南京大学数学系期末试卷 (A)

2019/2020 学年第一学期　考试形式 闭卷　课程名称 高等代数

院系 数学 班级______ 学号______ 姓名______

考试时间 2020.1.5 任课教师______ 考试成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

约定：本试卷中，$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩，A' 表示矩阵 A 的转置.

一. 判断题（本题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）.

判断下列陈述是否正确. 若正确，请在括号内打 “+”；若错误，请在括号内打 “−”.

1. 设 A 为 n 级方阵 $(n>1)$，k 是一个数，则 $|kA| = k|A|$.　(−)

2. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，如果 $A'A=0$, 则 $A=0$.　(+)

3. 设 A,B,C 都是 n 级方阵，$C\neq 0$, 如果 $AC=BC$, 则 $A=B$.　(−)

4. 设 A,B 为 n 级方阵，则 $|AB|=|BA|$.　(+)

5. 设 A,B 都是 n 级方阵，E 是 n 级单位矩阵. 如果 $(AB)^2=E$, 则 $(BA)^{-1}=BA$.　(+)

6. 初等矩阵的逆矩阵仍为同类的初等矩阵.　(+)

7. 设 A,B 是两个 $s\times n$ 矩阵. 如果 A 与 B 相抵（或等价），则 A 的行向量组与 B 的行向量组等价.　(−)

8. 设 $\alpha_i=(1,t_i,t_i^2,\dots,t_i^{n-1})$, $i=1,2,\dots,n$, 其中 $t_1,t_2,\dots,t_n$ 为互不相同的数，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩为 n.　(+)

9. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出，并且 $s\le t$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.　(−)

10. 如果向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4})$, $i=1,2,3$, 线性无关，则向量组 $\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j})$, $j=1,2,3,4$, 也线性无关。　(−)

二. 填空题（本题共 5 个空格，每个空格 4 分，共 20 分）.

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&-3&0\\1&0&3\end{pmatrix}$, $f(\lambda)=|\lambda E-A|$, 其中 E 为 3 级单位矩阵，则 $f(\lambda)=$ $\underline{(\lambda+3)(\lambda^2-10)}$.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}$, 则 $A^{2020}=$ $\underline{10^{2019}\begin{pmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{pmatrix}}$.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=6\alpha_1+(k+1)\alpha_2+7\alpha_3$, $\beta_2=k\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$, $\beta_3=k\alpha_1+4\alpha_2$, 则 β_1,β_2,β_3 线性相关的充要条件是 $k=$ $\underline{-4\pm2\sqrt{10}}$.

4. 设 A 是 n 级非零方阵，E 为 n 级单位矩阵. 如果 $A^2=A$, 则 $|A-E|=$ $\underline{0}$.

5. $\begin{vmatrix}2+x_1y_1&x_1y_2&\cdots&x_1y_n\\x_2y_1&2+x_2y_2&\cdots&x_2y_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_ny_1&x_ny_2&\cdots&2+x_ny_n\end{vmatrix}=$ $\underline{2^{n-1}(2+\sum_{i=1}^n y_ix_i)}$.

三. （15分）设向量组 $\alpha_1=(1,-1,-3,0)$, $\alpha_2=(2,-1,-4,1)$, $\alpha_3=(4,-3,-10,1)$, $\alpha_4=(3,1,-3,6)$, $\alpha_5=(3,0,-5,5)$.

(1) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩；

(2) 求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大线性无关组；

(3) 将向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中其余向量表为极大线性无关组的线性组合.

解. $(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3',\alpha_4',\alpha_5')=\begin{pmatrix}1&2&4&3&3\\-1&-1&-3&1&0\\-3&-4&-10&-3&-5\\0&1&1&6&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&3&3\\0&1&1&4&3\\0&2&2&6&4\\0&1&1&6&5\end{pmatrix}$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&3&3\\0&1&1&4&3\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&4&3&3\\0&1&1&4&3\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

1. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩为 3.

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ ($\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$ 或 $\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5$) 是一个极大线性无关组.

3. $\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_5=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4$.

四.（15分）讨论 λ 为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \end{cases}$$

1. 无解并说明理由;
2. 有唯一解并求其解;
3. 有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解.

解. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-3 \end{pmatrix}$

1. $\lambda = 2$ 时，方程组无解.
2. $\lambda \neq 2$ 且$\lambda \neq 1$ 时，方程组有惟一解：$x_1 = \frac{\lambda^2+\lambda-8}{\lambda-2}, x_2 = -1, x_3 = \frac{3-\lambda}{\lambda-2}$.
3. $\lambda = 1$ 时，方程组有无穷多解.

   此时，原方程组同解于方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = -2 \end{cases}$

   一个特解为$\gamma_0 = (5, 0, -2)$, 导出组的一个基础解系为$\eta = (-1, 1, 0)$.

   所以一般解为$\gamma = \gamma_0 + k\eta = (5, 0, -2) + k(-1, 1, 0)$, 其中$k$为任意常数.

五.（12分）设矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $AB = B + 3A$. 求矩阵 B.

解. 由 $AA^* = |A| \cdot E$ 及 $|A^*| = 8$ 知 $|A| = 2$（或者直接由 $8 = |A^*| = |A|^3$ 得 $|A| = 2$），所以 A 可逆. 因为 $AB = B + 3A$, 所以，$(A-E)B = 3A$, 从而 $A - E$ 可逆. 于是，

$$B = 3(A-E)^{-1}A = 3(A^{-1}(A-E))^{-1} = 3(E - A^{-1})^{-1} = 3(E - \frac{1}{|A|}A^*)^{-1} = 6(2E - A^*)^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

六.（12分）设有 s 个向量 $\alpha_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $1 \leqslant i \leqslant s \leqslant n$, 其分量满足

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{s} |a_{ij}|, \ j = 1, 2, \ldots, s,$$

证明: $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性无关.

证明. 令

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

只需证 $|B| \neq 0$. 反证法，假设 $|B| = 0$, 则 $B'X = 0$ 有非零解 $x = (x_1, \ldots, x_s)$. 设 $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq s}\{|x_i|\}$, 则由

$$a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \cdots + a_{sk}x_k = 0$$

得

$$|a_{kk}x_k| = |\sum_{i=1, i\neq k} a_{ik}x_i| \leqslant |x_k| \sum_{i=1, i\neq k} |a_{ik}|,$$

即 $|a_{kk}| \leqslant \sum_{i=1, i\neq k} |a_{ik}|$, 这与已知矛盾，故 $|B| \neq 0$. 从而 B 的行向量组线性无关，所以增加分量后，$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 也线性无关.

七. （12分）设 A 是数域 P 上 n 级方阵， E 为 n 级单位矩阵. 证明：

$$A^2+3A+2E=0 \text{ 当且仅当 } r(A+2E)+r(A+E)=n.$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(A+E)\\
&=\mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(-A-E)=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A+2E & 0\\ 0 & -A-E\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A+2E & 0\\ A+2E & -A-E\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} A+2E & A+2E\\ A+2E & E\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{r}\begin{pmatrix} -(A^2+3A+2E) & 0\\ A+2E & E\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix} -(A^2+3A+2E) & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{r}(A^2+3A+2E)+n,
\end{aligned}$$

所以 $A^2+3A+2E=0$ 当且仅当 $r(A+2E)+r(A+E)=n$.

如果给出下述证明，给一半分：

因为$(A+2E)(A+E)=A^2+3A+2E=0$,

所以 $\mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(A+E)\leqslant n$.

$$\begin{aligned}
\text{又因为 } \mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(A+E)&=\mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(-A-E)\\
&\geqslant \mathrm{r}(A+2E-A-E)\\
&=\mathrm{r}(E)=n.
\end{aligned}$$

故 $\mathrm{r}(A+2E)+\mathrm{r}(A+E)=n$.

八. （14分）设整数 $n\geqslant 2$. 试求所有 n 级复方阵 A 使得 $A=B^*$, 其中 B 为 n 级复方阵.

解. 如果 $A=B^*$, 则 $r(A)$ 只能是 $0,1$ 或 n. 以下说明这三种情况都可以.

1) $r(A)=n$, $A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{|A^{-1}|}(A^{-1})^*=|A|(A^{-1})^*$.

因为 $|A|$ 是复数，可取复数 k 使得 $k^{n-1}=|A|$. 由定义可知， $(kA^{-1})^*=k^{n-1}(A^{-1})^*$.

故 $A=(kA^{-1})^*$.

2) $r(A)=0$, 则取 $B=0$ 即可（或取任意满足 $r(B)\leqslant n-2$ 的 B).

3) $r(A)=1$, 则存在可逆矩阵 P,Q 使得 $A=P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Q$.

由 1) 知， $P=S^*,Q=T^*$. 又因为 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&I_{n-1}\end{pmatrix}^*$,

所以 $A=S^*\begin{pmatrix}0&0\\0&I_{n-1}\end{pmatrix}^*T^*=(T\begin{pmatrix}0&0\\0&I_{n-1}\end{pmatrix}S)^*$.

注意：对于任意两个 n 级方阵 X,Y, 总有 $(XY)^*=Y^*X^*$.

如果 X,Y 都可逆，则 $(XY)^*=Y^*X^*$.

事实上， $(XY)^*=|XY|(XY)^{-1}=|X||Y|Y^{-1}X^{-1}=|Y|Y^{-1}|X|X^{-1}=Y^*X^*$.

如果 X,Y 不可逆，则存在实数 r 使得 $|xE+A|\neq 0,|xE+A|\neq 0,\forall\, x>r$.

因此,$\forall\, x>r$, $[(xE+X)(xE+Y)]^*=(xE+Y)^*(xE+X)^*$.　　　(1)

设 $[(xE+X)(xE+Y)]^*=(f_{ij}(x))$, $(xE+Y)^*(xE+X)^*=(g_{ij}(x))$,

则 $f_{ij}(x)=g_{ij}(x),\forall\, x>r,i,j,=1,2,\ldots,n$.

由此可见， $\forall\, i,j,=1,2,\ldots,n$, 多项式 $f_{ij}(x)$ 与 $g_{ij}(x)$ 相等, 特别地，当 $x=0$ 时，它们相等.

故由 (1) 可知 $(XY)^*=Y^*X^*$.