

任课教师：

学号：

姓名：

系别：

题  
答  
案  
不  
在  
线  
内  
封  
密

# 南京大学数学课程试卷

2016-2017 学年度第 二 学期 考试形式： 闭卷 课程名称： 计算方法（A 卷）

考试时间： 2017 年 7 月 7 日 考试成绩： \_\_\_\_\_

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

## 一、填空题（每空 2 分，计 20 分）

- 函数  $f(x)$  在  $n+1$  个互异基点  $x_0, x_1, \dots, x_n$  的均差与这  $n+1$  个互异基点处函数值有关系： \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ 成立.
- 适当选择求积基点和系数，则求积公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n+1} A_k f(x_k)$  的代数精确度最高可达到 \_\_\_\_\_ 次.
- 已知  $f(x) = x^5 - x^4 + 3x + 100$  , 则  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^5] =$  \_\_\_\_\_,  $f[2^0, 2^1, \dots, 2^{10}] =$  \_\_\_\_\_.
- 求解非线性方程的 Newton 法，对于单根情形其收敛阶数是 \_\_\_\_\_，对于重根情形其收敛阶数是 \_\_\_\_\_，割线法的收敛阶数是 \_\_\_\_\_.
- 设  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$ , 计算  $\int_a^b f(x)dx$  的复合梯形公式为 \_\_\_\_\_，它是 \_\_\_\_\_ 阶收敛的，代数精度为 \_\_\_\_\_.

二、（本题 10 分）设函数  $f(x)$  在区间  $[-h, h]$  上充分可导，试推导求积公式  $\int_0^h f(x)dx = (\approx) \frac{h}{2} [3f(0) - f(-h)]$ ，以及该积分公式的余项和收敛阶.

三、（本题 10 分）设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  是  $n+1$  个互异的基点， $q(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ ， $p(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式，

求证有理函数  $\frac{p(x)}{q(x)}$  可分解为部分分式：  $\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{x - x_i}$ ，其中  $A_0, A_1, \dots, A_n$  都是常数.

四、（本题 10 分）应用复合 *Simpson* 公式计算积分  $I(f) = \int_0^1 \frac{180}{e} e^x dx$  时，为使误差不超过  $10^{-8}$ ，试确定所需的步长  $h$  和基点个数.

五、（本题 10 分）作适当变换，把积分  $\int_1^3 x \sqrt{4x - x^2 - 3} dx$  化为能应用  $n$  点 Gauss-Chebyshev 求积公式. 当  $n$  为何值时能得到积分的准确值？并利用 Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值.

六、（本题 10 分）已知  $f(x)$  在若干点的函数值：  $f(1)=1, f(2)=3, f(4)=5, f(5)=2$ ，以及  $f'(1)=1, f'(5)=-4$ ，求完备三次样条插值函数  $S_C(x)$ （注：本题只需写出 **M**-矩阵方程组）。

七、（本题 10 分）给定线性方程组  $Ax=b$ ，其中  $A$  是  $n$  阶非奇异矩阵， $b$  是  $n$  维非零向量， $x^*$  是上述线性方程组的精确解， $x$  是近似解。记  $r=b-Ax$ ，证明： $\frac{\|x-x^*\|}{\|x^*\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$ ，其中  $cond(A)=\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ，为矩阵  $A$  的条件数。

八、（本题 10 分）设函数  $f(x)$  在  $[a,b]$  上具有三阶连续导数，（1）试构造二次多项式  $H_2(x)$ ，使其满足插值条件： $H_2(0)=f(0)=0, H_2(1)=f(1)=2, H_2'(1)=f'(1)=2$ ；（2）证明其余项的表达式为：

$$R(x)=f(x)-H_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}x^2(x-1), \text{ 其中 } \xi \in [0,1].$$

九、（本题 10 分）对求积公式  $\int_{-1}^1 f(x)dx \approx A[f(-1)+f(1)]+B[f(\frac{-1}{\sqrt{5}})+f(\frac{1}{\sqrt{5}})]$ ,

- （1）试确定上面求积公式中的系数  $A$  和  $B$ ，使其代数精度尽可能高,并求出其代数精度是多少；
- （2）利用（1）中给出的求积公式给出计算  $\int_a^b f(x)dx$  的求积公式.