五. (10分) [车间用电] 某车间有250台车床，由于经常需要检修等原因，每台只有80%的时间开动用电。若每台开动时耗电1千瓦。问：应供给这个车间多少电力才能保证正常生产（注：设计解决方案）

解：$b(k;n,p)$

$= b(k;250,0.8)$ 为同时开k台的概率

当 $k=(n+1)\times p \approx 200$ 时 $P(\xi=k)$ 概率最大

$\sum_{k=0}^{200} b(k;n,p)$ 较大

即开200台机器以下概率大

故提供约200千瓦电力.

$P\{u\le r\} = \sum_{k=0}^{r} b(k;250,0.8) \ge 0.999$

4

六 (10分) 设 ξ 和 η 是独立的随机变量且都服从分布 $N(0,1)$。证明随机变量

$$\rho = \sqrt[3]{\xi^2+\eta^2} \ge 0 \quad 和 \quad \varphi = \arctan(\eta/\xi) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

是独立的。

证明. 即证 $p(\rho,\varphi) = p(\rho)\cdot p(\varphi)$.

令 $x \sim \xi(x)$ $x = r\cos\theta$

$y \sim \eta(y)$ $y = r\sin\theta$

$\Rightarrow u \sim \rho(u)$ $u = r^{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow \begin{cases} x = u^{\frac{3}{2}}\cos v \\ y = u^{\frac{3}{2}}\sin v \end{cases}$

$v \sim \varphi(v)$ $v = \theta$.

$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\cos v & -u^{\frac{3}{2}}\sin v \\ \frac{3}{2}u^{\frac{1}{2}}\sin v & u^{\frac{3}{2}}\cos v \end{vmatrix} = \frac{3}{2}u^2$

$p(u,v) = p(r^{\frac{2}{3}},\theta) = p(x,y)\,|J|$

$= p_1(u^{\frac{3}{2}}\cos v)\, p_2(u^{\frac{3}{2}}\sin v)\, \frac{3}{2}u^2$

$\because p_1(x) = p_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$= \frac{3}{4\pi} u^2 \cdot e^{-\left[\frac{u^3\cos^2 v + u^3\sin^2 v}{2}\right]}$

$= \frac{3}{4\pi} u^2 \cdot e^{-\frac{u^3}{2}}$

$= p(u)\cdot p(v)$. 得证.

6

$\rho = \sqrt[3]{\xi^2+\eta^2}$ $\varphi = \arctan\frac{\eta}{\xi} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\rho\varphi$ 独立.

① $p(x,y) = p_\rho(x)\, p_\varphi(x)$.

② $\xi^2 \sim \chi_1^2$ $\eta^2 \sim \chi_1^2$ 且 ξ^2 与 η^2 独立

$\Rightarrow \xi^2+\eta^2$ 与 $\frac{\xi^2}{\eta^2}$ 独立

$\Rightarrow \rho$ ~ [illegible]