三、解答题.

1. 设环R有乘法单位元1. 又设 $a, b \in R$ 且 $1-ab$ 有(乘法)逆元c,试证 $1-ba$ 有逆元 $1+bca$.

证明:

$$(1-ba)(1+bca) = 1 - ba + bca - \cancel{bcaba}\ babca$$
$$= 1 - ba + b(1-ab)\cdot ca$$
$$= 1 - ba + b(1-ab)ca \qquad ((1-ab)c=1)$$
$$= 1 - ba + ba$$
$$= 1.$$

$$(1+bca)(1-ba) = 1 - ba + bca - bcaba$$
$$= 1 - ba + bc(1-ab)a \qquad (c(1-ab)=1)$$
$$= 1 - ba + ba$$
$$= 1$$

故 $1-ba$ 的逆元为 $1+bca$.

2. (1) 设交换幺环 R 为 Noether 环,I 为R的理想。证明商环 R/I 也是Noether 环. $\{a+I : a \in R\}$

证明:

∵ R 为 Noether 环. ∴ R中元素都满足乘法交换律.

∴ R/I 中元素 $a+I$ 与 $b+I$.

$$(a+I)(b+I) = ab + aI + Ib + II = ba + Ia + bI + II$$
$$= (b+I)(a+I). \quad \Rightarrow \quad R/I \text{ 为交换幺环}.$$

① 幺元为 $1+I$. (1 为 R中乘法单位元)

任给 R/I 的一个理想升链: $I_1/I \subseteq I_2/I \subseteq \cdots$.

对应 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \cdots$ 为 R 的理想升链. ∵ R 为Noether环.

∴ $\exists N$ s.t. $I_N = I_{N+1} = \cdots = \cdots$ 从而 $I_N/I = I_{N+1}/I = \cdots$

② 故(由 P_{116} 定理3.7.1)理想升链条件知 R/I 为 Noether 环。