

南京大学数学系试卷 A 卷

2008/2009 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 近世代数

院系 _____ 年级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 得分 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	合计
得分										

有限整环都是域。域必为整环。P102

一、填空题 (每格 2 分, 共 10 分)

P102. 2.4.12 设 R 为交换幺环, $I \neq R$ 为 R 的理想, 则 I 为 R 的极大理想当且仅当 R/I 为 域。
 I 为 R 的素理想当且仅当 R/I 为 整环。

P178. 2.4.6 6 阶循环群与 8 阶循环群直积的幂指数 $\exp(C_6 \times C_8) = \underline{24}$ 。[有限 Abel 群 G 的幂指数是满足 $\forall x \in G (x^n = e)$ 的最小正整数 n]

P81. 2.3.11 不同构的 72 阶 Abel 群共有 6 个。

P104. 3.4.6 交换幺环 R 的诣零根 (所有素理想的交) 由 R 中 幂零 元构成。

二、判断题 (在右端括号内填 \checkmark 或 \times , 每小题 2 分, 共 20 分)

P101. 3.4.1 P103. 3.6.3 1. 设 R 为整环, 则 R 的极大理想都是素理想, R 的不可约元都是素元。

P103. 3.6.2 2. 环 R 的所有理想依理想的加、乘法构成环。

3. 任何域都是主理想整环, 域的有限次扩张必是代数扩张。

P123. 1.10 4. 非零整数 d 不是完全平方时 $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 按数的加、乘法构成域, 其中 \mathbb{Q} 表示有理数域。

h=2 P112. 6.1.2 5. 设 F 是特征为素数 p 的域, 则对任何 $a, b \in F$ 总有 $(a-b)^p = a^p - b^p$ 。

2a=0 P112. 6.1.2 6. 设 F 为 p^n 元域 (其中 p 为素数), 则对 $d=1, \dots, n$, 域 F 都有 p^d 元子域。

a^2=1 P112. 6.1.7 7. 设 F 是恰有 q 个元素的有限域, 则对任何 $a \in F$ 都有 $a^q = a$ 。

P105. (4) 8. 设环 R 有乘法单位元 1, 又设 $a, b \in R$ 且 $1-ab$ 有 (乘法) 逆元, 则 $1-ba$ 也有乘法逆元。

P117. 7.7.2 Hilbert 基定理断言 R 为主理想整环时 $R[x]$ 也是这样的环。

P117. 7.7.2 9. 设 E 为 q 元域, $f(x) \in E[x]$ 为 n 次不可约多项式, 则商环 $F = E[x]/(f(x))$ 为 q^n 元域。

[$E(\alpha) : E$] = n
 $E(x)/(f(x)) = \{ \overline{v(x)} : v(x) \in E[x] \text{ 且 } \deg v(x) < n \}$

$= \{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \text{ mod } (f(x)) : a_i \in E \}$

$E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为 p 元域。

$|E(x)/(f(x))| = |E|^n = q^n$

$E(\alpha) = \{ a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-1} : a_i \in E \}$