九. (15分) 设 $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ 是一列相互独立且同分布的随机变量序列，且 $E\xi_1 = 0, D\xi_1 = 1$
证明"林德贝格-莱维中心极限定理":

$$\lim_{n\to+\infty} P\left\{\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

证明：记 ξ_k 的特征函数为 $\psi(t)$. 则 $\zeta_n := \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sqrt{n}}$ 的特征函数为

$\left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$.

由于 $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = 1$, 故 $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = -1$.

因此

$$\psi(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

$$\psi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2$$

故

$$\left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} \quad as\ n\to\infty$$

由于 $e^{-\frac{t^2}{2}}$ 是连续函数，它对应于分布 $N(0,1)$ 的特征函数

∴ 由莱维-克拉默定理知

$$P\{\zeta_n < x\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dx. \quad \square$$