# 南京大学数学系试卷

<u>2014/2015</u> 学年第二学期　考试形式<u>闭卷</u>　课程名称<u>数值计算方法（B卷）</u>

班级____________ 学号________________ 姓名____________

考试时间<u>2015.6.21</u> 任课教师________ 考试成绩____________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | |

**一. 填空题** (18分)

1. 设$f(0)=0,\ f(1)=16,\ f(2)=46$, 则$f[0,1]=$ <u>16</u> , $f[0,1,2]=$ <u>7</u> ; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为<u>$7x^2+9x$</u>.

2. 设$h=\dfrac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$. 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合梯形公式为 <u>$\dfrac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(a+ih)]$</u> ; 它是<u>2</u>阶收敛的，代数精度为<u>1</u>.

3. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为$n+1$个互异的插值基点, $l_i(x)$ 是相应的 $n$ 次Lagrange 插值基函数, 则$\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^n l_i(x)=$ <u>$x^n$</u>.

4. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$ 的代数精度为<u>2</u>.

5. 设$f(x)=3x^7+4x^5+1$, 则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$ <u>3</u> , $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$ <u>0</u> .

6. 求解非线性方程的Newton法,对于单根情形其收敛阶数是<u>2</u>; 对于重根情形其收敛阶数是<u>1</u>; 如果用修改的Newton法, 其收敛阶数是<u>2</u>; 割线法的收敛阶数是<u>1.618</u>.

**二.** (10分) 设$n$ 次多项式$f(x)$ 有互异的$n$ 个实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 试证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1} & k=n-1,\end{cases}$$

其中$a_n$ 为$f(x)$ 的首项系数.

证:

由题设 $f(x)=a_n\omega_n(x)$，其中 $a_n$ 为 $f(x)$ 首项系数，$\omega_n(x)=(x-x^1)\dots(x-x_n)$，

令 $P(x)=x^k$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(x_i)}{a_n\omega_n'(x_i)}=\frac{1}{a_n}P[x_1,x_2,\dots,x_n]=\frac{1}{a_n}\frac{P^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}\,,$$

于是由 $0\le k\le n-2$ 时，$P^{(n-1)}(\xi)=0$ 和 $k=n-1$ 时，$P^{(n-1)}(\xi)=(n-1)!$ 得结论。



**三.** (12分) 设函数$f(x)$ 在区间$[-h,h]$上充分可导. 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x=(\approx)\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)],$$

以及该积分公式的余项和收敛阶.

解:

$$P_1(x)=-\frac{x}{h}f(-h)+\frac{x+h}{h}f(0)\,,$$

$$\int_0^h-\frac{x}{h}\,\mathrm{d}x=-\frac{h}{2}\,,\ \int_0^h\frac{x+h}{h}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}h\,,$$

即积分公式为

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)]\,,$$

余项为

$$r(x)=\int_0^h\frac{f''(\xi)}{2!}x(x+h)\,\mathrm{d}x=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_0^h(x)(x+h)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{12}h^3f''(\eta)\,,$$

其中 $\eta$ 在 $[-h,h]$ 之间，收敛阶为 3。

**四.** (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_1^3 x\sqrt{4x-x^2-3}\mathrm{d}x$$

化为能应用$n$ 点Gauss-Chebyshev 求积公式。当$n$ 为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

解:

令 $x=t+2$，则原积分化为

$$\int_{-1}^1(t+2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^1\frac{(t+2)(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\,,$$

故 $f(t)=(t+2)(1-t^2)$ 为三次多项式，代数精度为 3 时，即 $n=2$ 个点时，能得到精确积分。

即

$$I=\frac{\pi}{2}[f(\cos\frac{\pi}{4})+f(\cos\frac{3\pi}{4})]=\pi\,.$$

**五.** (10分) 应用Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

解:

$S_1 = 2$ , $S_2 = 4$ , $S_3 = 10$ , $\dfrac{|a_{11}|}{S_1} = \dfrac{1}{2}$ , $\dfrac{|a_{21}|}{S_2} = \dfrac{3}{4}$ , $\dfrac{|a_{31}|}{S_3} = \dfrac{1}{5}$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 10 \end{bmatrix} l_{21} = \frac{1}{3}, l_{31} = \frac{2}{3} \text{ 消元 } \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 2 \\ 2/3 & 22/3 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$\dfrac{|a_{22}|}{S_2} = \dfrac{1}{4}$ , $\dfrac{|a_{32}|}{S_3} = \dfrac{11}{15}$ , 故第三行为第二次消元的主行,

$$\overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & 2 \end{bmatrix} l_{32} = \frac{1}{11} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1/3 & 22/3 & 4 & 8 \\ 2/3 & 1/11 & 7/11 & 14/11 \end{bmatrix},$$

回代得 $x_3 = 2$ , $x_2 = 0$ , $x_1 = 1$ .

**六.** (16分) 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a) = f(a), H_3'(a) = f'(a), H_3''(a) = f''(a), H_3''(b) = f''(b),$$

并求其余项$f(x) - H_3(x)$ 的表达式.

解:

设 $H_3(x) = N_2(x) + A(x-a)^3$ ，其中 $N_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ ,

显然 $H_3(a) = f(a)$ , $H_3'(a) = f'(a)$ , $H_3''(a) = f''(a)$ ,

又 $H_3''(x) = f''(a) + 6A(x-a)$ ，将 $H_3''(b) = f''(b)$ 代入得 $A = \dfrac{1}{6}\dfrac{f''(b) - f''(a)}{b-a}$ ,

从而得

$$H_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}\frac{f''(b) - f''(a)}{b-a}(x-a)^3,$$

设 $r(x) = f(x) - H_3(x)$ ，$a$ 为三重根,

记 $w(x) = (x-a)^3(x-c)$ ，设 $w''(b) = 0$ ，则可得 $c = 2b - a$ ,

于是 $r(x) = k(x)w(x)$ ，作辅助函数 $g(t) = f(t) - H_3(t) - k(x)w(t)$ ,

显然 $g(a)$ , $g'(a)$ , $g''(a)$ , $g(x)$ , $g''(b)$ 均为零,

反复应用 Roll 定理得 $\xi \in [a,b]$ ，使得 $g^{(4)}(\xi) = 0$ ,

从而推出 $r(x) = \dfrac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)^3(x-2b+a)$ .



**七.** (12分) 用梯形公式和辛普森公式计算积分$\int_0^1 e^{-x}dx$, 并估计误差.

解:

$a = 0$ , $b = 1$ , $f(x) = e^{-x}$ , $f'(x) = e^{-x}$ , $f''(x) = e^{-x}$ ,

$f'''(x) = e^{-x}$ , $f^{(4)} = e^{-x}$ , $I(f) = \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x$ ,

梯形公式有:

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(e^{-0} + e^{-1}) \approx 0.6839,$$

由

$$I(f) - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta) = -\frac{1}{12}e^{-\eta}, \ \eta \in (0,1),$$

得

$$|I(f) - T(f)| \le \frac{1}{12} \approx 0.08333,$$

辛普森公式有:

$$S(f) = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] = \frac{1}{6}[e^{-0} + 4e^{-0.5} + e^{-1}] \approx 0.6323,$$

由

$$I(f) - S(f) = -\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\xi) = -\frac{1}{180}(\frac{1}{2})e^{-\xi}, \ \xi \in (0,1),$$

得

$$|I(f) - s(f)| \le \frac{1}{180} \times (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{2880} \approx 0.0003472.$$

**八.** (12分) 试确定常数$A, B, C$ 及正数$\beta$, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx Af(-\beta) + Bf(0) + Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式?

解：方法一:

由 Gauss-Legendre积分三点公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\frac{3}{5}})\right),$$

得

$$A = C = \frac{5}{9}, \ B = \frac{8}{9}, \ \beta = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

此时代数精度为 5 ，为高斯型积分公式。

方法二:

采用待定系数法取 $f(x) = 1$ , $x$ , $x^2$ , $x^3$ , $x^4$ , $x^5$ 确定 $A$ , $B$ , $C$ , $\beta$ 也可以。