……陈述是否正确，若正确，请在括号内打"+"；若错误，请在括号内打"–"（共10题，20'）

1、若任一n维向量都可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关。（ ）

2、设齐次线性方程组的系数矩阵的秩为r，未知量的个数为n，则该方程组的任意$n-r$个解向量都是它的一个基础解系。（ ）

3、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$n$维列向量，$A$是$n$级可逆矩阵，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关当且仅当$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_r$线性相关。（ ）

4、设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$都是非齐次线性方程组$AX=\beta$的解，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的任一线性组合也是该方程组的解。（ ）

5、设A为$s\times n$矩阵，则A的秩大于等于$r\ (r\geq 1)$当且仅当A中有一个非零的r级子式。（ ）

6、设A为n级方阵$(n\geq 2)$，则$|A|\neq 0$当且仅当A的行向量组线性无关。（ ）

7、两个$s\times n$矩阵相抵（或等价）当且仅当A的行向量线性无关。（ ）

8、设A为n级方阵，则A是对角矩阵当且仅当A与所有n级方阵可交换。（ ）

9、设$A\in M_n(F)$，则$|A|=1$当且仅当A可表为有限个倍加初等矩阵$E(i,j(b))$的乘积，其中$b\in F$。（ ）

10、设A，B为n级方阵，如果$(AB)^2=I_n$，则$(BA)^2=I_n$（ ）

二、填空题（共10题，40'）

1、设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则$A^{100}=$ ______。

2、设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$ ______。

3、设$\alpha_1=(2,1,0)$，$\alpha_2=(3,2,5)$，$\alpha_3=(5,4,t)$，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关的充要条件是$t=$ ______。

4、设α，β是n维列向量，$\beta'\alpha\neq 1$，则$(I_n-\alpha\beta')^{-1}=$ ______。

5、设A为3级方阵，A^*为A的伴随矩阵，并且$|A|=2$，则$\left|A^*-(\frac{1}{4}A)^{-1}\right|=$ ______。

6、设3级方阵A的秩为1，$B=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&3&7\\3&2&k\end{pmatrix}$，并且$AB=0$，则$k=$ ______。

7、设A是$n\times m$实矩阵，并且$\operatorname{rank}(A)=r$，则$\operatorname{rank}(AA')=$ ______。

8、矩阵方程$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$的解为 ______。

9、设$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&-1&0&0&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}$，则$A^{-1}=$ ______。

10、设4元非齐次线性方程组为$AX=\beta$，$\operatorname{rank}A=3$，且η_1,η_2,η_3是它的3个解向量，$\eta_1=(2,3,4,5)'$，$\eta_2+\eta_3=(1,2,3,4)'$，则该方程的通解为 ______。

三、(10')设向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，$\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-1,2,0)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$。

1、求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩；

2、求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的一个极大线性无关组；

3、将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$中其余向量表为极大线性无关组的线性组合。

四、(10')讨论λ为何值时实数域上的线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+(4-\lambda)x_2+4x_3=2\\ 2x_1+4x_2+(4+\lambda)x_3=\lambda+1\end{cases}$$

1、无解并说明理由；

2、有唯一解并求其解；

3、有无穷多解并用其导出组的基础解系表示该非齐次线性方程组的一般解。

五、(10')设$A\in M_n(F)$。证明：

$3A^2+4A+I_n=0$当且仅当$\mathrm{rank}(A+I_n)+\mathrm{rank}(3A+I_n)=n$。

六、(10')设$A,B\in M_n(F)$，$AB=BA$，方程组$AX=0$和$BX=0$的基础解系分别为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$；

证明：$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_l$恰为方程组$ABX=0$的基础解系，当且仅当存在$C,D\in M_n(F)$使得

$CA+DB=I_n$。

七、(10')设$A\in M_{3\times2}(F)$，$B\in M_{2\times3}(F)$，并且$AB=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$。

证明：$BA=3I_2$。

八、(10')设$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B\in M_3(F)$。若$AB=BA$，

证明：存在$g(x)\in F[x]$使得$B=g(A)$

注：本试卷中，F表示数域（内含在标在开头）