南京大学数学系试卷

2008/2009 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法（A卷）

班级＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿

考试时间 2009.6.26　任课教师 邓卫兵　考试成绩＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、填空题（18分）

1. 设 $f(0)=0, f(1)=0, f(2)=20$，则 $f[0,1]=$ <u>0</u>，$f[0,1,2]=$ <u>7</u>；$f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为 <u>$6x+7x(x-1)$</u>

2. 设 $h=\frac{b-a}{2m}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,2m$. 计算 $\int_a^b f(x)dx$ 的复合Simpson公式为 $\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(\ldots)\right]$，它是 <u>4</u> 阶收敛的，代数精度为 <u>3</u>.

3. 设 $x_i=i\ (i=0,1,\cdots,n)$，$l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange插值基函数，则 $\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(0)=$ <u>$(-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n = 0$</u>

4. 求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度为 <u>3</u>

5. 设 $f(x)=7x^7+5x^3+1$，则 $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$ <u>7</u>，$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$ <u>0</u>

6. 对n阶线性代数方程组 $Ax=b$，Jacobi迭代法的分量表示形式为 $x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)}+\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right)$，Gauss-Seidel迭代法的分量表示形式为

$$x_i^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum a_{ij}x_j^{(k+1)}+\sum a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right)$$

$$x^{n+1}=\sum_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

令 $x=0$.

二、（10分）设 $f(x)$ 为 x 的 k 次多项式，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为互不相同的实数，且 $k>m$. 试证明 $f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 为 x 的 $k-m$ 次多项式. 又当 $k=m$ 和 $k<m$ 时，$f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 值为多少？

P192 习题 17, 18　　a_n（最高次项系数）　0

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

三、（10分）设 $P_2(x)$ 是 $f(x)$ 的以 $0,h,2h$ 为插值基点的二次插值多项式. 试由 $P_2(x)$ 导出求积分 $I=\int_0^{3h} f(x)dx$ 的一个插值型求积公式 I_h，并证明

$$I-I_h=\frac{3}{8}h^4 f'''(0)+O(h^5).$$

$f(0)\quad f(h)\quad f(2h)$

$$I_h=\frac{3}{4}h\,f(0)+\frac{9}{4}h\,f(2h)\qquad I-I_h=\int_0^{3h} f(x)-P_2(x)$$

令 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+O(x^4)$ ①

$f(2h)=f(0)+f'(0)2h+\frac{f''(0)}{2}(2h)^2+\frac{f'''(0)}{6}(2h)^3+O(h^4)$ ②

$$I-I_h=\int_0^{3h} f(x)dx-I_h=\int_0^{3h}(①)dx-\frac{3}{4}hf(0)-\frac{9}{4}h(②)$$

$$=\left(3h-\frac{3}{4}h-\frac{9}{4}h\right)f(0)+\left(\frac{9h^2}{2}-\frac{9h^2}{2}\right)f'(0)+\left(\frac{(3h)^3}{6}-\frac{9h^3}{2}\right)f''(0)+\left(\frac{(3h)^4}{24}-3h^4\right)f'''(0)+O(\ldots$$

四、（12分）对区间 $[a,b]$ 作等距剖分，节点为 $x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$，$h=\frac{b-a}{n}$，即 $x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$. 试证明当 n 为偶数，$\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx=0$，其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 进一步，利用证明的结论说明当 n 为偶数时的Newton-Cotes型求积公式的代数精度为 $n+1$.

令 $x=a+th$

$x-x_i=h(t-i)$.

$$\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx=\int_0^n h^{n+2}\,t(t-1)\cdots(t-n)\,dt$$

$\left(z=t-\frac{n}{2}\right)$

$$=h^{n+2}\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \boxed{\left[z^2-\left(\frac{n}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right]\cdots(z^2-1)z}$$

奇函数

$$E_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

令 $f(x)=x^{n+1}$，则 $E_n(f)=\int_a^b \omega_{n+1}(x)dx=0$.