三、(10 分) 设 G 为 n 阶群，试证对 $a\in G$ 总有 $a^n=e$.

设 a 的阶为 d，则 $\langle a\rangle=\{a^0,a^1,\dots,a^{d-1}\}$ 为 G 的 d 阶子群.

依 Lagrange 定理，$|\langle a\rangle| \mid |G|$，即 $d\mid n$. 于是

$$a^n=(a^d)^{\frac{n}{d}}=e^{\frac{n}{d}}=e.$$

四、(每小题 5 分，共 10 分)

(1) 给出加法群 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ 的一个合成群列.

$$\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 2\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 18\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$$

或者 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 18\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ 或者 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq 9\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \trianglerighteq$

(2) 设 R 为幺环，a 为 R 中幂零元，证明 $1-a$ 为单位 (即乘法可逆元).

设 $a^n=0$，这儿 n 为正整数，则

$$(1-a)(1+a+\dots+a^{n-1})=(1+a+\dots+a^{n-1})(1-a)=1-a^n=1-0=1.$$

于是 $1-a$ 有乘法逆元 $1+a+\dots+a^{n-1}$，从而 $1-a$ 为单位。

五、(10 分) 设 G 为奇数阶 Abel 群，试证 $\prod_{x\in G}x=e$.

设 $|G|=2n+1$. 依 Lagrange 定理，G 不含二阶元. 于是 $x\in G\setminus\{e\}$ 时 $x\neq x^{-1}$. 我们可把 $G\setminus\{e\}$ 分成 n 对 $\{x_i,x_i^{-1}\}$ $(i=1,\dots,n)$. 因 G 中乘法满足交换律，我们有

$$\prod_{x\in G}x=\prod_{i=1}^{n}(x_ix_i^{-1})=e.$$