2022 数学分析 C 期中

Will
NanJing University

Zavalon, 匿名群友
NanJing University

某平凡的数学讨论群

版本：0.10

日期：2022 年 11 月 6 日

注　　意

本试卷难度较大, 做之前请做好心理准备. 另外从分数构成来说, 最后一题应当是选做题而不是附加题.

一. (10 分) $p>0$, 讨论下列函数项级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

二. (10 分) 讨论下列数项级数敛散性.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2\sin n}$$

三. (10 分) 证明: 存在 $(0,\pi]$ 上可积 (但不绝对可积) 的瑕积分 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$, 不满足:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x=0$$

四. 完成下面两题 (5 分 $\times$ 2)

(1) 求 $\frac{1}{(1-x)^3}$ 的幂级数展开以及对应的收敛域;

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^n$ 的收敛域.

五. (10 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R. 证明: 存在 $b_n, n=0,1,\dots,$ s.t. $\forall\, x$ 满足 $|x-x_0|<\min\{|x_0-R|,|x_0+R|\}$, 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$$

六. (10 分) 给定 $1<\rho<\infty$, 证明: 存在常数 c_p 满足以下结论: 若 $f\in C^1([-1,1]), f(-1)<f(1)$且 $\max\limits_{[-1,1]}|f'|\leqslant 1$, 则:

$$\exists\, x\in[-1,1]\text{s.t.} f'(x)>0\text{且}\,|f(x)-f(y)|\leqslant c_p[f'(x)]^{\frac{1}{p}}\,|x-y|\,,\forall\, y\in[-1,1]$$

七. (10 分) 判断下列级数的敛散性; 如果收敛, 求其和.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{61}n\pi)}{n^3 \sin(\sqrt{61}n\pi)}$$

八. (10 分) 判断满足下列条件的 f 是否存在, 并解释:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R} 且 f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, n \in \mathbb{N}$$

九. (10 分) 证明:

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{2022}}{e^{\pi\sqrt{s}} - 1} \, \mathrm{d}s \in \mathbb{Q}.$$

十. 选做题: 选且只能选其一 (请注意分值) 阁下选做 (____).

A. (5 分) 求极限 (注: $\lfloor a \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq a\}$)

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \sum_{n=\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

B. (10 分) 给定 $n \leqslant 2$. 设 $f(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos xt \, \mathrm{d}t, x \in \mathbb{R}$. 证明: $\operatorname{supp} f \subset [-n, n]$.