NJU 数学分析 B 期中考试

2018.05.12

一、计算题 ($8+8+10+12+12=50$ **分**)

1. **设** $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$, **求** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. **已知** $f(x,y)$ **为二次连续可微,**$F(t,x,y)=f(tx,ty)$, **求** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}$.

3. **计算** $I=\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}s$, **其中** C **为由曲线** $r=a,\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{4}$ **所围成区域的边界,**(r,θ) **为极坐标.**

4. **计算二重积分** $\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **其中** D **为** $y=x,y=0,x+y=1$ **所围成的区域.**

5. **求** $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, **其中** Ω **为** $x^2+y^2=4, x^2+(y-2)^2=4$ **所围成的区域在第一象限中的部分.**

二、(10 **分**) **讨论函数** $u(x,y)=\begin{cases}\arcsin(\dfrac{x^3}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

在 $(0,0)$ **处是否可微, 为什么?**

三、(10 **分**) **设** $0<a<b, \Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 1, ax\leq y\leq bx, x,y>0\}$, **是平面中的一区域, 讨论如下广义积分的敛散性:** $\displaystyle\iint_\Omega \frac{1}{x^py^q}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

四、(10 **分**) **设有界集合** $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. **若对于任意给定的** $\epsilon>0$, **存在有限个可求面积集覆盖** Ω, **并且这些集合的面积之和小于** ϵ, **证明** Ω **为零面积集.**

五、(10 **分**) **设** Ω **为** $\mathbb{R}^m$ **中的非空有界闭区域,**$\{f_n\}$ **为一列定义在** Ω **上的非负单调递减函数列, 且有** $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\leq|x_1-x_2|, \forall n\in\mathbb{N}, \forall x_1,x_2\in\Omega$. **证存在唯一定义在** Ω **上的非负连续函数** f, **使得** $\{f_n\}$ **在** Ω **上一致收敛于** f.

六、($6+4=10$ **分**) **设** D **是** $\mathbb{R}^2$ **中的有界区域.**

1. **设** $u=u(x,y)$ **在** D **上可积,**$f(u)$ **是** u **的连续函数,**$f(u(x,y))$ **在** D **上可积.**
2. **如果** $f(u)$ **仅仅是关于** u **的可积函数,**$f(u(x,y))$ **是否一定在** D **上可积?**