

NJU 数学分析 A 期中考试

2011.11.13

一、叙述题 ($2 \times 5 = 10$ 分)

1. 叙述 Cauchy 列的定义.
2. 给出数列 $\{a_n\}$ 不发散到 $-\infty$ 的定义.

二、简答题 (回答问题并简要说明理由)

- 1.(5 分) 能否按照从大到小的次序将 $[0, 1]$ 中的有理数排成一列?
- 2.(5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0, \forall p \geq 1$. 则 $\{a_n\}$ 是否为 Cauchy 列?
- 3.(10 分) 设 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 中有定义. 如果对每一个单调递减趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}, \{f(x_n)\}$ 均收敛, 则 f 在 x_0 处是否存在右极限?

三、计算题 (共 44 分)

- 1.(12 分) 设 $a_1 \in \mathbb{R}, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \sin a_n)$. 说明 $\{a_n\}$ 收敛并求极限;
- 2.(10 分) 设 $x \in \mathbb{R}$. 求数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$;
- 3.(10 分) 设 $a, b > 0$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$;
- 4.(12 分) 设 $a \in \mathbb{R}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{\sin^2 x}$.

四、(10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, \{b_n\}$ 收敛于 b . 记 $c_n = \max\{a_n, b_n\}$, 证明数列 $\{c_n\}$ 收敛于 $\max\{a, b\}$.

五、(12 分) 设 $0 \leq q < 1$, 数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + qa_n) = 0$, 证明 $\{a_n\}$ 也收敛于 0.

六、(12 分) 设 A 为非空数集, 有上界, 令 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ 为 } A \text{ 的上界}\}$, 证明 B 是有下界的闭集.

七、(12 分) 设函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的极限均存在并且为正实数, 证明: (1) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\}$ 为至多可数集; (2) 存在闭区间 I 及正数 ϵ , 使得 $f(x) \geq \epsilon, \forall x \in I$.