但 F 确有 q^n 个元素。

F 中元素均有这样的形式：$a(x)+(f(x))$

其中 $a(x)\in E[x]$，$(f(x))=\{b(x)f(x): b(x)\in E[x]\}$

∴ $a(x)+(f(x))=\{a(x)+b(x)f(x): b(x)\in E[x]\}$

1° 当 $a(x)$ 为 0 次多项式时：共有 q 个 $a(x)$.

此时任两个 $a_1(x)\neq a_2(x)$ 有 $a_1(x)+(f(x))\neq a_2(x)+(f(x))$.

假若不然，$a_1(x)=a_2(x)+b(x)f(x) \Rightarrow a_1(x)=a_2(x)$，$b(x)=0$ 矛盾!

2° 当 $a(x)$ 为 1 次多项式时，共有 q^2-q 个 $a(x)$.（∵ x 项系数不为 0）.

同理任两个不同的 $a_1(x), a_2(x)$ 有 $a_1(x)+(f(x))\neq a_2(x)+(f(x))$.

3° 当 $a(x)$ 为 2 次多项式时：共有 q^3-q^2 个 $a(x)$.

以此类推至 $a(x)$ 为 $n-1$ 次多项式时：共有 q^n-q^{n-1} 个 $a(x)$

当 $a(x)$ 次数大于等于 n 时：

总能在 E 中找到 e_0 s.t $a(x)-e_0x^k f(x)\in$ 为一 $(n-1)$ 次多项式.

$k=\deg(a(x))-n$.

此时 $a(x)+(f(x))=\{a(x)+b(x)f(x): b(x)\in E[x]\}$

$=\{a(x)-e_0x^kf(x)+(b(x)+e_0x^k)f(x): b(x)\in E[x]\}$

等于 $a(x)$ 为某一 $(n-1)$ 次多项式时的 $a(x)+(f(x))$.

故总共有 $q+q^2-q+q^3-q^2+\cdots+q^n-q^{n-1}=q^n$ 个元素.

√ 15. 设 L/K 为域扩张，则 L 中全体 K 上代数元构成 L 的子域.

见 P_{127} 定理 4.2.2

X. 16. 对于交换幺环 R 的理想 $I\neq R$，I 为 R 的素理想当且仅当商环 R/I 为整环

极大 ⟺ 域

见 P_{102}. 定理 3.4.3