南京大学数学系试卷

2014/2015 学年第二学期 考试形式 闭卷 课程名称 数值计算方法（A卷）

班级________ 学号________ 姓名________

考试时间 2015.6.22 任课教师________ 考试成绩________

题号	一	二	三	四	六	六	七	八	九	总分
得分										

一. 填空题 (18分)

1. 设$f(0)=0,\ f(1)=6,\ f(2)=26$, 则$f[0,1]=$ ________, $f[0,1,2]=$ ________; $f(x)$ 的二次牛顿插值多项式为________________.

2. 设$h=\dfrac{b-a}{2m}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,2m$. 计算$\int_a^b f(x)dx$ 的复合Simpson公式为________________; 它是____ 阶收敛的，代数精度为____.

3. 设 $x_i=i(i=0,1,\cdots,n)$, $l_i(x)$ 是相应的 n 次Lagrange 插值基函数, 则 $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{n+1} l_i(0)=$ ________.

4. 求积公式$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{3}[2f(\frac{1}{4})-f(\frac{1}{2})+2f(\frac{3}{4})]$ 的代数精度为________.

5. 设$f(x)=7x^7+5x^5+4$, 则$f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7]=$ ______, $f[2^0,2^1,2^2,\cdots,2^7,2^8]=$ ______.

6. 设I 为n 阶单位方阵, 则其从属范数$\|I\|=$ ______. 谱半径$\rho(A)$ 是$C^{n\times n}$ 中矩阵范数$\|A\|$ 的______.

7. 求解非线性方程$f(x)=0$的Newton 迭代公式为________________. 对单根情形，Newton 法的收敛阶数是______.

二. (10分) 设$f(x)$ 为x 的k 次多项式, $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为互不相同的实数,且$k>m$. 试证明$f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 为x 的$k-m$ 次多项式. 又当$k=m$ 和$k<m$ 时, $f[x,x_1,x_2,\cdots,x_m]$ 值为多少?

三. (10分) 设$f(x)$ 充分光滑, $P_2(x)$ 是$f(x)$ 的以$0,h,2h$ 为插值基点的二次插值多项式, 试由$P_2(x)$ 导出求积分$I=\int_0^{3h} f(x)dx$ 的一个插值型求积公式I_h, 并证明

$$I-I_h=\frac{3}{8}h^4 f'''(0)+O(h^5).$$

四. (10分) 对区间$[a,b]$ 作等距剖分, 基点为$x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, 即$x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n$, 试证明当n 为偶数, $\int_a^b w_{n+1}(x)dx=0$, 其中$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$. 进一步, 利用证到的结论说明当$n$ 为偶数时闭Newton-Cotes型求积公式的代数精度为$n+1$.

五. (10分) 对于积分$\int_0^1 24x^5\mathrm{d}x$, 若采用复合梯形公式需要使用多少个求积基点才能使积分近似值的误差不超过10^{-8}?

六. (10分) 试确定常数A, B, C 及正数β, 使求积公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(-\beta) + Bf(0) + Cf(\beta)$$

有尽可能高的代数精确度，并指出代数精确度是多少，该公式是否为高斯型求积公式？

七. (10分) 已知方程组$Ax = b$, 即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

有解$x = [2\ \ 0]^T$.

(1) 求$\mathrm{cond}_\infty(A)$;

(2) 求右端有微小扰动的方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$$

的解$x + \Delta x$;

(3) 计算$\frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$ 和$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, 结果说明了什么问题?

八. (12分) 设函数$f(x)$ 在$[a,b]$ 上具有四阶连续导数，试构造三次多项式$H_3(x)$, 使其满足插值条件,

$$H_3(a)=f(a), H_3(b)=f(b), H_3(c)=f(c), H_3'(c)=f'(c),$$

其中$c=\dfrac{a+b}{2}$, 并求其余项$f(x)-H_3(x)$ 的表达式.

九. (10分) 设$A=(a_{ij})$ 是实的n 阶方阵, 证明

$$\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n\cdot \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|.$$