

南京大学数学系试卷 A 卷 标准答案

2007, 2008 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 近世代数
院系 _____ 年级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 得分 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	合计
得分											

一、填空题 (每格 2 分, 共 10 分)

- m 阶循环群 C_m 与 n 阶循环群 C_n 的直积为循环群当且仅当 $\gcd(m, n) = 1$ 。
- 4 阶循环群与 6 阶循环群直积的群指数 $(C_4 \times C_6) = 12$ 。有限 Abel 群 G 的等指数是满足 $\forall x \in G (x^n = e)$ 的最小正整数 n 。
- 不同构的 48 阶 Abel 群共有 8 个。
- Hilbert 基定理断言 R 为 Noether 环时 $R[x]$ 也是这样的环。
- 设 A_1, \dots, A_n 为交换环 R 的两两互素的理想, 依中国剩余定理, $R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$ 同构于 $R/A_1 A_2 \dots A_n$ 。

二、判断题 (在右端括号内填 \checkmark 或 \times , 每小题 2 分, 共 10 分)

- 域上的 n 元多项式环是主理想整环。 (\times)
- 设 R 为整环, 则 R 的极大理想都是素理想, R 的不可约元都是素元。 (\times)
- 环 R 的所有理想依理想的加、乘法构成环。 (\times)
- 设 F 是特征为素数 p 的域, 则对任何 $a, b \in F$ 总有 $(a-b)^p = a^p - b^p$ 。 (\checkmark)
- 任给正整数 m , $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上 n 元 k 次方程在 \mathbb{Z}_m 中至多有 n 个不同的根。 (\times)

三、(10 分) 设环 R 有乘法单位元 1, 又设 $a, b \in R$ 且 $1-ab$ 有 (乘法) 逆元 c , 试证 $1-ba$ 有逆元 $1+bcu$ 。

$$(1-ab)c = c(1-ab) = 1, \text{ 故 } abc = c, cab = c.$$

$$\begin{aligned} (1-ba)(1+bcu) &= 1-ba + (1-ba)bcu = 1-ba + bca - baba \\ &= 1-ba + bca - b(cu)a = 1. \end{aligned}$$

$$(1+bcu)(1-ba) = 1-ba + bca - baba = 1-ba + bca - b(cu)a = 1.$$