五. (10分) 证明切比雪夫多项式满足关系：

$$T_m(x)T_n(x)=\frac{1}{2}[T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x)].$$

证明. $T_n(x)=\cos(n\arccos x)=\cos(n\theta)$, $\theta=\arccos x$

于是 由 $\cos(m\pm n)\theta=\cos m\theta\cos n\theta\mp\sin m\theta\sin n\theta$

得 $\cos m\theta\cos n\theta=\frac{1}{2}(\cos(m+n)\theta+\cos(m-n)\theta)$

即 $T_m(x)T_n(x)=\frac{1}{2}\{T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x)\}$

六. (10分) 对于积分 $\int_0^1 x^5dx$, 若采用复合辛普森公式需要使用多少个求积基点才能使积分近似值的误差不超过10^{-8}?

解: $a=0$, $b=1$, $f^{(4)}(x)=(x^5)^{(4)}=5\times4\times3\times2x$
$=120x$

$\max\limits_{x\in(0,1)}|f^{(4)}(x)|=120$.

$$|E_m(f)|\le\frac{1}{2880\,m^4}\cdot120\le10^{-8}$$

$$\Rightarrow m^4\ge\frac{120}{2880}\times10^8$$

$$\Rightarrow m\ge\frac{1}{\sqrt[4]{24}}\times10^2$$

$$n=2m=2\left[\frac{1}{\sqrt[4]{24}}\right]\times10^2$$

共需 $\left[\frac{2}{\sqrt[4]{24}}\right]\times10^2+1$ 个点。

七. (10分) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$，使其满足插值条件，

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项$f(x)-H_3(x)$的表达式.

解: 令 $H_3(x)=N_2(x)+A(x-a)^3$, 其中 $N_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$

显然 $H_3(a)=f(a)$, $H_3'(a)=f'(a)$, $H_3''(a)=f''(a)$

又 $H_3''(x)=f''(a)+6A(x-a)$

将 $H_3''(b)=f''(b)$ 代入得 $A=\frac{1}{6}\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}$

从而得 $H_3(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}\frac{f''(b)-f''(a)}{b-a}(x-a)^3$

令 $r(x)=f(x)-H_3(x)$, a 三重根

设 $W(x)=(x-a)^3(x-c)$, 令 $W''(b)=0$, 则得

$c=2b-a$

于是 $r(x)=k(x)W(x)$ 作辅助函数

$g(t)=f(t)-H_3(t)-k(x)W(t)$

则 $g(a), g'(a), g''(a)=0$, $g(x)=0$, $g''(b)=0$

反复应用 Roll 定理得 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g^{(4)}(\xi)=0$

从而有 $r(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-a)^3(x-2b+a)$