# 南京大学
# 应用随机过程期中考试

陈相相　　天影　　陈韵雯

2023 年 2 月 1 日

**评语:** 这份试卷是 2022 年秋季, 代雄平老师的应用随机过程期中试题. 在试卷中, 代老师一如既往, 专注于考察讲义上的内容. 虽然我们并不鼓励一味背诵, 但事实上这样的确足以应对考试. 只要能记住全部内容, 满分也不难达到. 值得注意的是, 代老师并不忌讳考察讲义中的长证明或 "看似不太重要" 的结论, 不要有侥幸心理.

本文档中的 "讲义" 均指代代老师的 "Lectures on Stochastic Processes" 讲义 2021 版, 使用的所有带序号的定理与结论也均来自该讲义. 同时, 我们沿用讲义和题目中的记号, 将自然数集 $\{0,1,2,\dots\}$ 记为 $\mathbb{Z}_+$.

**一、(10 分)** Let $\{X_n : \Omega \to S\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ be a Markov chain. Prove that for $0 < m < n < l$ and $i, j, k \in S$, we have $\mathbb{P}(X_m = i, X_l = k|X_n = j) = \mathbb{P}(X_l = k|X_n = j) \cdot \mathbb{P}(X_m = i|X_n = j)$.

**分析:** 本题改编自 Exercise 1.1.3, 是对马尔可夫性质的直接运用, 属于非常基础的送分题. 本题可以直观理解为, 在 "现状" 给定之后, "未来" 与 "历史" 二者是无关的.

**证明:** 由题目知, $\mathbb{P}(X_n = j) > 0$. 于是对任意的 $0 < m < n < l$ 以及 $i, j, k \in S$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_m = i, X_l = k|X_n = j) \cdot \mathbb{P}(X_n = j) &= \mathbb{P}(X_m = i, X_l = k, X_n = j)\\ &= \mathbb{P}(X_l = k|X_n = j, X_m = i) \cdot \mathbb{P}(X_n = j, X_m = i)\\ &= \mathbb{P}(X_l = k|X_n = j) \cdot \mathbb{P}(X_m = i|X_n = j) \cdot \mathbb{P}(X_n = j).\end{aligned}$$

即 $\mathbb{P}(X_m = i, X_l = k|X_n = j) = \mathbb{P}(X_l = k|X_n = j) \cdot \mathbb{P}(X_m = i|X_n = j)$. □

**二、(10 分)** Let $\{X_n : \Omega \to S\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ be an irreducible Markov chain and $j \in S$. Prove that $j$ is recurrent if and only if $f^*_{ij} = 1$, $\forall i \neq j$.

**分析:** 本题改编自 Theorem 1.2.10 ($f^*_{ij}$ 的 0-1 二值性) 与 Lemma 1.5.1. 证明 "⇒" 方向

的思路是考虑从 $j$ 状态出发, 经 $i$ 状态后再回到 $j$ 的过程; 而要证明 "$\Leftarrow$" 方向, 可以将 $f^*_{jj}$ 用诸 $f^*_{ij}$ 表示, 从而应用题目的条件.

**证明:** "$\Rightarrow$": 由于马尔可夫链不可约, 所以对任意 $i \in S$, $i \neq j$, 都有 $j \rightsquigarrow i$. 那么, 存在 $k > 0$, 使得 $p^{(k)}_{ji} > 0$. 由 $j$ 常返知 $f^*_{jj} = 1$, 从而有

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{P}(X_n \neq j \ \forall n > k | X_0 = j) \\
&\geq \mathbb{P}(X_k = i, X_n \neq j \ \forall n > k | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_n \neq j \ \forall n > k | X_k = i) \cdot \mathbb{P}(X_k = i | X_0 = j) \\
&= \mathbb{P}(X_n \neq j \ \forall n > 0 | X_0 = i) p^{(k)}_{ji}.
\end{aligned}$$

因此, $\mathbb{P}(X_n \neq j, \forall n > 0 | X_0 = i) = 0$, 从而 $f^*_{ij} = 1$.

"$\Leftarrow$": $f^*_{jj} = p_{jj} + \sum_{i \neq j} p_{ji} f^*_{ij} = \sum_{i \in S} p_{ji} = 1$. 所以 $j$ 常返. □

**三、(10 分)** Let $C = C(j)$ be a positive recurrent communicating class. Prove that for any state $i$, $f^*_{ij} = \pi_i(C)$.

**分析:** 改编自 Exercise 1.4.3. 需要注意题干中没有 $i \in S_{tr}$ 的条件, 因此需要分类讨论. $i \notin S_{tr}$ 的情况很平凡, 而 $i \in S_{tr}$ 时也只需比较讲义 1.4 节核心定理与时均收敛性两式即得.

**证明:** 我们分情况讨论.

(1) 若 $i \in S_{tr}$, 则由 Theorem 1.4.2 与 Proposition 1.3.13 (时均收敛性) 可知

$$\pi_i(C)\, \pi_j = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p^{(m)}_{ij} = f^*_{ij} \pi_j.$$

因为 $j$ 正常返, 所以 $\pi_j > 0$. 从而有 $f^*_{ij} = \pi_i(C)$.

(2) 若 $i \notin S_{tr}$,

(i) 若 $i \in C(j)$, 则 $\pi_i(C) = 1$. 因为 $i$ 常返且 $i \rightsquigarrow j$, 所以 $f^*_{ij} = 1 = \pi_i(C)$;

(ii) 若 $i \notin C(j)$, 则 $\pi_i(C) = 0$. 因为 $i$ 与 $j$ 不互通, 所以 $f^*_{ij} = 0 = \pi_i(C)$.

综上所述, 对任意的 $i \in S$, 都有 $f^*_{ij} = \pi_i(C)$. □

**四、(10 分)** Let a Markov chain have the transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

where $a_j > 0$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = 1$. Is this Markov chain recurrent?

**分析:** 本题改编自 Exercise 1.5.8. 由于题目的转移矩阵是上三角矩阵, 因此本题十分简单, 是试卷中的又一道送分题. 除下面解答所给的方法外, 通过直接计算求出转移矩阵 $n$ 次幂的对角元, 并利用非常返的基本判定条件 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ 也很容易解出本题.

**解:** 不常返. 对于任意 $i \in \mathbb{Z}_+$, 由于对任意 $j > i$, 总有 $p_{ij} = a_{j-i} > 0$ 及 $f_{ji}^* = 0$, 因此由 $f_{ii}^* \le 1 - p_{ij} < 1$ 知 $i$ 不常返, 从而该马尔可夫链不常返.

**五、(10 分)** Prove that the symmetric two dimensional random walk on $\mathbb{Z}^2$ is recurrent.

**分析:** 本题改编自讲义 1.2.3 节例 2. 随机游走可以说是讲义第一章中最重要的例子, 几乎每次考试都会涉及. 因此建议大家考前务必牢记一维与二维对称随机游走常返, 以及三维对称随机游走不常返的证明. 这需要我们熟知常返的基本判定条件与 Stirling 公式.

**证明:** 显然二维对称随机游走的马尔可夫链不可约. 故只需考虑状态 $\mathbf{0} = (0,0)$ 的情形. 我们直接计算转移概率 $p_{\mathbf{00}}^{(n)}$:

$$p_{\mathbf{00}}^{(2n+1)} = 0, \quad p_{\mathbf{00}}^{(2n)} = \sum_{i+j=n} \frac{(2n)!}{i!j!i!j!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}, \quad \forall n \ge 1.$$

由 Chu–Vandermonde 恒等式知

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n},$$

所以

$$p_{\mathbf{00}}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2.$$

由 Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ 知 $p_{\mathbf{00}}^{(2n)} \sim \dfrac{1}{n\pi}$. 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{\mathbf{00}}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{\mathbf{00}}^{(2n)} = \infty$, 从而常返. □

**六、(10 分)** Let $X = \{X_n : \Omega \to \{1, \dots, N\}\}_{n=0}^{\infty}$ be an irreducible Markov chain where $2 \le N < \infty$. Prove:

(1) There are constants $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $\mathbb{P}(T_j > n | X_0 = i) \le C\rho^n$, $\forall n \ge 1$, $i, j \in S$.

(2) $m_{ij} = \mathrm{E}[T_j | X_0 = i] < \infty$.

**分析:** 本题改编自 Exercise 1.2.3, 此处直接放出讲义中的证明以供欣赏. 本题第 (1) 问的证明难以直接想出, 因此这就体现了为备考而背诵定理证明的用处. 然而, 这一问的证明思路其实也很直观. 由于该链常返, 我们可以找出整数 $M$, 使得对于任两状态 $i, j$, 从 $i$ 开始经 $M$ 步后仍未曾到达过 $j$ 的概率充分小. 这样, 从 $i$ 开始经过多个 $M$ 步后仍未曾到达过 $j$

的概率就会呈指数衰减, 命题即证.

此外, 由于从第 (1) 问结论容易推导出第 (2) 问, 所以第 (2) 问是人人都应拿分的. 事实上, 第 (2) 问的结论即等价于 Corollary 1.3.10 (状态数有限的马尔可夫链不存在零常返态).

(1) **证明:** 由 Theorem 1.2.9 (非常返态极限定理) 知, 若 $j$ 非常返, 则对任意 $i \in S$ 都有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, 故由 $\sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} = 1$ 与 $N < \infty$ 知至少有一个状态 $j$ 使 $\limsup_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$, 即 $j$ 常返. 由 $X$ 不可约知 $X$ 常返. 由 Theorem 1.2.10 ($f_{ij}^*$ 的 0-1 二值性) 知, 对任意 $i, j \in S$ 都有

$$1 = f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_j = n | X_0 = i).$$

因此, 存在 $0 < \delta < 1$ 与 $M \geq 1$, 使得

$$0 < N(1-\delta) < 1, \quad \mathbb{P}(T_j \leq M | X_0 = i) = \sum_{n \leq M} f_{ij}^{(n)} > \delta, \quad \forall i, j \in S.$$

这样, 对任意的 $i, j \in S$ 都有

$$\mathbb{P}(T_j > M | X_0 = i) \leq 1 - \delta < N(1-\delta).$$

取 $n = lM$. 我们断言

$$\mathbb{P}(T_j > lM | X_0 = i) \leq [N(1-\delta)]^l$$

对任意 $l$ 均成立. 这是因为, 若断言对 $1, 2, \ldots, l$ 均成立, 则由马尔可夫性质有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(T_j > (l+1)M | X_0 = i) \\
= &\frac{\mathbb{P}(X_0 = i, T_j > (l+1)M)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
= &\frac{\mathbb{P}(X_0 = i, T_j > M, X_{M+1} \neq j, \cdots, X_{(l+1)M} \neq j)}{\mathbb{P}(X_0 = i, T_j > M)} \frac{\mathbb{P}(X_0 = i, T_j > M)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\
\leq &(1-\delta) \frac{\sum_{k \neq j} \mathbb{P}(X_0 = i, T_j > M-1, X_M = k, X_{M+1} \neq j, \cdots, X_{(l+1)M} \neq j)}{\mathbb{P}(X_0 = i, T_j > M-1, X_M \neq j)} \\
\leq &(1-\delta) \sum_{k \neq j} \mathbb{P}(X_{M+1} \neq j, \cdots, X_{(l+1)M} \neq j | X_M = k) \\
= &(1-\delta) \sum_{k \neq j} \mathbb{P}(T_j > lM | X_0 = k) \\
\leq &(1-\delta) N [N(1-\delta)]^l \\
= &[N(1-\delta)]^{l+1},
\end{aligned}$$

即断言对 $l+1$ 成立. 令 $\beta = N(1-\delta)$, 则存在 $C > 0$ 使得对任意的 $0 \leq r < M$, 有

$$\mathbb{P}(T_j > lM + r | X_0 = i) \leq \beta^l \leq C \rho^{lM+r},$$

其中 $\rho = \sqrt[M]{\beta}$, $C \geq \max_{0 \leq r < M} \sqrt[M]{\beta^{-r}}$. 命题得证. □

(2) **证明:** 由 (1) 的结论知

$$m_{ij} = \mathrm{E}_{\mathbb{P}(\cdot|X_0=i)}[T_j] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} \le C \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} < \infty. \qquad \square$$

**七、(10 分)** Let $\{X_n\}$ be an irreducible Markov chain and $Q_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \text{ i.o.}|X_0 = i)$ for $i, j \in S$. Prove that if $j \in S$ and $Q_{ij} = 1$ for all $i \neq j$, then this Markov chain is recurrent.

**分析:** 本题改编自 Exercise 1.2.11 (访问时间). 题目中的 i.o. 是 infinitely often (出现无穷多次) 的缩写, 用 $\limsup$ 记号也可以表达相同的含义. 题目的思路在于用有限的过程 $Q_{ij}^N$ 去趋近于涉及无限的 $Q_{ij}$, 并利用 $f_{ij}^*$ 来推导出 $Q_{ij}^N$ 的递推关系及表达式.

**证明:** 令 $Q_{ij}^N = \mathbb{P}(\#\{n > 0|X_n = j\} \ge N|X_0 = i)$, 该数列随 $N$ 单调递减并且有 $Q_{ij} = \lim\limits_{N\to+\infty} Q_{ij}^N$. 此外, 我们可写出递推公式

$$Q_{ij}^N = \sum_{m=1}^{\infty} f_{ij}^{(m)} Q_{jj}^{N-1} = f_{ij}^* Q_{jj}^{N-1},$$

所以 $Q_{ii}^N = (f_{ii}^*)^N$, $Q_{ij}^N = f_{ij}^*(f_{jj}^*)^{N-1}$, 从而 $Q_{ij} = f_{ij}^* Q_{jj}$.

因为 $\forall i \neq j$, $Q_{ij} = 1$, 所以 $f_{ij}^* Q_{jj} = 1$, 从而 $f_{ij}^* = 1$. 由第二题结论知 $j$ 常返. 又因为该马尔可夫链不可约, 所以常返. $\square$

**八、(15 分)** Prove the Basic Limit Theorem: Let $X$ be an irreducible recurrent aperiodic Markov chain with transition matrix $P = (p_{ij})$, then $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \ \ \forall i, j \in S$.

**分析:** 本题直接考察 Theorem 1.3.3 (基本极限定理). 其核心思路是利用 Lemma 1.2.6, 将 $i = j$ 时的情况归结为可直接应用 Theorem 1.3.2 (基本更新极限定理) 的形式, 而在 $i \neq j$ 时是将情况归结为 $i = j$ 的情形, 并通过比较证明结论.

下面的证明省略了一点次要的细节, 但按此解法答卷仍可获得满分. 细节会在文末附录中补充, 同时附录还给出了 Theorem 1.3.2 的一个证明作为拓展, 以供感兴趣者阅读.

**证明:** 由 Lemma 1.2.6 知

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{n-k}, \ \forall n \ge 0,$$

其中约定 $f_{ij}^{(0)} := 0$, $p_{jj}^{(0)} = 1$. 下面我们分情况证明命题:

(1) 若 $i = j$, 令 $u_n = p_{jj}^{(n)}$, $a_n = f_{jj}^{(n)}$, $b_0 = 1$, $b_n = 0$, 这样, 序列 $\{u_n\}$ 有界且满足

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} u_k + b_n.$$

容易看出 $a_n \ge 0$, $\sum a_n = 1$, $\sum |b_n| = 1 < \infty$. 且由非周期性可知 $\{n|a_n = f_{jj}^{(n)} \neq 0\}$ 的最

大公因数为 1 (详见文末的附录), 符合 Theorem 1.3.2 (基本更新极限定理) 的条件, 因此应用定理可得

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k} = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}} = \pi_j, \quad \forall j \in S.$$

(2) 若 $i \neq j$, 由于 $X$ 不可约且常返, 故 $f_{ij}^* = 1$. 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(p_{ij}^{(n)} - \pi_j\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)} p_{jj}^{(k)} - \pi_j \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)}\left(p_{jj}^{(k)} - \pi_j\right) - \pi_j \sum_{m=n+1}^{\infty} f_{ij}^{(m)}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} f_{ij}^{(n-k)}\left(p_{jj}^{(k)} - \pi_j\right)\right].
\end{aligned}$$

当 $n$ 充分大时, 我们将求和式分为两半考虑. 当 $k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 时, 有 $p_{jj}^{(k)} - \pi_j$ 一致有界且

$$\sum_{k \leq \frac{n}{2}} f_{ij}^{(n-k)} \to 0;$$

当 $k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 时, $\sum\limits_{k > \frac{n}{2}} f_{ij}^{(n-k)}$ 有一致的上界 1, 且 $\left|p_{jj}^{(k)} - \pi_j\right|$ 可以任意小, $\forall k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(p_{ij}^{(n)} - \pi_j\right) = 0, \quad \forall i \in S.$$

综上所述, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $\forall i, j \in S$. □

**九、(10 分)** Consider the random walk on $\mathbb{Z}_+$ with the transition matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad 0 < p < 1, \quad p + q = 1.$$

Prove:

(1) It is recurrent $\Longleftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$.

(2) It is positive recurrent $\Longleftrightarrow p < \frac{1}{2}$.

(3) It is null recurrent $\Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}$.

**分析:** 本题改编自 Example 1.5.2 (a) 与 Example 1.3.3. 带有反射态 0 的一维随机游走也是马尔可夫链中的一个重要例子. 判断它的常返性需要综合运用多个判定条件, 因此本例也非常具有考试意义. 讲义 1.5 节的各个判定条件虽然难以记忆, 但其重要性是不言而喻的.

(1) **证明:** 我们解方程组 $Py=y$, 即

$$y_i=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j=qy_{i-1}+py_{i+1},\ i=1,2,\ldots.$$

可得通解为:

$$y_i=\begin{cases}c_1+c_2\left(\dfrac{q}{p}\right)^i, & p\neq\dfrac{1}{2},\\ c_1+c_2 i, & p=\dfrac{1}{2},\end{cases}\qquad \text{其中 } c_1,c_2 \text{ 为常数}.$$

(i) 当 $p\leq\frac{1}{2}$, 即 $p\leq q$ 时, 令 $H=\{0\}$, 容易验证 $\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j=y_i$, 且 $y_i\to\infty\ (i\to\infty)$, 由 Theorem 1.5.4 知 $P$ 常返.

(ii) 当 $p>\frac{1}{2}$, 即 $p>q$ 时, 令 $H=\{0\}$, 容易验证 $\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}y_j=y_i$, 且解 $y$ 非负、有界、非常数. 由 Theorem 1.5.2 知 $P$ 非常返.

综上所述, $P$ 常返当且仅当 $p\leq\frac{1}{2}$. □

(2) **证明:** 我们解方程组 $x=xP$, 即

$$x_0=qx_1,\quad x_i=\sum_{j=0}^{\infty}x_jp_{ji}=px_{i-1}+qx_{i+1},\quad i=1,2,\ldots.$$

易得

$$x_n=\frac{x_0}{q}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1},\ n\geq 1.$$

令 $\sum_{n=0}^{\infty}x_n=1$ 得

$$x_0=\frac{q}{q+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^i}.$$

从而 $P$ 正常返 $\Longleftrightarrow P$ 存在平稳分布 $x\Longleftrightarrow x_0>0\Longleftrightarrow p<\frac{1}{2}$. □

(3) 由本题第 (1) (2) 问, 显然可得.

# 附录

**此处补充第八题证明中省略的细节, 同时叙述并证明基本更新极限定理.**

**1.** 第八题证明中, 之所以能由非周期性得出 $\{n|f_{jj}^{(n)} \neq 0\}$ 的最大公因数为 1, 是因为有 $\{n|p_{jj}^{(n)} \neq 0\}$ 和 $\{n|f_{jj}^{(n)} \neq 0\}$ 的最大公因数相等这一结论, 而前一集合的最大公因数就是周期 $d$. 下面证明该结论:

**证明:** 记 $A = \{n|p_{jj}^{(n)} \neq 0\}$, $B = \{n|f_{jj}^{(n)} \neq 0\}$, $d_0 = \gcd(B)$. 由于 $f_{jj}^{(n)} \neq 0 \Rightarrow p_{jj}^{(n)} \neq 0$, 所以 $B \subseteq A$, 即 $d \leq d_0$. 另一方面, 对于任意 $n \in A$, 总能找出 $1 \leq r \leq n$ 以及 $r$ 个正整数 $m_1, m_2, \ldots, m_r$, 使得

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n,\ f_{jj}^{(m_i)} > 0\ \ (1 \leq i \leq r),$$

因此有 $d_0 \mid n$. 由 $n$ 的任意性知 $d_0 \mid d$, 命题证毕. □

**2.** Theorem 1.3.2 (基本更新极限定理) 在本题的证明里有不可或缺的重要性, 但讲义并未给出其证明. 我们先证明一个重要但讲义里未证的引理. 该引理在讲义第 40 页页脚处出现, 并且也应用在了 Theorem 1.1.5 ($i \leftrightsquigarrow j \Rightarrow d_i = d_j$) 的证明之中.

**引理** 设 $A \subseteq \mathbb{Z}_+$ 非空. 若 $\gcd(A) = d > 0$, 则有正整数 $N$ 使得对任意 $n > N$, 都能找出 $A$ 中的若干个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_s$ (可以重复), 使得它们的和为 $nd$.

**证明:** 不妨设 $0 \notin A$. 若 $A$ 是无限集, 则将 $A$ 中的元素从小到大排序为 $a_1 < a_2 < \cdots$, 记 $d_n = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 则 $\{d_n\}_{n>0}$ 是单调递减的正整数列, 从而有最小值 $d_0$ 以及 $r := \min\{n|a_n = d_0\}$. 由于 $\forall n$, $d_0 \mid d_n$, $d_n \mid a_n$, 因此 $d_r = d_0 = d$. 所以 $A$ 中存在有限多个元素 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 使得它们的最大公因数是 $d$, 因此只需考虑 $A$ 是有限集时的情况.

当 $A$ 是有限集时, 我们对 $A$ 的基数施归纳法. $|A| = 1$ 时命题显然成立. 若命题对 $|A| = k$ 成立, 下证命题对 $|A| = k+1$ 同样成立. 记 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}\}$, $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $d_k = \gcd(A_k)$, 则 $d = \gcd(d_k, a_{k+1})$. 取 $N$ 使得 $\forall n > N$, $nd_k$ 可表为 $A_k$ 中若干元素之和, 则 $N_k := (Na_{k+1} + 1)d_k$ 可表为 $A_k$ 中若干元素之和, 且 $\gcd(N_k, a_{k+1}) = d$. 记 $N_k = dx_k$, $a_{k+1} = dy_k$, 则 $\gcd(x_k, y_k) = 1$.

由 Bézout 定理知 $\forall n > x_k y_k$, 存在 $u_k, v_k$ 使得 $u_k x_k + v_k y_k = n$. 不妨设 $0 \leq v_k < p_k$, 否则我们可以屡次使用 $(u_k, v_k) \mapsto (u_k + q_k, v_k - p_k)$ 变换或其逆变换将 $v_k$ 置于该范围. 由于

$$0 \leq v_k q_k < p_k q_k < n = u_k p_k + v_k q_k,$$

故 $u_k > 0$. 所以 $n$ 可表为若干个 $x_k$ 与若干个 $y_k$ 之和, 即 $nd$ 可表为若干个 $N_k$ 与若干个 $a_{k+1}$ 之和. 这样, 命题对 $|A| = k+1$ 成立, 引理证毕. □

**3.** 下面叙述 Theorem 1.3.2 (基本更新极限定理), 并给出它的一个证明. 下面的证明摘自 Karlin 与 Taylor 的著作 "A First Course in Stochastic Processes" 第二版.

**定理** 若数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 与 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ 满足 $a_n \geq 0$, $\sum a_n = 1$, $\sum |b_k| < \infty$, 以及 $\gcd\{n|a_n > 0\} = 1$, 且存在有界数列 $\{u_n\}_{n\geq 0}$ 使得更新关系式 (renewal equation)

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}u_k + b_n \tag{8.1}$$

对任意 $n \geq 0$ 恒成立, 则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k} \quad \Big(\text{当} \sum_{k=0}^{\infty} ka_k = \infty \text{ 时约定等式右边的值为 } 0\Big).$$

**证明:** 此处约定 $b_n \geq 0$, 因为在证明基本极限定理时, 只需用到 $b_n \geq 0$ 的情形. 首先易归纳证明 $u_n \geq 0$. 因为 $u_n$ 有界, 记 $\lambda = \limsup\limits_{n\to\infty} u_n$, 并取 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j} = \lambda$.

我们断言, 当 $a_l > 0$ 时, 总有 $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-l} = \lambda$. 如果断言不成立, 则存在 $\lambda' < \lambda$ 使得 $u_{n_j-l} < \lambda'$ 对无穷多个 $j$ 成立. 记 $\varepsilon = a_l(\lambda-\lambda')/4$, $C = \sup\limits_{n\geq 0} u_n$. 我们选取充分大的 $N > l$, 使得对任意 $n \geq N$ 都有

$$\sum_{k=0}^{n} a_k > 1 - \frac{\varepsilon}{C}.$$

下面我们选择一个充分大的 $j$, 使得

$$n_j \geq N, \quad u_{n_j} > \lambda - \varepsilon, \quad u_{n_j-l} < \lambda' < \lambda, \quad 0 \leq b_{n_j} < \varepsilon$$

均成立, 同时 $u_n < \lambda + \varepsilon$ 对任意 $n \geq n_j - N$ 成立. 由 (8.1) 式有

$$\begin{aligned}
u_{n_j} &\leq \sum_{k=0}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + \varepsilon < \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + C \sum_{k=N+1}^{n_j} a_k + \varepsilon \\
&< \sum_{k=0}^{N} a_k u_{n_j-k} + 2\varepsilon < (a_0 + \cdots + a_{l-1} + a_{l+1} + \cdots + a_N)(\lambda+\varepsilon) + a_l\lambda' + 2\varepsilon \\
&\leq (1-a_l)(\lambda+\varepsilon) + a_l\lambda' + 2\varepsilon < \lambda - \varepsilon,
\end{aligned}$$

与 $u_{n_j} > \lambda - \varepsilon$ 相矛盾, 故断言成立.

记 $A = \{n|a_n > 0\}$. 将上述操作重复多次可得, 若 $l \in \mathbb{Z}_+$ 可写为 $A$ 中若干元素之和, 则 $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-l} = \lambda$. 由 $\gcd(A) = 1$ 及引理知存在 $M$ 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-l}$ 对任意 $l \geq M$ 均成立.

下面令 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$, 则有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ka_k = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n$, 并且 $a_{n+1} = r_n - r_{n+1}$ 对任意

$n \in \mathbb{Z}_+$ 均成立. 代入 (8.1) 式得

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \cdots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + r_1 u_{n-2} + \cdots + r_{n-1} u_0 + b_n.$$

如果令 $A_n = r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \cdots + r_n u_0$, 则上式可化为 $A_n = A_{n-1} + b_n$. 而直接计算可知 $A_0 = r_0 u_0 = (1-a_0) u_0 = b_0$, 故 $A_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$. 由于对任意自然数 $n$ 都有 $r_n, u_n \geq 0$, 所以对任意固定的 $N$ 以及任意充分大的 $j$, 都有

$$r_0 u_{n_j-M} + r_1 u_{n_j-M-1} + \cdots + r_N u_{n_j-M-N} \leq A_{n_j-M} = \sum_{n=0}^{n_j-M} b_n.$$

令 $j \to \infty$ 可得

$$(r_0 + r_1 + \cdots + r_N)\lambda \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

进而由 $N$ 选取的任意性可知

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} r_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad 即\ \lambda \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \Bigg/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n\right). \tag{8.2}$$

由于 $u_k \geq 0$ 恒成立, 因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n = \infty$ 的情况得证.

若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n < \infty$, 记 $\mu = \liminf\limits_{n\to\infty} u_n$. 再从 $\{u_n\}$ 选取趋于 $\mu$ 的子列 $\{u_{n_j}\}$, 经与 $\limsup$ 情形类似的分析可知, $\forall l \geq M$, $\lim\limits_{j\to\infty} u_{n_j-l} = \mu$. 令 $g(N) := \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} r_n$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty} g(N) = 0$, 且

$$\sum_{n=0}^{n_j-M} b_n \leq r_0 u_{n_j-M} + r_1 u_{n_j-M-1} + \cdots + r_N u_{n_j-M-N} + Cg(N).$$

令 $j \to \infty$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq (r_0 + r_1 + \cdots + r_N)\mu + Cg(N).$$

再令 $N \to \infty$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \mu \sum_{n=0}^{\infty} r_n, \quad 即\ \mu \geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \Bigg/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n\right).$$

结合 (8.2) 式, 有

$$\lambda \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \Bigg/ \left(\sum_{n=0}^{\infty} n a_n\right) \leq \mu.$$

而由上下极限的定义知 $\mu \leq \lambda$, 定理得证. □