

一. 填空题.

1. 8 阶循环群与 12 阶循环群直积的幂指数 $\exp(C_8 \times C_{12}) = \underline{24}$.

$$C_8 \times C_{12} = \{x = \langle x_1, x_2 \rangle : x_1 \in C_8, x_2 \in C_{12}\}.$$

幂指数: 满足 $\forall x \in G (x^n = e)$ 的最小正整数 n

$$\therefore x^n = \langle x_1, x_2 \rangle^n = \langle x_1^n, x_2^n \rangle = e \Rightarrow x_1^n = e_1 \in C_8, x_2^n = e_2 \in C_{12}.$$

$$\therefore n = [8, 12] = 24$$

2. 不同构的 72 阶 Abel 群共有 6 个.

利用定理 2.8.6 (P81).

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$. 共有 $C_{72}, C_2 \times C_{36}, C_3 \times C_{24}, C_6 \times C_{12}, C_2 \times C_2 \times C_{18}, C_2 \times C_6 \times C_6$

$$\cancel{27} = \cancel{2 \times (3 \times 6)} \quad C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_3 \quad \textcircled{1}$$

$$\cancel{2 \times (2 \times 18)} \quad C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_3^2 \quad \textcircled{2}$$

$$\cancel{2 \times (3 \times 12)} \quad C_2 \times C_2^2 \times C_3 \times C_3 \quad \textcircled{3}$$

$$\cancel{2 \times (4 \times 9)} \quad C_2 \times C_2^2 \times C_3^2 \quad \textcircled{4}$$

$$\cancel{2 \times (6 \times 6)} \quad C_2^3 \times C_3 \times C_3 \quad \textcircled{5}$$

$$\cancel{2 \times (2 \times 36)} \quad C_2^3 \times C_3^2 \quad \textcircled{6}$$

3. Hilbert 基定理断言 R 为 Noether 环时 $R[x]$ 也是这样的环.

见 P117 定理 3.7.2

Noether 环: 交换幺环 R 的每个理想都是有限生成的.

即 R 的每个理想 I 形如:

$$I = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i : r_i \in R \right\} \\ = Ra_1 + Ra_2 + \dots + Ra_n$$

4. 设 A_1, \dots, A_n 为交换幺环 R 的两两互素的理想, 依中国剩余定理,

$R/A_1 \oplus \dots \oplus R/A_n$ 同构于 $R/A_1 A_2 \dots A_n$ (或 $R/\prod A_i$).

见 P97 定理 3.3.2