南京大学数学系试卷

2019/2020 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 数值计算方法（B 卷）

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

考试时间 2020.8.12 任课教师 ________ 考试成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 ($22' = 2' \times 3 + 4' \times 4$ 分)

1. 设 $f(x) = 2^x$, 步长 $h = 1$, 则 $\Delta^3 f(n) =$ ________。

2. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个相异的插值节点, $l_i(x)(i = 0, 1, \cdots, n)$ 为 Lagrange 基本多项式, 则 $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) =$ ________ 。

3. 假设函数 $f(x) \in C^6[a, b]$, 且 $x_i = a + (i-1)h, h = (b-a)/n, i = 1, 2, \cdots, n+1$, 且 $f'(a) = f'(b)$。则利用复合梯形公式计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差余项为 $O(h^\eta)$, 其中 $\eta =$ ________ 。

4. 利用复合梯形公式计算积分时, $h = \frac{b-a}{2^{m-1}}$, 若把区间 $[a, b]$ 分别进行 2^{m-1} 等分和 2^{m-2} 等分可得到积分结果 $T_{m,1}$ 和 $T_{m-1,1}$, 则通过 Romberg 积分法可进一步提高精度, 即取 $T_{m,2}=$ ________, 记此时离散误差为 $O(h^\eta), \eta =$ ________

5. 设 $f(x) = 7x^7 + 5x^5 + 4$, 则 $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7] =$ ________, $f[2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^7, 2^8] =$ ________.

6. 设 I 为 n 阶单位方阵, 则其从属范数 $\|I\| =$ ______. 谱半径 $\rho(A)$ 是 $C^{n\times n}$ 中矩阵范数 $\|A\|$ 的 ________.

7. 非奇异矩阵一定存在 LU 分解吗？如果一定存在, 给出理由, 如果不一定存在, 请举出反例.

   ____

二. (10 分) 应用 Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

三. (10 分) 在 $-4 \le x \le 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表, 若用分段二次插值求 $f(x_i)$ 的近似值, 要使截断误差不超过 $\frac{\sqrt{3}e^4}{216}$, 问使用函数表的步长 h 应满足什么条件？

四. (10 分) 判断能否使用有限个节点 Gauss 积分方法计算得到 $\int_1^2 \frac{4x^3-16x^2+21x-9}{\sqrt{(2-x)(x-1)}}\mathrm{d}x$ 的精确解, 并给出理由或者计算过程。

五. (12 分) 已知 $x_0=\frac{1}{4}, x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{3}{4}$。推导以这三个点为求积节点在 $[0,1]$ 上的插值型求积公式，分析求积公式的代数精度。

六. (12 分) 确定下列求积公式中的参数使其精度尽量高，并且指出其代数精度。并基于此积分公式给出复合型积分公式。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))+\alpha(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

七. (10 分) 设 $f(x)=e^{x^2}$. 任取 $a<b$, 证明应用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所得结果比准确值大，并说明几何意义。

八. (14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式 $H_3(x)$, 使其满足插值条件，

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项 $f(x)-H_3(x)$ 的表达式.