南京大学数学系期中试卷

2018/2019 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数

院系 数学 班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2019.5.11 任课教师________ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断题（判断下列叙述是否正确；并给出理由. 每小题 6 分，共 30 分）.

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\sigma \in L(V)$, 则 $V = \mathrm{Ker}(\sigma) + \mathrm{Im}(\sigma)$.

2. 设 $f(x)$ 是域 F 上的首一 n 次多项式，则存在 $A \in M_n(F)$ 使得 $f(x)$ 就是 A 的特征多项式.

4. 设 σ 是域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则 σ 可能没有特征值.

5. 域 F 上两个 n 阶方阵相似当且仅当它们的特征多项式和最小多项式分别相等.

二. 填空题（每小题 6 分，共 42 分）.

1. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -6 & -6 \\ -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$. 则 A 的有理标准型为__________. 如果将 A 看成复数域上的矩阵，则其 Jordan标准型为__________

三. (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 令

$$W = \{f(A) \in M_4(\mathbb{R}) \mid f(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

(1) 证明：W 是 $M_4(\mathbb{R})$ 的 $\mathbb{R}$-线性子空间;

(2) 求 W 的一组 $\mathbb{R}$-基.

四. (10分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 求 A^{10}.

五. (10分) 设 V 是 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间，$\sigma \in L(V)$, 且存在 V 的子空间 V_1, V_2 满足 $\mathrm{Ker}(\sigma) = V_1 \cap V_2$. 求证：存在 $\sigma_1, \sigma_2 \in L(V)$ 使得 $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ 且 $V_i = \mathrm{Ker}(\sigma_i)$, $i = 1, 2$.

假设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 的复数矩阵, 求证 A 可以被可对角化的矩阵逼近, 即存在一个由 $n\times n$ 的复数矩阵组成的矩阵序列 $A^{(1)}=(a_{ij}^{(1)})$, $A^{(2)}=(a_{ij}^{(2)})$, ..., $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$, ..., 满足下面两个条件:

(1) 对固定的 $(i,\ j)$, $a_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(2)}$, ..., $a_{ij}^{(k)}$, ..., 是一个复数柯西序列;

(2) 对每个正整数 k. $A^{(k)}$ 都是可对角化的.

假设 A 是一个 2×2 的整数矩阵(即矩阵的每个位置都是整数), 而且 $A^{120}=I$ 是 2×2 的单位矩阵. 求 A 的特征多项式所有可能的情形.