八. (10分) 已知方程组 $Ax = b$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

有解 $x = [2\ \ 0]^T$.

(1) 求 $\mathrm{cond}_\infty(A)$;

(2) 求右端有微小扰动的方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$$

的解 $x + \Delta x$;

(3) 计算 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和 $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 结果说明了什么问题?

解. ① $A^{-1} = \begin{bmatrix} -10^4 & 1.0001\times10^4 \\ 10^4 & -10^4 \end{bmatrix}$

$\mathrm{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$= 2.0001 \times (2.0001 \times 10^4)$

$\approx 4\times10^4$

② $x+\Delta x = [1, 1]^T$

③ 因 $b = [2,2]^T$, $\Delta b = [0.0001, 0]^T$

$\Delta x = [-1, 1]^T$

所以 $\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 0.005\%$, $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 50\%$.

由以看出, 小扰动引起解的50%误差, 系数矩阵条件数大, 病态引起的.

九. (10分) 试确定常数 A, B, C 及正数 β, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx Af(-\beta) + Bf(0) + Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度, 并指出代数精确度是多少, 该公式是否为高斯型求积公式?

解: 由 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}\left(5f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{\tfrac{3}{5}})\right)$

即 Gauss – Legendre 公式知

$A = C = \frac{5}{9}$, $B = \frac{8}{9}$, $\beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$ 时,

上述公式为 Gauss 型求积公式, 它有5阶代数精度.