从而可以得到一个序列$\{a_n\}$，满足 $a_n \mid a_{n-1}$? $a_2 \mid a_1$

∴ ~~(a_n)~~ $(a_{n-1}) \subseteq (a_n)$.

因此得到一个理想升链 $(a) \subseteq (a_1) \subseteq (a_2) \cdots \subseteq (a_n) \subseteq (a_{n+1}) \cdots$

∵ R为P.I.D ∴ R为Noether环.

∴ R的任意一个理想升链有极大元，i.e. $\exists N$ s.t $(a_N)=(a_{N+1})\cdots$

~~即从而 $\exists N$ s.t $a_N \sim a_{N+1}$ 相等 $(a_N = a_{N+1}\cdot b$ 则 $b=u$~~ 或 $a_{N+1}=u$ ×)

又 $a_{N+1} \mid a_N$ 即 $a_N = a_{N+1}\cdot b$，而 $a_N \sim a_{N+1}$.

$\Rightarrow$ a_N 为不可约元. 又 a_N 为 a 的因子.

故 a 有不可约因子.

综上有：a 必有不可约因子.

$f(\alpha)=0$.

18. L/K为域的代数扩张，$\alpha \in L$ 在K上的极小多项式为 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$. 设$\sigma$属于Galois群 $Gal(L/K)$。证明 $\sigma(\alpha)$ 在K上极小多项式为$f(x)$.

证 $f(\sigma(\alpha))=0$.

证明：

$Gal(L/K)=\{\sigma \in Aut(L) : \forall a \in K\ (\sigma(a)=a)\}$.

∵ $\sigma \in Gal(L/K)$.

∴ $\forall a,b \in L$. $\sigma(a+b) \overset{=a+b}{=} \sigma(a)+\sigma(b)$

$\sigma(ab) \overset{=ab}{=} \sigma(a)\sigma(b) \Rightarrow \sigma(a^n)=(\sigma(a))^n$.

$\forall c \in K$. $\sigma(c)=c$.

$$\begin{aligned}
∴ f(\sigma(\alpha)) &= [\sigma(\alpha)]^n + a_{n-1}[\sigma(\alpha)]^{n-1}+\cdots+a_0 \\
&= \sigma(\alpha^n)+a_{n-1}\sigma(\alpha^{n-1})+\cdots+a_0 \\
&= \sigma(\alpha^n)+\sigma(a_{n-1})\sigma(\alpha^{n-1})+\cdots+\sigma(a_0) \\
&= \sigma(\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0) \\
&= \sigma(f(\alpha)) \\
&= \sigma(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$