八、(10 分) 证明 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]=\{a+b\sqrt{-2}: a,b\in\mathbb{Z}\}$ 依数的加、乘法构成 Euclid 整环。

显然 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 为整环. 假如 $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 且 $\beta\neq 0$. 则 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\bar{\beta}}{|\beta|^2}$ 可表成 $r+s\sqrt{-2}$ 的形式，其中 r,s 为有理数.
取整数 m,n 使得 $|r-m|\leq\frac{1}{2}$, $|s-n|\leq\frac{1}{2}$. 再令 $\eta=m+n\sqrt{-2}$,
则 $\left|\frac{\alpha}{\beta}-\eta\right|^2=\left|(r-m)+(s-n)\sqrt{-2}\right|^2=(r-m)^2+2(s-n)^2\leq\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}<1$.
从而对 $\gamma=\alpha-\beta\eta$ 有 $|\gamma|^2<|\beta|^2$. 因此 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 依映射 $N(\omega)=|\omega|^2$ ($\omega\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]\setminus\{0\}$) 构成 Euclid 整环。

九、(10 分) 设 R 为交换幺环，且对 R 的每个元素 a 都有整数 $n>1$ 使得 $a^n=a$. 证明 R 的每个素理想都是极大理想.

假如 R 的素理想 P 不是极大理想，则有 R 的极大理想 M 真包含 P，取 $a\in M\setminus P$. 由条件有 $n>1$ 使 $a^n=a$，即 $a(a^{n-1}-1)=0\in P$. 因 $a\notin P$ 且 P 为素理想，必 $a^{n-1}-1\in P$. 从而 $1=a^{n-1}+(1-a^{n-1})\in M$.
这与 $M\neq R$ 矛盾.
由上，R 的每个素理想必为极大理想。