gamma$, $\mu(E) < \delta$, 都有 $\displaystyle\int_E |f_n(x)| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 证明:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(X, \mu)$.
2. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

**分析:** 本题的结论称为 Vitali 收敛定理 (Vitali's convergence theorem), 是实变函数中的重要定理. 第一小问将 $\mathbb{R}$ 拆分成可数个区间, 并借助无穷级数可发现 $|f|$ 取值过大的地方不会 “太多”, 因而可用与第六题类似的办法证明. 第二小问, 主要考察了在 $\mu(X) < \infty$ 时几乎处处收敛 $\Longrightarrow$ 依测度收敛的性质, 以及在估计 $|f|$ 的积分时, Fatou 引理的使用.

**1. 证明:** 记 $a_k = \mu\Big[f_n^{-1}\Big(\big(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\big]\Big)\Big]$, $k \in \mathbb{Z}$. 因为 $\mu(X) < \infty$, 所以 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mu(X) = \mu(f_n^{-1}(\mathbb{R})) &= \mu\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f_n^{-1}\left(\left(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right]\right)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu\left[f_n^{-1}\left(\left(k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right]\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k < \infty.\end{aligned}$$

因为 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致可积, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对所有 $E \in \Gamma$, $\mu(E) < \delta$, 都有 $\displaystyle\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$. 由于 $\sum a_k < \infty$ 且 $a_k \geq 0$, 故存在 $N > 0$, 使得$\displaystyle\sum_{k\geq N} a_k + a_{-k} < \delta$.

由此可知, 存在 $M > 0$ 使得 $\mu(\{|f_n(x)| > M\}) < \delta$, 故

$$\begin{aligned}\int_X |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f_n(x)|>M\}} |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f_n(x)|\leq M\}} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon + \int_{\{|f_n(x)|\leq M\}} M\,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon + M\mu(X) < \infty.\end{aligned}$$

所以 $f_n \in L^1(X, \mu)$. □

**2. 证明:** 由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 一致可积, 知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对所有 $E \in \Gamma$, $\mu(E) < \delta$, 都有

$$\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

而由 Fatou 引理, 有

$$\int_E |f(x)|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

因为在 $\mu(X) < \infty$ 下, 几乎处处收敛可推出依测度收敛, 所以对于给定的 $\delta$ 和 $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{3\mu(X)+1}$, $\exists N > 0$, $\forall n > N$, 均满足 $\mu(\{|f_n(x) - f(x)| > \sigma\}) < \delta$, 设 $E_\sigma = \{|f_n(x) - f(x)| > \sigma\}$, 则

$$\begin{aligned}0 \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\mu &= \int_{E_\sigma} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus E_\sigma} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{E_\sigma} |f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu + \int_{E_\sigma} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus E_\sigma} \sigma\,\mathrm{d}\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sigma\mu(X) < \varepsilon,\end{aligned}$$

命题证毕. 另外, 我们也容易由结论得到 $f \in L^1(X, \mu)$. □

# 附录

**这部分内容是正文的拓展和延伸, 包含了笔者对部分题目的一些思考.**

**附录一** 第二题的结论对一般拓扑空间也成立, 但正文解答前两问的证法都依赖于度量空间的条件. 下面不借助度量空间, 仅用点集拓扑的语言给出其一般证明.

1. **证明:** $\forall x \in A'$, 对于 $x$ 的任一邻域 $U$, 均存在 $y \in U \cap A$ 使得 $y \neq x$. 由 $A \subset B$ 知 $y \in U \cap B$. 这样, $x$ 的任一邻域都有异于 $x$ 且位于 $B$ 中的点, 即 $x \in B'$. 所以 $A' \subset B'$. $\square$

2. **证明:** 先证明引理 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$. 由第 1 问结论知 $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$, 因此有 $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ 以及 $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, 从而 $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. 而从另一方面, 对 $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ 再应用第 1 问结论, 以及 $\bar{A} \cup \bar{B}$ 是闭集可知 $\overline{A \cup B} \subset \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} = \bar{A} \cup \bar{B}$, 引理证毕.

回到原题. 由第 1 问知 $A' \subset (A \cup B)'$ 及 $B' \subset (A \cup B)'$, 故 $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$. 另一方面, 对任意 $x \in (A \cup B)'$, 由导集定义知 $x$ 的任一邻域都与 $(A \cup B) \setminus \{x\}$ 之交非空, 因此 $x \in \overline{(A \cup B) \setminus \{x\}} = \overline{(A \setminus \{x\}) \cup (B \setminus \{x\})} = \overline{(A \setminus \{x\})} \cup \overline{(B \setminus \{x\})}$, 其中最后一步应用了上述引理. 而由 $x \in A' \Longleftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ 知 $x \in A'$ 或 $x \in B'$. 故 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$, 证毕. $\square$

需要注意, 导集在点集拓扑中的定义如下: $x \in A' \Longleftrightarrow$ 对于 $x$ 的任意邻域 $U$, $U \cap A$ 中都有异于 $x$ 的点. 下面证明, 在度量空间 $(X, d)$ 中, 此定义与序列收敛性给出的定义一致:

对于 $A \subset X$ 和 $x \in X$, 若 $A$ 中存在收敛于 $x$ 的互异点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 由互异性不妨假定 $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq x$. 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_n \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$. 从而, 对 $x$ 的任一邻域 $U$, 由于 $\exists \delta > 0$, $B_\delta(x) \subset U$, 故 $U \cap A$ 中都有异于 $x$ 的点. 另一方面, 若对 $x$ 的任一邻域 $U$, $U \cap A$ 中都有异于 $x$ 的点, 我们在 $B_1(x)$ 中取异于 $x$ 的点 $x_0$, 并递归构造点列. 假定 $x_n$ 已构造好, 记 $d_n = \frac{d(x, x_n)}{2}$, 则 $B_{d_n}(x) \cap A$ 中有异于 $x$ 的点, 任取一个记作 $x_{n+1}$, 构造得以继续. 由构造过程知 $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x, x_n) > 2d(x, x_{n+1}) > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 是收敛于 $x$ 的互异点列.

**附录二** 在定义上下极限时, 采用去心还是非去心邻域会对第三题第二小问的证明产生影响. 在解答的正文中, 我们证明了上下极限采用非去心邻域定义时的结论, 此处采用去心邻域的定义考虑该问题. 我们在这里用 $\operatorname{Lim}\inf$ 表示用去心邻域方式定义的函数上下极限, 即

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{y \to x} f(y) := \sup_{\varepsilon > 0} \inf\{f(y) | y \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}\},$$

并证明若 $F$ 是闭集, 则 $f(x) = \operatorname*{Lim\,inf}_{y \to x} \chi_F(y)$ 是下半连续函数.

**证明:** 同样先分析 $f(x)$ 的取值. 对于 $x \in X$, 若 $x$ 的任一去心邻域都有不属于 $F$ 的点, 则有

$$f(x) = \operatorname*{Lim\,inf}_{y \to x} \chi_F(y) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf\{\chi_F(y) \big| y \in B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}\} = \sup_{\varepsilon > 0} 0 = 0.$$

另一方面, 若 $x$ 有一个去心邻域包含于 $F$, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$1=\inf\{\chi_F(y)\big|y\in B_{\varepsilon_0}(x)\backslash\{x\}\}\le\sup_{\varepsilon>0}\inf\{\chi_F(y)\big|y\in B_{\varepsilon}(x)\backslash\{x\}\}=f(x)\le 1,$$

因此可知 $f(x)$ 是仅取 $0,1$ 二值的函数. 同时由导集的定义可知, $x\in(F^c)'\iff x$ 的任一去心邻域都有不属于 $F$ 的点, 故 $f(x)=0\iff x\in(F^c)'$.

下面证明, 在度量空间 $(X,d)$ 中, 任何集合 $A$ 的导集均为闭集. 对于任意 $x\notin A'$, 都存在 $\varepsilon>0$, 使得 $(B_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\cap A=\varnothing$. 因此对于任意 $y\in B_\varepsilon(x)\setminus\{x\}$, 任取 $\delta$ 使得 $0<\delta<d(x,y)$, 则有 $B_\delta(y)\subset B_\varepsilon(x)\backslash\{x\}$, 故 $B_\delta(y)\cap A=\varnothing$, 即 $y\notin A'$. 由此我们说明了, 对于任意 $x\in(A')^c$, 都能找到 $x$ 的邻域包含于 $(A')^c$. 因此 $(A')^c$ 是开集, 即 $A'$ 是闭集.

对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, 下面考虑集合 $T_\alpha=\{x|f(x)>\alpha\}$, 有

$$T_\alpha=\begin{cases}X, & \alpha<0,\\ ((F^c)')^c, & 0\le\alpha<1,\\ \varnothing, & \alpha\ge 1.\end{cases}$$

因为 $\varnothing$, $((F^c)')^c$, $X$ 均为开集, 所以 $f$ 是下半连续函数. $\square$

**附录三** 这里给出第四题第二小问的另一个证明. 此证明将极限运算归结为对函数列取上确界的过程, 难度不大. 若第三小问无法证出, 可以此拿到第二小问的分数.

**证明:** 首先易知 $f_n(x)$ 可测. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 得

$$\limsup_{n\to\infty}f_n(x)=\liminf_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\quad 即\ \inf_{k\ge1}\sup_{n\ge k}f_n(x)=\sup_{k\ge1}\inf_{n\ge k}f_n(x)=f(x).$$

由于对任意可测函数列 $\{g_n\}$, 总有 $\inf\limits_{n\ge1}g_n(x)=-\sup\limits_{n\ge1}(-g_n(x))$, 故只需证明 $\sup\limits_{n\ge1}g_n(x)$ 是可测函数. 亦即, 只需证明可测函数列的上确界也可测. 对于任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$\left\{x\middle|\sup_{n\ge1}f_n(x)>t\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>t\}$$

都可写为可数个可测集之并, 故为可测集. 而若函数 $h$ 满足对任意 $t\in\mathbb{R}$ 都有 $\{x|h(x)>t\}$ 是可测集, 则 $g$ 一定是可测函数. 这是因为对任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$\{x|h(x)<t\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\left\{x\middle|h(x)>t+\frac{1}{n}\right\}\right)^c$$

都是可测集, 因此开区间的原像是可测集. 而 $\mathbb{R}$ 中开集可表为开区间的可数并, 故开集的原像也可测. 由此知 $h_k(x):=\sup\limits_{n\ge k}f_n(x)$ 是可测函数, 进而 $f(x)=\inf\limits_{k\ge1}h_k(x)$ 也是可测函数. $\square$

**附录四** 下面将通过反例说明, 若连续函数列 $f_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 逐点收敛于函数 $f$, $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 则 $f^{-1}(G)$ 未必为 $G_\delta$ 集. 此处仅详细讨论 $d=1$ 的情况, 这对举反例而言已经足够.

我们的反例聚焦于黎曼函数 (英文又称 Thomae's function 或 popcorn function)

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ \text{其中 } p,q\in\mathbb{Z},q>0 \text{ 且 } (p,q)=1.\end{cases}$$

注意到 $G=(0,+\infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 且 $f^{-1}(G)=\mathbb{Q}$. 因此只需要证明下面的两个事实, 即可完成说明:

**事实一** 黎曼函数可以写为连续函数列的逐点极限.

**证明:** 首先, 由于黎曼函数以 1 为周期, 因此下面仅在定义域 $[0,1]$ 上构造, 并对函数周期延拓即可. 我们用 $\langle x,y\rangle$ 表示 $x,y$ 构成的有序对. 令 $p_i=\langle x_i,y_i\rangle\in\mathbb{R}^2$, $i=1,2,\ldots,n$, $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$. 如果 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 互不相同, 我们用 $l_P(x)$ 表示如下函数:

$$l_P(x)=y_k+\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k}(x-x_k),\quad \text{当}\, x\in[x_{j_k},x_{j_{k+1}}]\,\text{时},\quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $12\cdots n$ 的全排列, 且使得 $x_{j_1}<x_{j_2}<\cdots<x_{j_n}$. 换言之, $l_P(x)$ 就是将点集 $P$ 上的点从左到右用折线顺次连接所得到的函数. 易验证, 函数 $l_P(x)$ 是在 $[x_{j_1},x_{j_n}]$ 上有良好定义的连续函数. 下面递归地定义 $A_n$ 和点集 $P_n$: 令

$$A_1=\{0,1\},\quad A_{n+1}=\left\{r=\frac{k}{n+1}\,\middle|\, k\in\{0,1,\ldots,n+1\},\,\text{且}\, r\notin\bigcup_{j=1}^{n}A_j\right\},\quad n\in\mathbb{N}^+$$

以及

$$P_1=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\},\quad P_{n+1}=P_n\cup\left\{\left\langle x,\frac{1}{n+1}\right\rangle\,\middle|\, x\in A_{n+1}\right\},\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

取 $f_n(x)=l_{P_{n+1}}(x)$, $n\in\mathbb{N}$. 由 $f_n(0)=f_n(1)$ 可将 $f_n$ 周期延拓为定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数. 从直观来讲, $l_{P_n}(x)$ 就是把黎曼函数中, 定义域上所有分母不超过 $n$ 的有理数对应的点, 按从左到右的顺序依次连接所得的函数. 图 1 给出了 $l_{P_{50}}(x)$ 的图像.

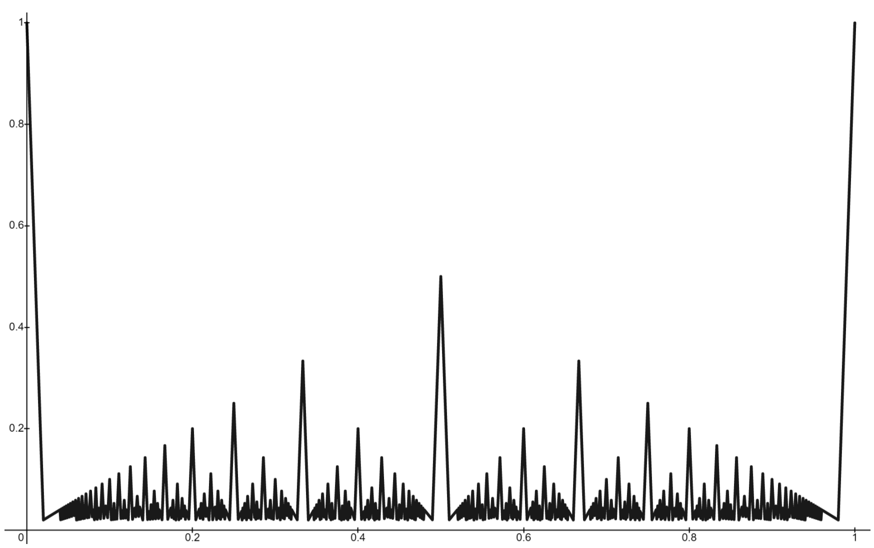


图 1　$l_{P_{50}}(x)$ 的图像

下证 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [0,1]$. $x \in \mathbb{Q}$ 时是显然的, 因为当 $n$ 大于 $x$ 的分母时总有 $f_n(x) = f(x)$. 而当 $x \notin \mathbb{Q}$ 时, 由于 $f$ 在 $x$ 连续, 故 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall z \in B_{3\delta}(x)$, $|f(z)| < \varepsilon$. 下面将函数 $f$ 在区间 $[x-2\delta, x-\delta]$, $[x+\delta, x+2\delta]$ 上的最大值点 (若不唯一可任取一个) 分别记作 $x_1, x_4$, 对应的最大值分别记为 $y_1, y_4$. 由题设和黎曼函数的性质显然可知 $x_i$ 是有理数, $y_i < \varepsilon$, $i = 1, 4$, 所以 $\exists N > 0$, $\langle x_i, y_i \rangle \in P_N$, $i = 1, 4$. 因此 $\forall n \geq N$, $f_n(x_i) = y_i$, $i = 1, 4$.

对于任意 $n \geq N$, 取 $x_2 = \max\{a \in A_{n+1} | a < x\}$, $x_3 = \min\{a \in A_{n+1} | a > x\}$, 可知 $x_2, x_3$ 总是良好定义的, 且 $x_1 \leq x_2 < x < x_3 \leq x_4$. 由于 $0 < f_n(x_i) = f(x_i) < \varepsilon$, $i = 2, 3$, 而 $f_n$ 在 $[x_2, x_3]$ 上是线性函数, 故 $0 < f_n(x) < \varepsilon$. 这样我们就得到, $\forall x \in [0,1]$, $\exists N > 0$, $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. 结论证毕. $\square$

**事实二** $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的 $G_\delta$ 集.

**证明:** 反证法. 若 $\mathbb{Q} = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$, 其中 $V_k$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 由 $\mathbb{Q} \subset V_k$ 易知 $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{V}_k$, 亦即 $V_k$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密. 将有理数进行一一列举, 令 $\mathbb{Q} = \{q_k | k \in \mathbb{N}\}$, 再令 $W_k = V_k \setminus \{q_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, 同样易知 $W_k$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密 (即 $\bar{W}_k = \mathbb{R}$) 且为开集, 同时 $\bigcap_{k=0}^{\infty} W_k = \varnothing$.

下面任取非空开区间 $(a_0, b_0)$ 使得 $[a_0, b_0] \subseteq W_0$, 并归纳地进行构造. 当区间 $(a_k, b_k)$ 已构造后, 令 $r_k = \frac{1}{4}(b_k - a_k)$, 显然有 $a_k < a_k + r_k < b_k - r_k < b_k$. 由于 $W_{k+1}$ 是稠密的开集, 因此可选取非空开区间 $(a_{k+1}, b_{k+1})$ 使得 $(a_{k+1}, b_{k+1}) \subset [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset W_{k+1} \cap (a_k + r_k, b_k - r_k)$, 构造从而得以继续.

令 $J_k = [a_k, b_k] \subset W_k$, $k \in \mathbb{N}$. 由构造知, 对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $J_{k+1} \subset J_k$, 故 $\{J_k | k \in \mathbb{N}\}$ 是递减的非空闭区间套. 令 $J = \bigcap_{k=0}^{\infty} J_k$, 则 $J \subset J_k \subset W_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. 从而 $J \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} W_k = \varnothing$. 然而闭区间套定理保证了 $J \neq \varnothing$, 矛盾. 因此, $\mathbb{Q}$ 不是 $\mathbb{R}$ 中的 $G_\delta$ 集. $\square$

综上所述, 我们通过反例说明了, 若连续函数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 收敛于 $f$, $G$ 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 则 $f^{-1}(G)$ 未必为 $G_\delta$ 集. 这个反例结合正文第四题的第三小问和注记, 证明了第四题第三小问的答案只可能是 $F_\sigma$ 集, 不可能含有其他三种集合中的任何一种.

如果需要在任意维空间里举出开集的原像非 $G_\delta$ 集的例子, 则可以通过诸如 $g(x,y) = f(x)f(y)$, $g_n(x,y) = f_n(x)f_n(y)$ 之类的方式构造函数, 并证明正实数在该映射下的原像不是 $G_\delta$ 集即可, 其中 $f$ 和 $f_n$ 是上文中在一维情形下构造的函数.