南京大学数学系试卷

2013/2014 学年第二学期期末　考试形式闭卷　课程名称 数值计算方法(A 卷)

班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2014.6.24 任课教师______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. 填空题 (12分=4 × 3)

1. 初值问题 $y' = f(t,y), y(0) = \eta_0$的显式单步法$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h); y_0 = \eta_0$ 的相容性条件为____________.

2. 设 $x_i = i(i = 0, 1, \cdots, n)$, $l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(0) =$ ________.

3. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4} f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4} f(1)$ 的代数精度为______.

4. 导出二级二阶显式Runge-Kutta法

$$y_{n+1} = y_n + h[b_1 f(x_n, y_n) + b_2 f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} f(x_n, y_n))]$$

中的系数满足的关系式：

二. (8分) 求变形的Euler方法（中点方法）

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$$

的绝对稳定区间。

三. (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}} \mathrm{d}x$$

化为能应用 n 点Gauss-Chebyshev 求积公式。当 n 为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

四. (10分) 试确定常数A, B, C 及正数β, 使求积公式

$$\int_{-2}^{2} f(x) \mathrm{d}x \approx Af(-\beta) + Bf(0) + Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式？

五. (10分) 试基于数值积分方法构造用于求解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的二步二阶Adam’s 显式格式。

六. (10分) 求差分方程

$$y(n+2) - y(n+1) + y(n) = 3^n$$

的通解。

七. (10分) 判断解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的线性多步法

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}\left(3f_{n+1} - f_n + 4f_{n-1}\right)$$

是否收敛？为什么？

八. (10分) 求函数 $f(x) = e^x$ 在区间 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

九. (10分) 求函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[0,1]$ 上关于权函数 $W(x)=1$的最佳平方逼近一次多项式.

十. (10分) 证明：对任意的t，下列Runge-Kutta 方法是二阶的。

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_2+k_3) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+th,y_n+thk_1) \\ k_3=f(x_n+(1-t)h,y_n+(1-t)hk_1) \end{cases}$$