高等代数（一）期中试卷参考答案　2016-11-26

班级：　　　　　　　　　　　姓名：　　　　　　　　　　　学号：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 P 是数域，$g(x), h(x), d(x) \in P[x]$. 如果 $\partial(d(x)) \geq 1$ 并且 $d(x)|g(x)h(x)$, 则 $d(x)|g(x)$ 或 $d(x)|h(x)$.

   解. 错误. 例如，$(x^2+1)^2|(x^2+1)(x^2+1)$, 但是 $(x^2+1)^2 \nmid (x^2+1)$.

2. 设 $f(x), g(x)$ 都是多项式. 如果 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根, 则 $f(x) \mid g(x)$.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x^2, g(x) = x$.

3. 设 P 是数域，$f(x) \in P[x]$. 如果 $(f'(x), f''(x)) = 1$, 则 $f(x)$ 的重因式都是 2 重因式.

   解. 正确. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k \geqslant 2)$, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 由于 $(f'(x), f''(x)) = 1$，所以 $f'(x)$ 没有重因式，从而，$k-1 \leqslant 1$, 即 $k \leqslant 2$. 于是 $k = 2$.

4. 每个次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式一定有一个实根.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x^2 + 1$.

5. 多项式 $f(x) = x^4 + 4x + 1$ 在有理数域上不可约.

   解. 正确. 令 $x = y + 1$, 则 $g(y) = f(y+1) = y^4 + C_4^1 y^3 + C_4^2 y^2 + (C_4^3 + 4)y + 6$ 在有理数域上不可约（取 $p = 2$），所以 $f(x) = x^4 + 4x + 1$ 在有理数域上不可约.

   或者，易见，$f(\pm 1) \neq 0$, 若 $f(x)$ 可约，则 $f(x)$ 可分解为两个二次整系数多项式之积，由此导出矛盾!

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）.

1. 设 n 是正整数，多项式 $x^{2n+1}-1$ 在实数域上的标准分解式是 $\underline{(x+1)\prod_{j=1}^{n}(x^2-2\cos\frac{2j\pi}{2n+1}x+1)}$.

2. $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ 的全部有理根为 $\underline{\quad 1,1,-\frac{1}{2}\quad}$.

3. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 17 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{1j} 的代数余子式为 A_{1j} $(j=1,2,3,4)$, 则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\underline{\quad 2\quad}$.

4. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & x^2 \\ 1 & 1 & x^2-2 & x^2 \\ 2 & x^2+1 & 1 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的根为 $\underline{\quad \pm 1,\pm 2\quad}$.

5. 设 n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D$, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，$i,j=1,2,\ldots,n$, $(n\geq 2)$, 则 $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}=\underline{\quad D^{n-1}\quad}$.

三、（10 分）设 $f(x)=x^4-x^3-x^2+2x-1$, $g(x)=x^3-2x+1$. 求 $(f(x),g(x))$ 以及多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解. 因为 $f(x)=(x-1)g(x)+x^2-x$,

$g(x)=(x+1)(x^2-x)-x+1$,

$x^2-x=x(-x+1)$.

所以 $(f(x),g(x))=x-1$,

当 $u(x)=x+1, v(x)=-x^2$ 时，

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

四、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 & -(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & -n \end{vmatrix}$.

解. 设该行列式为 D_n,

则 $D_n=(n!)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$=(n!)\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(n!)n(-1)^{n-1}$.

五、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 2^2+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 3^2+x_3^2 & \cdots & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & n^2+x_n^2 \end{vmatrix}$

解： 设该行列式为 D_n,

则 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & 2^2+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 3^2+x_3^2 & \cdots & x_3x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & n^2+x_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{i^2} & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n^2 \end{vmatrix} = (n!)^2(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{i^2}).$$

六、（10 分）计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

解： 设该行列式为 D_n. 令 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_n^3 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n & x^n \end{vmatrix}$,

则 $f(x) = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)$, 从而 $f(x)$ 中 x 的系数为

$(-1)^{n-1}\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{i=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$.

另一方面，将 $f(x)$ 按最后一列展开得， $f(x)$ 中 x 的系数为

$(-1)^{2+n+1}D_n = (-1)^{n-1}D_n$.

故 $D_n = \prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j)\sum\limits_{i=1}^{n} a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$.

七、（10 分）设 P 是数域, $p(x) \in P[x]$, 并且 $\partial(p(x)) \geqslant 1$. 证明：

$$
\begin{aligned}
& p(x) \text{ 是 } P \text{ 上不可约多项式} \\
\Longleftrightarrow\ & \text{对于任意的 } f(x) \in P[x], \text{ 必有 } p(x) | f(x) \text{ 或 } (p(x), f(x)) = 1.
\end{aligned}
$$

证： 必要性. 假设 $p(x)$ 是 P 上不可约多项式.

任取 $f(x) \in P[x]$, 令 $d(x) = (f(x), p(x))$, 则 $d(x)|p(x)$.

因为 $p(x)$ 不可约, 所以 $d(x) = 1$ 或 $d(x) = cp(x)$, 其中 c 为非零常数. 由此可见，$p(x)|f(x)$ 或 $(p(x), f(x)) = 1$.

充分性.

如果 $p(x)$ 不是 P 上不可约多项式，

则 $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, 其中 $p_i(x) \in P[x], 1 \leqslant \partial(p_i(x)) < \partial(p(x))$, $i = 1, 2$.

易见， $p(x) \nmid p_1(x)$, 且 $(p(x), p_1(x)) \neq 1$, 与假设矛盾!

故充分性成立.

八、（10 分）设 n 为正整数，$f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ 都是数域 P 上的多项式, 并且

$$x^n - 1 \mid f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n).$$

证明：$x-1 \mid f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

证： 方法一.

设 $f_i(x) = q_i(x)(x-1) + r_i$, 其中 $q_i(x) \in P[x], r_i \in P,$

则 $f_i(x^n) = q_i(x^n)(x^n - 1) + r_i,\ i = 0, 1, \dots, n-1.$

于是 $f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i f_i(x^n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i(q_i(x^n)(x^n-1) + r_i)$

$= \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i q_i(x^n)(x^n-1) + \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_i x^i$

因为 $x^n - 1 \mid f_0(x^n) + xf_1(x^n) + \cdots + x^{n-1}f_{n-1}(x^n)$, 所以 $x^n - 1 \mid \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i.$

由此可见， $r_i = 0$, 从而 $x-1 \mid f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

方法二.

设 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 是 $x^n - 1$ 的 n 个不同的根，由条件知，

$$\begin{cases} f_0(1) + f_1(1)\epsilon_1 + f_2(1)\epsilon_1^2 + \cdots f_{n-1}(1)\epsilon_1^{n-1} = 0 \\ f_0(1) + f_1(1)\epsilon_2 + f_2(1)\epsilon_2^2 + \cdots f_{n-1}(1)\epsilon_2^{n-1} = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_0(1) + f_1(1)\epsilon_n + f_2(1)\epsilon_n^2 + \cdots f_{n-1}(1)\epsilon_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

由于上述方程组的系数行列式不等于零，所以它只有零解.

于是 $f_i(1) = 0$, 从而 $x-1 \mid f_i(x),\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$

九、（10 分）设 $f(x)$ 为次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式，k 为实数，并且 $f(x)$ 的每个复根的实部都小于 $k-\frac{1}{2}$. 证明：$|f(k-1)|<|f(k)|$.

证：因为 $f(x)$ 为次数 $\geqslant 1$ 的实系数多项式，

所以 $f(x)$ 可以表示为首相系数与一次因式 $g(x)=x-r$ 或二次不可约因式 $h(x)=(x-(a+bi))(x-(a-bi))=(x-a)^2+b^2$ 之积，其中 $r,a,b\in\mathbb{R}, r<k-\frac{1}{2}, a<k-\frac{1}{2}$.

因此，只要证明：$|g(k-1)|<|g(k)|, |h(k-1)|<|h(k)|$.

事实上，$|g(k-1)|=|k-1-r|=\begin{cases} k-r-1, & 当\ k-r\geqslant 1, \\ 1-(k-r), & 当\ k-r<1. \end{cases}$ $g(k)=k-r$.

所以，当 $k-1\geqslant 1$ 时，$|g(k-1)|=k-r-1<k-r=|g(k)|$,

当 $k-r<1$ 时，$|g(k-1)|=1-(k-r)<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<k-r=|g(k)|$.

总之，$|g(k-1)|<|g(k)|$.

另一方面，$|h(k)|-|h(k-1)|$

$$=(k-a)^2+b^2-(k-1-a)^2-b^2=2(k-a)-1=2(k-\tfrac{1}{2})-2a>2a-2a=0,$$

所以 $|h(k-1)|<|h(k)|$.

故 $|f(k-1)|<|f(k)|$.