南京大学数学系试卷

2014/2015 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 数值计算方法（B卷）

班级________ 学号____________ 姓名________

考试时间 2015.6.21 任课教师______ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. 填空题 (18分)

1. 设$f(0)=0$, $f(1)=16$, $f(2)=46$, 则$f[0,1]=$________, $f[0,1,2]=$________; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为______________________________.
2. 设$h=\dfrac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n.$ 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合梯形公式为___________________________________; 它是____ 阶收敛的，代数精度为____.
3. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为$n+1$个互异的插值基点, $l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数, 则$\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^n l_i(x)=$___________.
4. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$ 的代数精度为________.
5. 设$f(x)=3x^7+4x^5+1$, 则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$_______, $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$_______.
6. 求解非线性方程的Newton法,对于单根情形其收敛阶数是____; 对于重根情形其收敛阶数是____; 如果用修改的Newton法, 其收敛阶数是____; 割线法的收敛阶数是____.

二. (10分) 设n 次多项式$f(x)$ 有互异的n 个实根$x_1, x_2, \cdots, x_n$. 试证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1} & k=n-1,\end{cases}$$

其中a_n 为$f(x)$ 的首项系数.

三. (12分) 设函数$f(x)$ 在区间$[-h,h]$上充分可导. 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)],$$

以及该积分公式的余项和收敛阶.

四. (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_1^3 x\sqrt{4x-x^2-3}\,\mathrm{d}x$$

化为能应用n 点Gauss-Chebyshev 求积公式。当n 为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

五. (10分) 应用Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

六. (16分) 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a)=f(a), H_3'(a)=f'(a), H_3''(a)=f''(a), H_3''(b)=f''(b),$$

并求其余项$f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

七. (12分) 用梯形公式和辛普森公式计算积分$\int_0^1 e^{-x}dx$, 并估计误差.

八. (12分) 试确定常数A,B,C 及正数β, 使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x) \approx Af(-\beta)+Bf(0)+Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式？