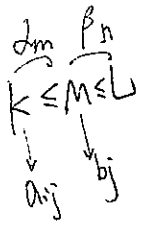


with $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

于是 $\beta = \sum_{j=1}^n b_j \beta_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i \beta_j$



现证 $\alpha_i \beta_j$ 线性无关

假设有 $a_{ij} \in K$ s.t. $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i \beta_j = 0$

则 $\sum_{j=1}^n b_j \beta_j = 0$, $b_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i \in M$

$\{\beta_j\}_{j=1}^n$ 为基底 $\therefore b_j = 0, \forall j=1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i = 0, \forall j=1, 2, \dots, n$

而 $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ 为基底 $\therefore \forall j=1, 2, \dots, n, a_{ij} = 0$

故 $\{\alpha_i \beta_j\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ 为线性无关的

即 $\{\alpha_i \beta_j\}$ 为 K 上向量空间 L 的一组基底

因此 $[L:K] = [L:M] [M:K] = mn$

I. 证明 $R = \{a+b\theta : a, b \in \mathbb{Z}\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环.
 其中 $\theta = (-1 + \sqrt{-7})/2$.
 R 为 Euclid 环 证明.

R 必为整环 (验证按加法乘法满足结合律与交换律且封闭, 有单位元 0 和逆元 $-a-b\theta$ 故按加法构成 Abel 群, 再有乘法显然构成半群且满足分配律, 故 R 为环。乘法可交换且有么元 $(1+0\theta)$ 故为交换么环。

又 $\forall (a+b_1\theta)(a+b_2\theta) = 0 \Rightarrow a=b_1=b_2=0$ 或 $a=b_1=b_2=0$ 故为整环。

且对求复共轭封闭。假如 $\alpha, \beta \in R$ 且 $\beta \neq 0$ 。

则 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{|\beta|^2}$ 可表成 $r+s\theta$ 的形式, $r, s \in \mathbb{Q}$ 。

取 $m, n \in \mathbb{Z}$ s.t. $|r-m| \leq \frac{1}{2}, |s-n| \leq \frac{1}{2}$ 。且当 $|r-m|=|s-n|=\frac{1}{2}$ 时, $r-m, s-n$ 同号。

让 $\eta = m+n\theta$, 则 $\eta \in R$ 。

$|\frac{\alpha}{\beta} - \eta|^2 = |(r-m) + (s-n)\theta|^2 = ((r-m) + (s-n)\theta)((r-m) + (s-n)\bar{\theta})$

$= (r-m)^2 - (r-m)(s-n) + 2(s-n)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$ 。

从而 $\nu = \alpha - \beta\eta$ 有 $|\nu|^2 < |\beta|^2$

因此 R 依映射 $N(w) = |w|^2 (w \in R \setminus \{0\})$ 构成 Euclid 整环。