系别：______ 姓名：______ 学号：______ 任课教师：______

密 封 线 内 不 要 答 题

南京大学数学课程试卷

2017-2018 学年度第 二 学期 考试形式： 开卷 课程名称： 数值计算与试验 I

考试时间： 2018 年 9 月 8 日 考试成绩：____________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一、填空与简述题（每题 6 分，计 30 分）

1. 设 $f(x)=2x^6-3x^4+x^3+10$，则差商 $f[3^0,3^1,\cdots,3^6]=$ ___2___ $f[3^0,3^1,\cdots,3^7]=$ ___0___.

2. 已知插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 以及对应的函数值 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 则 n 阶均差 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 可表示为 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{f_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}$.

3. 插值型数值积分公式 $I_n(f)=\sum\limits_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$ 的求积系数表达式为 $A_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n}A_i=$ ___b-a___。

4. 设区间大小为 $h,h/2$ 时复合梯形公式的计算结果分别为 $T^{(1)},T^{(2)}$，且具有截断误差 $O(h^4)$，则通过外推技巧可以得到精度更高的结果为 ___ $\dfrac{16T^{(2)}-T^{(1)}}{15}$ ___。

5. "给定节点的插值型求积公式的阶数总是与所采用的插值多项式的次数是一致的"这个结论是否正确？ ___错___，

   理由：当 n 为偶数时，Newton-Cotes 公式的代数精度至少为 ___ $n+1$ ___。

二、求解题（每题 10 分，共 30 分）

（1）在 $-4\le x\le 4$ 上给出 $f(x)=e^x$ 的等距节点函数表，若用二次插值求 e^x 的近似值，要使截断误差不超过 $\dfrac{\sqrt{3}e^4}{216}$，问使用函数表的步长 h 应满足什么条件？

解：以 x_{i-1},x_i,x_{i+1} 为节点做二次插值多项式，则插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}),\quad \xi\in[x_{i-1},x_{i+1}]$$

式中 $x=x_i+th$, 则 x_{i-1},x_i,x_{i+1} 分别对应于 $t=-1,0,1$，且 $(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})=(t-1)t(t+1)h^3$

$$|R_2(x)|=\left|\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

则 $\le \dfrac{e^4}{6}\max\limits_{x_{i-1}\le x\le x_{i+1}}\left|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$

$$\le\frac{e^4}{6}h^3\max_{-1\le t\le 1}\left|(t-1)t(t+1)\right|\le\frac{e^4}{6}h^3\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3$$

令 $\dfrac{e^4}{9\sqrt{3}}h^3\le\dfrac{\sqrt{3}e^4}{216}$，则 $h\le 0.5$

（2）求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0,P(1)=P'(1)=1,P(2)=1$.

解：$x_0=0,x_1=1$，则 $f(x_0)=0,f(x_1)=1,f'(x_0)=1,f'(x_1)=2,$ 由两点埃尔米特插值公式

$$P(x)=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)$$

其中 $\alpha_0(x),\alpha_1(x),\beta_0(x),\beta_1(x),$ 是埃尔米特插值基函数，即

$$\alpha_0(x)=\left(1-2\frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=(1+2x)(x-1)^2$$

$$\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=(3\text{-}2x)x^2$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2=x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2=x^2(x-1)$$

因此，

$$P(x)=x^2(3-2x)+x(x-1)^2+2x^2(x-1)=x^3-x^2+x$$

(3) 已知 $x_0=\dfrac{1}{4},x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{3}{4}.$

推导以这三个点为求积节点在 $[0,1]$ 上地插值型求积公式;

分析求积公式的代数精度。

解：过这三点的插值多项式为

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\int_0^1 L_2(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=0}^{2}A_k f(x_k)$，其中

$$A_0=\int_0^1\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$A_1=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$$

$$A_2=\int_0^1\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

所以求积公式为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{2}{3}f(\dfrac{1}{4})-\dfrac{1}{3}f(\dfrac{1}{2})+\dfrac{2}{3}f(\dfrac{3}{4})$

上述积分公式至少具有二次精度，将 $f(x)=x^3,x^4$ 分别代入验证，可得对 $f(x)=x^3$ 精确成立，

对 $f(x)=x^4$ 数值积分与精确积分不能严格相等，故积分公式具有三次代数精度。

（4）求 x_0,x_1,A_0,A_1，使求积公式 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$ 具有尽量高的精度，并指出其精度。

解：把 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 分别代入上述公式并要求精确成立，得

$$\begin{cases} A_0+A_1=2 \\ A_0x_0+A_1x_1=\dfrac{2}{3} \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=\dfrac{2}{5} \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=\dfrac{2}{7} \end{cases} \text{解之得} \quad \begin{aligned} &x_0=\frac{1}{7}\left(3-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right), x_1=\frac{1}{7}\left(3+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right), \\ &A_0=1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}, A_1=1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}, \end{aligned}$$

故求积公式为：$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\mathrm{d}x \approx \left(1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right) f\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right) f\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

三、分析证明题（8+12=20 分）

（1）设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异的插值基点，$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 为 Lagrange 基本多项式，证明：

$$\sum_{i=0}^{n}(x_i-x)^j l_i(x)=0, j=1,2,\cdots,n$$

证明：对 $k=1,2,\cdots,n$，由二项式定理得

$$\sum_{j=0}^{n}(x_j-x)l_j(x)=\sum_{j=0}^{n}\left[l_j(x)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}l_j(x)\right]=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n}\left[\binom{k}{i}x_j^i(-x)^{k-i}l_j(x)\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-x)^{k-i}\sum_{j=0}^{n}x_j^i l_j(x)\right]=\sum_{i=0}^{k}\left[\binom{k}{i}(-x)^{k-i}x^i\right]$$

$$=(x-x)^k=0$$

（2）设 $f(x)\in C^4[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{(b-a)^2}{12}[f^{'}(a)+f^{'}(b)]$..

求上述求积公式的代数精度，并利用求积公式给出计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的一个复化求积公式。

解：1）当 $f(x)=1$，左边 $=b-a=$ 右边；当 $f(x)=x$，左边 $=\frac{b^2-a^2}{2}=$ 右边；

当 $f(x)=x^2$，左边 $=\frac{b^3-a^3}{3}=$ 右边；当 $f(x)=x^3$，左边 $=\frac{b^4-a^4}{4}=$ 右边；

当 $f(x)=x^4$，左边 $=\frac{b^5-a^5}{5}\neq$ 右边；所以代数精度为 3.

2）将 $[a,b]$ 作 n 等分，记 $h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, 0\le i\le n.$，复化求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]+\frac{h^2}{12}\left[f'(x_i)-f'(x_{i+1})\right]\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]+\frac{h^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right]$$

三、（本题 10 分）设 $p_n(x)$ 为不高于 n 次的多项式，$T_n(x)$ 为 n 次第一类 Chebyshev 多项式，y 为大于 1 的常数，令 $M=\max\limits_{-1\le x\le 1}|p_n(x)|$. 证明：

（1）$T_n(y)>1$；　　（2）$|p_n(y)|\le M|T_n(y)|$.

证明：（1）根据 Chebyshev 多项式的定义

$$T_n(y)=\frac{1}{2}\left[\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^n+\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)^n\right]$$

由 $y>1$，$y+\sqrt{y^2-1}>0; y-\sqrt{y^2-1}>0;\ y+\sqrt{y^2-1}>0\neq y-\sqrt{y^2-1}$。

由不等式 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},(a\neq b)$

$$T_n(y)>\sqrt{\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)^n\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)^n}=1$$

（2）记 $q_n(x)=\frac{p_n(x)}{p_n(y)}$，则 $q_n(y)=1$，由 Chebyshev 多项式的性质可得，使 $\max\limits_{-1\le x\le 1}|q_n(x)|$ 达到极小的多项式为

$$\overline{T}_n(x)=\frac{T_n(x)}{T_n(y)}，\text{即} \max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{T_n(x)}{T_n(y)}\right|\le\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{p_n(x)}{p_n(y)}\right|=\frac{M}{|p_n(y)|}$$

$$|p_n(y)|\le\frac{M|T_n(y)|}{\max\limits_{-1\le x\le 1}|T_n(x)|}=M|T_n(y)|$$