南京大学
数学分析 3 期末考试

天影　　　　DiMersified

2022 年 2 月 15 日

评语: 这张试卷是石亚龙老师和苗栋老师一起出的, 整体难度偏大, 学弟学妹们在尝试做题前要做好啥也不会的心理准备 (bushi). 由于本张试卷的难度较大且负责做解答的同学寒假比较忙, 所以这张试卷只有前三大题的解答, 其余部分只有题目原题.

感谢陈韵雯同学的纠错以及南京大学数学系 20 级的多位同学在题目解答方面的帮助.

一、(20 分) $\phi(x) := \cosh x, x \in [-\pi, \pi]$.

(1) $\phi(x)$ 的 Fourier 级数为 ________________.

分析: 直接用 Fourier 展开公式即可.

解: 由于 $\phi(x)$ 是偶函数, 故可将 $\phi(x)$ 展开为 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$, 则其系数为

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^x \cos nx + e^{-x}\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{(n^2+1)\pi}
\end{aligned}$$

从而 $\phi(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\phi(x) \sim \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx.$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^2+1}$ **的值是** ______________________________.

分析: 此题承接上题, 可以发现此题所求与上题结果之间仅仅差了一个 $(-1)^n$, 为了消除这个影响, 只需令 $x=\pi-1$ 即可.

解: 考虑 $\cosh x$ 的 Fourier 展开, 由于 $\cosh x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 令 $x=\pi-1$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{e^{\pi-1}+e^{1-\pi}}{2}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos n(\pi-1)\\ \Rightarrow&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+1}=\frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi-1}+e^{1-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

二、(20 分) 计算下列积分.

(1) **求** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+xy+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

分析: 此题属于多重广义积分, 常规做法为取一组穷竭进行积分, 对于此题, 配方后换元即可.

解: 先将 e 的指数部分配方为 $\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$, 再令 $m=x+\dfrac{1}{2}y$, $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$, 则所求积分化为

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(m^2+n^2)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(m,n)}\,\mathrm{d}m\mathrm{d}n$$

其中 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(m,n)}$ 与 $\dfrac{\partial(m,n)}{\partial(x,y)}$ 互为倒数, 而

$$\frac{\partial(m,n)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故积分为

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-m^2-n^2}\,\mathrm{d}m\mathrm{d}n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-m^2}\,\mathrm{d}m\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-n^2}\,\mathrm{d}n=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

(2) **求** $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2}x^2y^2z^2\,\mathrm{d}S$, $\mathbb{S}^2$ **表示** $\mathbb{R}^3$ **中的单位球面**, $\mathrm{d}S$ **表示球面微元.**

分析: 此题为第一型曲面积分, 使用球坐标换元后, 可用 Beta 和 Gamma 函数辅助计算.

解: 令 $x = r\cos\theta\sin\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$, 则 $\mathrm{d}S = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$, 其中 $0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$, 由于积分区域为单位球面, 故取 $r = 1$, 则所求积分化为

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^5\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

我们知道 Beta 函数可以写成三角函数积分的形式, 即

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

从而所求积分可用 Beta 函数表示, 继而转化为 Gamma 函数, 即

$$2B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)B\left(3,\frac{3}{2}\right) = 2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{4\pi}{105}.$$

三、(10 **分**) $f \in C^1(\mathbb{R}), A = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, 求证

$$\int_{-\pi}^{\pi} |A - f(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

.

分析: 此题主要考察 Parseval 恒等式的使用, 难度不大.

证明: 考虑 f 的 Fourier 级数, 由 A 的定义知其为 f 的 Fourier 级数的常数项, 故设

$$f(x) \sim A + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

由 $f \in C^1(\mathbb{R})$ 知, f 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导, 故其 Fourier 级数收敛到自身且可逐项求导, 即

$$f(x) - A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -na_n\sin nx + nb_n\cos nx$$

则由 Parseval 恒等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A - f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$$

从而可以直接得出

$$\int_{-\pi}^{\pi}|A-f(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

四、(20 **分**) **定义** $K(x,t):=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sinh 2t}}\exp\left(\dfrac{\cosh 2t}{\sinh 2t}\cdot\dfrac{-x^2}{2}\right)$, $\phi(x)\in C(\mathbb{R})$ **且** $\phi(x)$ **有界, 定义** $u(x,t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}K(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y$.

求证:

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^2u=0$ (**此题为出题错误**).

(2) $\lim\limits_{t\to 0^+}u(x,t)=\phi(x)$.

五、(10 **分**) $\mathbb{B}$ **是三维单位球, 计算六重积分**

$$\int\limits_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}\frac{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3y}{\|x-y\|}.$$

六、(10 **分**) **设** f **是周期为** 1 **的可积函数**, $L=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, **证明:**

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\left|L-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f\left(x+\frac{n}{N}\right)\right|^2\mathrm{d}x=0.$$

七、(10 **分**) $u\in C^2(\mathbb{R}^3), \mathbf{supp}(u)\subset\mathbb{B}^3, y\in\mathbb{B}^3, x\in\mathbb{R}^3$,
求证: 函数 $x\mapsto\dfrac{1}{\|x-y\|}$ **为调和函数且** $u(y)=\displaystyle\int_{\mathbb{B}^3}-\frac{\triangle u(x)\,\mathrm{d}x}{4\pi\|x-y\|}$.

八、附加题 (10 **分**)(**未记录**)