南京大学数学系试卷

2014/2015 学年第二学期(中) 考试形式 闭卷 课程名称 计算方法

班级________ 学号__________姓名__________

考试时间 2015.4.30 任课教师_____ 考试成绩__________

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一. 分析与简述题 ($5\times 6=30$分)

(1) 当__________时，精度的损失称为相减相消. 当 $|x|$ 很小时，计算 $f(x)=\sin(x)-\tan(x)$ 应取 $f(x)=$__________才能避免相减相消.

(2) 如用 $\pi^*=\dfrac{2198810}{699903}$ 作为 π 的近似值，分析 π^* 具有几位有效数字?

(3) 设 $x_k^*,\ y_k^*\neq 0,\ (k=1,2,\cdots,m)$ 分别为 $x_k,\ y_k,\ (k=1,2,\cdots,m)$ 的近似值,并且它们具有相同的绝对误差界 ε, 试求 $\mu^*=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{x_k^*}{y_k^*}$ 的绝对误差 e_{μ^*}的界.

(4) 给出在字长为十进制二位计算机上用浮点运算分别从左到右和从右到左计算 $1+0.4+0.3+0.2+0.04+0.03+0.02+0.01$ 的结果，并对你的结果作出解释.

(5) 假设有一台电子计算机，字长 $t=4$, 阶码： $-3=-L\le J\le U=3$, 基数 $p=8$.
求这台计算机的规格化浮点数的个数 N.

(6) 非奇异矩阵一定存在三角分解吗? 解释你的理由.

二. 求解题 ($10\times 4=40$分)

(1) 用 Crout 分解求方程组（给出 L 和 U ） $Ax=b$, 其中 $b=[4,7,-1,0]^T$,

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\2&5&3&-2\\-2&-2&3&5\\1&3&2&3\end{bmatrix}.$$

(2) 用高斯列主元消去法（给出计算过程）解方程组 $Ax=b$, 其中 $b=[3,3,10]^T$,

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&0\\2&10&4\end{bmatrix}.$$

(3) 验证用 $Newton$ 迭代法求方程 $f(x)=x^3-2x-5=0$,在 $[2,3]$ 内的根 p 对任取的初始值 $x_0\in[2,3]$ 都是收敛的.

(4) 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\2&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ 的 $Cholesky$ 分解.

三. 分析证明题 $(12+8=20$分)

(1) 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续,当 $x\in[a,b]$, $\varphi(x)\in[a,b]$, $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $L=\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|<1$,证明方程 $x=\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内有唯一根 p，对任意 $x_0\in[a,b]$,由 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,\ldots,$ 确定的序列收敛于 p,又当 $\varphi'(p)\neq 0$时是线性收敛的，并且有误差估计式 $|x_n-p|\le\frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}|$.

(2) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(p)=0$, $f'(p)\neq 0, f''(p)\neq 0$, $\{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\frac{1}{2}\frac{f''(p)}{f'(p)}$.

四. 数值方法和算法推导题 (10分)

设$Ax=b$ 是对称的五对角方程组, 即

$$\begin{bmatrix}c_1&b_2&a_3&&\\b_2&c_2&b_3&\ddots&\\a_3&b_3&c_3&\ddots&a_n\\&\ddots&\ddots&\ddots&b_n\\&&a_n&b_n&c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_{n-1}\\f_n\end{bmatrix}.$$

试按照LDL^T 分解推导出其分解算法的计算公式（不包括最后回代求解），并分析分解算法乘除法的运算量.