南京大学数学系试卷

2013/2014 学年第二学期期末　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法

班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2014 任课教师______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. 填空题 (12分)

1. 线性 k 步法 $\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(t_{n+j}, y_{n+j})$ 收敛性、相容性与稳定性的关系是______________。

2. 梯形方法解初值问题 $y' = -y,\ y(0) = 1$ 的数值解为________。

3. 假设有一台电子计算机，字长 $t = 8$, 阶码：$-3 = -L \le J \le U = 3$, 基数 $p = 2$，则这台计算机的规格化浮点数的个数 $N =$______________。

4. 设 $f(x) = x^4$ 则 $f(x)$ 的以 $-1, 0, 1, 2$ 为基点的拉格朗日插值多项式$P_3(x) =$ ______________。

二. (8分) 用适当的方法导出解初值问题的梯形公式$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$。

三. (10分) 证明切比雪夫多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $-1 \le x \le 1$ 满足递推关系 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1, \cdots$，其中 $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$。

四. (10分) 将积分 $I = \int_0^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x(2-x)}}dx$ 化为能应用 m 点 $Gauss-Chebyshev$ 求积公式的积分. 当 m 取何值时, 能得到积分的准确值?并计算之。

五. (10分) 证明改进的欧拉方法 $y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}))]$ 解初值问题 $y' = -y,\ y(0) = 1$ 收敛。

六. (10分) 求差分方程

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 2^n$$

的通解。

七. (10分) 设 $f(x) \in C_{[a,b]}$, 证明 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式 $p(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的某一个 n 次插值多项式。

八. (10分) 设 $f(x) \in C_{[a,b]}$ 且 $f''(x)$ 在 (a,b) 内不变号，求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一次最佳平方逼近多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x$（只要求求出 a_0, a_1 的值）。

九. (10分) 设 $x_j = a + j(b-a)/3,\ i = 0,1,2,3,$ 确定求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$ 的代数精确度。

十. (10分) 给出四级四阶经典 *Runge-Kutta* 方法计算初值问题

$$\begin{cases} y' &= f(x,y), \quad a \le x \le b, \\ y(a) &= \eta \end{cases}$$

的算法。