

七. (10分) 已知方程组 $Ax = b$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

有解 $x = [2 \ 0]^T$.

- (1) 求 $\text{cond}_\infty(A)$;
- (2) 求右端有微小扰动的方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$$

的解 $x + \Delta x$;

- (3) 计算 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 结果说明了什么问题?

① $A^{-1} = \begin{bmatrix} -10^4 & 1.0001 \times 10^4 \\ 10^4 & -10^4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \\ &= 2.0001 \times (2.0001 \times 10^4) \\ &\approx 4 \times 10^4 \end{aligned}$$

② $x + \Delta x = [1, 1]^T$

③ 因 $b = [2, 2]^T$, $\Delta b = [0.0001, 0]^T$

$$\Delta x = x + \Delta x - x = [-1, 1]^T$$

从而 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0.005\%$

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 50\%$$

由此看出, 虽然方程组右端的扰动和扰动量仅为 0.005%, 然而小扰动引起解的相对误差达到 50%. 这是由于系数矩阵的谱范数较大, 方程组是病态的引起.