# 南京大学数学系试卷

2010/2011 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 数值计算方法（B卷）

班级________ 学号________ 姓名________

考试时间 2011.6.26 任课教师 邓卫兵 考试成绩________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 六 | 六 | 七 | 八 | 九 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | | | |

**一. 填空题** (20分)

1. 设$f(0)=0,\ f(1)=6,\ f(2)=26$, 则$f[0,1]=$______, $f[0,1,2]=$______; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为__________________.

2. 设$h=\dfrac{b-a}{2m}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,2m$. 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合Simpson公式为____________________; 它是___ 阶收敛的，代数精度为___.

3. 设 $x_i=i(i=0,1,\cdots,n)$, $l_i(x)$ 是相应的 $n$ 次Lagrange 插值基函数, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(0)=$________.

4. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度为______.

5. 设$f(x)=7x^7+5x^5+4$, 则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$_____, $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$_____.

6. Romberg 序列可达到_____ 阶收敛速度.

7. 求解非线性方程$f(x)=0$的Newton 迭代公式为______________. 对单根情形，Newton 法的收敛阶数是_____.

**二.** (10分) 设$f(x)$ 为$x$ 的$k$ 次多项式, $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为互不相同的实数,且$k>m$. 试证明$f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 为$x$ 的$k-m$ 次多项式. 又当$k=m$ 和$k<m$ 时, $f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 值为多少?



**三.** (10分) 设函数$f(x)$ 在区间$[-h,h]$上充分可导. 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)],$$

以及该积分公式的余项和收敛阶.

**四.** (10分) 对区间$[a,b]$ 作等距剖分, 基点为$x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, 即$x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 试证明当$n$ 为偶数, $\int_a^b w_{n+1}(x)dx=0$, 其中$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 进一步, 利用证到的结论说明当$n$ 为偶数时闭Newton-Cotes型求积公式的代数精度为$n+1$.

**五**. (10分) 对于积分$\int_0^1 x^5\mathrm{d}x$, 若采用复合梯形公式需要使用多少个求积基点才能使积分近似值的误差不超过$10^{-8}$?

**六**. (10分) 试确定常数$A, B, C$ 及正数$\beta$, 使求积公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-\beta)+Bf(0)+Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式？



**七**. (10分) **五**. (10分) 证明切比雪夫多项式满足关系：

$$T_m(x)T_n(x)=\frac{1}{2}\{T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x)\}.$$

**八**. (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_1^3 x\sqrt{4x-x^2-3}\mathrm{d}x$$

化为能应用$n$ 点Gauss-Chebyshev 求积公式。当$n$ 为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

**九**. (10分) 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a)=f(a), H_3(b)=f(b), H_3(c)=f(c), H_3'(c)=f'(c),$$

其中$c=\dfrac{a+b}{2}$, 并求其余项$f(x)-H_3(x)$ 的表达式.