NJU 数学分析 B 期中考试

2018.05.12

一、计算题 ($3\times 10=30$ **分**)

1. **计算积分** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

2. **求** p **的范围, 使得级数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\{\sin(\frac{1}{n^p})-[\ln(1+\frac{1}{n})]^p\}$ **收敛.**

3. **设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续,** $\displaystyle\min_{[a,b]} f(x)=1$, **求** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\int_a^b \frac{1}{|f(x)|^n}\,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{n}}.$

二、(10 **分**) **设** $f(x)$ **为连续正值函数, 证明函数** $\phi(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$ **在** $(0,+\infty)$ **上单调递增.**

三、(10 **分**) **设** $f(x)>0$ **在** $[0,+\infty)$ **中连续, 且** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ **收敛,**

证明 $\forall\alpha\in(0,2)$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x=+\infty.$

四、(10 **分**) **讨论当** $x>0$ **取什么范围时, 数项级数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ **收敛.**

五、(10 **分**) **已知数项级数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ **和** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}$ **均收敛, 其中** $a_n+b_n\neq 0$,

$b_n\neq 0,\forall n\in\mathbb{N}$, **证明** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$ **收敛.**

六、(20 **分**) **设** $r\in[0,1],\theta\in[0,2\pi]$. **求积分** $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\mathrm{e}^{i\theta}-r\mathrm{e}^{i\omega}|\,\mathrm{d}\omega.$

七、(10 **分**) **设** $f(x)$ **为** $[a,b]$ **上的有界函数,** $\Omega=\{x\in[a,b]:f(x-0)$ **存在** $\}$.
证明 f **为** $[a,b]$ **上的** Riemann **可积函数当且仅当** $[a,b]\setminus\Omega$ **为零测集.**

八、(20 **分**) **对任意的** $1<p<\infty$, **证明存在常数** $c=c_p$ **满足如下结论:**
若 $f\in C^2([-1,1])$, $f(-1)<f(1)$, **且** $\displaystyle\max_{[-1,1]}|f'|\le 1$, **则存在** $x\in[-1,1]$

使得 $f'(x)>0$ **且** $|f(x)-f(y)|\le c_p|f'(x)|^{\frac{1}{p}}|x-y|,\forall y\in[-1,1]$.
(**为降低题目难度, 可另假设** f' **至多有有限个临界点, 尽管此条件是冗余的.**)