$Sp \lhd$ $P \lhd G$ G/P $P \lhd G \oplus$

六、(10分) 证明 pq 阶群必可解. 这儿 p, q 为素数且 $p > q$.

设 G 为有限 pq 阶群

则 G 有 Sylow-p 子群和 Sylow-q 子群

由 Sylow 定理 ...

$q<p$ 故 $n_p=1$.

故 G 有正规 Sylow-p 子群 H

取 $H \trianglelefteq G$

$|G/H|=q$ 素数阶群必为 Abel 群

$|H|=p$ 也是 Abel 群

故 G 有可解列

即 G 可解

七、(每小题 5 分，共 15 分) 设 G 为有限 Abel 群，对 $g \in G$ 我们以 $o(g)$ 表示 g 的阶。

(1) 设 $o(a)=p^\alpha m$, $o(x)=p^\beta n$, 这儿 $a, x \in G$, p 为素数，$p \nmid mn$ 且 $0 \leqslant \alpha < \beta$. 试证对 $y=a^{p^\alpha}x^n$ 有 $o(y)=p^\beta m > o(a)$.

设 $o(y)=k$ 则 $y^k=(a^{p^\alpha}x^n)^k = a^{p^\alpha k}x^{nk}=e$

$a^{p^\alpha k}=x^{-nk}$, $e=a^{p^\alpha km}=x^{-nkm}$

故 $p^\beta n \mid nkm \Rightarrow p^\beta \mid km$ ∵ $p\nmid m$ ∴ $p^\beta \mid k$.

$e=x^{-nkp^\beta}=a^{p^\alpha kp^\beta}$, $p^\alpha m \mid p^\alpha kp^\beta$ 即 $m \mid kp^\beta$

又 $m\nmid p$ ∴ $m \mid k$. 又 $(p,m)=1$ 故 $p^\beta m \mid k$.

$y^{p^\beta m}=(a^{p^\alpha}x^n)^{p^\beta m}=a^{p^{\alpha+\beta}m}\cdot x^{p^\beta mn}=e$

故 $k \mid p^\beta m$

∴ $k=p^\beta m$

∴ $o(y)=p^\beta m>o(a)$

(2) 设 $a \in G$ 且 $o(a)=\max_{g\in G} o(g)$. 则对任何 $x \in G$ 有 $o(x) \mid o(a)$. [提示：如果 $o(x) \nmid o(a)$ 则有素数 p 及 $0 \leqslant \alpha < \beta$ 使得 $o(a)=p^\alpha m$ 且 $o(x)=p^\beta n$, 其中 m 与 n 都不被 p 整除.]

设 $o(a)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ ($p_1\cdots p_n$ 为 G 的所有素因子，$\alpha_i \geq 0$)

若 $o(x)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$

若对 i $\beta_i\le\alpha_i$ 则 $o(x) \mid o(a)$

若 $o(x)\nmid o(a)$ 则 $\exists i$ s.t. $\beta_i>\alpha_i$

设 $o(a)=p_i^{\alpha_i}m$, $o(x)=p_i^{\beta_i}m$ ($\beta_i>\alpha_i\ge 0$)

由 (1) 可得 $y=a^{p^\alpha}x^n$ 有 $o(y)>o(a)$ 与 $o(a)=\max_{g\in G}o(g)$ 矛盾 故 $o(x) \mid o(a)$

利用(1)即可 $y=a^{p^\alpha}x^n \in G$ 但 $o(y)=p^\beta m>o(a)$ 矛盾

(3) 假如对任何正整数 m, 方程 $x^m=e$ 在 G 中解数不超过 m. 证明 G 必为循环群. [提示：利用 (2)]

设 $o(a)=\max_{g\in G}o(g)$

令 $o(a)=m$

对 $\forall x\in G$ $o(x) \mid o(a)$

故满足 $x^m=e$ 即 $\forall g\in G$ g 为 $x^m=e$ 的解

又 $x^m=e$ 在 G 中解数不超过 m