南京大学数学系试卷

2012/2013 学年第二学期期末 考试形式闭卷 课程名称 数值计算方法(B 卷)

班级________ 学号__________ 姓名________

考试时间 2013.7.2 任课教师_____ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一. 填空题 (12分)

1. 初值问题 $y' = f(t,y), y(0) = \eta_0$的显式单步法$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h); y_0 = \eta_0$ 的相容性条件为__________.

2. 设$f(0) = 0,\ f(1) = 6,\ f(2) = 26,$ 则$f[0,1] =$ ____, $f[0,1,2] =$ ____; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为________________.

3. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$ 的代数精度为____.

4. 导出二级二阶显式Runge-Kutta法
$$y_{n+1} = y_n + h[b_1 f(x_n, y_n) + b_2 f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} f(x_n, y_n))]$$
中的系数满足的关系式:

二. (8分) 求变形的Euler方法（中点方法）

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)\right)$$

的绝对稳定区间。

三. (10分) 作适当变换，把积分

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6x}{\sqrt{x(1-3x)}}\mathrm{d}x$$

化为能应用n点Gauss-Chebyshev 求积公式。当n为何值时能得到积分的准确值？并利用Gauss-Chebyshev 求积公式计算它的准确值。

四. (10分) 设$P_2(x)$ 是$f(x)$ 的以$0, h, 2h$ 为插值基点的二次插值多项式，试由$P_2(x)$ 导出求积分$I = \int_0^{3h} f(x)dx$ 的一个插值型求积公式I_h, 并证明

$$I - I_h = \frac{3}{8}h^4 f'''(0) + O(h^5).$$

五. (10分) 试基于数值积分方法构造用于求解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的二步法$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$。

六. (10分) 求齐次差分方程

$$y(n) - 2\cos\theta y(n+1) + y(n+2) = 0$$

的通解。

七. (10分) 判断解常微分方程初值问题 $y' = f(t,y), y(t_0) = \eta_0$ 的线性多步法

$$y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}(3f_n - f_{n-1} + 4f_{n-2})$$

是否收敛？为什么？

八. (10分) 求函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式$p(x) = ax + b$ (只要求写出a, b满足的方程组).

九. (10分) 求函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[0,1]$ 上关于权函数 $W(x)=1$的最佳平方逼近一次多项式.

十. (10分) 证明：对任意的t，下列Runge-Kutta 方法是二阶的。

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(k_2+k_3) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+th,y_n+thk_1) \\ k_3=f(x_n+(1-t)h,y_n+(1-t)hk_1) \end{cases}$$