南京大学数学系概率论期末试卷A(2018)

2017/2018 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论

院系_________班级___________ 学号________________姓名____________

考试时间2018/06/26任课教师 代雄平 赵进 考试成绩_______________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

下面通设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一个概率空间。

一. (10分) 对$B\in\mathscr{F}$满足$0<P(B)<1$，回答问题：

1. 1_B是否是随机变量（说明理由）?
2. 1_B的分布函数$F(x)=$? 并且指出分布函数的三个特征。
3. 1_B的概率分布是什么？

二. (10分) 设随机向量$(X,Y,)\sim N(0,0;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。求密度函数：

1. $p_X(x)=$?
2. $p_Y(y)=$?
3. $p_X(x|y)=$? 该分布的方差$\sigma^2=$?

并且证明：X与Y独立$\Leftrightarrow$ X与Y不相关$\Leftrightarrow$ $\rho=0$。

三. (10分) 设(X,Y)有联合密度函数$p(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{if } 0<x, 0<y; \\ 0 & \text{if otherwise.} \end{cases}$ 求$\frac{X}{Y}$的密度函数并且判断X和Y是否独立。

四. (10分) 计算：

1. 若$X \sim B(n,p)$, 求$E[X]=?, DX=?$
2. 若$Y \sim G(p)$, 求$E[Y]=?, DY=?$
3. 若$Z \sim P(\lambda)$, 求$E[Z]=?, DZ=?$
4. 若$W \sim \exp(\lambda)$, 求$E[W]=?, DW=?$
5. 若$\xi \sim$超几何分布, 求$E[\xi]=?, D\xi=?$

五. (10分) 对$A, B \in \mathscr{F}$, 利用相关系数的基本性质证明：$|P(AB)-P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$。

六. (10分) 设ξ, η是随机变量。证明：若对任意$Borel$函数$f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$有$f(\xi)$和$g(\eta)$是不相关的, 则$\xi^2$和$\eta^3$是独立的。

七. (10分) 证明*Chebyshev*弱大数定律：设$X_1, X_2, X_3, \ldots$是一列两两不相关的随机变量满足条件：$-\infty < EX_n < \infty$和$DX_n \le \beta < \infty$。则

$$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{EX_1+\cdots+EX_n}{n}\right|<\varepsilon\right)=1 \quad \forall\varepsilon>0。$$

八. (10分) 证明*Khinchine*弱大数定律：设$X_1, X_2, X_3, \ldots$是一列i.i.d. 随机变量满足条件：$\mu = EX_n < \infty$。则$P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right| \ge \varepsilon\right)=0 \quad \forall\varepsilon>0$。

九. (10分) 利用*Lindeberg-Lévy*中心极限定理证明*Demoivre-Laplace*中心极限定理。

十. (10分) 若$\xi \sim \Gamma(10000, \frac{1}{2})$,利用中心极限定理估计概率$P(\xi \ge 20200)$。