南京大学数学系期末试卷

2017/2018 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 高等代数

院系 数学　班级________　学号____________　姓名________

考试时间 2018.7.5　任课教师________　考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（判断下列叙述是否正确；并给出理由。每小题4 分，共20分）.

1. . 正交矩阵看成复数域上的矩阵，其特征值一定是 1 或者 -1.

   错. 例如$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个正交矩阵, 但是它的特征值是$\pm i$.

2. A 是 $n\times n$ 复数矩阵, 那么存在另一个复数矩阵 B 使得$B^2 = A$.

   错. 例如如果$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$就找不到这样的$B$.

3. 如果A 是 3×3 行列式为1的正交矩阵, 那么一定存在正交矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

   对. 行列式为1的正交矩阵一定有特征值1. 所以A一定正交相似于某个

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   其中A是一个 2×2 行列式为1的正交矩阵. 由于 2×2 行列式为1的正交矩阵都形如

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}^2$$

   所以一定存在正交矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

4. 如果两个 $n\times n$ 的实数矩阵 A, B 既相似又合同, 那么它们一定是正交相似的.

   错. 例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   就是既相似又合同, 但它们不是正交相似的.

5. 设f 是 n-维欧氏空间 V 上的线性函数. 那么一定存在一个向量$\beta\in V$, 使得对任意的 $\alpha\in V$ 都有

$$f(\alpha) = (\alpha,\ \beta).$$

   对. 取V的一个标准正交基e_1, ..., e_n. 令

$$\beta = f(e_1)e_1 + \cdots + f(e_n)e_n$$

   即可.

二. 填空题（本题共 7 小题， 8 个空格, 每空格 5 分，共 40 分）.

1. 实二元二次型x_1x_2 的符号差= 0________.

2. 已知3×3的行列式为1 的正交矩阵的特征多项式在复数域内有一个根为-1, 那么它的另外两个根是1, -1________.

3. 已知3×3 可对角化的实数矩阵A 的最小多项式等于特征多项式, 那么与A 可交换的矩阵B (可交换的意思是$AB = BA$)形成的实线性空间的维数为 3________.

4. 令 $\alpha = (2,1,3,2)$, $\beta = (1,2,-2,1)$ 为欧式空间 $\mathbb{R}^4$ 中两个向量, 则$|\alpha| = 3\sqrt{2}$____, 这两个向量之间的夹角 $<\alpha,\beta> = \pi/2$________.

5. 已知

$$\begin{pmatrix} 1 & 5t & -1 \\ 5t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   是一个正定矩阵, 那么t 的取值范围是$-\frac{4}{25} < t < 0$________.

6. 线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

   的最小二乘近似解是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/11 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

7. 已知实二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   则$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$在$S^3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1\}$ 上的取值范围是: $-3\le f\le 1$________.

三. （15分）设$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 求正交阵$C$使得$C'AC$是对角矩阵.

解:

首先解出A的特征多项式是$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$.

然后求出特征值2对应的长度为1的特征向量为$\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)'$.

特征值-1对应的特征向量和$(1,1,1)'$正交, 所以解方程

$$x+y+z=0$$

可得两个标准正交的解

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)',\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)'.$$

所以要求的正交矩阵就是以这三个特征向量$\alpha,\ \beta,\ \gamma$为列向量的矩阵

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&0\end{pmatrix},\ C'AC=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}.$$

四. （15分）设V是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$. $\mathscr{A}$是V上的线性变换: 将任何一个向量都正交投射到平面$W=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3|x+2y+3z=0\}$上(正交投射是指从向量$\alpha$ 的末端向这个平面做垂线, 从原点指向垂足的向量就是α的像). 求$\mathscr{A}$的特征值和和对应的特征向量.

解: 特征值是1, 1, 0

(1) 题目中的平面W是一个二维不变子空间. 而且$\mathscr{A}$限制在W上的时候是一个恒同变换, 所以$\mathscr{A}$限制在W上对应特征值1, 而且这个特征值是2重的. 特征向量可以取这个平面中任意两个线性无关的向量. 所以可以取方程$x+2y+3z=0$的基础解系:

$$(1,\ 1,\ -1)',\ (1,\ 4,\ -3)'.$$

(2) 这个平面的法向量$(1,\ 2,\ 3)'$ 对应特征值0.

五. （10分）已知 A 是一个正交矩阵，假设它的特征多项式在复数域内的根都是实数, 证明：A^2 是单位矩阵.

证明: 设 A 是 n 级的, 它自然可以作用在欧式空间 $V=\mathbb{R}^n$ 上.
1.由书上习题知道特征值只能是 ±1.
2.根据书上证明实对称阵一定可以合同相似成对角阵完全一致的证明方法可以证明存在正交阵 T 使得

$$T^{-1}AT$$

是对角的. 所以由1知道该对角阵对角线元素都只能是 ±1. 故有

$$(T^{-1}AT)^2=E.$$

3.

$$A^2=TET^{-1}=E.$$

六. (10分) (1) 求一个三阶实对称方阵 A, 其特征值为 $\lambda_1=7$, $\lambda_2=\lambda_3=-7$, 且 $\alpha_1=(1,2,3)^T$是A的属于特征值 λ_1的特征向量.
(2) 满足(1)中条件的矩阵A是否唯一，试说明理由.
解: 令 $\varepsilon_1=\frac{1}{|\alpha_1|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{14}}\alpha_1$, 以及 $\varepsilon_2,\varepsilon_3$是特征子空间 $V_{\lambda=-7}$的一组标准正交基，再令$Q=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, 则 P是正交阵且

$$A=Q\cdot\mathrm{diag}(7,-7,-7)\cdot Q^T=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot\mathrm{diag}(7,-7,-7)\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \varepsilon_3^T\end{pmatrix}=7\varepsilon_1\varepsilon_1^T-7\varepsilon_2\varepsilon_2^T-7\varepsilon_3\varepsilon_3^T. \quad (1)$$

另一方面，由 Q正交得 $QQ^T=I$, 即

$$I_3=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \varepsilon_3^T\end{pmatrix}=\varepsilon_1\varepsilon_1^T+\varepsilon_2\varepsilon_2^T+\varepsilon_3\varepsilon_3^T. \quad (2)$$

将 (2)代入 (1)得

$$A=7\varepsilon_1\varepsilon_1^T-7(I_3-\varepsilon_1\varepsilon_1^T)=14\varepsilon_1\varepsilon_1^T-7I_3=\alpha_1\alpha_1^T-7I_3=\begin{pmatrix}-6&2&3\\2&-3&6\\3&6&2\end{pmatrix}.$$

由上面的证明可以看出 A是由 α_1唯一决定.

七. (10分) 设 $(-,-)$是 n维欧氏空间 V的内积，$\sigma\in L(V)$, σ^* 是 σ 的伴随变换，即 $\sigma^*\in L(V)$ 且满足：对 $\forall\alpha,\beta\in V$,

$$(\sigma(\alpha),\beta)=(\alpha,\sigma^*(\beta)0.$$

如果 $\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma$, 证明：
(1) $\forall\alpha\in V$, $|\sigma(\alpha)|=|\sigma^*(\alpha)|$;
(2) $\mathrm{Ker}(\sigma)=\mathrm{Ker}(\sigma^*)$;
(3) σ 和 σ^*具有相同的特征值和特征向量，即设 $\lambda\in\mathbb{R},\alpha\in V$ 且 $\alpha\neq0$, 则

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha\Leftrightarrow\sigma^*(\alpha)=\lambda\alpha.$$

证明： (1) $\forall\ \alpha\in V$, 我们有

$$|\sigma(\alpha)|^2=(\sigma(\alpha),\sigma(\alpha))=(\alpha,\sigma^*\sigma(\alpha))=(\alpha,\sigma\sigma^*(\alpha))=(\sigma^*(\alpha),\sigma^*(\alpha))=|\sigma^*(\alpha)|^2.$$

因此$|\sigma(\alpha)|=|\sigma^*(\alpha)|$.
(2) 由(1)直接得

$$\alpha\in\mathrm{Ker}(\sigma)\Leftrightarrow\sigma(\alpha)=0\Leftrightarrow|\sigma(\alpha)|=0\Leftrightarrow|\sigma^*(\alpha)|=0\Leftrightarrow\sigma^*(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha\in\mathrm{Ker}(\sigma^*).$$

因此$\mathrm{Ker}(\sigma)=\mathrm{Ker}(\sigma^*)$.
(3) 令 $\tau=\sigma-\lambda\cdot I_V$, 则 $\tau^*=\sigma^*-\lambda\cdot I_V$. 事实上

$$(\tau(\alpha),\beta)=(\sigma(\alpha),\beta)-\lambda(\alpha,\beta)=(\alpha,\sigma^*(\beta))-(\alpha,\lambda\beta)=(\alpha,(\sigma^*-\lambda\cdot I_V)(\beta)).$$

由$\tau^*\tau=\tau\tau^*$及(2)得 $\mathrm{Ker}(\tau)=\mathrm{Ker}(\tau^*)$, 即

$$\mathrm{Ker}(\sigma-\lambda\cdot I_V)=\mathrm{Ker}(\sigma^*-\lambda\cdot I_V).$$

因此

$$\sigma(\alpha)=\lambda\alpha\Leftrightarrow\alpha\in\mathrm{Ker}(\sigma-\lambda\cdot I_V)=\mathrm{Ker}(\sigma^*-\lambda\cdot I_V)\Leftrightarrow\sigma^*(\alpha)=\lambda\alpha.$$