

南京大学数学系期末试卷(A)

2020/2021 学年第一学期 考试形式 闭卷 课程名称 高等代数
 院系 数学 班级 学号 姓名
 考试时间 2021.1.14 任课教师 考试成绩

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. (20 分) 判断下列陈述是否正确, 并说明理由 (本题共 5 小题, 每小题 4 分).

1. 设 A, B 都是 n 级方阵, 则 $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.
2. 设 A, B, C 都是 n 级方阵, $A \neq 0$, 如果 $AB = AC$, 则 $B = C$.
3. 设 A, B 是 n 级方阵, 若矩阵方程 $AX = B$ 有解, 则 $\text{rank}(A, B) = \text{rank}(A)$.
4. 设 A 是 n 级方阵, $n \geq 2$, 则 A 可逆当且仅当 A 的伴随矩阵 A^* 可逆.
5. 如果向量组 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), i = 1, 2, 3$, 线性无关, 则向量组 $\beta_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}), j = 1, 2, 3$, 也线性无关.

二. (30 分) 填空题 (本题共 10 个空格, 每个空格 3 分).

1. 设 A 为 n 级实对称矩阵, 如果 $A^2 = 0$, 则 $A =$ _____.
2. 设 $P = \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix}', Q = \begin{pmatrix} 3, 2, 1 \end{pmatrix}, A = PQ$, 则 $A =$ _____,

 $A^{2021} =$ _____.
3. 设 A 为 n 级方阵并且 $|A| = -5, A^*$ 为 A 的伴随矩阵, $A^3 - 3A^2 + \frac{1}{5}AA^* = 0$, 则 $A^{-1} =$ _____.(用 A 表示)
4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = (4I + A)'(4I - A)^{-1}(16I - A^2)$, 其中 I 为 3 级单位
矩阵, 则 $|B| =$ _____.
5. 设 a 为实数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2a - 1 & 3 - 3a & a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则线性方程组 $AX = \beta$ 的

通解为 _____.
6. 设 A 是 n 级方阵, I 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2 = I$, 并且 $A \neq I$, 则 $|A + I| =$ _____.
7. 设 F 是数域, $A \in M_{n \times m}(F), B \in M_{m \times n}(F), m < n$, 则 $|AB| =$ _____.
8.
$$\begin{vmatrix} 1 - a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n \\ -a_2b_1 & 1 - a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & 1 - a_nb_n \end{vmatrix} =$$
_____.
9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

三. (15 分) 求向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 1, 5), \alpha_2 = (2, -2, 2, 10), \alpha_3 = (1, 0, 2, 5), \alpha_4 = (1, 3, 5, 5), \alpha_5 = (2, -3, 2, 13), \alpha_6 = (0, -1, 2, 9)$ 的一个极大线性无关组, 并将其余向量表为该极大线性无关组的线性组合.

四. (15 分) 讨论 a, b 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-1)x_3 - 2x_4 = 2b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (a+2)x_4 = -1 \end{cases}$$

- 1. 无解并说明理由;
- 2. 有唯一解并求其解;
- 3. 有无穷多解并求其通解.

五. (10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是数域 F 上一组线性无关的 n 维向量, 令

$$\beta_i = \alpha_i + \alpha_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

其中 $\alpha_{m+1} = \alpha_1$. 如果 m 是奇数, 证明向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 线性无关.

七. (10 分) 设 $A \in M_{n \times (n+1)}(\mathbb{R})$, I_n 为 n 级单位矩阵. 证明: 矩阵方程 $AX = I_n$ 有解当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.

八. (10 分) 设 n 级方阵 A 满足 $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A) = r \geq 1$, 证明: 存在 n 级可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 B 是 r 级可逆矩阵.

六. (10 分) 设 F 是数域, $A \in M_{n \times m}(F)$ 且 $\text{rank}(A) = r \geq 1$, 则 A 的任意 r 个线性无关的行向量与 r 个线性无关的列向量交叉处元素构成的 r 级子式非零.