

✓ 7. 设 F 是恰有 q 个元素的域有限域, 则 $\forall a \in F$ 有 $a^q = a$

由 P122 定理 4.1.1 知:

$$x^q - x = \prod_{a \in F} (x - a) \quad \circ$$

$$\therefore \forall a \in F, \quad a^q - a = \prod_{a \in F} (ax - a)|_{x=a} = 0$$

$$\Rightarrow a^q = a$$

✗ 8. 设 F 为 p^n 元域 (其中 p 为素数), 则对 $d=1, \dots, n$, 域 F 都有 p^d 元子域. $|F| = p^n$

$$p^d \text{ 元域 } (d=1, 2, \dots, n) \subseteq F \quad (\times)$$

d 为素数 且 $d|n$?

✓ 9. 设 F 是特征为素数 p 的域, 则对任何 $a, b \in F$ 总有 $(a-b)^p = a^p - b^p$
见 P122 性质 4.1.2.

✗ 10. 任给正整数 m , $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上 一元 n 次方程 在 \mathbb{Z}_m 中 至多有 n 个不同的根.

反例见 P110 例 3.5.1

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ 交换环 \checkmark 整环 \times $x^2 = 1$ 有 4 个解

✓ 11. 任何域都是主理想整环, 域的有限次扩张必是代数扩张
域只有两个理想: $(0), (1)$ 均为主理想.

✓ 12. 设环 R 有乘法单位元 1 , 又设 $a, b \in R$ $1-ab$ 有 (乘法) 逆元, 则 $1-ba$ 也有乘法逆元.

$$(1-ab) \cdot (1-ab)^{-1} = 1$$

逆元为 $1 + b(1-ab)^{-1}a$.

$$\begin{aligned} [1 + b(1-ab)^{-1}a] \cdot (1-ba) &= 1 - ba + b(1-ab)^{-1}a - b(1-ab)^{-1}aba \\ &= 1 + b(1-ab)^{-1}a - ba - b(1-ab)^{-1}a \cdot ba \\ &= 1 - ba + b[(1-ab)^{-1} - (1-ab)^{-1}ab]a = 1 - ba + b[(1-ab)^{-1}(1-ab)]a = 1 - ba + b \cdot 1 \cdot a = 1 \end{aligned}$$