偏微分方程期中试卷(数学系2011级)

2013/2014 学年第一学期 考试时间 2013.11.12 考试成绩________

系别________ 学号________ 姓名________

一.简答题 ($8' \times 5 = 40$分)

1. 设 $\varphi(x) \in C^2[0,+\infty)$ 且 $\varphi'(0)=0$，$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), x \ge 0, \\ \\ \varphi(-x), x < 0 \end{cases}$，证明：$\psi(x) \in C^2(R)$。

2. 求S-L问题：$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0,l), \\ X'(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$

3. 已知函数 $\varphi(x)$ 满足 $|\nabla\varphi| > 0$，求关于 u 的方程 $\sum\limits_{i,j=1}^{3} \partial_i\varphi\partial_j\varphi\partial_{ij}u = 0$ 的类型。

4. 作函数代换 $u = vw$ (其中 v 是新未知函数)，把方程

$$\partial_t u - \partial_x^2 u + a\partial_x u + bu = f(x,t)$$

化成 $\partial_t v - \partial_x^2 v = \tilde{f}(x,t)$ 的形式(其中 a，b 是常数)。

5. 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f(x,t), x > 0, t > 0, \\ \partial_x u(0,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

推导 $u \in C^1(R^+ \times R)$ 为上述定解问题广义解的定义。

二. (10分) 设 $u\in C_0^\infty(R^3)$，证明：

1). $2\partial_i u\partial_{jk}u=\partial_j(\partial_i u\partial_k u)-\partial_i(\partial_j u\partial_k u)+\partial_k(\partial_i u\partial_j u)$；

2). $\sum_{i,j=1}^{3}\int_{R^3}|\partial_{ij}u|^2dx=\int_{R^3}|\Delta u|^2dx$。

三. (10分) 用特征线方法求解定解问题

$$\begin{cases}\partial_t u+(1+u)\partial_x u=0, x\in R, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), x\in R,\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)\in C_0^\infty(R)$。并求最大的 T^*，使得 $u(x,t)\in C^\infty(R\times[0,T^*))$。

四. (10分) 设Ω 为R^2 中的有界光滑区域, 记 $J(v)=\dfrac{1}{2}\iint_\Omega\left(|\partial_x v|^2+|\partial_y v|^2+v^2\right)dxdy$。考虑如下变分问题: 求$u\in M=\{v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega): v|_{\partial\Omega}=\phi(x,y)\}$, 使得 $J(u)=\min\limits_{v\in M}J(v)$。求上述变分问题所对应的Euler 方程微分形式.

五. (10分) 求解下述初值问题

$$\begin{cases}\partial_t^2 u-\Delta u=0, x\in R^2, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(|x|),\quad \partial_t u(x,0)=0, x\in R^2,\end{cases}$$

其中 $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$。

六. (10分) 设 $u(x,t)\in C^2(R\times R^2)$ 为定解问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u-\partial_x^2 u+u^3=0, x\in R, t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad \partial_t u(x,0)=\psi(x), x\in R,\end{cases}$$

的解，证明：

$$\int_R |(\partial_t u|^2+|\partial_x u|^2+\frac{1}{2}|u|^4)dx\le\int_R(|\psi(x)|^2+|\varphi'(x)|^2+\frac{1}{2}|\varphi(x)|^2)dx。$$

七. (10分) 考虑定解问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u-\partial_x^2 u=f(x,t),\quad x\in(0,l),\quad t>0,\\ u(0,t)=g_1(t),\quad \partial_x u(l,t)=g_2(t),\quad t>0,\\ u(x,0)=\phi(x),\quad \partial_t u(x,0)=\psi(x),\quad x\in[0,l],\end{cases}$$

其中$g_i(t)(i=1,2),\phi(x),\psi(x),f(x,t)$ 为充分光滑函数.

1). 若$u\in C^2([0,l]\times R^+)$ 为上述定解问题的解, 计算所需的相容性条件；

2). 若$\phi(x)=0, g_i(t)=0(i=1,2), f(x,t)=0$, 求$u(x,t)$ 的分离变量级数形式，并证明存在正常数 C，使得

$$|u(x,t)|\le C\sum_{j=0}^{2}\max_{x\in[0,l]}|\psi^{(j)}(x)|。$$