南京大学数学系试卷

2012/2013 学年第二学期期末　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法

班级________ 学号__________ 姓名________

考试时间 2013.7.2 任课教师______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. 填空题 (12分)

1. k 步线性多步法 $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})$, 与初值问题 $y' = f(t,y), y(0) = \eta_0$ 相容的充要条件是______________.

2. 设 $f(0)=0,\ f(1)=16,\ f(2)=46$, 则 $f[0,1] =$ ____, $f[0,1,2] =$ ____; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为__________________.

3. 求积公式 $\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4}) - f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度为____.

4. 写出取步长为h, 用经典四级四阶显式Runge-Kutta 法解 $y' = -y, y(0) = 1$ 的计算公式:

二. (8分) 求梯形方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

的绝对稳定区间。

三. (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_1^3 x\sqrt{4x - x^2 - 3}\,\mathrm{d}x$$

化为能应用n 点Gauss-Chebyshev 求积公式。当n 为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

四. (10分) 设函数$f(x)$ 在区间$[-h, h]$上充分可导. 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[3f(0) - f(-h)],$$

以及该积分公式的余项和收敛阶.

五. (10分) 试基于数值积分方法构造用于求解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的二步二阶Adam’s 显式格式。

六. (10分) 求差分方程

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = n + 1$$

的通解。

七. (10分) 判断解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的线性多步法

$$y_n - y_{n-1} = \frac{h}{12}(5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2})$$

是否收敛？为什么？

八. (10分) 求函数 $f(x) = e^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

九. (10分) 求函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上关于权函数 $W(x)=1$的最佳平方逼近二次多项式.

十. (10分) 证明解$y'=f(t,y)$的下列差分格式

$$y_{n+1}=\frac{1}{2}\left(y_n+y_{n-1}\right)+\frac{h}{4}\left(4f_{n+1}-f_n+3f_{n-1}\right)$$

是二阶的, 并求出截断误差的主项。