南京大学数学系试卷

2009/2010 学年第 二学期 考试形式 闭卷 课程名称 数值计算方法（B卷）

班级________ 学号________ 姓名________

考试时间 2010.6.21 任课教师 邓卫兵 考试成绩________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、填空题（20分）

1. 设$f(0)=0, f(1)=16, f(2)=46$，则$f[0,1]=$ 16，$f[0,1,2]=$ 7；$f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为 $7x^2+9x$

2. 设$h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$. 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合梯形公式为 $\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)]$；它是 2 阶收敛的，代数精度为 1.

3. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为$n+1$个互异的插值基点，$l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数，则$\sum_{i=0}^{n} x_i^n l_i(x)=$ x^n.

4. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{3}{4}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{4}f(1)$ 的代数精度为 2.

5. 设$f(x)=3x^7+4x^6+1$，则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$ 3，$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$ 0.

6. Romberg 序列可达到 8 阶收敛速度.

7. 求解非线性方程的Newton法，对于单根情形其收敛阶数是 2；对于重根情形其收敛阶数是 1；如果用修改的Newton法，其收敛阶数是 2；割线法的收敛阶数是 1.618

二.（10分）设n次多项式$f(x)$ 有互异的n 个实根$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 试证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ a_n^{-1} & k=n-1,\end{cases}$$

其中a_n 为$f(x)$ 的首项系数.

证明：由题设 $f(x)=a_n W_n(x)$，其中 a_n为$f(x)$首项系数，

$W_n(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

令$p(x)=x^k$，则

$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{p(x_i)}{a_n W_n'(x_i)}=\frac{1}{a_n}p[x_1,x_2,\cdots,x_n]$

$=\frac{1}{a_n}p^{(n-1)}(\xi)/(n-1)!$

于是 ……

三.（10分）设函数$f(x)$ 在区间$[-h,h]$上充分可导. 试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)dx\approx\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)],$$

以及该积分公式的余项和收敛阶.

解：$p_1(x)=-\frac{x}{h}f(-h)+\frac{x+h}{h}f(0)$

$\int_0^h -\frac{x}{h}dx=-\frac{h}{2}$，$\int_0^h\frac{x+h}{h}dx=\frac{3}{2}h$.

即求积公式为 $\int_0^h\approx\frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)]$，

$r(x)=\int_0^h\frac{f''(\eta)}{2!}x(x+h)dx=\frac{f''(\eta)}{2!}\int_0^h x(x+h)=\frac{5}{12}h^3f''(\eta)$

$\eta\in(-h,h)$之间

其收敛阶为3.

四.（10分）应用Gauss 按比例列主元消去法解方程组

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&4&0\\2&10&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\10\end{bmatrix}.$$

解：$S_1=2, S_2=4, S_3=10$，$\frac{|a_{11}|}{S_1}=\frac{1}{2}$，$\frac{|a_{21}|}{S_2}=\frac{3}{4}$，$\frac{|a_{31}|}{S_3}=\frac{1}{5}$

$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\3&4&0&3\\2&10&4&10\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}3&4&0&3\\1&2&1&3\\2&10&4&10\end{pmatrix}$ $l_{21}=\frac{1}{3}, l_{31}=\frac{2}{3}$ 消元

$\longrightarrow\begin{pmatrix}3&4&0&3\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1&2\\\frac{2}{3}&\frac{22}{3}&4&8\end{pmatrix}$ $\frac{|a_{22}|}{S_2}=\frac{1}{6}$，$\frac{|a_{32}|}{S_3}=\frac{11}{15}$

故第三行为第二次消元的主行：$r_2\leftrightarrow r_3$

$\longrightarrow\begin{pmatrix}3&4&0&3\\\frac{2}{3}&\frac{22}{3}&4&8\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1&2\end{pmatrix}$ $l_{32}=\frac{1}{11}$ $\longrightarrow\begin{pmatrix}3&4&0&3\\\frac{2}{3}&\frac{22}{3}&4&8\\\frac{1}{3}&\frac{1}{11}&\frac{7}{11}&\frac{14}{11}\end{pmatrix}$