南京大学数学系期末试卷 (A)

2017/2018 学年第一学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级____________ 学号______________________ 姓名____________

考试时间 2018.1.16 任课教师______________ 考试成绩________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打“+”；若错误，请在括号内打“−”.

1. 已知任一 n 维向量都可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.(   )

2. 设齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 r，未知量的个数为 n，则该方程组的任意 $n-r$ 个解向量都是它的一个基础解系. (   )

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 n 维列向量，A 是 n 级可逆矩阵，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关 当且仅当 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r$ 线性相关. (   )

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都是非齐次线性方程组 $AX=\beta$ 的解，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的任一线性组合还是该方程组的解. (   )

5. 设 A 为 $s\times n$ 矩阵, 则 A 的秩小于等于 r $(r\geqslant 1)$ 当且仅当 A 中所有 $r+1$ 级子式都是零. (   )

6. 设 A 为 n 级方阵 $(n\geqslant 2)$, 则 $|A|\neq 0$ 当且仅当 A 的行向量组线性无关. (   )

7. 两个 $s\times n$ 矩阵等价(或相抵)当且仅当它们的秩相同. (   )

8. 设 A 为 n 级方阵，则 A 是对角矩阵当且仅当 A 与所有 n 级方阵可交换. (   )

9. 方阵 A 可逆当且仅当 A 可表为有限个初等矩阵的乘积. (   )

10. 设 A,B 都是 n 级方阵，E 是 n 级单位矩阵. 如果 $(AB)^2=E$, 则 $(BA)^2=E$. (   )

二. 填空题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）.

1. 设正整数 $n \geqslant 2$， 则 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n =$ ____________________________.

2. 设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 不可逆，则 $a =$ ________________.

3. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____________________.

4. 设 $\alpha_1 = (2,1,0), \alpha_2 = (3,2,5), \alpha_3 = (5,4,t)$, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关的充要条件是 $t =$ ________________.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} 1-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & 1-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & 1-a_n^2 \end{pmatrix}$, 则 $|A| =$ ________________.

6. 设 A 为 3 级方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵，并且 $|A| = 2$, 则 $|A^* - (\frac{1}{4}A)^{-1}| =$ ________________.

7. 设 3 级方阵 A 的秩为 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & k \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 并且 $AB = 0$, 则 $k =$ ________________.

8. 设 A 为 n 级非零方阵，E 为 n 级单位矩阵，并且 $A^2 = A$, 则 $|A - E| =$ ________.

9. 矩阵方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的解为 ________________.

10. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____________________________.

三. （15分）设向量组 $\alpha_1=(-1,2,0,4)$, $\alpha_2=(5,0,3,1)$, $\alpha_3=(3,-1,4,-2)$, $\alpha_4=(-2,4,-5,9)$, $\alpha_5=(1,3,-1,7)$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；

(2) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

(3) 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

四.（15分）讨论 λ 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - (5-\lambda)x_3 = \lambda+1 \end{cases}$$

(1) 无解并说明理由;

(2) 有唯一解并求其解;

(3) 有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解.

五.（10分）设 A 是 n 级不可逆方阵，$n \geqslant 2$, A^* 是 A 的伴随矩阵. 如果 $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，证明：

$$r(A) = n-1 \iff r(A^*) = 1.$$

六. （10分）设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是整数矩阵，即每个 a_{ij} 都是整数. 如果对任意的一组整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 方程组 $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 都有整数解，证明: $|A| = 1$, 或者 $|A| = -1$.

七. （10分）设 $\alpha=(1,2,3),\ \beta=(0,1,2)\in\mathbb{R}^3$. 求集合

$$\{\gamma\in\mathbb{R}^3 \mid \exists\ A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \text{使得}\ |A|=0,\ \alpha A=\beta,\ \beta A=\gamma,\ \gamma A=\alpha\}.$$