南京大学
离散数学期末考试

天影　　陈相相　　DiMersified

2022 年 10 月 10 日

评语: 这份试卷是孙智伟老师出的 2022 年 6 月离散数学期末考试题, 考试范围为图论和格与布尔代数. 纵观整套试卷, 绝大多数题目都是课件上的内容或往年原题. 在对这些内容非常熟悉的情况下, 一小时完成这张试卷也是完全有可能的.

一、填空题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 格 L 的吸收律表明对 $a, b \in L$, 有 $a =$____________=____________.
2. 完全图 K_n 为可平面图当且仅当 n 满足 ____________.
3. 设 m, n 为正整数且 $m \le n$, 则 $K_{m,n}$ 含 $l-$ 圈当且仅当 $l \in \{$ ____________ $\}$.
4. 叙述有限布尔代数表示定理:____________________________________.
5. 下面是四个半序集的 Hasse 图, 其中是有补格的有 ____________, 是分配格的有 ____________.

(1)　　(2)　　(3)　　(4)

分析: 这五道题都是对基础知识的考察, 有一些是原题, 有一些稍作改动, 都较为简单.

在第 5 题中, 为更快速地判断各图是否为分配格, 我们无需逐一验证, 只需要借助课上例子, 使用五角格和钻石格的不分配性即可. 图 (1) 不是格, 因为其中有两个元素没有上确界; 图 (2) 是全序集, 因此是分配格, 由于全序集形成的格总是分配的; 图 (3) 有同构于钻石格的子格, 因此不是分配格; 图 (4) 有同构于五角格的子格, 因此不是分配格.

答案:

1. $a \wedge (a \vee b)$, $a \vee (a \wedge b)$.
2. $n \le 4$.
3. $4, 6, \cdots, 2m$.
4. 任意有限布尔代数都同构于它的原子所组成的集合的幂集代数.
5. $(4), (2)$.

二、判断题 (每题 2 分, 共 10 分)

1. 设 G 是恰有 k 个连通分支的平面图, 其顶点数为 p, 边数为 q, 面数为 r, 则 $p-q+r=k+1$. (✔)

2. 如果一个无向图为 Euler 图, 则它必为 Hamilton 图. (✘)

3. Petersen 图 G 是可平面图. (✘)

4. 序列 $6,6,6,5,4,3,2$ 是某个 (无向) 简单图的度序列. (✘)

5. 至少有两个顶点的树是条路当且仅当它恰有两片树叶. (✔)

分析: 此试卷中的判断题全部是往年卷上的判断或证明题, 部分题为课件中结论或定理的直接应用. 唯一需要注意的是第一题, 要考虑 "外面" 被重复计算的情形. 此外, 往年的判断题也可被改为证明题, 这说明掌握每道题的原理是必要的. 总之, 如果认真复习课件, 讲义与试卷, 那就不会出现问题.

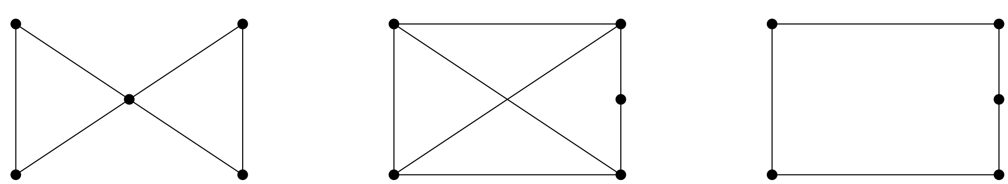
解:

1. 正确. 设各个连通分支为 G_1, $G_2, \cdots$, G_k. G_i 的顶点数, 边数, 面数分别记为 p_i, q_i, r_i. 一方面, 由 Euler 定理知 $p_i-q_i+r_i=2$. 另一方面, $p=\sum_{i=1}^{k}p_i$, $q=\sum_{i=1}^{k}q_i$. 注意到 k 个连通分支的"外面"是相同的, 因此, $r=\sum_{i=1}^{k}r_i-(k-1)$. 从而 $p-q+r=\sum_{i=1}^{k}(p_i-q_i+r_i)-k+1=k+1$.

2. 错误. 直接判断即可. 首先我们可以进行合情猜测, 若 Euler 图必为 Hamilton 图, 那么课上完全没必要将两者作为平行的概念进行介绍.

下面我们给出两者的定义: (1) 设无向图 G 有边且连通, G 中起点与终点相同且包含所有边的迹称为 G 的闭 Euler 迹. 含有闭 Euler 迹的无向图叫做 Euler 图. (2) 一个无向图 G 中包含所有顶点的圈叫 Hamilton 圈, 含有 Hamilton 圈的无向图叫 Hamilton 图.

下面给出几个例子, 以表明 Euler 图与 Hamilton 图之间没有蕴含关系. 分别为: (1) 是 Euler 图非 Hamilton 图; (2) 是 Hamilton 图非 Euler 图; (3) 既是 Euler 图也是 Hamilton 图.



(1) (2) (3)

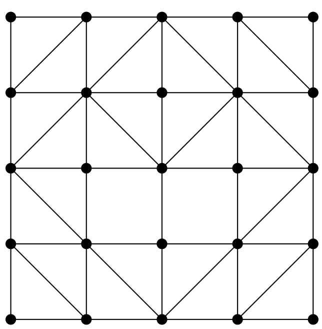
3. 错误. 本题为课上明确讲过的结论, 考试时理应直接将答案写出. 以下为进一步分析. 首先, 在课上平面图一节有如下定理: 设 G 为 p 阶平面图, 且每个面的次数至少为 $n\geq 3$. 则 $e(G)\leq \frac{n}{n-2}(p-2)$. 上式等号成立当且仅当 G 连通, 且每个面的次数恰为 n. Petersen 图有 5-圈, 但不含长度小于 5 的圈. 假如 Petersen 图有平面嵌入, 则其每个面次数至少为 5, 从而其边数 15 应不超过 $\frac{5}{5-2}(10-2)=\frac{40}{3}<14$, 矛盾. 因此, Petersen 图不是可平面图.

4. 错误. (无向) 简单图的度序列满足 $\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{k<i\le p} min\{d_i, k\}$, 而 $6+6+6+5 = 23 > 4(4-1)+4+3+2 = 21$, 不符合条件.

5. 正确. 本题为作业题. "$\Rightarrow$" 方向是显然的. 下证 "$\Leftarrow$" : 设 T 有 n 个顶点, m 条边, $m = n-1$. 于是 $2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2(n-1)$. 由于 T 恰有两片树叶, 故其余顶点次数不小于 2. 断言其余顶点次数均为 2, 否则 $2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) > 1+1+3+2(n-3) = 2n-1$. 因此, 树 T 是路.

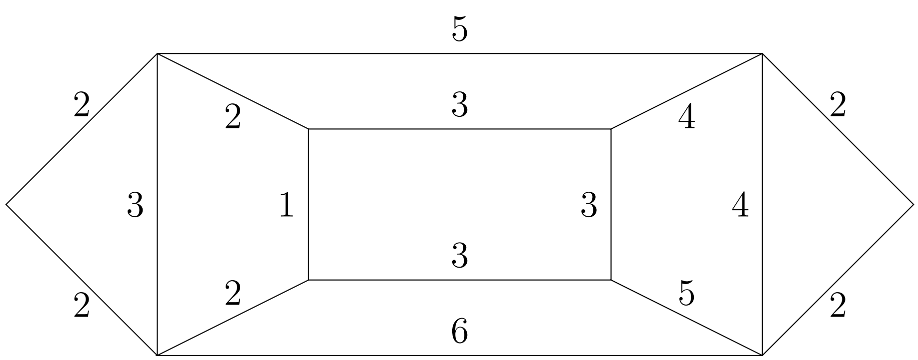
三、(5 分)

(1) **(2 分)** 下图 G 否为一笔画图? 扼要说明理由.



G

(2) **(3 分)** 画出下面赋权图的一棵最小 (生成) 树, 并指出这个最小树的各边权和.



分析:

(1) G 为一笔画图 $\Longleftrightarrow$ G 含有开或闭 Euler 迹 $\Longleftrightarrow$ G 中奇次点的个数为 2 或 0.

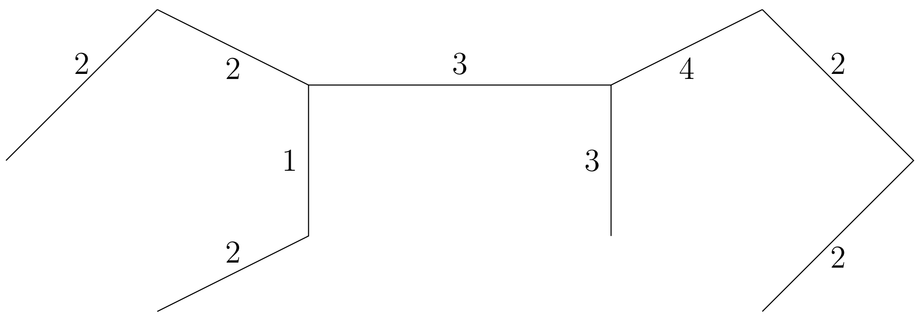
(2) 用课上所讲的破圈法, 逐次将每一个圈中权重最大的边删去即可.

破圈算法: G 不含圈时 G 为最小树. G 含圈时可在 G 中任取一圈, 然后删去此圈上权最大的一条边, 所得图仍连通 (因为圈上的边不是割边). 依次反复进行, 直到无圈为止, 所剩的未被删除的边连同 G 的全部顶点构成的子图就是 G 的最小树.

解:

(1) G 为一笔画图当且仅当 G 中奇次点的个数为 2 或 0, 而本题图中有 6 个奇次点, 因此不是一笔画图. 奇次点即为 G 中次数为奇数的点, 即在 G 中关联的边的条数为奇数的点.

(2) 最小树如下图所示 (不唯一), 其各边权和为 $2+2+1+2+3+3+4+2+2=21$.



四、(10 分) 设 $\langle L, \leq \rangle$ 与 $\langle L', \leq' \rangle$ 都是格结构, σ 是格 L 到 L' 的同态. 证明 σ 是保序映射, 即 $x, y \in L$ 且 $x \leq y$ 时 $\sigma(x) \leq' \sigma(y)$.

分析: 这是格同态简单性质的直接应用.

证明: 由 $x, y \in L$, $x \leq y$ 得 $x \vee y = y$. 由格同态 σ 知

$$\sigma(x) \vee \sigma(y) = \sigma(x \vee y) = \sigma(y).$$

因此, $\sigma(x) \leq' \sigma(y)$. □

五、(10 分) 设 B 为布尔代数, $a, b \in B$, 证明 $a \leq b \Leftrightarrow \bar{a} \vee b = 1$.

分析: 布尔代数没有难题, 只需记住定义并熟悉分配律即可解决本题.

证明: 一方面, $a \leq b \Rightarrow a \vee b = b \Rightarrow \bar{a} \vee b = \bar{a} \vee (a \vee b) = 1 \vee b = 1$. 另一方面, 由 $\bar{a} \vee b = 1$ 得 $a = a \wedge 1 = a \wedge (\bar{a} \vee b) = (a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$. 从而 $a \leq b$. □

六、(10 分) 一次舞会中有七名男生和七名女生, 参加跳舞者舞伴总为异性. 会后统计各人的跳舞次数为 $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 3, 3, 3, 3, 3$. 证明统计必有错误.

分析: fjddy 的笔记中出现过类似的题目. 本题看似可用一些判定度序列的定理证明, 但事实上由于数据过多而不可行. 本题实际考察的是二部图的知识.

证明: 假设统计无误. 将男生记为点 $u_1, u_2, \cdots, u_7$, 将女生记为点 $v_1, v_2, \cdots, v_7$. 若两人跳过舞, 则将两点连线, 由此得到二部图 $G = (V_1, V_2)$, 其中 $V_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_7\}$, $V_2 = \{v_1, v_2, \cdots, v_7\}$.

由二部图的性质, $\sum_{i=1}^{7} d_G(u_i) = \sum_{i=1}^{7} d_G(v_i)$. 不失一般性, 我们令 $u_1 = 7$, 此时 $3|u_i$ 且 $3|v_j$,

其中 $i=2,\cdots,7,\ j=1,\cdots,7$. 从而有 $3\nmid\sum\limits_{i=1}^{7}d_G(u_i),\ 3\mid\sum\limits_{i=1}^{7}d_G(v_i)$, 而这与 $\sum\limits_{i=1}^{7}d_G(u_i)=\sum\limits_{i=1}^{7}d_G(v_i)$ 矛盾. $\square$

七、(每题 5 分, 共 10 分) 设正整数 $N>1$ 有素数分解式 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$, 其中 $p_1<\cdots<p_r$ 为不同素数, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{Z}^+$, 集合 $D(N)=\{d\in\mathbb{Z}^+:d\mid N\}$ 由 N 所有正因子构成.

(1) 说明 $D(N)$ 依整除这个半序形成有界分配格.

(2) 刻画使 $D(N)$ 为布尔代数的 N 值.

分析: 本题由往年题改编而来. 如果刷过往年题目, 那第 (2) 问就没有难度. 事实上本题只要按照定义一步一步验证半序, 格, 有界, 分配等事实即可.

证明: (1) $\mid$ 为半序: 对于任意 $d_1,\ d_2,\ d_3\in D(N)$, 有 $d_1\mid d_1,\ d_1\mid d_2\wedge d_2\mid d_1\Rightarrow d_1=d_2,\ d_1\mid d_2\wedge d_2\mid d_3\Rightarrow d_1\mid d_3$ (均为整除运算的性质), 即满足自反性, 反对称性和传递性.

再证 $D(N)$ 为格: 易知 $d\in D(N)$ 当且仅当 d 可被唯一表为 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 的形式, 其中 $0\le a_i\le\alpha_i,\ 1\le i\le r$. 对于任意 $d_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r},\ d_2=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_r^{b_r}\in D(N)$, 不难验证 $\{d_1,d_2\}$ 有上确界

$$\sup\{d_1,d_2\}=p_1^{\max\{a_1,b_1\}}p_2^{\max\{a_2,b_2\}}\cdots p_r^{\max\{a_r,b_r\}}\in D(N)$$

与下确界

$$\inf\{d_1,d_2\}=p_1^{\min\{a_1,b_1\}}p_2^{\min\{a_2,b_2\}}\cdots p_r^{\min\{a_r,b_r\}}\in D(N).$$

因此 $D(N)$ 是格.

再证 $D(N)$ 有界: 对于任意 $d_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}\in D(N)$, 有 $1=p_1^0p_2^0\cdots p_r^0\mid d_1,\ d_1\mid N$ 且 $1,N\in D(N)$. 因此, $D(N)$ 有最大元 N 与最小元 1, 是有界格.

最后证 $D(N)$ 是分配格: 对于任意 $d_1=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r},\ d_2=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\cdots p_r^{b_r},\ d_3=p_1^{c_1}p_2^{c_2}\cdots p_r^{c_r}\in D(N)$, 有

$$d_1\vee(d_2\wedge d_3)=p_1^{\max\{a_1,\min\{b_1,c_1\}\}}p_2^{\max\{a_2,\min\{b_2,c_2\}\}}\cdots p_r^{\max\{a_r,\min\{b_r,c_r\}\}},$$

以及

$$(d_1\vee d_2)\wedge(d_1\vee d_3)=p_1^{\min\{\max\{a_1,b_1\},\max\{a_1,c_1\}\}}\cdots p_r^{\min\{\max\{a_r,b_r\},\max\{a_r,c_r\}\}}.$$

简单验证 $\max\{a_1,\min\{b_1,c_1\}\}=\min\{\max\{a_1,b_1\},\max\{a_1,c_1\}\}$ 可知

$$d_1\vee(d_2\wedge d_3)=(d_1\vee d_2)\wedge(d_1\vee d_3).$$

同理, $d_1\wedge(d_2\vee d_3)=(d_1\wedge d_2)\vee(d_1\wedge d_3)$.

(2) 假设 $\alpha_1\ge 2$. 对于 $p_1\in D(N)$, 若其存在补元 γ, 则由 $p_1\wedge\gamma=1$ (这里 1 为最小元) 知 γ 可被表为 $p_1^0p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$ 的形式. 此时 $p_1\vee\gamma<N$. 矛盾! 此时 p_1 没有补元, 从而 $D(N)$ 不是布尔代数.

同理可知, 若存在 $\alpha_i \geq 2$, 则 $D(N)$ 不是布尔代数. 而若对任意 $i = 1, 2, \cdots, r$ 都有 $\alpha_i = 1$, 则对于任意 $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$, 都存在 $\bar{d} = p_1^{1-a_1} p_2^{1-a_2} \cdots p_r^{1-a_r}$ 使得 $d \vee \bar{d} = N$, $d \wedge \bar{d} = 1$, 亦即 $D(N)$ 是有补格.

综上, $D(N)$ 为布尔代数当且仅当 N 是两两互异的素数之积, 亦即 N 无平方因子. □

八、(10 分) 证明围长为 5 的 k-正则图 G 至少有 k^2+1 个顶点. (注: G 的围长指 G 中最短圈的长度, k-正则图指各顶点的次数为 k.)

分析: 此题为往年题, 从一个点出发, 尽量多得向外构造新的点, 并保证圈长不小于 5.

证明: 在 G 中任找一个点 u. 由 $d_G(u) = k$ 知, 点 u 有 k 个与之相邻的点 $u_1, u_2, \cdots, u_k$. 上述 k 个点互不相邻, 否则会构成圈长为 3 的圈.

每一个点 u_i 有 $k-1$ 个与之相邻且不同于 u 的点 $u_{i,1}, u_{i,2}, \cdots, u_{i,k-1}$. 上述 $k(k-1)$ 个点互不重合, 否则会构成圈长为 4 的圈.

综上, 我们已经确定了 G 中 $1+k+k(k-1) = k^2+1$ 个点. 命题得证. □

九、(共 10 分) 设 G 是恰有 $n > 1$ 个顶点的无向简单图, 而且对 G 的任一对不相邻顶点 u 与 v, 都有 $d_G(u) + d_G(v) \geq n-1$, 利用 Ore 定理证明 G 必有 Hamilton 路.

分析: Hamilton 路是个较为冷僻的概念, 只在课件中出现过三次, 然而此题所述的结论正是其中之一. 本题结论是作为 Ore 定理的推论而出现在课件中的. 观察条件, 我们只要进行适当的构造, 在图中添加一个新的顶点, 创造出适用于 Ore 定理的条件即可.

证明: 记 G 中的顶点为 $u_1,\ u_2, \cdots,\ u_n$. 构造新的顶点 u_{n+1}, 并分别与上述 n 个顶点连线, 从而构成图 G'. 这样, 我们有 $d_{G'}(u_i) = d_G(u_i) + 1$, 其中 $i = 1, 2, \cdots,\ n$. 同时我们注意到 $\{(u,v) : u, v \in G',\ u \text{ 与 } v \text{ 不相邻 }\} = \{(u,v) : u, v \in G,\ u \text{ 与 } v \text{ 不相邻 }\}$

在 $n+1$ 阶图 G' 中, 任意一对不相邻的顶点 u 与 v, 都有 $d_{G'}(u) + d_{G'}(v) \geq n+1$. 由 Ore 定理知 G' 含有 Hamilton 圈 $u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} u_{n+1} u_{i_1}$, 其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $12 \cdots n$ 的一个排列. 因此, 图 G 含有 Hamilton 路 $u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}$. □

十、(每题 5 分, 共 15 分) 设 $d_1, \cdots, d_n$ 为正整数且 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$, 又设 G 是以 $d_1, \cdots, d_n$ 为度序列的无向图中连通分支最少的一个图.

(1) 假如 G 不连通, 证明 G 中某个连通分支含圈.

(2) 利用 (1) 说明 G 不连通时可通过修改图 G 构造出一个度序列仍为 $d_1, \cdots, d_n$ 的无向图 G' 使得 $\omega(G') < \omega(G)$.

(3) 利用 (1) 和 (2) 证明 G 必为树.

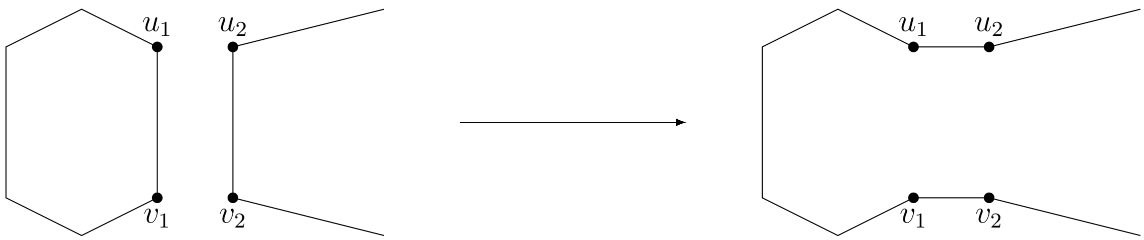
分析: 本题为往年原题, 难度最大. 题 (1) 用反证法, 在连通分支不含圈的情形下可推出 $\omega(G) = 1$. 题 (2) 考虑含有圈的连通分支. 而在 (1) 和 (2) 的条件下, (3) 就也是显然的了.

证明: (1) 假设 G 的连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ 都不含圈, 则诸 G_i 均为树. 由此, 我们有

$$e(G)=\sum_{i=1}^{k} e(G_i)=\sum_{i=1}^{k}(|V(G_i)|-1)=|V(G)|-k=n-\omega(G).$$

又由于 $e(G)=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i=n-1$, 故 $\omega(G)=1$, 即 G 连通. 矛盾!

(2) 当 G 不连通时, 其某个连通分支 G_i 含有圈 C. 设 G_j 为另一个连通分支, 取圈 C 上一条边 u_1v_1, 再取 G_j 中一条边 u_2v_2. 我们删去边 u_1v_1 与 u_2v_2, 作新边 u_1u_2 与 v_1v_2(u_1v_1 或 u_2v_2 为环时也可这么做). 所得图 G' 的度序列不变, 但 $\omega(G')<\omega(G)$. 其示意图如下.



(3) 由 (1) 和 (2) 知 G 必然连通, 否则 G 的某一连通分支含圈, 从而可构造图 G' 使得 $\omega(G')<\omega(G)$. 设 T 为 G 的生成树, 则

$$e(T)=n-1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} d_i=e(G),$$

从而 $G=T$ 为树. □