2019/2020 学年第一学期 考试形式 闭卷 课程名称 数学分析

班级 ________ 学号 ________ 姓名 ________

考试时间 2020.1.8 任课教师 梅加强等 考试成绩 ________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一. 填空题. (每小题 3 分, 共 24 分)

(1) 记 $f(x)=\tan x$, 则 $f^{(3)}(0)=$ ________.

(2) 设 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=2$. f 的反函数记为 g, 则 $g''(0)=$ ________.

(3) 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx=$ ________.

(4) 积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin^2 x}=$ ________.

(5) 函数 $x^{2020}e^{-x}$ 在 $[0,\infty)$ 中的最大值等于 ________.

(6) 函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+x)-x^2}{x^3}=$ ________.

(7) 函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\arcsin^2 x}\right)=$ ________.

(8) $\arctan x$ 的 Maclaurin 展开式为 ________.

二. (每小题 12 分, 共 24 分)

(1) 证明: 当 $x\in[0,\pi/2]$ 时, $\cos x\le\frac{2}{2+x^2}$.

(2) 当 n 为正整数时, 记 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$. 计算 I_1, I_2, I_3, 并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\frac{1}{2}$.

三. (每小题 8 分, 共 16 分):

(1) 证明 $\ln \dfrac{x}{\sin x}$ 是 $(0, \pi)$ 中的严格凸函数. (2) 当 $x \in (0, \pi/2)$ 时, $\sin x > xe^{-\frac{1}{6}x^2}$

四. (每小题 8 分, 共 16 分)

(1) 设 f 在 $[0,\infty)$ 中可导. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=f(0)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,\infty)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设 f,g 在 $[0,1]$ 中连续, 在 $(0,1)$ 中可导. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$[f(1)-f(0)]g'(\xi)=[g(1)-g(0)]f'(\xi).$$

五. (每小题 10 分, 共 20 分)

(1) 设 f 在 $[a,\infty)$ 中连续, 且 $f(x) \le \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. 证明 $f(x) \le 0$.

(2) 设 f 在 $[0,\infty)$ 中可导且 $|f'| \le M$. 证明: 当 $x,y>0$ 时

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{2}M|x-y|.$$

六. 附加题 (每小题 5 分, 共 10 分):

(1) 设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 中的连续凸函数. 证明 $\int_0^1 f(x^2)\,dx \geq f(1/3)$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 中二阶可导. 如果 f'' 有界且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.