三、（10分）设环 R 有乘法单位元1，又设 $a,b\in R$ 且 $1-ab$ 有（乘法）逆元 c, 试证 $1-ba$ 有逆元 $1+bca$.

$(1-ab)c = c(1-ab) = 1$. 故 $abc = c-1$ 且 $cab = c-1$.

$$(1-ba)(1+bca) = 1-ba+(1-ba)bca = 1-ba+bca-babca$$
$$= 1-ba+bca-b(c-1)a = 1$$
$$(1+bca)(1-ba) = 1-ba+bca-bcaba = 1-ba+bca-b(c-1)a = 1.$$

四、（每小题5分，共20分）

(1) 给出加法群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ 的一个合成群列.

$$12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd 4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

或 $12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

(2) 设 R 为交换幺环，I,J 为其互素的理想，证明 $IJ=I\cap J$.

显然 $IJ=\{\sum a_ib_i : a_i\in I, b_i\in J\}\subseteq I\cap J$, 从而 $IJ\subseteq I\cap J$.

由于 I 与 J 互素, 有 $i\in I, j\in J$ 使 $i+j=1$. 任给 $k\in I\cap J$,

$k=1k=(i+j)k=ik+jk=\underbrace{ik}_{\in IJ}+\underbrace{kj}_{\in IJ}\in IJ$. 故又有 $I\cap J\subseteq IJ$.

因此 $I\cap J=IJ$.

(3) 设 R 为交换幺环，$a\in R$，且诸 $1-ax$ $(x\in R)$ 都是 R 的单位，试证 $a\in J(R)$, 这儿 $J(R)$ 是 R 的所有极大理想的交.

假如 $a\notin J(R)$, 则有 R 的极大理想 M 使得 $a\notin M$. 于是 $M+(a)=R=(1)$

从而有 $x\in R$ 使 $1-ax\in M$. 而 $1-ax$ 为单位 从而 $(1-ax)=R$, 故 $M=R$, 这与 $M\neq R$ 矛盾。

(4) 设交换幺环 R 为 Noether 环，I 为 R 的理想，证明商环 R/I 也是 Noether 环.

任给 R/I 中一个理想升链 $I_1/I\subseteq I_2/I\subseteq\cdots$

显然 $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots$ 为 R 中理想升链。

因 R 为 Noether 环, 必有 N 使 $I_N=I_{N+1}=\cdots$,

从而 $I_N/I=I_{N+1}/I=\cdots$

因此 R/I 满足理想升链条件 从而为 Noether 环.