数学物理方程讲义答案

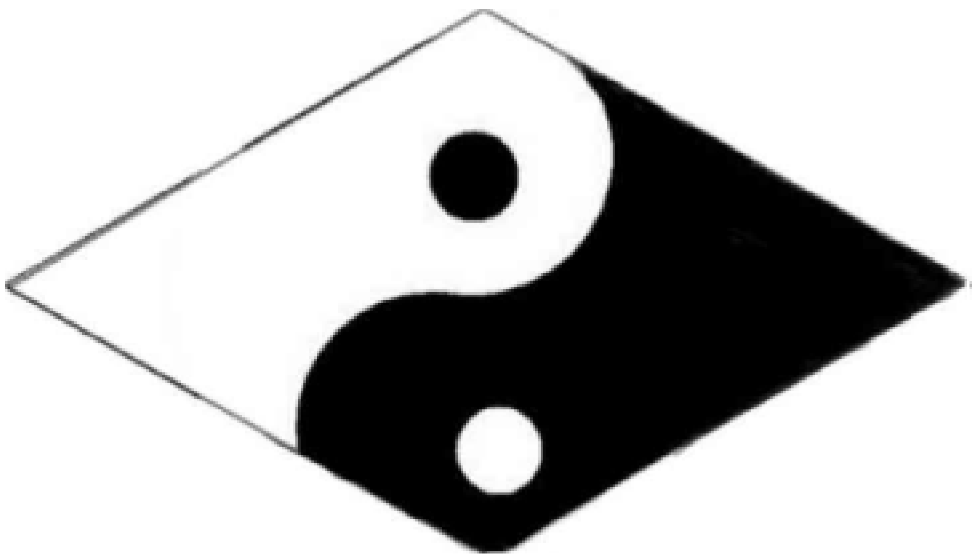
第三版

姜礼尚 陈亚浙

刘西垣 易法槐编

答案制作人:

废柴



前言

在阅读《数学物理方程讲义》(姜礼尚等)的过程中，鄙人对其中的课后习题进行了书写，并汇总于此。借此希望能对阅读该书的读者起到一个借鉴的作用，最好是基于自我思考之后，再结合鄙人所写。

实在是因鄙人水平有限，其中答案必然存在不少疏漏或者错误之处，然而大丈夫说出去的话--泼出去的水，对于鄙人的任何言论不负任何责任，言下之意，错了别来找我。

更加幸运的是，由于个人惫懒，此次不注重排版，并且习题求解过程未必严谨，重在解释。一言以蔽之，凑合着看吧~

不过鄙人倒是留了个私人微信公众号(见页脚即可)，对于数学有关问题或者人生诸如钱财过多的苦恼，欢迎联系鄙人进行瞎谈，另公众号将不适定性发布一些关于数学题目的分析及乱七八糟的东西。

最后衷心地祝愿足下的成绩越来越好，中国的数学越来越强。

废柴

23701998@qq.com

戊戌年于西安

第一章 方程的导出和定解条件

1. 解：

以弦的左端为原点，弦为 x 轴建系~

由题可知外力为 0，即 $f(x,t)=0$

又初始位移存在函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{2a}{l}x & 0\le x<\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{2a}{l}(l-x) & \dfrac{l}{2}\le x<l\end{cases}$$

故定解问题为：

1^0.泛定方程：$\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x\in(0,l), t\in(0,+\infty)$

2^0.初始条件：$u(x,0)=\varphi(x), x\in[0,l]$

$u_t(x,0)=\psi(x)=0, x\in[0,l]$

3^0.边界条件：$u(0,t)=u(l,t)=0$（弦线两端固定）

2. 解：

由动量定理及已知条件

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\left(u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right)dx$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}f(x,t)\,dxdt+T\int_{t_1}^{t_2}\left(u_x(x_2,t)-u_x(x,t)\right)dt+\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{t_1}^{t_2}ku_t dt\right)dx$$

于是有 $\rho u_{tt}-Tu_{xx}+ku_t=f(x,t)$

3. 解：

设 $u=u(x,t)$ 为 t 时刻 x 点伸长量，设横截面积为 S，考查 $[x,x+\Delta x]$ 一段，则有

$$\rho S\ \ \Delta x\ \ u_{tt}=ES\,u_x\big|_{x+\Delta x}-ES\,u_x\big|_x$$

$$\Rightarrow \rho S\ \ u_{tt}=\frac{\partial}{\partial x}ESu_x$$

$$\Rightarrow u_{tt}-\frac{E}{\rho}u_{xx}=0$$

4. 解：

上端固定说明$u(0,t)=0$，下端悬有质量为 P 的重物可得

$Eu_x(l,t)=pg/s$，即有边界条件

$$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(l,t)=\dfrac{p}{E} \end{cases}$$

5. 解：

在圆锥形杆上，取$[x,x+\Delta x]$上一段，在 t 时刻振动，x 处有位移$u(x,t)$，此时这段杆的两端横坐标分别为$x+u(x,t), x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)$，从而有相对伸长量等于

$$\frac{[x+\Delta x+u(x+\Delta x,t)]-[x+u(x,t)]}{\Delta x}=u_x(x+\theta x,t)$$

取$\Delta x\to 0$，即得在点x处，相对伸长为$u_x(x,t)$.

由胡克定理，张力$T(x,t)=Eu_x(x,t)$

此外容易得知圆锥在 x 点处的截面面积存在函数：

$$S(x)=\pi r^2(x)=\pi\left(\frac{h-x}{h}R\right)^2=\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$$

从而由动量守恒及胡克定律可知：

$$\rho S(x)\Delta x u_{tt}(x,t)=ES(x)\left(u_x|_{x+\Delta x}-u_x|_x\right)$$

再令$\Delta x\to 0$，即有

$$\rho\left(1\text{-}\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$$

6. 解：

设$u=u(x,y,z,y)$为 t 时刻在(x,y,z)处的温度，k 为导热系数，α_0为热交换系数，于是有如下定解问题：

1^0.泛定方程：$u_t - a^2 \Delta u = 0$

2^0.初始条件：$u(x, y, z, 0) = 100$

3^0.边界条件：$\mathrm{k}\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = \alpha_0 (37 - u)\big|_{\Sigma}$

7. 解：

由题可知，对于该热传导问题 $f = 0$，存在如下定解问题：

1^0.泛定方程：$u_t - a^2 \Delta u = 0 \left(a^2 = 6 \times 10^{-7}\ m^2/s\right)$

2^0.初始条件：$u|_{t=0} = 1200$

3^0.边界条件：$u|_{\partial\Omega} = 0$

8. 解：

设 $u = u(x, y, z, t)$ 为 t 时刻在 (x, y, z) 处的分子浓度，k 为扩散系数。

结合散度定理，有如下关系式：

$$
\begin{aligned}
&\iiint_D u|_{t=t_2} dxdydz - \iiint_D u|_{t=t_1} dxdydz \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \iint_D -\vec{v}\vec{n} dsdt \\
&= \iint_{\partial D} (k\nabla u)\vec{n} dsdt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \iiint_D div(k\nabla u) dvdt \\
&\Rightarrow u_t - k\Delta u = 0
\end{aligned}
$$

9. 解：

1^0.泛定方程：$c\rho u_t - k\Delta u = 0$

2^0.初始条件：$u(x, y, z, 0) = 0$

3^0.边界条件：$u(x, y, 0, t) = u_0$

$$k\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u_1 - u)$$

10. 解：

取传送带所在直线为 x 轴，起点为原点，任取一段传送带 $[x_1,x_2]$，时间段 $[t_1,t_2]$.

由质量守恒：$\int_{x_1}^{x_2}\left(\rho|_{t_2}-\rho|_{t_1}\right)dx=-\int_{t_1}^{t_2}dt\ a\left(\rho|_{x_2}-\rho|_{x_1}\right)$

即 $\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\rho}{\partial t}dt=-\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}a\frac{\partial\rho}{\partial x}dx$

由 x 和 t 的任意性得

泛定方程：$\rho_t+a\rho_x=0$

又有初始条件：$\rho(x,0)=0\,(x\ge 0)$

边界条件：$\rho_t(0,t)=A(1+\sin\omega t)\,(t\ge 0)$

11. 解：设 $A(a,\alpha),B(b,\beta)$，连接 A 和 B 的短程线方程为 $y=f(x)$

则 A,B 距离为 $d(f)=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$，则目标函数 f^*：

$d(f^*)=\min\limits_{f\in M}d(f)\ \left(Where\ M=\{f|\,f\in C^1[a,b],f(a)=\alpha,f(b)=\beta\}\right)$

又可设 $M_0=\{f|\,f\in C^1[a,b],f(a)=f(b)=0\}$

则

$\forall f\in M,\forall\varepsilon\in R,We\ have$

$j(\varepsilon)\overset{def}{=}d(f^*+\varepsilon f)\ge d(f^*)=j(0)$

$So\ j(\varepsilon)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f^*+\varepsilon f\right)'^2}dx$

$We\ can\ get\ \left(f_x^*/\sqrt{1+f_x^{*2}}\right)'=0\ by\ calculate\ j'(0)=0$

$So\ f_x^*=Const\Rightarrow f^*=c+dx$

因此当 $A(0,0)$，$B(3,5)$ 可得短程线方程 $f=5/3x$

12.

解：

$$j(\varepsilon)\overset{def}{=}J(u+\varepsilon y)=\frac{1}{2}\int_0^1(u'+\varepsilon y')^2dx-2\int_0^1(u+\varepsilon y)dx-u(0)-\varepsilon y(0)$$

$$\Rightarrow j'(\varepsilon)=\int_0^1 y'^2dx\cdot\varepsilon+\int_0^1 u'v'dx-2\int_0^1 y(x)dx-y(0)$$

$$\Rightarrow j'(0)=\int_0^1 u'y'dx-2\int_0^1 y(x)dx-y(0)=0$$

$$\Rightarrow -u'(0)y(0)-\int_0^1 u''ydx-2\int_0^1 ydx-y(0)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u''+2=0\\u'(0)+1=0\\u(1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=-x^2+x+2$$

13. 解：

$$j(\varepsilon)\overset{def}{=}J(u+\varepsilon y)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(u'+y')^2+(u+y)^2\right]dx+$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(u(0)+\varepsilon y(0)\right)^2+\left(u(1)+\varepsilon y(1)\right)^2\right]-2u(0)-2\varepsilon y(0)$$

因此

$$j'(0)=0$$

$$\Rightarrow\int_0^1 u'y'+uydx+u(0)y(0)+u(1)y(1)-2y(0)=0$$

$$\Rightarrow u'(1)y(1)-u'(0)y(0)$$

$$-\int_0^1(u''-u)y(x)dx+u(0)y(0)+u(1)y(1)-2y(0)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u''-u=0\\-u'(0)+u(0)-2=0\\u'(1)+u(1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow u=e^{-x}$$

14. 解：

(1) 问题1 $\Rightarrow$ 问题2：

$$j(\varepsilon)\overset{def}{=}J(u+\varepsilon v)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\left|\nabla u+\varepsilon\nabla v\right|^{2}+(u+\varepsilon v)^{2}\right]dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}f\,(u+\varepsilon v)dx$$
$$-\int_{\partial\Omega}g(u+\varepsilon v)ds$$

令

$$j'(0)=0$$
$$\Rightarrow\int_{\Omega}\nabla u\nabla v+uvdx+\int_{\Omega}\alpha(x)vuds-\int_{\Omega}fvdx-\int_{\partial\Omega}gvds=0$$

整理得 $\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+uv-fv)\,dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)\,ds=0$ (1)

问题2 $\Rightarrow$ 问题1：

$\forall w\in M$. 若 u 满足 (1)，则

$$J(w)-J(u)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\nabla w|^{2}+w^{2}\right)-\left(|\nabla v|^{2}+v^{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)\left(w^{2}-u^{2}\right)ds$$
$$-\int_{\Omega}f(w-u)\,dx-\int_{\partial\Omega}g(w-u)\,ds$$

令 $v=w-u$，则

$$J(u+v)-J(u)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla v|^{2}+v^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\alpha(x)v^{2}ds$$
$$+\int_{\Omega}(\nabla u\nabla v+uv-fv)\,dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)\,ds$$
$$\geq 0$$

故得证 $J(U)$ 为最小值

(2)

由 (1) 已证问题 1 与问题 2 等价，故在此只需证明问题 2 与问题 3 等价即可.

问题2 $\Rightarrow$ 问题3：

由 Gauss 公式得

$$\int_{\Omega}(\nabla u\nabla v+uv-fv)dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-g(v))ds$$

$$=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_{\Omega}v\ \ udx+\int_{\Omega}uv-fvdx+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)ds$$

$$=\int_{\Omega}(-\Delta u+u-f)vdx+\int_{\partial\Omega}v\left(\alpha(x)u+\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)ds=0\ \ (2)$$

由v任意性，先取$v\in C_0^\infty(\Omega)$则$v|_{\partial\Omega}=0$得

$$\int_{\Omega}(-\Delta u+u-f)vdx=0$$

又由引理 2.1 知

$$-\Delta u+u-f=0 \qquad (3)$$

再将(3)式代入(2)式，得

$$\int_{\partial\Omega}v\left(\alpha(x)u+\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)ds=0$$

再取$\overline{v}\in C_0^\infty(\partial\Omega)$，令$\overline{v}=v|_{\partial\Omega}$，由引理 2.1 得

$$\alpha(x)u+\frac{\partial u}{\partial n}-g=0$$

问题3$\Rightarrow$问题2:

由

$$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}),v\in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+uv-fu)dx+\int_{\partial\Omega}(\alpha(x)uv-gv)ds$$

$$\stackrel{Green}{=}\int_{\Omega}(-\nabla u+u-f)vdx+\int_{\partial\Omega}\left(\alpha(x)u+\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)vds$$

因而由问题 3 可知该式=0，证毕.

15. 解:

(1)

(a). 令 $v=u-xg(t)$

则边界条件化为$v_x(0,t)=0$

(b). 由题 $w(0,t)=g_1(t),w(l,t)=g_2(t)$

因而 $w(x,t)=\frac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$

(c).

与(b)同理，可得 $w(x,t)=-g_1(t)x+g_1(t)(1+l)+g_2(t)$

(2).

由题将 $u=v+w$ 代入定解问题，得

$v_t+w_t=v_{xx}+w_{xx}+f(x)$

$v(0,t)+w(0,t)=0,v(l,t)+w(l,t)=0$

$v(x,0)+w(x,0)=\varphi(x)$

因此为满足题意，令

$$\begin{cases} w_t=0 \\ w_{xx}+f(x)=0 \\ w(0,t)=w(l,t)=0 \end{cases}$$

可以得

$$w(x,t)=-\int_0^x\int_0^s f(t)dtds+\frac{1}{l}\int_0^l(l-z)f(z)dz*l$$

(3)

设 $u=ve^{cx+dt}$ ，则有

$u_t-u_{xx}+au_x+bu$

$=\left[v_t-v_{xx}+(-2c+a)v_x+(d-c^2+ac+b)v\right]e^{cx+dt}$

(都是慢慢算了整理出来的，没有技巧性，又懒得慢慢敲公式了，跳一跳而已……同时，该句在此起到了承上启下的作用~~~~~)

$$\Rightarrow\begin{cases} -2c+a=0 \\ d-c^2+ac+b=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} u=ve^{\frac{a}{2}x-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)t} \\ \tilde{f}=fe^{-\frac{a}{2}x+\left(\frac{a^2}{4}+b\right)t} \end{cases}$$

这题可能计算有点问题，大概就是这样一个形式

16. 解

(1) 由题得

$u_x = u_\xi + u_\eta \Rightarrow u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$u_t = -au_\xi + au_\eta \Rightarrow u_{tt} = a^2u_{\xi\xi} - 2a^2u_{\xi\eta} + a^2u_{\eta\eta}$

代入波动方程可得 $-4a^2u_{\xi\eta} = 0$，即 $u_{\xi\eta} = 0$

又由此

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\xi} = f(\xi)$$

$$\Rightarrow u = \int f(\xi)\,d\xi + g(\eta)$$

即 u 为 ξ *and* η 各自作为变量的函数的和

(2)很 easy，看看(1)吧，就是死算，步得森么技巧

17. 解:

由题可知 $u = u\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right) = u(r)$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u'(r)\frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + u'(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u'' + (n-1)u' = 0$$

18. 解:

由题

$$u_t = \tilde{u}' \cdot -\frac{1}{2}xt^{-3/2}$$

$$u_x = \tilde{u}' \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}\frac{1}{t}$$

因而

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} x t^{-3/2} \tilde{u}' - a^2 \tilde{u}'' \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow \tilde{u}'' + \frac{\xi}{2a^2} \tilde{u}' = 0$$

则定解问题转化为

$$\begin{cases} \tilde{u}'' + \dfrac{\xi}{2a^2} u'_\xi = 0 \\ \tilde{u}\big|_{\xi=0} = 0 \\ \tilde{u}\big|_{\xi=\infty} = u_0 \end{cases}$$

求解 ODE 后回代可得

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{\eta^2}{4a^2}} d\eta$$

19. 解：
利用 18 题结果，再将边界条件代入进去，容易得到

$t = 2.7 * 10^7$ year

第二章 波动方程

1. 解:
将初值问题化为三部分来考虑:

$$\begin{cases} -y_1'' + y_1 = 0 \\ y_1(0) = a \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{cases} -y_2'' + y_2 = 0 \\ y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = b \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

$$\begin{cases} -y_3'' + y_3 = f(x) \\ y_3(0) = 0 \\ y_3'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

由已知，易得(ii)解为: $y_2(x) = bY(x)$

则(i)解为: $y_1(x)=aY'(x)$

而(iii)解为: $y_3(x)=-\int_0^x f(\xi)Y(x-\xi)d\xi$

代入各问题易验证确实成立。

则 ODE 的解由线性叠加原理可知 $y=y_1+y_2+y_3$

2. 解:

先考虑简单情形: $k=2$

设 Y 满足

$$\begin{cases} y''+a_1y'+a_2y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

显然 Y' 也是齐次方程的解

构造 Y 和 Y' 的线性组合

$\tilde{y}=\beta_0Y+\beta_1Y'$

用于表示 $\begin{cases} y''+a_1y'+a_2y=0 \\ y(0)=b_0, y'(0)=b_1 \end{cases}$ 的解

代入，可以求解得 $\begin{cases} \beta_0=a_1b_0+b_1 \\ \beta_1=b_0 \end{cases}$

从而 $\tilde{y}=(a_1b_0+b_1)Y+b_0Y'$

由此对一般的 k , 我们有齐次解

$$\tilde{y}=b_0Y^{(k-1)}+(b_0a_1+b_1)Y^{(k-2)}+\cdots+(b_0a_{k-1}+b_1a_{k-2}+\cdots b_{k-1})Y$$

再考虑非齐次解

$$y_p=\int_0^x f(\tau)Y(x-\tau)d\tau$$

故解为 $y=\tilde{y}+y_p$

3. 解:

(1). 特征线方程 $\dfrac{dx}{dt}=2$, 又 $X(0)=C$

解得 $x(t)=2t+C$

沿特征线有 $\frac{dU(x(t),t)}{dt}=0 \Rightarrow U=U(x(0),0)=U(c,0)=c^2$

又 $c=x-2t \Rightarrow u=(x-2t)^2$

(2). 特征线方程 $\frac{dx}{dt}=2$, 又 $X(0)=C$

解得 $x(t)=2t+C$

沿特征线有 $\frac{dU}{dt}+U=(2t+c)t$

即有 ODE:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}+v=(2t+c)t \\ v(0)=2-c \end{cases}$$

解此 ODE，得

$v(t)=-2e^{-t}+2t^2+(c-4)t+c-4$

$\Rightarrow u(x,t)=-2e^{-t}+2t^2+(x-2t-4)(t-1)$

(3). 同上，可以得知特征线

$$x(t)=-\frac{1}{2}t+C$$

沿特征线有

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt}=\left(\frac{t}{4}-\frac{c}{2}\right)U \\ U(0)=u(x(0),0)=u(c,0)=2ce^{c^2/2} \end{cases}$$

$\Rightarrow U=2ce^{\frac{c^2}{2}}e^{\frac{t^2}{8}-\frac{c}{2}t}$

$\Rightarrow u(x,t)=(2x+t)e^{x^2/2}$

(4) 同上得特征线 $x=\tan(t+\arctan c)$

沿特征线有

$$\begin{cases} dU/dt = U \\ U(0) = u(x(0),0) = u(c,0) = \arctan c \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \arctan ce^{t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = (\arctan x - t)e^{t}$$

4. 证:

对原方程进行变形，得

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2a^2 \frac{x-h}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x} + a^2\left(\frac{x-h}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow (x-h)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a^2(x-h)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (h-x)u}{\partial^2 t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (h-x)u}{\partial x^2}$$

由第一章习题 16(1) 可得

$$(h-x)u = F(x-at) + G(x+at)$$

5. 解:

由 *d'Alembert* 公式，得

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[\phi(x+at)-\phi(x-at)\right]$$

其中 $\phi(x) = \int_0^x \psi(\xi)d\xi$

为满足题意，应当有

$$\frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\phi(x+at) \equiv Const$$

微商之，得到

$$\varphi'(x+at) + \frac{1}{a}\phi'(x+at) \equiv 0$$

6. 解:

设 $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$

代入初始条件，得到

$$F(x+ax) + G(x-ax) = u_0(x) \qquad (1)$$

$$F'(x+ax) - G'(x-ax) = u_1(x) \qquad (2)$$

对于(2)，令其在 $[0,x]$ 上积分，得

$$\frac{1}{1+a}F(x)-\frac{1}{1-a}G(x-ax)=\int_0^x u_1(\xi)d\xi+C \qquad (3)$$

联立(1)与(3)求解得

$$F(x+ax)=\left[\frac{u_0}{1-a}\frac{x}{1+a}+\int_0^{\frac{x}{1+a}}u_1(\xi)d\xi+C\right]\Big/\frac{2}{1-a^2}$$

$$G(x-ax)=\left(\frac{u_0}{1+a}-\int_0^x u_1(\xi)d\xi-C\right)\Big/\frac{2}{1-a^2}$$

回代得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[(1+a)u_0\left(\frac{x+t}{1+a}\right)+(1-a)u_0\left(\frac{x-t}{1-a}\right)\right]+\frac{1-a^2}{2}\int_{\frac{x-t}{1-a}}^{\frac{x+t}{1+a}}u_1(\xi)d\xi$$

7. 解:

1^0 必要性:

设 $Cauchy$ 问题有解，初条件有 $u(t,t)=0,u_t(t,t)=u_1(x)$

对 t 求微商，得

$$u_t(t,t)+u_x(t,t)=0 \qquad (1)$$

$$u_{tx}(t,t)+u_{tt}(t,t)=u_1'(t) \qquad (2)$$

由此知 $u_x(t,t)=-u_1(t)$

再微分此式，得到 $u_{xx}(t,t)+u_{xt}(t,t)=-u_1'(t) \qquad (3)$

联立(2)与(3)得，$u_{tt}(t,t)-u_{xx}(t,t)=2u_1'(t)$

结合问题中的泛定方程，得到

$$2u_1'(t,t)=12t\Rightarrow u_1(t,t)=3t^2+Const$$

2^0 充分性:

不妨取 $U=U(t),V=V(x)$

使得 $U_{tt}=6t,-V_{xx}=6x$

即有 $U=t^3+c_1t+c_2,V=-\left(x^3+c_3x+c_4\right)$

令 $u=U+V$

则其满足非齐次方程，为了使之满足初条件，只需取

$c_1 = c_3 = const, c_2 = c_4 = 0$

3^0 解不唯一，例如$(x-t)^2$就是个意外

至于解是否唯一，可以考虑当$\Gamma: t = ax$是不是特征线时，从任一点引其特征线与Γ交点个数不同

8. 解:

将问题拆分为 3

$$\begin{cases} U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \\ U|_{t=0} = f(x) \\ U_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} V_{tt} - a^2 V_{yy} = 0 \\ V|_{t=0} = g(y) \\ V_t|_{t=0} = \varphi(y) \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} W_{tt} - a^2 W_{tt} = 0 \\ W|_{t=0} = 0 \\ W_t|_{t=0} = \psi(z) \end{cases} \qquad (3)$$

由 $D'Alembert$ 公式，可得

$$U = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right)$$

$$V = \frac{1}{2}\left(g(y+at) + g(y-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at} \varphi(\xi) d\xi$$

$$W = \frac{1}{2a}\int_{z-at}^{z+at} \psi(\xi) d\xi$$

由叠加原理，$u = U + V + W$ 即为原问题解

9. 解:

令$u(x,t) = v(x,y,t) e^{i\frac{\sqrt{c}}{a}y}$

则问题变为$\begin{cases} v_{tt}-a^2\left(v_{xx}+v_{yy}\right)=f\left(x,t\right)e^{-i\frac{\sqrt{c}}{a}y} \\ v\big|_{t=0}=\varphi\left(x\right)e^{-i\frac{\sqrt{c}}{a}y} \\ v_t\big|_{t=0}=\psi\left(x\right)e^{-i\frac{\sqrt{c}}{a}y} \end{cases}$

由公式(3.16)再回代可得其解。下面证明唯一性！

Pf:

原方程两边同时乘以u_t，得

$$u_t\left[u_{tt}-a^2u_{xx}\right]+cuu_t=f\ u_t$$

$$\Rightarrow \iint_{K_\tau}\left(u_t\ u_{tt}-a^2u_tu_{xx}\right)dxdt+\iint_{K_\tau}cuu_tdxdt=\iint_{K_\tau}fu_tdxdt$$

$$\Rightarrow \iint_{K_\tau}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}cu^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)-a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(u_tu_x\right)\right)dxt=\iint_{K_\tau}fu_tdxdt$$

$$\Rightarrow -\int_{\partial k_\tau}\left\{\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}cu^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)dx+a^2u_tu_xdt\right\}=\iint_{K_\tau}fu_tdxdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+c\varphi^2+a^2\varphi_x^2\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\tau_1}+\Gamma_{\tau_2}}\left\{a^2u_tu_xdt+\frac{1}{2}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dx\right\}=\iint_{K_\tau}fu_tdxdt$$

进一步地

$$J_3\int_{\Gamma_{\tau_1}+\Gamma_{\tau_2}}a^2u_tu_xdt+\frac{1}{2}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dx$$

$$=\int_{\Gamma_{\tau_1}}a^2u_tu_x+\frac{a}{2}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dt+\int_{\Gamma_{\tau_2}}a^2u_tu_x-\frac{a}{2}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dt$$

$$=\int_{\Gamma_{\tau_1}}\frac{a}{2}\left(u_t+au_x\right)^2+\frac{a}{2}cu^2dt+\int_{\Gamma_{\tau_2}}\frac{a}{2}\left(u_t-au_x\right)^2+\frac{a}{2}cu^2$$

$$\geq 0$$

故$\int_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dx\leq\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+c\varphi^2+a\varphi_x^2\right)dx+\iint_{K_\tau}f^2dxdt+\iint_{K_\tau}u_t^2dxdt$

令$G\left(\tau\right)=\iint_{K_\tau}\left(u_t^2+cu^2+a^2u_x^2\right)dx$

则有 $\dfrac{dG(\tau)}{d\tau} \le G(\tau)+F(\tau)$

其中 $F(\tau)=\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+c\varphi^2+a\varphi_x^2\right)dx+\iint\limits_{K_\tau} f^2dxdt$

由 Gronwall 不等式

$G(\tau)\le\left(e^\tau-1\right)F(\tau)$

$\Rightarrow$ 当 $\varphi=\psi=f=0$ 时，$u\equiv 0 \Rightarrow$ 解唯一

10. 解:

1^0 设 $u(x,t)$ 是问题的解，令 $v(x,t)=u(-x,t)$

则 $v=v_{tt}-a^2v_{xx}=u_{tt}(-x,t)-a^2u_{xx}(-x,t)=f(-x,t)=f(x,t)$

$v|_{t=0}=u(-x,t)|_{t=0}=\varphi(-x)=\varphi(x)$

$v_t|_{t=0}=u_t(-x,0)=\psi(-x)=\psi(x)$

故 v 也是问题的解，由解的唯一性知 u 是偶函数

2^0 对于带齐次的 *Neumann* 条件的半无界问题, 令 $\tilde{f}(x,t)$ 是 f 关于 x 的偶延拓,

则 $\tilde{u}(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau$

当 $x\ge at$ 时，$u(x,t)=\tilde{u}=\dfrac{1}{2a}\int_o^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$

当 $0\le x<at$ 时,

$$u(x,t)=\tilde{u}=\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{0}f(-\xi,\tau)d\xi+\int_0^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau+$$
$$\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

为使 f 关于 x 偶延拓所得 $\tilde{f}$ 在 $x=0$ 可微，应要求

$$f_x(0,t)=0$$

此时，上式给出的 u 是原问题的解

10. 解:

(1) 设 $u(x,t)$ 是问题的解，令 $v(x,t)=u(-x,t)$

则 $v=v_{tt}-a^2v_{xx}=u_{tt}(-x,t)-a^2u_{xx}(-x,t)=f(-x,t)=f(x,t)$

$$v\big|_{t=0}=u(-x,t)\big|_{t=0}=\varphi(-x)=\varphi(x)$$

$$v_t\big|_{t=0}=u_t(-x,t)\big|_{t=0}=\psi(-x)=\psi(x)$$

这便证得 v 是问题的解，又由解的唯一性，可知 $v=u$ 即有命题成立

(2) 对于带齐次的 $Neumann$ 条件的半无界问题，令 $\tilde{f}(x,t)$ 是 f 关于 x 的偶延拓，则

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tilde{f}(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

为方程的解

更具体地讲，当 $x\geq at$ 时，$u(x,t)=\tilde{u}=\frac{1}{2a}\int_o^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$

而 $x<at$ 时，

$$u(x,t)=\tilde{u}=\frac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{0}f(-\xi,\tau)d\xi+\int_0^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

为使 f 关于 x 偶延拓所得 $\tilde{f}$ 在 $x=0$ 可微，应要求 $f_x(0,t)=0$

故若 $f\in C^1(x\geq 0,t\geq 0)$，$f_x(0,t)=0$ 则上式给出的 u 是原问题的解

11. 解:

延拓法:

首先将边界条件齐次化. 令 $u=v+A\sin\omega t$，则 v 满足

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=A\omega^2\sin\omega t & 0<x<\infty,t>0 \\ v\big|_{t=0}=0 \quad v_t\big|_{t=0}=-A\omega & 0\leq x<\infty \\ v\big|_{x=0}=0 & t>0 \end{cases}$$

令 $f(x,t)=\begin{cases} A\omega^2\sin\omega t & x>0 \\ -A\omega^2\sin\omega t & x<0 \end{cases}$

$\psi(x)=\begin{cases} -A\omega & x>0 \\ A\omega & x<0 \end{cases}$

则 $x>0$ 时，$v(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$

求解后对 $x\geq at$ 与否分类讨论即可

注:此题亦可采用行波法，速度更令人 high，you deserve it.

12. 证:

只需证 $f=\psi=\varphi=\mu=0$ 时,解必为 0. 采用能量不等式方法.

任取 $T>0$，从 $(0,T)$ 往右下方引特征线 $x+at=aT$，它和 t 轴，x 轴一起围成三角形区域，采用能量不等式。

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\left(\psi^2+a^2\varphi_x^2\right)dx-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left\{a^2u_tu_xdt+\frac{1}{2}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx\right\}$$
$$=\iint_{K_\tau}f\ u_tdxdt$$

定义 $-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left\{a^2u_tu_xdt+\frac{1}{2}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx\right\}\quad J_3$

根据“边界”的实际情况，容易证明 $J_3\geq 0$

后续和课本一致(事实上前面基本也和课本一致。。。)

13. 证:

若 u_1,u_2 都是 $Cauchy$ 问题的解，则 $u=u_1-u_2$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u_t=0 & x\in R,t>0 \\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=0 & x\in R \end{cases}$$

又由方程可得

$$\iint_{K_\tau} u_t\left(u_{tt}-a^2u_{xx}+b(x,t)u_x+c(x,t)u_t\right)dxdt=0$$

$$\Rightarrow \iint_{K_\tau}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)}{\partial t}-a^2\frac{\partial(u_xu_t)}{\partial x}dxdt+\iint_{K_\tau} b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2dxdt=0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K_\tau}\left(-\frac{1}{2}u_t^2-\frac{a^2}{2}u_x^2\right)dx-a^2u_xu_tdt+\iint_{K_\tau}\left(b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2\right)dxdt=0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_\tau}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)dx-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)dx-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}a^2u_xu_tdt$$

$$+\iint_{K_\tau}\left(b(x,t)u_xu_t+c(x,t)u_t^2\right)dxdt=0$$

又

$$J_3=-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{a^2}{2}u_x^2\right)dx-\int_{\Gamma_1+\Gamma_2}a^2u_xu_tdt$$

$$=-\int_{\Gamma_1}\frac{a}{2}(u_t+au_x)^2dt+\int_{\Gamma_2}\frac{a}{2}(u_t-au_x)^2dt$$

$$\geq 0$$

因此 $\int_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx\leq-\iint_{K_\tau}2b(x,t)u_xu_t+2c(x,t)u_\tau^2dxdt$

又 $b(x,t),c(x,t)$ 有界

设 $|b(x,t)|\leq B,|c(x,t)|\leq C$

则 $\int_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx\leq\iint_{K_\tau}B\left(u_x^2+u_t^2\right)+2cu_t^2dxdt$

令 $C_0=\max\left\{B+2C,B/a^2\right\}$

则有 $\int_{\Omega_\tau}\left(u_t^2+a^2u_x^2\right)dx\leq C_0\iint_{K_\tau}u_t^2+a^2u_x^2dxdt$

再令 $G(\tau)=\iint_{K_\tau}u_t^2+a^2u_x^2dxdt$

从而有

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \le C_0 G(\tau)$$

$$\Rightarrow \iint_{\Omega_\tau} u_t^2 + a^2 u_x^2 dx \le 0$$

$$\iint_{k_\tau} u_t^2 + a^2 u_x^2 dx \le 0$$

进一步地，

$$\iint_{K_\tau} u_t u dxdt = \iint_{K_\tau} \frac{\partial\left(\frac{1}{2}u^2\right)}{\partial t} dxdt$$

$$= \int_0^\tau \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0+a(t_0+t)} \frac{\partial\left(\frac{1}{2}u^2\right)}{\partial t} dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau) - \varphi^2(x) dx$$

$$\le \frac{1}{2}\iint_{K_\tau} u_t^2 + u^2 dxdt$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_\tau} u^2(x,\tau) dx \le \iint_{K_\tau} u^2(x,t) dxdt$$

再令 $G(\tau)=\iint_{K_\tau} u^2(x,t) dxdt$

故有

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \le G(\tau)$$

$$\Rightarrow \iint_{K_\tau} u^2(x,t) dxdt = 0$$

$$\Rightarrow u \equiv 0$$

$\Rightarrow$ 解唯一

14.

解:

由二维齐次波动方程的求解公式，点 (x,y,t) 的依赖区域是 $x-y$ 平面上以 (x,y) 为中心，以 at 为半径的圆. 当且仅当此圆落在 Ω 内，$u(x,y,t)\equiv 0$

为此，需

$$\begin{cases} -1 \le x - at \le 1 \\ -1 \le x + at \le 1 \\ -1 \le y - at \le 1 \\ -1 \le y + at \le 1 \\ t \ge 0 \end{cases}$$

这表示一个以Ω为底，高度为$1/a$的正四棱锥

15.

解:

由 Cauchy 问题和 *Darboux* 问题的决定区域知

$a \ge 1$时，$\begin{cases} 0 \le t \le -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ 上$u(x,t) \equiv 0$

$a < 1$时，$\begin{cases} 0 < t < 1 \\ t < -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}, 0 < x < 1 \end{cases}$ 上$u(x,t) \equiv 0$

16.

解:

不能采用对称法。不难验证当φ, ψ为奇(偶)函数时，$u(x,t)$不为奇(偶)函数.

如提示言，Let us 求解

$$\begin{cases} u_t - u_x + u = v \\ v_t + v_x = 0 \end{cases}$$

此时初条件为

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ v(x,0) = \psi(x) - \varphi'(x) + \varphi(x) \end{cases}$$

沿特征线$\Gamma_1 : \frac{dx}{dt} = 1$, 即$x_1(t) = t + c$有

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = Const$$

故$v(x_1(t),t) = v(x(0),0) = v(c,0) = \psi(c) - \varphi'(c) + \varphi(c)$

令$x_1(t)=x$，则$c=x-t, so$

$$v(x,t)=\psi(x-t)-\varphi'(x-t)+\varphi(x-t)$$

又沿特征线$\Gamma_2:\dfrac{dx}{dt}=-1$，即$x_2(t)=-t+c$，有

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+u=v(x_2(t),t)\\ u(x_2(0),0)=\varphi(c)\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{aligned}u(x_2(t),t)&=\varphi(c)e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\tau)}v(x_2(\tau),\tau)d\tau\\&=\varphi(c)e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\tau)}\left[\psi(-2\tau+c)-\varphi'(-2\tau+c)+\varphi(-2\tau+c)\right]d\tau\\&=\frac{1}{2}\left(\varphi(c)e^{-t}+\varphi(-2t+c)\right)+\int_0^t e^{-(t-\tau)}\left[\psi(-2\tau+c)+\frac{1}{2}\varphi(-2\tau+c)\right]d\tau\end{aligned}$$

令$x_2(t)=-t+c=x\Rightarrow c=x+t$，代入得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{x-t}{2}}\int_{x-t}^{x+t}e^{-\xi/2}\left[1/2\varphi(\xi)+\psi(\xi)\right]d\xi$$

17. 解:

此题可采用行波法，即设$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$

$x\ge 0$时，令$t=x$，得

$$F(2x)+G(0)=\psi(x)$$

$$\Rightarrow F(x)=\psi\left(\frac{x}{2}\right)-G(0)$$

$x\le 0$时，令$t=-x$，得

$$F(0)+G(2x)=\varphi(x)$$

$$\Rightarrow G(x)=\varphi(x/2)-F(0)$$

$t\ge|x|$时，

$$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\left[F(0)+G(0)\right]$$
$$=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x-t}{2}\right)-\varphi(0)$$

此式说明$u(x,t)$在点(x,t)的值是由过这点往下的两条特征线与$t=-x$和$t=x$交点上的φ，ψ决定.

18. 解:

设$u(x,t)=F(x+t)+G(x-t)$

令$t=x$得

$\psi(x)=F(2x)+G(0)$

$F(x)=\psi\left(\frac{x}{2}\right)-G(0)$

令$x=0$得

$F(t)+G(-t)=\varphi(t)$

因而有

$G(t)=\varphi(-t)-F(-t)=\varphi(-t)-\psi\left(-\frac{t}{2}\right)+G(0)$

故

$u(x,t)=\psi\left(\frac{x+t}{2}\right)+\varphi(t-x)-\psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$

19. 解:

由球面平均法

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{Sat(M)}\left(u^3+v^3w\right)ds$$

其中$S_{at}(M)$是以(x,y,z)为球心，at为半径的球面

则

$$u=\frac{1}{4\pi a^2t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(x+\sin\theta\cos\varphi at\right)^3+\left(y+\sin\theta\cos\varphi at\right)^3\left(z+\cos\theta at\right)d\theta d\varphi$$
$$=\left(x^3+yz\right)t+\left(x+t/3\right)a^2t^3$$

20. 证:

设 $u(x,t)$ 是下列问题的解

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & x\in R,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & x\in R \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) & x\in R \end{cases}$$

记 $u(x,t)=\tilde{u}(x,y,t)$, 则 $\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}-a^2(\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy})=f(x,t) \\ \tilde{u}|_{t=0}=\varphi(x) \\ \tilde{u}_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

由二维 *Possion* 公式

$$\tilde{u}(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{\sum_{at(x,y)}}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta\right]+$$

$$\frac{1}{2a}\iint_{\sum_{at(x,y)}}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\int_{\sum_{a(t-\tau)(x,y)}}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

其中

$$\iint_{\sum_{at(xy)}}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

$$=2\iint_{\sum_{at^+(x,y)}}\frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\xi d\eta$$

$$=2\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\int_y^{y+\sqrt{a^2t^2-(y-x)^2}}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}d\eta$$

$$=\pi\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

故

$$\tilde{u}(x,y,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

21. 解：

由二维 $Possion$ 公式容易得到

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{\sum_{at(x,y)}}\frac{\xi^2(\xi+\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right]$$
$$=x^2(x+y)+(3x+y)a^2t^2$$

22. 解：

本题实际就是考察 ODE.

考虑 ODE: $X''(x)+\lambda X(x)=0$

由其特征方程 $\gamma^2+\lambda\gamma=0\Rightarrow\gamma=\pm\sqrt{\lambda}i$

$\Rightarrow X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$

再结合各边界条件，待定系数法求出特征值 λ 与特征函数 $X(x)$

下面直接给结果.

(1). $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$

$X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

(2). $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$

$X_n(x)=\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$

(3). $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$

$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$

(4). 记 ξ: $\mathrm{tg}\,\xi=-\frac{\xi}{hl}$

则 $\lambda_n=\left(\frac{\xi_n}{l}\right)^2$

$$X_n = \sin\frac{\xi_n}{l}x$$

(5). 记 ξ: $tg\xi = \frac{hl}{\xi}$

则 $\lambda_n = \left(\frac{\xi_n}{l}\right)^2$

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\xi_n}{l}\right)^2 x$$

23. 解:

此题各小题内在结构略有差异, 实属"一胎生九崽, 连母十个样", 索幸在终为同一品种, 因而在此仅述"老大"之样貌, 其余可观此状而及之。

(1) 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$

代入方程有 $X(x)T''(T) = a^2 X''(x)T(t)$

此处 $X(x)T(t) \neq 0$ 即有

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

左边仅与 x 有关，右边仅与 t 有关, 因此存在常数 λ，使得

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$$

又由边界条件及 $T(t) \neq 0$ 知

$$X(0) = X(l) = 0$$

因此考虑如下的 $Sturm - Liouville$ 问题:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

显然 $\lambda > 0$ 否则仅有平凡解, 此时

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

又 $X(0) = X(l) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$

$$\Rightarrow X_k(x)=c_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow T_k(t)=a_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi a}{l}t$$

因而存在常数列 $A_k=a_kc_k, B_k=b_kc_k$

无穷级数

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-A_k\sin\frac{k\pi a}{l}t+B_k\cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x$$

又由初始条件, 得

$$u|_{t=0}=\sin^2\frac{\pi x}{l}=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$u_t|_{t=0}=x(l-x)=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$\Rightarrow A_k=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi}{l}x\sin^2\frac{\pi x}{l}dx$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

24. 解:

先使边条件齐次化

$$f(x)=\frac{S\rho}{E}x$$

令 $v=u-f(x)$, 则 v 满足齐次边条件, 此时 $Lv\equiv g$

再求 $w=w(x)$ 使之满足

$$\begin{cases}-a^2w''(x)=g\\ w(0)=0, w'(l)=0\end{cases}$$

$$w(x)=-\frac{1}{2}\frac{g}{a^2}x^2+\frac{gl}{a^2}x$$

则 $\tilde{v}=u-f(x)-w(x)$ 即满足齐次方程齐次边条件。

25. 解:

(1)

$$U_1(x,t)=-u_x+\alpha u-u_1(t)$$
$$U_2(x,t)=u_x-\beta u-u_2(t)$$

令 $U=\frac{l-x}{l}U_1+\frac{x}{l}U_2$

$\tilde{u}=u+U$ 代入即化边条件为齐次

(2)

令(1)中 $\alpha=\beta=0$ 即可

26. 解:

这题呐，太懒了……在此只写(1),(2)两题，其余类同~

(1)先化方程为齐次方程

因此求一函数 $v=v(x)$ 使之满足

$$\begin{cases}-a^2v''(x)=bshx\\ v(0)=v(l)=0\end{cases}$$

解之得 $v(x)=-\frac{b}{a^2}shx+\left(\frac{b}{la^2}shl\right)x$

再令 $w=u-v$ 则 w 满足

$$\begin{cases}Lw=0\\ w|_{x=0}=w|_{x=l}=0\\ w|_{t=0}=\frac{b}{a^2}\left(shx-\frac{shl}{l}x\right),w_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

则 $w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\frac{an\pi}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$

其中

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{b}{a^2}\left(shx-\frac{shl}{l}x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$
$$=\frac{2bl^2(-1)^n shl}{a^2n\pi\left(n^2\pi^2+l^2\right)}$$

(2) 易知特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$

令 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$

比较系数可得 $T_n(t)$ 是下列问题的解

$$\begin{cases}T_n''+2bT_n'+a^2\lambda_nT_n=g_n\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0\end{cases}$$

其中 $g_n=\frac{2}{l}\int_0^l g\frac{\sin n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0 & n=2k\\ 4g/n\pi & n=2k-1\end{cases}$

T_n 的特征方程为

$$\alpha^2+2b\alpha+a^2\lambda_n=0$$
$$\Rightarrow\alpha=-b\pm\sqrt{b^2-a^2\lambda_n}$$

为简单计，设 $a^2\lambda_1>b^2$，即 $\frac{a^2\pi^2}{l^2}>b^2$

这时 $\alpha=-b\pm q_ni$

$$T_n(t)=\frac{g_n}{q_n}\int_0^t e^{-b(t-\tau)}\sin q_n(t-\tau)d\tau$$
$$=\frac{g_n-e^{-bt}\left(b\sin q_nt+q_n\sin q_nt\right)}{b^2+q_n^2}\times\frac{g_n}{q_n}$$

27. 解：

由定理 4. 2，当 $\varphi\in C^3[0,l]$，$\psi\in C^2[0,l]$，$\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi''(0)=\varphi''(l)=\psi(0)=$

$\psi(l)=0$ 时, 齐次方程的 *Fourier* 级数的系数有估计 $o\left(\frac{\alpha_n}{n^3}\right), o\left(\frac{\beta_n}{n^3}\right)$, α_n 和 β_n 分别为

φ'' 和 ψ'' 的 *Fourier* 系数，对非齐次方程只需考虑

$$g_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

关于 n 的阶. 设 $f(0,t)=f(l,t)=0, f\in C^2[0,l]$

则 $f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=o\left(\frac{\gamma_n}{n^2}\right)$

$$\gamma_n=\gamma_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_{xx}(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

由 *Bessel* 不等式

$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2(t)\le\frac{2}{l}\int_0^l f_{xx}^2(x,t)dx\le C$, C 与 t 无关

$$\left|D^\alpha g_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\right|=o\left(\frac{\gamma_n}{n}\right)$$

其中 D^α 表示对 x,t 不超过二阶的任一偏微商

$$\sum_{n=m}^{N}\frac{|\gamma_n|}{n}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=m}^{N}\gamma_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\le C\left(\sum_{n=m}^{N}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\to 0(m,N\to\infty)$$

故逐项微商后级数一致收敛, 从而形式解是古典解.

28.

证:

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & x\in(0,l)\quad t>0\\ u(x,0)=\varphi(x) & x\in[0,l]\\ u_t(x,0)=\psi(x) & x\in[0,l]\\ \left.-\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\right|_{x=0}=g_1(t),\left.\frac{\partial u}{\partial x}+\beta x\right|_{x=0}=g_2(t) & t\ge 0\end{cases}$$

设 u_1,u_2 均是以上定解问题的解, 则 $u=u_1-u_2$ 是齐次定解问题的解, 即满足

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & x \in (0,l) \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,l] \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\Big|_{x=0} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial x} + \beta x\Big|_{x=0} = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

下面证明 $u \equiv 0$

$$\int_0^\tau \int_0^l (u_{tt} - a^2 u_{xx}) u_t dxdt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau \int_0^l \frac{1}{2}(u_t^2)_t + \frac{a^2}{2}(u_x^2)_t - a^2 (u_x u_t)_x dxdt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l \frac{1}{2}u_t^2(x,\tau) - \frac{1}{2}u_t^2(x,0) + \frac{a^2}{2}u_x^2(x,\tau) - \frac{a^2}{2}u_x^2(x,0)dx$$
$$-a^2 \int_0^\tau \left[-\beta u(l,t)u_t(l,t) - \alpha u(0,t)u_t(0,t)\right]dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)dx + a^2 \int_0^\tau \beta u^2(l,t)_t + \alpha u^2(0,t)_t dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)dx + a^2\beta\left(u^2(l,\tau) - u^2(l,0)\right) + a^2\alpha\left(u^2(0,\tau) - u^2(0,0)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)dx + a^2\beta u^2(l,\tau) + a^2\alpha u^2(0,\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l u_t^2(x,\tau) + a^2 u_x^2(x,\tau)dx = 0$$

$$\Rightarrow u_t = u_x \equiv 0$$

$$\int_0^\tau \int_0^l u u_t dxdt = \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{1}{2}u^2\right)_t dxdt = \int_0^l \frac{1}{2}u^2(x,\tau) - \frac{1}{2}u^2(x,0)dx$$
$$= \int_0^l \frac{1}{2}u^2(x,\tau)dx$$

而 $\int_0^\tau \int_0^l u u_t dxdt \leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l u^2 + u_t^2 dxdt$

得 $\int_0^l u^2(x,\tau)dx \leq \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt + \int_0^\tau \int_0^l u_t^2 dxdt$

令 $G(\tau) = \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt$

则 $\dfrac{dG(\tau)}{d\tau} \leq \int_0^l u^2 dx$

$$F(\tau)=\int_0^\tau\int_0^l u_t^2 dxdt$$

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau}\le G(\tau)+F(\tau)$$

$$\Rightarrow G(\tau)\le M(\tau)F(\tau)$$

由于 $\int_0^\tau\int_0^l u_t^2 dxdt\equiv 0$

$\Rightarrow G(\tau)=0\Rightarrow\int_0^l u^2(x,\tau)dx=0\Rightarrow u\equiv 0\Rightarrow$ 解唯一

29. 解:

若 $u\in L^2(Q)$, 对任意 $\xi\in Z=\left\{\xi\in C^2(Q)|\xi|_{t=\tau}=\xi_t|_{t=T}=0,\xi|_{x=0}=\xi|_{x=l}=0\right\}$, 有

$\iint\limits_Q u\ \ \xi dxdt=\iint\limits_Q f\xi dxdt+\int_0^l\left[\varphi(x)\xi(x,0)-\varphi(x)\xi_t(x,0)\right]dx$, 则称 u 混合问题的广义解.

设 φ,ψ 满足定理 4.5 条件, 又 $f\in C^1(\bar{Q})$, $f(0,t)=f(l,t)=0$,

$$F_N(x,t)=f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

则 $u_N=\sum_{n=1}^{N}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$ 是下列问题的解

$$\begin{cases}u_N=F_N\\u_N|_{x=0}=u_N|_{x=l}=0\\u_N|_{t=0}=u_{Nt}|_{t=0}=0\end{cases}$$

S_N^φ,S_N^ψ 表示 φ,ψ 的 *Fourier* 展开的第 N 个部分和

$$T_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)d\tau$$

后仿 T_{27} 可证 u 是广义解

30.
解:

对于第一个方程上述边值问题提法正确.

因为它的特征值是正的, 而在 t 轴上每点向区域内引的特征线总是往上的, 而对第二

个问题特征值是负数，从正 t 轴上每点可以引一条特征线跟正 x 轴有关，从而 t 轴上每点值可由 x 轴上相应点的值确定，从而在 t 轴上不可能任意给值。

现求解第一题

设 (x,t) 给定在 t 轴和特征线 $x=at$ 之间，则从 (x,t) 引的特征线和 t 轴上相交于 $(0,t-x/a)$，沿着这条特征线 $\frac{du}{dt}=0, u=c$，从而 $u(x,t)=u(0,t-x/a)=u(t-x/a)$

当 $x>at$ 时，从点 (x,t) 引的特征线与 x 轴交于 $(x-at,c)$，从而 $u(x,t)=\varphi(x-at)$

由于古典解必然属于 $C^1(\overline{Q})$，$Q=\{(x,t)\,|\,x>0,t>0\}$

故 $u\in C^1([0,\infty)),\varphi\in C^1([0,\infty))$ 且 $u(0)=\varphi(0)$，又在 $(0,0)$ 满足方程. 故 $u'(0)+a\varphi'(0)=0$.

31. 解:

令 $v=x+u$，则方程化为

$$\begin{cases} v_t=\dfrac{1}{1-v}v_x & -\infty<x<\infty,t>0 \\ v(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

沿特征线 Γ_a 过 x 轴上点 $(a,0)$，则沿 Γ_a，有

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1-a}\Rightarrow x=\frac{t}{1-a}+a$$

$$v\left(\frac{t}{1-a}+a,t\right)=v(a,0)=a$$

令 $\frac{t}{1-a}+a=x$

则 $a=\dfrac{1+x\pm\sqrt{(1-x)^2+\varphi t}}{2}$

$$v(x,t)=\frac{1+x\pm\sqrt{(1-x)^2+\varphi t}}{2}$$

考虑到 $v(x,0)=x$

故取

$$v(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1+x+\sqrt{(1-x)^2+\varphi t}}{2} & x\ge 1\\ \dfrac{1+x-\sqrt{(1-x)^2+\varphi t}}{2} & x<1\end{cases}$$

第三章 热传导方程

1. 解:

(1)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}|x|e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-a}^{0}+\int_{0}^{a}|x|(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a\sin\lambda x}{\lambda x}+\frac{\cos\lambda a-1}{\lambda^2}\right)$$

(2)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)e^{-i\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-a}^{a}(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx-\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}-2\frac{\cos\lambda a-1}{\lambda^2}\right]$$ 、

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1\text{-}\cos a\lambda}{a\lambda^2}$$

(3)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\sin\lambda_0 x(\cos\lambda x-i\sin\lambda x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\frac{\sin(\lambda_0+\lambda)x+\sin(\lambda_0-\lambda)x}{2}-i\frac{\cos(\lambda_0-\lambda)x-\cos(\lambda_0+\lambda)x}{2}dx$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(\lambda_o+\lambda)a}{\lambda_0+\lambda}-\frac{\sin(\lambda_0-\lambda)a}{\lambda_0-\lambda}\right]$$

(4)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(a-i\lambda)x}dx+\int_{0}^{\infty}e^{(-a-i\lambda)x}dx\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\lambda^2}$$

(5)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0}\cos xe^{(a-i\lambda)x}dx+\int_{0}^{\infty}\cos xe^{(-a-i\lambda)x}dx\right]$$
$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a^2+(\lambda+1)^2}+\frac{1}{a^2+(\lambda-1)^2}\right)$$

2.
解:这一题题目也缩了考察的是 Fourier 变换的性质,注意到这些题目中所需要变换的函数大多与前一题或者书本例题已经得到 Fourier 变换结果的函数有关,因而基于此对该问进行 Solve。

(1)

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & (|x|<a)\\ 0 & (|x|\geq a)\end{cases}\quad \text{(例 1)}$$

$$\hat{f}_1(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin a\lambda}{\lambda}$$

$$\hat{f}(\lambda)=\left(x^2f_1\right)^{\wedge}=i^2\frac{d^2}{d\lambda^2}\hat{f}_1$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{a^2\sin a\lambda}{\lambda}+\frac{2\sin a\lambda}{\lambda^3}-2a\frac{\cos a\lambda}{\lambda^2}\right)$$

(2)

$$\hat{f}(\lambda)=\left(xg(x)\right)^{\wedge}=i\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\lambda^2}\right)$$
$$=-i2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\lambda}{\left(a^2+\lambda^2\right)^2}$$

其中,……emm,前一题的第(4)问

(3)
由例 1 得

$$\hat{f}(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\lambda+ui)a}{\lambda+ui}$$

(4)

结合 $T_1(3)$、(4)

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}i}\left(\frac{1}{a^2+(\lambda-\lambda_0)^2}-\frac{1}{a^2+(\lambda+\lambda_0)^2}\right)$$

(5)

由(3)直接得到结果

(6)

利用例 4 与(3)

(7)

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a|\lambda|}$$

(8)
利用(7)

$$\hat{f}(\lambda)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|\lambda|}sign\lambda$$

(9)

$$\lambda>0,\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2a^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lambda}(1+a\lambda)$$

由于 f 是偶函数，故 $\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{2a^3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|\lambda|}(1+a|\lambda|)$

3. 解:

(1)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2ta}}e^{-x^2/4a^2t}$$

(2),(3)略 ,believe in yourself。。

4.

(1)

对于该定解问题等式两边关于变量 x 做 *Fourier* 变换.

$$\text{得}\begin{cases}\dfrac{d\hat{u}}{dt}+a^2\lambda^2\hat{u}-ib\lambda\hat{u}-c\hat{u}=\hat{f}(\lambda,t)\\ \hat{u}(\lambda,0)=\hat{\varphi}(\lambda)\end{cases}$$

其中, $\hat{u}(\lambda,t)$ 为解 $u(x,t)$ 关于 x 的 *Fourier* 变换式, 求解该 *ODE* 得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}e^{\left(-a^2\lambda^2+ib\lambda+c\right)t}+\int_0^t\hat{f}(\lambda,\tau)e^{\left(a^2\lambda^2-ib\lambda-c\right)(\tau-t)}d\tau$$

再对上式两边反演

$$u(\lambda,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{\left(t-(x-\xi+bt)\right)^2/4a^2t}d\xi$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)e^{c(t-\tau)-\frac{\left(x-\xi+b(t-\tau)\right)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

(2)给答案，给答案…敲公式真的累死了

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$$

5. 证: ☹花 D 不会打, 全打 D……后续同

(1) $\forall\psi\in D(R)$

$$\langle\varphi(x)\delta(x),\psi\rangle=\langle\delta(x),\varphi\psi\rangle=\varphi(0)\psi(0)$$

$$=\varphi(0)\langle\delta,\psi\rangle$$

$$=\langle\varphi(0)\delta,\psi\rangle\Rightarrow\varphi(x)\delta(x)=\varphi(0)\delta(x)$$

(2)

$\forall \psi \in D(R)$

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi(x)\delta'(x),\psi\rangle \\
&=\langle \delta'(x),\varphi\psi\rangle \\
&=-\left\langle \delta(x),(\varphi\psi)'\right\rangle \\
&=-(\varphi\psi)'(0) \\
&=-\varphi(0)\psi'(0)-\varphi'(0)\psi(0) \\
&=-\varphi(0)\langle\delta,\psi'\rangle-\varphi'(0)\langle\delta,\psi\rangle \\
&=\varphi(0)\langle\delta',\psi\rangle-\varphi'(0)\langle\delta,\psi\rangle \\
&=\langle -\varphi'(0)\delta(x)+\varphi(0)\delta'(x),\psi\rangle
\end{aligned}$$

(3)

$\forall \varphi \in D(R)$

$$\begin{aligned}
&\left\langle x\delta^{(m)}(x),\varphi\right\rangle \\
&=\left\langle \delta^{(m)}(x),x\varphi\right\rangle \\
&=(-1)^m\left\langle \delta(x),(x\varphi)^{(m)}\right\rangle \\
&=(-1)^m\left\langle \delta(x),x\varphi^{(m)}+m\varphi^{(m-1)}\right\rangle \\
&=(-1)^m\left[0\ \varphi^{(m)}+m\varphi^{(m-1)}(0)\right] \\
&=(-1)^m\left\langle \delta(x),m\varphi^{(m-1)}\right\rangle \\
&=(-1)^m(-1)^{m-1}\left\langle \delta^{(m-1)}(x),m\varphi\right\rangle \\
&=\left\langle -m\delta^{(m-1)}(x),\varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

(4)

$\forall \varphi \in D(R)$

$$\begin{aligned}
&\left\langle x^m\delta^{(m)}(x),\varphi\right\rangle \\
&=\left\langle \delta^{(m)}(x),\varphi x^m\right\rangle=(-1)^m\left\langle \delta(x),\sum_{i=1}^{m}\varphi^{(i)}\left(x^m\right)^{m-i}\right\rangle \\
&=(-1)^m m!\varphi(0)=(-1)^m m!\langle \delta(x),\varphi(x)\rangle
\end{aligned}$$

(5)

$$\left\langle\left(H(x)\rho(x)\right)',\varphi\right\rangle$$
$$=-\langle H(x)\rho(x),\varphi'\rangle$$
$$=-\langle H(x),\rho(x)\varphi'\rangle$$
$$=-\left\langle H(x),(\rho\varphi)'-\rho'\varphi\right\rangle$$
$$=\langle H',\rho\varphi\rangle+\langle H\rho',\varphi\rangle$$
$$=\langle\delta,\rho\varphi\rangle+\langle H\rho',\varphi\rangle$$
$$=\langle\rho(0)\delta,\varphi\rangle+\langle H\rho',\varphi\rangle$$
$$=\langle\rho(0)\delta+H\rho',\varphi\rangle$$

6. 解:

(1) 注意到

$$(|x|)'=\left(x\left(H(x)-H(-x)\right)\right)'$$
$$=H(x)-H(-x)$$

$$(|x|)^{(m)}=\left(H(x)-H(-x)\right)^{(m-1)}=\left(2\delta(x)\right)^{(m-2)}=2\delta^{(m-2)}(x)$$

(2) 由第五题的第二小问啊啊

$$\left(H(x)\sin x\right)'=\delta(x)\cdot 0+H(x)\cos x=H(x)\cos x$$

(3) $\left(H(x)e^{ax}\right)''=\left(\delta(x)+aH(x)e^{ax}\right)'=\delta'(x)+a\delta(x)+a^2H(x)e^{ax}$

7. 解

(1)

$$f'(x)=\left(\sin xH(x)\right)'=\cos xH(x)$$

(2)

$$f'(x)=\left(\cos xH(x)\right)'=\delta(x)-\sin xH(x)$$

(3)

$$f(x)=x^2\left[H(x+1)-H(x-1)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x)=\left[H(x+1)-H(x-1)\right]2x+\delta(x+1)-\delta(x-1)$$

8. 解:
(1)

令 $z=\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$

容易验证 $\Phi_t-a^2\Phi_{xx}=0$

令 $v=u-U_0$, 则问题转化为

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=0 & x>0,t>0 \\ v(x,0)=-U_0 & x\ge 0 \\ v(0,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

令 $v=c\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$, 则 v 满足 $v_t-a^2v_{xx}=0$ 与 $v(0,t)=0$

则可利用 $v(x,0)=-U_0$ 反解:

$$c\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi=c=-U_0$$

$$\Rightarrow u(x,t)=-U_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\xi^2}d\xi+U_0$$

(2)
作偶延拓

使 $\overline{u}(x,0)=\begin{cases} U_0 & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \\ U_0 & -1\le x<0 \\ 0 & x<1 \end{cases}$

考虑问题

$$\begin{cases} \overline{u}_t-a^2\overline{u}_{xx}=0 & -\infty<x<\infty \\ \overline{u}_x(0,t)=0 & t>0 \\ \overline{u}(x,0)=as\ the\ above \end{cases}$$

令 $\overline{u}=C_1\left[\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\dfrac{-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+C_2\left[\Phi\left(\dfrac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\dfrac{-x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$

易知其满足方程和边界条件, 再由初始条件可以机道 $C_2=-U_0/2$

故$u=-\frac{U_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{X-1}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\frac{-x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+C\left[\Phi\left(\frac{X}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\frac{-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$

(3)/(4)与(2)同理,所以就略喽

9. 此题只推选了(1),(2),(5)作为典型模范,其余题目同志向三者学习即可

(1)

令$u(x,t)=X(x)T(t)$

把它代入泛定方程有

$$X(x)T'(t)-X''(x)T(t)=X(x)T(t)$$

令$\frac{T'(t)-T(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$

又有边条件,可得 $Sturm-Liouville$ 问题

$$\begin{cases}X'(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

由书籍讲解已知特征值为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n=1,2\dots$$

对应特征函数为

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$$

于是有$T_n'(t)+(\lambda_n-1)T_n(t)=0$

$$\Rightarrow T_n(t)=C_ne^{\left[1-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]t}$$

$$\Rightarrow u=\sum_{n=1}^{\infty}C_ne^{\left[1-(n\pi)^2/l^2\right]t}(\sin n\pi/l)x$$

又由初始条件知

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=1\Rightarrow C_n=\frac{2}{l}\int_0^{\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

(2)

解:

令 $u(x,t)=X(x)T(t)$

把它代入泛定方程有 $X(x)T'(t)-a^2X''(x)T(t)=0$

因而有 $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2T(t)}=-\lambda$

$Sturm-Liouville$ 问题:

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_n=n^2$

$X_n(x)=C_n\cos nx$

又 $T_n'(t)+a^2n^2T_n(t)=0$

可得 $T_n(t)=e^{-a^2n^2t}$

从而有 $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_ne^{-a^2n^2t}\cos nx$

又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n\cos nx=\sin x$

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\xi\cos n\xi d\xi$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{1-n^2} & n\ is\ odd \\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{1-n^2} & n\ is\ even \end{cases}$$

(5)

求 $v=v(x)$ 使之满足

$$\begin{cases} -a^2v''=x(l-x) \\ v(0)=v'(l)=1 \end{cases}$$

解之得

$$v(x)=\frac{x^4}{12a^2}-\frac{lx^3}{6a^2}+\left(1+\frac{l^3}{6a^2}\right)x$$

令 $u=v+w$, 则 w 满足

$$\begin{cases} w_t-a^2w_{xx}=0 \\ w|_{t=0}=\sin\frac{\pi x}{l}-\left(\frac{x^4}{12a^2}-\frac{lx^3}{6a^2}+\left(1+\frac{l^3}{6a^2}\right)x\right) \quad \varphi(x) \\ w|_{x=0}=w_x|_{x=l}=0 \end{cases}$$

解之得

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{(2n-1)a\pi}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}xdx$$

$$=\frac{8(-1)^n}{\pi^2(2n-3)(2n+1)}+\frac{8l(-1)^n}{\left[(2n-1)\pi\right]^2}+\frac{32(-1)^n l^4}{\left[(2n-1)\pi\right]^4a^2}+\frac{128l^4}{\left[(2n-1)\pi\right]^5a^2}$$

10. 略, 与第九题同宗

11. 解:

设 $Q_\tau=\left\{(x,t)\middle|0<x<l,0<t\le T\right\}$

Γ 是 Q_τ 抛物边界

定解问题如下

$$\begin{cases} u_t-a_1^2u_{xx}=0 & 0<x<l_1,t>0 \\ u_t-a_2^2u_{xx}=0 & l_1<x<l_1+l_2,t>0 \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0 & t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & 0<x<l_1+l_2 \\ k_1u_x(l_1-0,t)=k_2u(l_1+0,t) & t>0 \\ u(l_1-0,t)=u(l_1+0,t) & t>0 \end{cases}$$

among them, $a_i^2=k_i/c_i\rho_i$

12. ε =(′ o ‵*)))唉 套公式题

13. 证明:

令 $v=u_t$，则问题转化为

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = f_t(x,t) & (x,t)\in Q \\ v\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = f(x,0) - \varphi''(x) & 0\le x\le l \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l} = 0 & 0\le t\le T \end{cases}$$

由第一边值问题的最大模估计知

$$\begin{aligned} \max_{\bar{Q}}|v| &\le \sup_{Q}|f_t|T + \sup_{[0,l]}\left|f(x,0)-\varphi''(x)\right| \\ &\le \sup_{Q}|f_t|T + \sup_{[0,l]}\left|f(x,0)\right| + \sup_{[0,l]}\left|\varphi''(x)\right| \\ &\le \sup_{Q}|f_t|T + \sup_{Q}|f| + \sup_{[0,l]}|\varphi''| \end{aligned}$$

$$\|f\|_{C^1(\bar{Q})} = \sup_{\bar{Q}}|f| + \sup_{\bar{Q}}|f_t|$$

$$\|\varphi''\|_{C[0,l]} = \sup_{[0,l]}|\varphi''|$$

令 $C=\max\{T,1\}$ 即得所证

14. 证:

(1)

令 $v=Cx$

则 $v\big|_{x=0}=0, v\big|_{x=l}=cl>0$

$$Lv = v_t - v_{xx} = 0$$

取 $C>0$，使 $|\varphi(x)|\le Cx$

只需令 $C=\max|\varphi'|$ 即可

这是因为 $|\varphi(x)| = |\varphi(x)-\varphi(0)| = |\varphi'(\xi)|x \le \max|\varphi'|x$

由比较原理得

$$u(x,t)\le v(x)\frac{u(x,t)-u(0,t)}{x} \le \frac{v(x)-v(0)}{x} = C$$

令 $x \to 0^+$, 即得 $u_x(0,t) \le C$

类似可证 $-u_x(0,t) \le C$, 因而有 $\max\limits_{(0,T)} |u_x(0,t)| \le C$

同理可证 $\max\limits_{(0,T)} |u_x(l,t)| \le C$

(2)

令 $v = u_x$, 则

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi'(x) \\ v|_{x=0} = u_x(0,t) \\ v|_{x=l} = u_x(l,t) \end{cases}$$

最大模估计

$$\max_{\bar{Q}} |v| \le C \max\left\{ \|\varphi'\|_{C[0,l]}, \|u_x(0,t)\|_{C[0,T]}, \|u_x(l,t)\| \right\} \le \tilde{C}$$

结合(1)可说明 $\tilde{C}$ 仅依赖于 $\|\varphi\|_{C^1(0,l)}$

15. 这题写个思路, 老套路了, 令 $v = u_x$ 后用第一边值的最大模估计给个结果, 再对结果运用第三边值的最大模估计整一下, 就得到最终的 answer 了.

16.

证:

令 $v = u_{l_2} - u_{l_1}$, 并考虑 $[0,l_1] \times [0,T]$ 上定解问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v|_{t=0} = 0 \\ v(0,t) = 0, v(l_1,t) = u_{l_2}(l_2,t) - 0 \end{cases}$$

再考虑

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{l_2}}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_{l_2}}{\partial x^2} = 0 \\ u_{l_2}\big|_{t=0} = 0 \\ u_{l_2}(0,t) = g_1(t), u_{l_2}(l_2,t) = 0 \end{cases}$$

由弱极值原理，u_{l_2} 在 Q^{l_2} 上最大、最小值都在 Γ 上达到，即有

u_{l_2} 在 Q^{l_2} 上取值 ≥ 0

$u_{l_2}(l,t) \geq 0$

再由弱极值原理知

v 在 Q^{l_1} 上取值 ≥ 0

即有命题得证

物理解释：在一根长杆左端放置一热源，其热量沿杆传输，至杆的右端时热量恰好"分发"结束，即右端位置温度为 0. 因温度分布连续，故当杆越长，其上每一处的温度越高.

17．证：

(1) 令 $u_0 - u$=v 则 v 满足

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v\big|_{t=0} = U_o \geq 0 \\ v\big|_{x=l} = U_0 \geq 0 \\ v_x - hv\big|_{x=0} = -u_x - h(u_0 - u) = 0 \end{cases}$$

由极值原理可知 $v \geq 0$，同理可知 $u \geq 0$

(2) $v = u_{h_2} - u_{h_1} \; (h_2 > h_1)$

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 \\ v\big|_{t=0} = 0 \\ v\big|_{x=l} = 0 \\ v_x + h_2(u_0 - u_{h_2}) - h_1(u_0 - u_{h_1})\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$v_x - h_1\left(u_{h_2} - u_{h_1}\right) = \left(h_2 - h_1\right)\left(u_0 - u_{h_2}\right) \le 0$$

Hence, $v \ge 0 \Rightarrow u_{h_2} \ge u_{h_1}$

物理解释:一根没有热源的杆,初始温度为 0℃,一段保持 0℃,另一端保持与温度为u_0℃介质接触,其温度不会超过u_0℃,也不会低于 0℃。而热交换系数 h 越大,杆的分布温度自然越高。

18.

证:

① 设 $Lu = u_t - a^2 u_{xx} + c(x,t)u < 0$

证明u在$\bar{Q}$上的非负最大值一定不能在Q内达到.

反证法:假设在Q内一点$P_0(x_0, t_0)$达到了$\bar{Q}$上的非负最大值,那么必有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{p_0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{p_0} \le 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{p_0} \ge 0$$

且 $Lu\big|_{p_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{p_0} - a^2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{p_0} + c(x,t)u\big|_{p_0} \ge 0$

这与$Lu < 0$矛盾,假设不成立,结论成立.

即有 $\max\limits_{\bar{Q}} u^+ = \max\limits_{\Gamma} u^+ \quad u^+ = \max\{u, 0\}$

② 下面证明$Lu \le 0$结论,引入辅助函数

$v = u - \varepsilon t \quad (\varepsilon > 0)$

则 $Lv = Lu - \varepsilon < 0$ 满足①中情形,即

$$\max_{\bar{Q}} v^+ = \max_{\Gamma} v^+$$

而 $\max\limits_{\bar{Q}} u^+ = \max\limits_{\bar{Q}}(v + \varepsilon t)^+ \le \max\limits_{\bar{Q}} v^+ + \varepsilon t = \max\limits_{\Gamma} v^+ + \varepsilon T$

又

$$\max_{\Gamma} v^+ \le \max_{\Gamma}(u - \varepsilon t)^+ \le \max_{\Gamma} u^+$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{Q}} u^+ \le \max_{\Gamma} u^+ \le \max_{\bar{Q}} u^+$$

$$\Rightarrow \max_{\bar{Q}} u^+ = \max_{\Gamma} u^+$$

19. 证:

为了使问题归结为 18 题, 需使 $v_t - a^2 v_{xx} + c'(x,t)v \le 0$

其中 $c'(x,t)$ 有界且 $c'(x,t) \ge 0$

这就需要 $c'(x,t) = c(x,t) + c_0$

代入 $v_t = z(t)u(x,t)$ 及 $c'(x,t) = c(x,t) + c_0$

得 $z(t)\left(u_t - a^2 u_{xx} + c(x,t)u\right) + \left[z'(t) + c_0 z(t)\right]u \le 0$

为了使不等式成立, 需

$$\begin{cases} z(t) \ge 0 \\ \left[z'(t) + c_0 z(t)\right]u \le 0 \end{cases}$$

因 u 无法确定正负, 可令 $z'(t) + c_0 z(t) = 0$

$\Rightarrow z(t) = const e^{-c_0 t}$　又 $z(t) \ge 0$ 取 $const = 1$

则问题归结为 18 题

此时显然 $u(x,t)\ in\ \bar{Q} \le \max_{\bar{Q}} u(x,t)$

又 $\max_{\bar{Q}}\left(e^{-c_0 t}u\right)^+ = \max_{\bar{Q}} v^+ = \max_{\Gamma} v^+ = \max_{\Gamma} e^{-c_0 t}u \le 0$

$\Rightarrow u(x,t)\ in\ \bar{Q} \le 0$

20.

证:

把方程改写为

$u_t - u_{xx} + \left[u - a(x,t)\right]u = 0$

由比较原理可得

$u \ge 0$

令 $\bar{c} = \max\left|a(x,t)\right|, u = e^{\bar{c}t}v$

则 v 满足 $v_t - v_{xx} + \left(\bar{c} - a(x,t)\right)v \le 0$

$w = \max_{\bar{Q}} \varphi(x)$ 显然满足

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} + \left[\bar{c} - a(x,t)\right] w \ge 0 \\ w\big|_{t=0} = \max\limits_{[0,l]} \varphi(x) \ge v\big|_{t=0} \\ w\big|_{x=0} \ge 0, w\big|_{x=l} \ge 0 \end{cases}$$

由比较原理，$w \ge v \ \ in \, \bar{Q}$，即

$$e^{-\bar{c}t} u \le \max_{[0,l]} \varphi(x)$$

$$u \le e^{\bar{c}t} \max_{[0,l]} \varphi(x)$$

21.

证：

设$|u| \le k$，f, φ, μ 皆为 0，令

$$Q_L = \left\{(x,t) \middle| 0 < x < L, 0 < t \le L\right\}$$

构造辅助函数

$$w(x,t) = v_L(x,t) \pm u(x,t)$$

$$v_L(x,t) = \frac{k}{L^2}\left(x^2 + 2a^2 t\right)$$

$$\begin{cases} (v_L)_t - a^2 (v_L)_{xx} = 0 \\ v_L(x,0) = \dfrac{k}{L^2} x^2 \ge 0 \\ v_L(l,t) \ge k \ge \left|u(x,t)\right|, v_L(0,t) = \dfrac{k}{L^2} 2a^2 t \ge 0 \end{cases}$$

若$u\big|_{x=0} = 0, t > 0$ 由比较原理在 Q_L 内 $w(x,t) \ge 0$

从而$\left|u(x,t)\right| \le \dfrac{k}{L^2}\left(x^2 + 2a^2 t\right)$

对任意点$(x_0, t_0) \in Q = \left\{(x,t) \mid x > 0, t > 0\right\}$

当L充分大时，有$(x_0, t_0) \in Q_L$

于是$\left|u\left(x_0,t_0\right)\right| \le \frac{k}{L^2}\left(x_0^2+2a^2t_0\right)$

令$L\to\infty$则有$u\left(x_0,t_0\right)=0$

若$-\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha u\bigg|_{x=0}=0$

由于$-\left(v_L\right)_x+\alpha v_L\big|_{x=0}=\frac{k}{L^2}2a^2t\ge 0$

同理可得结论.

22. 证:

方程两端乘以u_t并在Q_τ上积分得

$$-\int_0^\tau\int_0^l u_{xx}u_t dxdt+\iint_{Q_\tau}u_t^2dxdt=\iint_{Q_\tau}fu_tdxdt$$

注意到$u_t\big|_{x=0}=u_t\big|_{x=l}=0$

故

$$\begin{aligned}-\int_0^\tau\int_0^l u_{xx}u_t dxdt&=-\frac{1}{2}\int_0^\tau dt\int_0^l u_t du_x\\&=-\int_0^\tau\left(u_t u_x\big|_0^l-\int_0^l u_x u_{xt}dx\right)dt\\&=\int_0^\tau\int_0^l u_x u_{xt}dxdt\end{aligned}$$

又

$$\int_0^\tau\int_0^l u_x u_{xt}dxdt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l\int_0^\tau\left(u_x\right)_t^2 dtdx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^l u_x^2\big|_{t=\tau}dx-\frac{1}{2}\int_0^l\varphi'^2dx$$

故

$$\int_0^l u_x^2\Big|_{x=\tau} dx + 2\iint_{Q_\tau} u_t^2 dxdt$$

$$= \int_0^l \varphi'^2 dx + 2\iint_{Q_\tau} f u_t dxdt$$

$$\le \int_0^l \varphi'^2 dx + \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt + \iint_{Q_\tau} u_t^2 dxdt$$

$$\Rightarrow \int_0^l u_x^2\Big|_{t=\tau} dx + \iint_{Q_\tau} u_t^2 dxdt \le \int_0^l \varphi'^2 dx + \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt$$

两边关于 τ 取上确界即得所证

23. 证:

方程两端乘以 u 并在 Q_τ 上积分得

$$\int_0^\tau \int_0^l \left(u_t^2 - a^2 u_{xx}\right) u dxdt = \int_0^\tau \int_0^l f u dxdt$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau \int_0^l \frac{1}{2}\left(u^2\right)_t - a^2\left(u_x u\right)_x + a^2 u_x^2 dxdt = \iint_{Q_\tau} f u dxdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^l \varphi^2 dx - a^2\int_0^\tau u_x(l,t)u(l,t)dt$$

$$+ a^2\int_0^\tau u_x(0,t)u(0,t)dt + a^2\iint_{Q_\tau} u_x^2 dx = \iint_{Q_\tau} f u dxdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^l \varphi^2 dx + a^2\int_0^\tau \beta u^2(l,t)dt$$

$$+ a^2\int_0^\tau \alpha u^2(0,t)dt + a^2\iint_{Q_\tau} u_x^2 dx = \iint_{Q_\tau} f u dxdt$$

$$\Rightarrow \int_0^l u^2(x,\tau)dx + 2a^2\iint_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \le 2\iint_{Q_\tau} f u dxdt + \int_0^l \varphi^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l u^2(x,\tau)dx + 2a^2\iint_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \le \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt + \iint_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int_0^l \varphi^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_0^l u^2(x,\tau)dx \le \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt + \iint_{Q_\tau} u^2 dxdt + \int_0^l \varphi^2 dx \qquad ①$$

令

$$G(\tau) = \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt$$

$$F(\tau) = \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt + \int_0^l \varphi^2 dx$$

由 Gronwall 不等式可知

$$\int_0^l u^2(x,\tau)dx \le e^\tau\left(\iint_{Q_\tau} f^2 dxdt+\int_0^l \varphi^2 dx\right) \qquad ②$$

$$\int_0^\tau\int_0^l u^2 dxdt \le \left(e^\tau-1\right)\left(\iint_{Q_\tau} f^2 dxdt+\int_0^l \varphi^2 dx\right)$$

再由①式知

$$2a^2\iint_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \le \iint_{Q_\tau} f^2 dxdt+\iint_{Q_\tau} u^2 dxdt+\int_0^l \varphi^2 dx$$

$$\le e^\tau\left(\iint_{Q_\tau} f^2 dxdt+\int_0^l \varphi^2 dx\right)$$

$$\Rightarrow \iint_{Q_\tau} u_x^2 dxdt \le \frac{e^\tau}{2a^2}\left(\iint_{Q_\tau} f^2 dxdt+\int_0^l \varphi^2 dx\right) \qquad ③$$

②+③再关于$\tau\in[0,T]$取上确界即有命题得证.

第四章 位势方程

1. 证:

(1) 令$v(x)=C_0^{-1}\sup\limits_\Omega|f(x)|$, 则有$v|_{\partial\Omega}\ge 0=u|_{\partial\Omega}$

$$-\Delta v+c(x)v=c(x)C_0^{-1}\sup_\Omega|f(x)|\ge \pm f(x)=-\Delta(\pm u)+c(x)(\pm u)$$

由比较原理得$v(x)\ge\pm u(x)$, 即

$$C_0^{-1}\sup_\Omega|f(x)|\ge\max_{\bar\Omega}|u(x)|$$

(2) 不妨设Ω包含原点, 令$d=diam\Omega$, 做函数

$$v(x)=\sup_\Omega|f(x)|\left(d^2-|x|^2\right)\Big/2n$$

注意到$c(x)\ge 0, v(x)>0$，我们有

$$-\Delta v(x)+cv\ge\sup_\Omega|f(x)|\ge\pm f(x)=-\Delta(\pm u)+c(\pm u)$$

又显然 $v|_{\partial\Omega} \geq 0$，由比较原理得

$$|u(x)| \leq v(x) \leq \frac{d^2}{2n}\sup_{\Omega}|f(x)|$$

(3) 例如 $u=\sin x$ 满足 $-u'' \pm u = 0, u(0)=u(\pi)=0$ 但 $u \neq 0$

2. 证：

记 $F=\sup_{\Omega}|f|, \Phi_1=\sup_{\Gamma_1}|\varphi_1|, \Phi_2=\sup_{\Gamma_2}|\varphi_2|$

令 $w(x)=\Phi_1/\alpha_0+\Phi_2+\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)\pm u$

则

$$Lw=-\frac{F}{2n}(-2n)+c(x)\left[\frac{\Phi_1}{\alpha_0}+\Phi_2+\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)\right]\pm f$$

$$=F\pm f+c(x)\left[\frac{\Phi_1}{\alpha_0}+\Phi_2+\frac{F}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)\right]\geq 0$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial n}+\alpha(x)w\right)\right|_{\Gamma_1}=\frac{F}{2n}\left.\left[-2\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_i(x)+\alpha(x)\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)\right]\right|_{\Gamma_1}$$

$$+\left.\left[\alpha(x)\left(\frac{\Phi_1}{\alpha_0}+\Phi_2\right)\right]\right|_{\Gamma_1}\pm\varphi_1\geq 0$$

$\Rightarrow w\geq 0\ \ in\ \ \Omega$

$$\Rightarrow |u|\leq\frac{\Phi}{\Omega_0}+\Phi_2+\frac{1}{2n}\left(\frac{1+d^2}{\alpha_0}+d^2-|x|^2\right)F$$

3. 证：

不妨设 $u(x^0)=0$，令 $w(x)=|x|^{-a}-r^{-a}, w(x^0)=0$

$$w_{x_i}=-a|x|^{-a-2}x_i, w_{x_ix_i}=-a(a-2)|x|^{-a-4}x_i^2-a|x|^{-a-2}$$

$$Lw=-a(a-2)|x|^{-a-2}+an|x|^{-a-2}-a|x|^{-a-2}\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c(x)|x|^{-a}$$
$$\le\left[-a(a-2)|x|+an-a\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c(x)|x|^2\right]|x|^{-a-2}$$
$$\le\left[-a(a-2)+an+aBr+Cr^2\right]|x|^{-a-2}$$

其中, $B=\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}$, $C=\sup_{\Omega}c(x)$. 取 a 充分大, 可使 $Lw<0$, 又取 ε 充分小, 使

$$\varepsilon w(x)\Big|_{|x|=\frac{r}{2}}=\varepsilon\left[\left(\frac{r}{2}\right)^{-a}-r^{-a}\right]=-\max_{|x|=\frac{r}{2}}u(x)$$

$$L(-\varepsilon w)>0,-\varepsilon w\big|_{\partial B}=0,-\varepsilon w\big|_{|x|=\frac{r}{2}}\ge u\big|_{|x|}=\frac{r}{2}$$

由比较原理得 $-\varepsilon w\ge u, r/2<|x|<r, \dfrac{\partial u}{\partial v}\ge\dfrac{\partial}{\partial r}(-\varepsilon w)$

令 $\rho=|x|$, 得

$$\frac{\partial}{\partial v}(-\varepsilon w)=-\varepsilon\frac{\partial w}{\partial\rho}\cos(n,v)\Big|_{\rho=r}=\varepsilon\alpha r^{-\alpha-1}\cos(n,v)>0$$

证毕

4. 证:

假设 $Lu=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u>0$

则 u 在 Ω 内不能取非正最小值 m. 因若不然, 设有 $x^0\in\Omega$, $u(x^0)=m\le0$

由极值必要条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x^0)=0$, Hesse 矩阵非正定, 又 $\left[a_{ij}(x^0)\right]$ 正定, 故

$$-\sum a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)\le0$$

又 $c(x^0)u(x^0)\le0$, 此与 $Lu(x^0)>0$ 矛盾, 若仅设 $Lu\ge0$, 对 $u+\varepsilon$ 有

$L(u+\varepsilon)=Lu+c(x)\varepsilon>0$, 仿书上定理 2.2 证明即可.

5.

证:

$\forall\varepsilon>0,\exists R_0>0$, 使 $|x|\geq R_0$ 时, $u(x)<l+\varepsilon$, 不妨设任取点 $x^0\in R^3\setminus\bar{\Omega}_0$, 取 $R>R_0$,

使 $x^0\in B_R(0),\Omega_0\subset B_R(0)$, 在 $B_R(0)-\bar{\Omega}_0$ 上用极值原理得

$u(x^0)<\max\left(l+\varepsilon,\max\limits_{\partial\Omega_0}\varphi\right)$

令 $\varepsilon\to 0$ 得 $u(x^0)\leq\max\left(l,\max\limits_{\partial\Omega_0}\varphi\right)$

同理 $u(x^0)\geq\min\left(l,\min\limits_{\partial\Omega_0}\varphi\right)$

证毕.

6.

证:

令 $v=\dfrac{1}{\alpha_0}\max\limits_{\partial\Omega}|\varphi(x)|$

则 $\begin{cases}-\Delta v+v^3\geq 0\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}+\alpha(x)v\big|_{\partial\Omega}\geq\varphi(x)\end{cases}$

由比较原理得 $v\geq|u|$

即 $\dfrac{1}{\alpha_0}\max\limits_{\partial\Omega}|\varphi(x)|\geq\max\limits_{\bar{\Omega}}|u(x)|$

7.

证:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使 $Q\in\partial B_\delta(P_0)\cap\Omega$ 时, $|u(Q)|<M_0+\varepsilon$,

不妨设 $P\in\Omega\setminus\bar{B}_\delta(P_0)$, 在 $\Omega\setminus\bar{B}_\delta(p_0)$ 上用极值原理得

$$\pm u(p) \le \max\left\{M_0+\varepsilon, \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right\}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 再取 sup，得 $\sup_{\Omega}|u(x)| \le \max\left\{M_0, \sup_{\partial\Omega}|\varphi|\right\}$

8.

证:

(1) 设 $v=\frac{1}{C_0}\sup_{B^+}|f(x,y)|+\max_{\partial B^+}|\varphi(x,y)|$

则 $-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c(x,y)v \ge f(x,y)=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdots$

$v|_{\partial B^+} \ge \varphi = u|_{\partial B^+}$

由比较原理即得证

(2) 取 $v(x)=\frac{1-x^2}{2}\sup_{\Omega}|f|+\max_{\partial B^+}|\varphi(x,y)|$

由比较原理即得证

9.

证:

设 $f\equiv 0$，$\varphi\equiv 0$，对 $\varepsilon>0$，取 $L_0>0$，使得 $\varepsilon\ln L_0 \ge M=\sup_{R_+^2}|u|$.

考虑矩形域 $\Omega_L=\{(x,y)\,|\,|x|<L, 0<y<L\}$ $(L>L_0)$，

作函数 $v=\varepsilon\ln\left[x^2+(y+1)^2\right]$，

在 $|x|=L, |y|=L$ 和 $|x|\le L, y=L$ 上，$v\ge\varepsilon\ln L\ge\sup_{R_+^2}|u|$，

在 $|x|<L, y=0$ 上 $v\ge\varepsilon\ln 1=0=\pm u$

由比较原理得 $v\ge\pm u$，在 Ω_L 上，$L>L_0$，从而在 R_+^2 上 $v\ge\pm u$.

令 $\varepsilon\to 0, L_0\to+\infty$，即得 $u\equiv 0$

10. 证:

设 $f\equiv 0,\varphi\equiv 0,|u|\le M$，只需证 $u\equiv 0$

$\forall\varepsilon>0$，取 $r_0>0$ 充分小，使得 $\varepsilon\ln\dfrac{d}{r_0}>M$

考虑区域 $\Omega\setminus B_r(p_0)$，其中 $0<r<r_0$，易见在 $\Omega\setminus B_r(p_0)$ 边界上 $\varepsilon\ln\dfrac{d}{r_0}\ge\pm u$，又在区域 $\Omega\setminus B_r(p_0)$ 上 $-\Delta\left(\varepsilon\ln\dfrac{d}{r}\right)=0$，由比较原理得 $\varepsilon\ln\dfrac{d}{r}\ge\pm u$

由 $0<r<r_0$ 在 Ω 上的任意性，$\varepsilon\ln\dfrac{d}{r}\ge\pm u$，再令 $\varepsilon\to 0$，即得证.

11.

证:

(1) 设 $Q=\sup\limits_{(0,1)}|q|,F=\sup\limits_{(0,1)}|f|$，由方程知 $|u''(x)|\le F+M_0Q$

作函数 $v(x)=\dfrac{1}{2}x(1-x)(F+M_0Q)$，显然 $v(0)=v(1)=0$

$-v''(x)=(F+M_0Q)\ge-(\pm u)''$，由比较原理得 $\pm u(x)\le v(x)$

从而

$|u'(0)|\le|v'(0)|=\dfrac{1}{2}(F+M_0Q)$

$|u'(1)|\le|v'(1)|=\dfrac{1}{2}(F_0+MQ)$

(2) 由方程得 $u'(x)=u'(0)+\int_0^x(qu-f)dx$

故 $|u'(x)|\le|u'(0)|+QM_0+F\le\dfrac{3}{2}(QM_0+F)$

12. 证:

令 $F=\sup\limits_{\Omega}|f|,G=\sup\limits_{\Omega}|g(x)|,U=\sup\limits_{\Omega}|u|,V=\sup\limits_{\Omega}|v|$

不妨设 $F \geq G$，由第一边值问题的最大模估计

$$U \leq \frac{1}{2}(F+V)$$
$$V \leq \frac{1}{2}(F+U)$$

解之得，$U \leq F, V \leq F$

13. 证：

方程两端乘以 u，并在 Ω 上积分，得

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + c(x)u\right)u dx = \int_\Omega f(x) u dx$$

由 $Green$ 第一公式

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds$$

知

$$\int_\Omega (\nabla u)^2 dx - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_\Omega c(x) u^2 dx = \int_\Omega f u dx$$

由边条件 $-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha u$，又 $c(x) \geq c_0 > 0$，故

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 ds + C_0 \int_\Omega u^2 dx \leq \frac{1}{2C_0}\int_\Omega f^2 dx + \frac{C_0}{2}\int_\Omega u^2 dx$$

14. 证：

设 $f \equiv 0$，方程两端乘以 u 并在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot u + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} u + c(x) u^2 dx = 0$$

由 $Green$ 第一公式得

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(x) u^2 \right) dx = 0$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \left(-\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 u^2 \right)^{1/2} |\nabla u| + cu^2 \right) dx = 0$$

由不等式 $ab \le \frac{a^2}{4} + b^2$ 得

$$\int_\Omega \left(c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) u^2 dx \le 0$$

而 $c - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$，故 $u \equiv 0$

15. 证:

方程两端平方得 $\int_\Omega (\Delta u)^2 dx = \int_\Omega f^2 dx$

由 $Green$ 第一公式得 $\int_\Omega (\Delta u)^2 dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\Delta u) dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i} \Delta(u_{x_i}) dx$

对每一项应用 $Green$ 公式得 $\int_\Omega (\Delta u)^2 dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u^2_{x_i x_j} dx$

16. 证:

(1) 设 $U(x,y) = X(x)Y(y)$

代入方程 $X''Y + XY'' = 0$

令 $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$

则有 $Sturm-Liouville$ 问题

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y(0) = 0, Y(B) = 0 \end{cases}$$

解之得, $Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}, \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

又 $X'' - \lambda X = 0 \Rightarrow X_n = a_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + b_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}$

解有形式 $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\frac{n\pi}{b}x}+b_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}$

又 $x=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)\sin\frac{n\pi y}{b}=v_0$

$$\Rightarrow a_n+b_n=\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\cdot v_0 dy\Big/\int_0^b \sin^2\frac{n\pi y}{b}dy$$
$$=\frac{2v_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

又 $x=a$ 时，$a_n e^{\left(\frac{n\pi}{b}\right)a}+b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{b}\right)a}=0$

$\Rightarrow a_{2n}=b_{2n}=0$

$$a_{2n-1}=-\frac{4v_0}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{(2n-1)\pi}{b}a}\Big/\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{b}a}-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{b}a}\right)$$

$$b_{2n-1}=\frac{4v_0}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{(2n-1)\pi}{b}a}\Big/\left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{b}a}-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{b}a}\right)$$

(2), (3) 略, 见 (1) 状

17.

解:

(1) (ξ,η) 关于 $y=0$ 的对称点 $(\xi,-\eta)$, 故 $Green$ 函数为

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)-\Gamma(x,y;\xi,-\eta)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

(2) 在二三四象限虚设点源, 其中, 第二象限中点源与一中类型相同，三四相反，即有 $Green$ 函数为

$$G(x,y;\xi,\eta)=\Gamma(x,y;\xi,\eta)+\Gamma(x,y;-\xi,\eta)-\Gamma(x,y;-\xi,-\eta)-\Gamma(x,y;\xi,-\eta)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}\frac{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$$

(3)

$$G(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Gamma(x,y;\xi,\eta+na)-\Gamma(x,y;-\xi,-\eta-na)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta+na)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta-na)^2}$$

18. 参见 18.3 一节，在此不做赘述

19. 解:

$$u(\xi,\eta)=\iint\limits_{B^+(R)}f\cdot Gdxdy+\int_{\partial B^+(R)}G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}ds$$

$$=\iint\limits_{B^+(R)}f\cdot Gdxdy+\int\limits_{\partial B^+(R)\cap\{y>0\}}G\frac{\partial u}{\partial n}-\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds+\int\limits_{\{y=0\}\cap\{-R<x<R\}}G\psi-u\frac{\partial G}{\partial n}ds$$

需使 G 满足

$$\begin{cases}G|_{\partial B^+(R)\cap\{y>0\}}=0\\ \dfrac{\partial G}{\partial n}=-\dfrac{\partial G}{\partial y}\Big|_{\{y=0\}\cap\{-R<x<R\}}=0\end{cases}$$

则

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\sqrt{(x-\xi^*)^2+(y-\eta^*)^2}}$$

$$+\frac{1}{2a}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{1}{2a}\ln\frac{R}{\sqrt{(x-\xi^*)^2+(y-\eta^*)^2}}$$

其中, (ξ^*,η^*) 是关于 $\partial B^+(R)\cup\partial B^-(R)$ 与 (ξ,η) 的反演点

20. 解:

(1) 由 T17 (1) 知

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

在 $y=0$ 上

$$-\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y+\eta)}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}-\frac{2(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\right]_{y=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$

因而 $u=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta u_0}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx$

(2).

$$u=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(tg^{-1}\frac{b-\xi}{\eta}-tg^{-1}\frac{a-\xi}{\eta}\right)$$

(3)

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}\frac{1}{1+x^2}dx$$

21. 解:

(1) 令 $\varphi(x,y)=\varphi(\alpha)=\varphi(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$

$$\varphi(2\pi-\alpha)=-\varphi(\alpha)\qquad 0<\alpha<\pi$$

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)d\alpha$$

$$=0$$

(2) 令 $\varphi(\alpha)=\varphi(-\alpha)\qquad 0<\alpha<\pi$

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}+\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta+\alpha)}\right]\varphi(\theta)d\alpha$$

对(1)的验证:

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

$$\begin{aligned}u(\rho,-\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(-\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\,d\alpha\\&\overset{\alpha=-\alpha}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(-\alpha)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(R^2-\rho^2)\varphi(\alpha)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}d\alpha\end{aligned}$$

对 $\partial B^+(R)\cap\{y>0\}$ 的边值用定理 2.6 结果，对 $y=0$ 边值利用 u 在 $y=0$ 上连续性

(2) 的验证：由表达式直接算出 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$

22.

(1) $\frac{A}{R}\rho\cos\theta$ 是解析函数 $\frac{A}{R}z$ 实部且边值为 $A\cos\theta$

故 $u(\rho,\theta)=\frac{A}{R}\rho\cos\theta=\frac{A}{R}x$

(2) 类似可得 $u(\rho,\theta)=A+\frac{B}{R}\rho\sin\theta=A+\frac{B}{R}y$

(3) $u(R,\theta)=\frac{A+B}{2}-\frac{A}{2}\cos 2\theta+\frac{B}{2}\cos 2\theta$

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2R^2}\rho^2\cos 2\theta\\&=\frac{A+B}{2}+\frac{B-A}{2R^2}(x^2-y^2)\end{aligned}$$

23. 证：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{2r-2a\cos(\alpha-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\alpha-\theta)}d\alpha$$

$$\because\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)d\alpha=0$$

$$\therefore r\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\frac{2r^2-2ar\cos(\alpha-\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\alpha-\theta)}d\alpha$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\alpha-\theta)}d\alpha$$

$$\Rightarrow\lim_{\substack{r\to a\\ \theta\to\theta_0}}\frac{\partial u}{\partial r}=\varphi(\theta_0)$$

24. 经典题, wait for you

25. 证:

由极值原理, 在 $\bar{\Omega}$ 内, $|u_N(x)-u_{N'}(x)|\le\max_{\partial\Omega}|u_N-u_{N'}|\to 0\,(N,N'\to\infty)$

由此得 $\{u_N\}$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛

$$u_N(x)=\frac{1}{2\pi R}\int_{B_R(x)}u_N(y)dl$$

$\forall B_R(x)\subset\Omega$, 令 $N\to\infty$, 得

$$u(x)=\lim_{N\to\infty}u_N(x)=\frac{1}{2\pi R}\int_{B_R(x)}u(y)dl$$

u 有平均值性质, 故 u 调和

26. 证:

在 Ω 内每点 P, w 具有平均值性质, 即 $R_0=R_0(P)>0$, 使得 $0<R<R_0$ 时, $B_R(p)\subset\Omega$ 时, $B_R(p)\subset\Omega$, $\frac{1}{2\pi R}\int_{B_R(p)}w(y)dl=w(p)$, 在内亦如此. 又对每点 $P\in(a,b)\setminus\{0\}$, 平均值性质显然成立, 由 24 题结论, w 调和.

27. 证:

(1) 首先由圆周平均值性质导出圆盘平均值性质

$$\frac{1}{\pi R^2}\iint_{B_R(0)} u(x,y)dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R dr\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$$
$$= \frac{2}{R^2}\int_0^R ru(0,0)dr$$
$$= u(0,0)$$

由 $Cauchy-Schwarz$ 不等式

$$|u(0,0)| \le \frac{1}{\pi R^2}\left(\iint_{B_R} u^2\right)^{1/2}\left(\pi R^2\right)^{1/2} dxdy、$$
$$= \frac{1}{R}\left(\frac{M}{\pi}\right)^{1/2}$$

(2) 在以 (x,y) 为心, $R-r$ 为半径的圆上利用 (1) 的结论

28. 证:

只需证问题: $\Delta v = 0$, $(x,y)\in B(R)\setminus O$ 内, $v|_{\partial B(R)} = 0$ 的有界解恒等于 0

$\forall \varepsilon > 0$, 考虑函数 $v = \varepsilon \ln\frac{R}{r}, r = \sqrt{x^2+y^2}$, 此时 $v|_{\partial B(R)} = 0$

取 $R > r_0 > 0$, 使得 $\varepsilon \ln\frac{R}{r_0} > M = \sup\limits_{B(R)\setminus\{0\}} |u|$, 考虑圆环 $B(R)-B(r)(r<r_0)$

在其边界上 $v \ge \pm u$, 又 $\Delta v = 0$, 由比较原理 $v \ge |u|$ 在 $B(R)-B(r)$ 上成立.

从而在 $B(R)\setminus\{0\}$ 上 $|u| \le v = \varepsilon\ln\frac{R}{r}$, 令 $\varepsilon \to 0$, 即得结论成立.

29.

解:

Δu 写成极坐标形式是

$$u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0$$

对 $v = u\left(\frac{R^2}{r}, \theta\right)$, 令 $r_1 = \frac{R^2}{r}$, 我们有

$$v_r = u_{r_1}\left(-\frac{R^2}{r^2}\right),\quad v_{rr} = u_{r_1r_1}\frac{R^4}{r^4} + u_{r_1}\frac{2R^2}{r^3},\quad v_{\theta\theta} = u_{\theta\theta}$$

故 $v_{rr}+r^{-1}v_r+r^{-2}v_{\theta\theta}=0$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(a^2-r^2\right)\varphi(x)}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$$
$$=u\left(\frac{R^2}{r},\theta\right)$$

令 $R^2/r=r_1$

则有 $u(r_1,\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(a^2-R^2/r^2\right)\varphi(\theta)}{a^2+R^4/r_1^2-2a\,R^2/r_1\cos(\theta-\alpha)}d\alpha$

30.

证:

设 $f\in C^1[a,b]$, 存在点 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$|f(\xi)|\le\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b 1^2\,dx\right)^{1/2}$$
$$\le(b-a)^{-1/2}\|f\|_{H^1(a,b)}$$

又 $f(x)=f(\xi)+\int_\xi^x f'(x)dx$

$$|f(x)|\le|f(\xi)|+\int_a^b|f'(x)|dx$$
$$\le|f(\xi)|+(b-a)^{1/2}\left(\int_a^b f'(x)^2dx\right)^{1/2}$$
$$\le\max\{(b-a)^{1/2},(b-a)^{-1/2}\}\|f\|_{H^1(a,b)}$$

对一般 $f\in H^1(a,b)$, 取 $f_n\in C^1[a,b]$

使得 $\|f_n-f\|_{H^1(a,b)}\to 0,\|f_n(x)-f_m(x)\|\le c\|f_n-f_m\|_{H^1(a,b)}\to 0(n,m\to\infty)$

故 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$f_n\to g\in C[a,b]$, 但 $f_n\to f,a.e.$ 即 $f\in C[a,b]$

且 $|f_n(x)|\le M\|f_n\|_{H^1(a,b)}$, 令 $n\to\infty$, 得 $|f(x)|\le M\|f\|_{H^1(a,b)}$

即 $\|f(x)\|_{C[a,b]}\le M\|f\|_{H^1(a,b)}$

31. 证:

设 $u_n \in C^1(\Omega)$, $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0(n \to \infty)$

$$\begin{aligned}|f \circ u_n(x) - f \circ u(x)| &= |f'(\xi)||u_n(x) - u(x)| \\ &\le c|u_n(x) - u(x)|\end{aligned}$$

$$\|f \circ u_n - f \circ u\|_{L^2(\Omega)} \le c\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0(n \to \infty)$$

$$\begin{aligned}&(f'(u_n(x)))_{x_i} - f'(u(x))_{x_i} \\ &= f'(u_n(x))u_n(x)_{x_i} - f'(u(x))u(x)_{x_i} \\ &= f'(u_n(x) - f'(u(x)))u_{x_i}(x) + f'(u_n(x))(u_{nx_i}(x) - u_{x_i}(x))\end{aligned}$$

不妨设 $u_n(x) \to u(x)$ $a.e.$ 由于 f' 连续性

$f'(u_n(x)) \to f'(u(x))$ $a.e.$ 由 $\left|(f'(u_n) - f'(u))u_{x_i}\right| \le 2c\left|u_{x_i}\right|$ 及

$Lebesgue$ 控制收敛定理得 $\left\|(f'(u_n) - f'(u))u_{x_i}\right\|_{L^2(a,b)} \to 0\ (n \to \infty)$

又 $\left\|f'(u_n(x))(u_{nx_i} - u_{x_i})\right\|_{L^2} \le c\left\|u_{nx_i} - u_{x_i}\right\|_{L^2} \to 0\ (n \to \infty)$

由定义知命题成立.

32. 解:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f(v - \varphi)dx + \int_\Omega f\varphi dx, v - \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

由 $\Pr incare$ 不等式, $\|v - \varphi\|_{L_2} \le c\|\nabla(v - \varphi)\|_{L_2} \le c(\|\nabla v\|_{L^2} + \|\nabla \varphi\|_{L^2})$

$$\begin{aligned}J(v) &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \|f\|_{L_2} c(\|\nabla v\|_{L_2} + \|\nabla \varphi\|_{L_2}) - \|f\|_{L_2}\|\varphi\|_{L_2} \\ &\ge -\frac{1}{2}c^2\|f\|_{L_2}^2 - \|f\|_{L_2}(\|\varphi\|_{L_2} + \|\nabla \varphi\|_{L_2})\end{aligned}$$

$J(v)$ 有下界, 即有 $m = \inf\limits_{v \in M\varphi} J(v) > -\infty$

后续步骤仿定理 3.7 即可

33. 证:

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
J(v)-J(u)&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2dx-\int_\Omega fvdx-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\int_\Omega fudx\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u+\nabla(v-u)|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2dx-\int_\Omega f(v-u)dx\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla(v-u)|^2dx+\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla(v-u)dx-\int_\Omega f(v-u)dx\\
&=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla(v-u)|^2dx\ge 0
\end{aligned}
$$

34. 证:

$$
J(v)\ge\frac{1}{2}\int_a^b\left[k_0\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+p_0v^2\right]dx+\frac{\alpha}{2}v^2(b)+\frac{\beta}{2}v^2(a)-\frac{1}{2p_0}\int_a^b f^2dx-\frac{p_0}{2}\int_a^b v^2dx-
$$

$$
\frac{\alpha}{2}v^2(b)-\frac{g_1^2}{2\alpha}-\frac{\beta}{2}v^2(a)-\frac{g_2^2}{2\beta}
$$

$$
\ge-\frac{1}{2p_0}\int_a^b f^2dx-\frac{g_1^2}{2\alpha}-\frac{g_2^2}{2\beta}
$$

$$
\Rightarrow m=\inf_{v\in H^1(a,b)}J(v)>-\infty
$$

令 $J_1(v)=\frac{1}{2}\int_a^b\left[k(x)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+p(x)v^2\right]dx+\frac{\alpha}{2}v^2(b)+\frac{\beta}{2}v^2(a)$

则 $J_1\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)+J_1\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=\frac{1}{2}J_1(v_1)+\frac{1}{2}J_1(v_2)$

$$
\begin{aligned}
&J_1\left(\frac{v_1-v_2}{2}\right)+J_1\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\int_a^b f\frac{v_1+v_2}{2}dx+g_1\frac{v_1+v_2}{2}(b)+g_2\frac{v_1+v_2}{2}(a)\\
&=\frac{1}{2}\left[J_1(v_1)+\int_a^b fvdx+g_1v_1(b)+g_2v_1(a)\right]+\frac{1}{2}\left[J_1(v_2)+\int_a^b fv_2dx+g_1v_2(b)+g_2v_2(a)\right]
\end{aligned}
$$

后续步骤，仿定理 3.6 与 3.7 证明即可

35. 证:

设 $u\in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall x\in(0,a)$, $\exists\xi=\xi(x)$满足

$$
u(x,\xi)=\frac{1}{b}\int_0^b u(x,y)dy
$$

$$
|u(x,\xi)|\le\frac{1}{b}\int_0^b|u(x,y)dy|
$$

$$
u(x,b)=u(x,\xi)+\int_\xi^b u_y(x,y)dy
$$

$$|u(x,b)| \le |u(x,\xi)| + \int_0^b |u_y(x,y)|dy \le \frac{1}{b}\int_0^b |u(x,y)|dy + \int_0^b |u_y(x,y)|dy$$

$$\left(\int_0^b |u(x,b)|^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{1}{b}\left(\int_0^a \left(\int_0^b |u(x,y)|dy\right)^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^a \left(\int_0^b |u_y|dy\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{b}\left(\int_0^a \int_0^b u^2 dydx\right)^{1/2} + \left(\int_0^a \left(\int_0^b |u_y|dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \le 2\max\left(\frac{1}{\sqrt{b}}, \sqrt{b}\right)\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

一般情况可以用逼近推理得到.

36. 证:

$$J(v) \ge \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)dx - \frac{\varepsilon}{2}\iint_\Omega v^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\iint_\Omega f^2 dx - \frac{\varepsilon}{2}\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} - \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\ge \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right)dx - \frac{\varepsilon}{2}\iint_\Omega v^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\iint_\Omega f^2 dx$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}c\left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) - \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

取 ε 满足 $\varepsilon(c+1)=1$, 即得

$$J(v) \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\iint_\Omega f^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

又有

$$\iiint_\Omega \left(\left|\nabla\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)\right|^2 + \left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)^2\right)dx = J(v_1) + J(v_2) - 2J\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

由此可证存在唯一 $u \in H^1(\Omega)$, 满足 $J(u) = \min\limits_{v\in H^1(\Omega)} J(v)$, u 满足变分方程

$$\iint_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx = \iint_\Omega fv + \oint_{\partial\Omega} gvdl\,,\ \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \qquad (*)$$

首先取 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\iint_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)dx = \iint_\Omega fvdx$$

若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 用 $Green$ 第一公式得

$$\iint_\Omega (-\Delta u + v)dx = \iint_\Omega fvdx$$

由 $v \in C_0^\infty(\Omega)$ 的任意性得

$$-\Delta u + v = f \quad x \in R$$

两边乘以$v\in C^1(\Omega)$, 再用$Green$第一公式得

$$\iint_{\Omega}(\nabla u\nabla v+uv)dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}vdl=\iint_{\Omega}fvdx \qquad (**)$$

比较$(*)$与$(**)$两式，可得

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)vdl=0$$

由$v\in C^1(\overline{\Omega})$的任意性得$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}-g\right)\right|_{\partial\Omega}=0$

第五章 二阶线性偏微分方程的分类

1. 解:

该方程

$$\begin{aligned}\Delta&=(xy)^2+y^2(l+x)\\&=y^2\left(x^2+x+l\right)\end{aligned}$$

双曲型区域:

$$\begin{cases}y^2>0\\x^2+x+l>0\end{cases}$$

若$1-4l<0\Leftrightarrow l>\frac{1}{4}$, 区域$D=\{(x,y)|\ y\neq 0\}$

若$1-4l=0\Leftrightarrow l=\frac{1}{4}$, 区域$D=\left\{(x,y)\middle|y\neq 0,x\neq-\frac{1}{2}\right\}$

若$1-4l>0\Leftrightarrow l<\frac{1}{4}$, 区域$D=\{(x,y)\mid y\neq 0,x<-\frac{1+\sqrt{1-4l}}{2}\ or\ x>\frac{-1+\sqrt{1-4l}}{2}\}$

对于椭圆型和抛物型类似讨论即可~(偷个懒 o(∩_∩)o)

2. 证:

首先写出两个自变量的二阶线性方程形式.

为了问题简化, 在此仅讨论常系数情况, 变系数与之同理.

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+d=0$$

令$\begin{cases}\xi = a_1x + b_1y \\ \eta = a_2x + b_2y\end{cases}$且$|J| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

则进行变量代换可以得到新的 PDE 如下

$$\left(a_{11}a_1^2 + a_{22}b_1^2 + 2a_{12}a_1b_1\right)u_{\xi\xi} + (\ldots\ldots)u_{\xi\eta} + \cdots = 0$$

可得$\Delta' = J^2\Delta$

又$J^2 > 0$,这就证得命题成立.

3. 可仿照课本例题，在此直接给个答案(临近终点偷个懒,再者题目不难)

(1) 无需

(2) 需要

(3) 无需

(4) 无需

后记

终于扯完了，其中必然存在疏漏，还望列位看官海涵.最后，送一首鄙人最喜欢的诗给诸位:“常恐秋节至,焜黄华叶衰。人生不相见，动如参与商。”

山流石不转，江湖就此别过

2018/6/20