南京大学数学系期末试卷

___2020/2021___ 学年第二学期　考试形式__闭卷__　课程名称____高等代数____

院系___数学___班级____________ 学号______________________姓名____________

考试时间_____2021.06.21_____任课教师_______________　考试成绩________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一. 判断下列叙述是否正确; 正确的在 ( ) 内打 $\surd$; 错误的在 ( ) 内打 $\times$. 每小题 2 分, 共 20 分.

1. 设 W 是 $V=\mathbb{Q}^n(n\geq 2)$ 的非平凡真子空间, 则存在无穷多个子空间 U 使得 $V=W\oplus U$. ( )
2. n 维欧氏空间 V 的正交变换在 V 的任意一个基下的矩阵都是正交矩阵. ( )
3. 设 A 是 n 级实可逆方阵, 则 A 有 r 个实根当且仅当 A^* 有 r 个实根. ( )
4. 设 A 为 n 级复方阵, 则 $\mathrm{rank}(AA')=\mathrm{rank}(A)$. ( )
5. 设欧氏空间 V 的内积为 (α,β), $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$, 令 $a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)$, 则 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 半正定. ( )
6. 设 A 为 $n(n\geq 2)$ 级复对称矩阵, 则 A 可以对角化. ( )
7. 设实对称矩阵 A 与实对称矩阵 B 相似, 则 A 与 B 正交相似. ( )
8. 两个 n 级正定矩阵矩阵的乘积仍是正定矩阵. ( )
9. 具有相同的特征多项式的正交矩阵是相似的. ( )
10. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $X'AX=0$ 的解集合为一个子空间, 则 A 半正定或半负定. ( )

二. 填空题，每小题 5 分, 共 25 分.

1. 实二次型 $\sum\limits_{i=1}^{21}x_i^2+2\sum\limits_{i=1}^{21}x_ix_{22-i}$ 的秩为_____, 正惯性指数为_____.
2. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&3\end{pmatrix}$ 的初等因子为________.
3. $A=\begin{pmatrix}4&4\\-3&3\end{pmatrix}$ 的奇异值为________.
4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$, 则对 $X\in S^2=\{X\in\mathbb{R}^3\mid |X|=1\}$, $X'AX$ 的最大值为________.
5. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$ 的极分解为________.

三. (20 分) 给定实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+(t+1)x_2^2+(t+2)x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$.

1) t 取何值时 f 正定?

2) t 取何值时 f 负定?

四. (10 分) 求线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

的最小二乘解.

五. (20 分) 设 3 级正定矩阵 A 的三个特征值为 $6, 3, 3$, 又 $(1, 1, 1)'$ 是 A 的属于特征值 6 的特征向量. (1) 求 A 的属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量; (2) 求 A.

六. (10 分) 设 V 是 n 维欧氏空间, σ 为 V 上的正交变换, 证明: 存在 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{End}(V)$ 使得 $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, 并且 σ_1, σ_2 既是对称变换又是正交变换.

七. (15 分) 设 n 是正整数. 对任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$, 定义 $(f(x), g(x)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(1) g^{(k)}(1)$.

(1) (9 分) 证明: $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的内积;

(2) (6 分) 试求 $\mathbb{R}[x]_n$ 的一组标准正交基.