2020-2021 实变函数

will　　　　匿名
NanJing University　　　　NanJing University

某平凡的数学讨论群

版本：0.10

日期：2022 年 11 月 6 日

注　意

这是 2020-2021 学年的实变函数试题. 以下第一至第四题为必做, 选做第五、六或第七题.

一.(15 分) 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为有限测度空间, $\{A_k\}$ 为可测集列且

$$\sum_{k \geq 1} \mu\left(A_{k+1} \backslash A_k\right)<\infty$$

证明：

$$\mu\left(\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k\right)=\mu\left(\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k\right).$$

二.(15 分) 设 $f \in L^1([0, \infty))$. 证明级数

$$F(x)=\sum_{n \geq 1} f\left(n^2 x\right), x>0,$$

几乎处处收敛, 且 $F \in L^1([0, \infty))$. 并请计算 $\int_0^{\infty} F(x) \mathrm{~d} x$.

三.(15 分) 若 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的可测函数序列 $\{f_k\}$ 分别依测度 μ 收敛于可测函数 f 和 g. 证明 $f=g$.

四.(15 分) 假设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一测度空间, f 为 X 上的可测函数. 若对任意 $E \in \mathfrak{M}, \int_E f \mathrm{~d} \mu \geq 0$. 证明 $f \geq 0, \mu-$ a.e..

五.(20 分) 设 $\{f_n\}$ 为概率测度空间 (X, μ) 上的可测函数序列. 证明下面的表述等价:

(1) $\{f_n\}$ 存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 0 ;

(2) 存在实数列 $\{t_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|=\infty, \text{ 且} \sum_{n=1}^{\infty}|t_n f_n(x)|<\infty, \text{ a.e..}$$

六.(20 分) 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 且 $m^*(A)>0$. 证明 A 包含一 Lebesgue 不可测集.

七.(20 分) 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且 Lebesgue 可积. 能保证 $\lim_{x \rightarrow+\infty} f(x)=0$? 如果 f 一致连续呢? 否定请举出反例, 肯定请证明.