高等代数（一）期中试卷　2019-11-23

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　任课教师：

一	二	三	四	五	六	七	八	总分

一、判断题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确，并说明理由.

1. 设 F 是数域，$f(x), g(x) \in F[x]$. 如果 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根, 则 $f(x) \mid g(x)$.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x^2, g(x) = x$.

2. 设 F 是数域，$f(x) \in F[x]$. 如果 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 互素, 则 $f(x)$ 的重因式都是 2 重因式.

   解. 正确. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k \geqslant 2)$, 则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 由于 $(f'(x), f''(x)) = 1$，所以 $f'(x)$ 没有重因式，从而，$k-1 \leqslant 1$, 即 $k \leqslant 2$. 于是 $k = 2$.

3. 设 $f(x), g(x)$ 都是有理数域上的不可约多项式，则 $f(g(x))$ 在有理数域上不可约.

   解. 错误. 例如，$f(x) = x-1, g(x) = x^2+1$. 显然 $f(g(x)) = x^2$ 可约.

   又如，$f(x) = x+1, g(x) = x^2-2$. 而 $f(g(x)) = x^2-1$ 可约.

4. 多项式 x^6+6 在实数域上不可约.

   解. 错误. 实数域上的不可约多项式最多二次.

5. 设 $f(x), g(x)$ 都是整系数多项式， $h(x)$ 是有理系数多项式，并且 $f(x) = g(x)h(x)$, 则 $h(x)$ 是整系数多项式。

   解. 错误. 例如，$x^2+x = (2x^2+2x)\frac{1}{2}$.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）.

1. 设 $f(x)=x^6-2018x^5-2020x^4+2020x^3-2018x^2-2018x+1$, 则 $f(2019)=\underline{\ 2020\ }$.

2. 设 p 是素数，$f(x)=x^p+(p+1)x^2+p-1$, $g(x)=x^3+p$, 则 $(f(x),g(x))=\underline{\ 1\ }$.

3. 设 $i=\sqrt{-1}$, 则以 $1,-1,-1,2+3i,2+3i,2+3i$ 为根的次数最低的首一实系数多项式的标准分解式是 $\underline{\quad (x-1)(x+1)^2[(x-2)^2+9]^3 \quad}$.

4. $f(x)=x^4-\dfrac{7}{2}x^3-\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{3}{2}$ 的全部有理根为 $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 & 7 \\ 1 & 3x & x^3 & x^4 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的首项系数是 $\underline{\quad 6 \quad}$.

三、(20 分) 设 $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2-2x+1\in\mathbb{Q}[x]$.
(1) (10分) 求 $u(x)$, $v(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$;
(2) (10分) 求所有的 $F(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使得

$$\begin{cases} F(x)\equiv 2x^2+x+1 \pmod{f(x)}, \\ F(x)\equiv -15x-8 \pmod{g(x)}. \end{cases}$$

解. (1) 用带余除法

$$\begin{aligned} f(x)&=g(x)(x+2)+(3x-2); \\ g(x)&=(3x-2)\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\right)+\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

于是,

$$(-3x+4)f(x)+(3x^2+2x+1)g(x)=1.$$

故 $(f(x),g(x))=1$, $u(x)=-3x+4$, $v(x)=3x^2+2x+1$.

(2) 通解为

$$u(x)f(x)(-15x-8)+v(x)g(x)(2x^2+x+1)+f(x)g(x)h(x),$$

其中 $h(x)$ 为任何有理系数多项式.

四、（10 分）设整数 $n \geqslant 2$, 计算 n 级行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$.

解. $D = (a-c)\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-c)[a+(n-2)b](a-b)^{n-2} + c\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a-c)[a+(n-2)b](a-b)^{n-2} + c(a-b)^{n-1}$

$= (a-b)^{n-2}[(a-c)(a+(n-2)b) + c(a-b)].$

五、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & \frac{1}{2}+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & \frac{1}{3}+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & \frac{1}{n}+a_n^2 \end{vmatrix}$.

解.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & \frac{1}{2}+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ 0 & a_3a_1 & a_3a_2 & \frac{1}{3}+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & \frac{1}{n}+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} ia_i^2 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{n!}(1+\sum_{i=1}^{n} ia_i^2).$$

六、(20 分) 设整数 $n \geqslant 2$, $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x_1} & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} \\ \frac{1}{1+x_2} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \frac{1}{1+x_3} & 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1+x_n} & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$, A_{ij} 是 D 中第 i 行第 j 列元素的代数余子式， $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

(1) (10分) 求 D 的值；

(2) (10分) 求 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

解. (1) $D = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \begin{vmatrix} 1 & 1+x_1 & x_1(1+x_1) & \cdots & x_1^{n-2}(1+x_1) \\ 1 & 1+x_2 & x_2(1+x_2) & \cdots & x_2^{n-2}(1+x_2) \\ 1 & 1+x_3 & x_3(1+x_3) & \cdots & x_3^{n-2}(1+x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & x_n(1+x_n) & \cdots & x_n^{n-2}(1+x_n) \end{vmatrix}$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \prod_{1 \le i < k \le n} (x_k - x_i).$$

(2) 当 $j \neq 2$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij} = 0$;

当 $j = 2$ 时

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = D = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \prod_{1 \le i < k \le n} (x_k - x_i).$$

七、（10 分）设 F 为数域，$f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x) \in F[x]$. 如果 $(f_1(x), g_2(x)) = 1$, $(f_2(x), g_1(x)) = 1$, 证明：$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))$.

证明. 设 $(f_1(x), f_2(x)) = d_1(x), (g_1(x), g_2(x)) = d_2(x)$, 则

$f_1(x) = d_1(x)l_1(x), f_2(x) = d_1(x)l_2(x)$,

其中 $(l_1(x), l_2(x) \in F[x]$ 且 $(l_1(x), l_2(x)) = 1$,

$g_1(x) = d_2(x)k_1(x), g_2(x) = d_2(x)k_2(x)$,

其中 $(k_1(x), k_2(x) \in F[x]$ 且 $(k_1(x), k_2(x)) = 1$.

于是，$(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x))$

$= (d_1(x)d_2(x)l_1(x)k_1(x), d_1(x)d_2(x)l_2(x)k_2(x))$

$= d_1(x)d_2(x)(l_1(x)k_1(x), l_2(x)k_2(x))$.

因为 $(f_1(x), g_2(x)) = 1$, 所以 $(l_1(x), k_2(x)) = 1$,

因为 $(f_2(x), g_1(x)) = 1$, 所以 $(k_1(x), l_2(x)) = 1$.

于是 $(l_1(x)k_1(x), l_2(x)k_2(x)) = 1$

从而 $(f_1(x)g_1(x), f_2(x)g_2(x)) = d_1(x)d_2(x) = (f_1(x), f_2(x))(g_1(x), g_2(x))$.

八、（10 分）设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 是整系数多项式且 $|a_0|>\sum_{i=1}^n|a_i|$. 如果 a_0 为素数或 $\sqrt{|a_0|}-\sqrt{|a_n|}<1$, 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明. 首先，设 α 是 $f(x)=0$ 在 $\mathbb{C}$ 内的任一根，则 $|\alpha|>1$. 否则

$$|a_0|=|\sum_{i=1}^n a_i\alpha^i|\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|\cdot|\alpha|^i\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i|$$

与已知矛盾.

假设 $f(x)$ 在有理数域上可约，则 $f(x)=g(x)h(x)$, 其中

$$g(x)=g_0+g_1x+\cdots+g_sx^s, h(x)=h_0+h_1x+\cdots+h_tx^t$$

都是整系数多项式，$1\le s,t<n=\deg(f(x))$.

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s\in\mathbb{C}$ 是 $g(x)$ 的 s 个复根，则 $|\alpha_i|>1, i=1,\ldots,s$.

所以 $|g_0|=|g_s\alpha_1\cdots\alpha_s|>|g_s|\ge 1$, 同理 $|h_0|>|h_t|\ge 1$. 因此 $a_0=g_0h_0$ 是合数，与 a_0 是素数矛盾.

再由 $|g_0|>|g_s|$, $|h_0|>|h_t|$ 得 $|g_0|\ge|g_s|+1$, $|h_0|\ge|h_s|+1$.

于是

$$\begin{aligned}|a_0|&=|g_0|\cdot|h_0|\\&\ge(|g_s|+1)(|h_t|+1)\\&=|g_s|\cdot|h_t|+|g_s|+|h_t|+1\\&\ge|a_n|+2\sqrt{|g_s|\cdot|h_t|}+1\\&=|a_n|+2\sqrt{|a_n|}+1\\&=(\sqrt{|a_n|}+1)^2.\end{aligned}$$

所以 $\sqrt{|a_0|}-\sqrt{|a_n|}\geqslant 1$, 与 $\sqrt{|a_0|}-\sqrt{|a_n|}<1$ 矛盾.

故 $f(x)$ 在有理数域上不可约.