

$$|A \times B| = |A| \times |B| = mn$$

$$\text{即 } |\langle a, b \rangle| = [m; n] \quad \text{对 } A \times B \text{ 为循环群}$$

~~$\forall x \in A \times B \quad x = \langle a^i, b^j \rangle = \langle a^i, b^j \rangle$~~
 $\langle a, b \rangle$ 生成的子群元素个数为 $[m, n]$.

而 $A \times B$ 元素个数为 mn . 故 \textcircled{D} 循环群与循环群直积不一定为循环群. 当 m, n 互素时 $A \times B$ 为循环群.

✓ 23. 对大于 1 的整数 m , $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 为域当且仅当 m 为素数.
 $\because \mathbb{Z}$ 为域, m 为素数, $m\mathbb{Z}$ 为素理想且为极大理想. (见 P101 例 3.4.1 与 P114 推论 3.6.1) $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 为域. (见 P102 定理 3.4.3).

✓ 24. 设 F 为特征为素数 p 的域, 则对 $a, b \in F$ 有 $(a-b)^p = a^p - b^p$.
 见 P122 性质 4.1.2.

✓ 25. 设 p 为素数, n 为正整数, 则 F^n 元域特征恰好为 p .
 由 P121 例 4.1.2 知 $E = \{me : me \in \mathbb{Z}\}$ 为域 F 的最小子域.
 $|E| = \text{ch}(F)$. 而 $\text{ch}(F)$ 必为素数. 且 $|E| \mid p^n$.
 故 $\text{ch}(F) = p$. (可能错误)

✗ 26. 整数环 \mathbb{Z} 是主理想整环, \mathbb{Z} 上一元多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 也是主理想整环.
 前半句正确. 后半句不正确. $(2, x)$ 为 $\mathbb{Z}[x]$ 上的理想但不为主理想.

