

目 录

1	重要常数	1
1.1	知识讲解	1
2	常用不等式	2
2.1	知识讲解	2
3	数列极限定义	4
3.1	知识讲解	4
3.2	例题分析	4
4	Cauchy 收敛原理	9
4.1	知识讲解	9
4.2	例题分析	9
5	夹逼定理	12
5.1	知识讲解	12
5.2	例题分析	12
6	Abel 变换	18
6.1	知识讲解	18
6.2	例题分析	18
7	拉链定理	20
7.1	知识讲解	20
7.2	例题分析	20
8	级数收敛的必要条件	21
8.1	知识讲解	21
8.2	例题分析	21
9	单调有界定理	22
9.1	知识讲解	22
9.2	例题分析	22
10	上下极限	27
10.1	知识讲解	27
10.2	例题分析	27

11 Toeplitz 定理	32
11.1 知识讲解	32
11.2 例题分析	32
12 Wallis 公式	35
12.1 知识讲解	35
12.2 例题分析	35
13 Stirling 公式	36
13.1 知识讲解	36
13.2 例题分析	36
14 压缩映射原理	39
14.1 知识讲解	39
14.2 例题分析	39
15 Stolz 定理	41
15.1 知识讲解	41
15.2 例题分析	41
16 Heine 定理	46
16.1 知识讲解	46
16.2 例题分析	46
17 无穷乘积	49
17.1 例题分析	49
18 幂级数	50
18.1 例题分析	50
19 微分中值定理	52
19.1 知识讲解	52
19.2 例题分析	52
20 Taylor 公式	54
20.1 知识讲解	54
20.2 例题分析	54
21 定积分定义	57
21.1 知识讲解	57
21.2 例题分析	57

22 积分第一中值定理	59
22.1 知识讲解	59
22.2 例题分析	59
23 Euler-Maclaurin 求和公式	63
23.1 知识讲解	63
23.2 例题分析	63
24 多重积分定义	64
24.1 知识讲解	64
24.2 例题分析	64



第 1 章 重要常数



1.1 知识讲解

命题 1.1. 自然对数

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



命题 1.2. 欧拉常数

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$



命题 1.3. Basel 问题

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



命题 1.4. Catalan 常数

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$



第2章 常用不等式

2.1 知识讲解

命题 2.1. Jordan 不等式

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

左边等号成立当且仅当 $x = \frac{\pi}{2}$, 右边等号成立当且仅当 $x = 0$.

命题 2.2. Wallis 不等式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, n \in \mathbb{N}_+$$

命题 2.3. 算术平均值-几何平均值不等式

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个非负实数, 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

且等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

命题 2.4. 三角不等式

对于任意实数 a 和 b , 都有

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

左边等号成立当且仅当 $ab \leq 0$, 右边等号成立当且仅当 $ab \geq 0$

或

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

左边等号成立当且仅当 $ab \geq 0$, 右边等号成立当且仅当 $ab \leq 0$.

命题 2.5. Cauchy 不等式

对任意实数 a_1, a_2, \dots, a_n 和 b_1, b_2, \dots, b_n , 都有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

等号成立当且仅当 $b_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 或存在常数 k , 使得 $a_i = k b_i$.

命题 2.6

$$e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$$

等号成立当且仅当 $x = 0$.



命题 2.7

$$\sin x \leq x \leq \tan x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

两边等号成立均当且仅当 $x = 0$.



命题 2.8

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, x > -1$$

两边等号成立均当且仅当 $x = 0$.



命题 2.9

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+.$$



命题 2.10

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}_+.$$



第3章 数列极限定义

3.1 知识讲解

定义 3.1. 数列极限定义

设 $\{x_n\}$ 是一个给定的数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a (或者称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限), 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

或

$$x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$$

如果不存在这样的常数 a , 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.



注意 学会灵活使用 $\varepsilon - N$ 语言是学习数列极限的基本功.

3.2 例题分析

练习 3.1 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - a}{x_n + a} = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证明 依题意知, $a \neq 0$. 对 $\forall \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$, 成立

$$\left| \frac{x_n - a}{x_n + a} \right| < \varepsilon$$

则

$$|x_n - a| < \varepsilon |x_n + a| = \varepsilon |(x_n - a) + 2a| \leq \varepsilon (|x_n - a| + 2|a|)$$

$$|x_n - a| < \frac{2|a|\varepsilon}{1 - \varepsilon} < 4|a|\varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

练习 3.2 (武汉大学) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.

证明 反设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 存在, 设为 a . 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+2) = a$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(n+2) - \sin n] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sin 1 \cos(n+1) = 0$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n \cos n) = 0$$

即

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$$


所以


$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 n + \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 n = 0$$

这与

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

矛盾. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.

 **注意** 本题还会在后文的题目中出现, 以其他方法解之.

 **练习 3.3** (Cauchy 命题) 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (a 可以是有限数, $+\infty, -\infty$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明 a 为有限数时. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall n > N$, 成立

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \frac{|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)|}{n} \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|}{n} + \frac{|a_{N+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &< \frac{M}{n} + \frac{n - N}{n} \varepsilon \\ &< \frac{M}{n} + \varepsilon \end{aligned}$$


其中, $M = |a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|$ 是一个确定的常数. 令 $N_1 = \max \left\{ N, \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil \right\}$, 则 $n > N_1$ 时成立不等式

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\varepsilon$$


即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

a 为 $+\infty, -\infty$ 的情况类似.

 **注意** Cauchy 命题的证明方法十分有特色, 是极限理论中的基本方法之一, 基本思想是分

段估计.

 **练习 3.4** 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

证明 令 $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n$, 则 $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

故

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} &= \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n} \\ &= ab + a \frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} + b \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} \end{aligned}$$

由 Cauchy 命题知, 第二项和第三项都趋于 0, 下证第四项也趋于 0.


事实上, 由 $\alpha_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 知, α_n 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|\alpha_n| \leq M$.


故

$$0 < \left| \frac{\alpha_1 \beta_n + \cdots + \alpha_n \beta_1}{n} \right| \leq M \frac{|\beta_1| + \cdots + |\beta_n|}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

 **注意** 本题也可应用 Cauchy 命题的证明方法证之, 即分段估计.

 **练习 3.5** 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$.

证明 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+, \forall k > N$, 成立

$$|a_k - a| < \varepsilon$$

因为

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

所以

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k - a \right| = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (a_k - a) \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k |a_k - a|$$

分两部分进行估计

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k |a_k - a| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k |a_k - a| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k |a_k - a|$$

第一部分: 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 故存在 $M > 0$, 使得 $|a_k - a| < M$ 对每个 k 成立.

又

$$C_n^k < n^k$$

知

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k |a_k - a| < \frac{M(1 + n + \cdots + n^N)}{2^n} = \frac{M(n^{N+1} - 1)}{2^n(n - 1)} < \frac{Mn^{N+1}}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故存在 $N_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > \max\{N, N_1\}$ 时, 成立

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N C_n^k |a_k - a| < \varepsilon$$

第二部分:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=N+1}^n C_n^k < \varepsilon$$

综上所述, 当 $n > \max\{N, N_1\}$ 时, 成立

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k - a \right| < 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a.$$



注意 后文将给出应用 Toeplitz 定理的解法.



练习 3.6 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 非负且严格单调递增, 由积分中值定理, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\exists | x_k \in (a, b)$, s.t.

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^k(t) dt$$

证明: $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = b$.

证明 对 $\forall 0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$, $b-\varepsilon, b-2\varepsilon \in [a, b]$. 由 f 严格单调递增知

$$f(b-2\varepsilon) < f(b-\varepsilon)$$

再由 f 非负且严格单调递增, 不妨设 $f(x) > 0, x \in [a, b]$.

故

$$\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} > 1$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^k(b-\varepsilon)}{f^k(b-2\varepsilon)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(b-\varepsilon)}{f(b-2\varepsilon)} \right]^k = +\infty$$

即 $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $k > N$ 时, 有

$$\frac{f^k(b-\varepsilon)}{f^k(b-2\varepsilon)} > \frac{b-a}{\varepsilon}$$

即

$$\varepsilon f^k(b-\varepsilon) > (b-a) f^k(b-2\varepsilon)$$

由于

$$f(x) > 0, x \in [a, b]$$

所以

$$\int_a^b f^k(t) dt > \int_b^{b-\varepsilon} f^k(t) dt > f^k(b-\varepsilon) \int_b^{b-\varepsilon} dt = \varepsilon f^k(b-\varepsilon) > (b-a) f^k(b-2\varepsilon)$$

即

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^k(t) dt > f^k(b-2\varepsilon)$$

因此

$$b \geq x_k > b - 2\varepsilon$$

$$|x_k - b| < 2\varepsilon$$

即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = b.$$



注意 本题与第六届全国大学生数学竞赛数学类预赛的第二题基本是一样的, 后文还将介绍应用上下极限的解法.

第4章 Cauchy 收敛原理

4.1 知识讲解

定义 4.1. 基本数列

如果数列 $\{x_n\}$ 具有以下特性: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n, m > N$ 时, 成立

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是一个基本数列.

定理 4.1. Cauchy 收敛原理

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\{x_n\}$ 是基本数列.



注意 Cauchy 收敛原理是数列极限的本质刻画.

4.2 例题分析



练习 4.1 (武汉大学) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.

证明 对于每个区间 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi\right]$, 由于其长度大于 1, 因此在每个区间中都存在一个正整数, 记为 n_{k_1} , 且 $\sin n_{k_1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. 类似地, 可以在每个区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ 中选出 n_{k_2} , 且 $\sin n_{k_2} \leq 0$. 故 $\sin n_{k_1} - \sin n_{k_2} > \frac{1}{2}$. 由于 n_{k_1}, n_{k_2} 可任意大, 因此 $\{\sin n\}$ 不可能是基本数列, 根据 Cauchy 收敛原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.



练习 4.2 设数列 $\{b_n\}$ 有界, 令 $a_n = \frac{b_1}{1 \cdot 2} + \frac{b_2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{b_n}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}_+$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.


证明 依题意, 存在 $M > 0$, 使得 $|b_n| \leq M$ 对每个正整数 n 成立. 对任意正整数 p

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &\leq M \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \right) \\ &= M \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \right) \right] \\ &= M \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \right] \\ &< \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

故对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil$, 可使对任意正整数 $n > N$ 和任意正整数 p , 成立

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$


即 $\{a_n\}$ 是基本数列, 根据 Cauchy 收敛原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

 **练习 4.3** 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+$. 证明: $\{a_n\}$ 发散.

证明 由

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

知对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 和任意正整数 N , 在 $n, m > N$ 时, 只要取 $m = 2n$, 不等式 $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}$ 就不可能成立. 故数列 $\{a_n\}$ 不是基本数列, 因此发散.

 **练习 4.4** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 并且存在常数 K , 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 有

$$|y_1| + |y_2| + \cdots + |y_n| \leq K$$

令

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, n \in \mathbb{N}_+$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 所以 $\{x_n\}$ 有界, 即存在 $M > 0$, 使得 $|x_n| < M$ 对任意正整数 n 成立. 且对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N_1 , 当 $n > N_1$ 时, $|x_n| < \varepsilon$.

设 $S_n = \sum_{k=1}^n |y_k|$, 则 $\{S_n\}$ 单调递增且有上界 K , 由单调有界准则知 $\{S_n\}$ 收敛. 故由 Cauchy 收敛原理知, 存在正整数 N_2 , 当 $n > N_2$ 时, 对于任意正整数 p , 有


$$|y_{n+1}| + \cdots + |y_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > 2N$ ($n - N > N$) 时

$$\begin{aligned} |z_n| &= |x_1 y_n + \cdots + x_n y_1| \\ &\leq |x_1 y_n| + \cdots + |x_N y_{n-N+1}| + |x_{N+1} y_{n-N}| + \cdots + |x_n y_1| \\ &< M(|y_n| + \cdots + |y_{n-N+1}|) + \varepsilon(|y_{n-N}| + \cdots + |y_1|) \\ &< M\varepsilon + K\varepsilon \\ &= (M + K)\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

 **练习 4.5** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 收敛, 且 $x_n > 0, \{x_n\}$ 单调递减. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 收敛, 故由 Cauchy 收敛原理知对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}_+, \forall m > n > N'$, 成立

$$0 < x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m < \varepsilon$$

令 $N = 2N' + 1$, 则 $n > N$ 时, 有 $\left[\frac{n}{2}\right] > N' + 1$, 故


$$0 < \frac{n}{2} x_n < x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \cdots + x_n < \varepsilon$$

即

$$0 < nx_n < 2\varepsilon$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0.$$

 **练习 4.6** 设 u_0, u_1, \dots 为满足 $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 的实数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 证明:

$\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $u_k = 0$.

证明 因为

$$u_n - u_{n+1} = u_{n+1}^2 \geq 0$$

故 $\{u_n\}$ 单调递减. 由 Cauchy 收敛原理知, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, $\forall n > N$, 成立

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq 1$$

故当 $n > N$ 时, 成立

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2 \\ &\leq u_{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \\ &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

因此对任意 $k \in \mathbb{N}_+$, $k \geq N+1$, 有 $u_k = C$ (C 为固定常数), 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 故 $C = 0$. 由此根据

$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}^2$ 可依次推出

$$u_N = 0, u_{N-1} = 0, \dots, u_1 = 0$$

即 $\forall k \in \mathbb{N}_+$, 有 $u_k = 0$.

第5章 夹逼定理

5.1 知识讲解

定理 5.1. 夹逼定理

若三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 从某项开始成立

$$x_n \leq y_n \leq z_n, n > N_0$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$



5.2 例题分析

练习 5.1 设 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$.

证明 设 p_1, p_2, \dots, p_k 为能整除 n 的素数 (共有 k 个), 则 $p_i \geq 2$.

故

$$2^k \leq p_1 p_2 \cdots p_k \leq n, k = p(n)$$

于是

$$1 \leq k \leq \log_2 n$$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} = \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\log_2 n}{n}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$


练习 5.2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$.

解 因为

$$1 = \frac{n!}{n!} < \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} < \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)! + n!}{n!} < \frac{2(n-1)! + n!}{n!} = 1 + \frac{2}{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!} = 1.$$

 **练习 5.3** (第八届全国大学生数学竞赛数学类决赛第五题) 设 $n > 1$ 为正整数, 令

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1. 证明: 数列 $\{S_n\}$ 单调增加且有界, 从而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在;
2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

证明 1. 由均值不等式

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n = \left(\frac{k}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{\frac{k}{n} + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{n+1}$$

故

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &> \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &> S_n \end{aligned}$$

即 $\{S_n\}$ 单调增加.

又

$$\frac{1}{n} S_n < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

即

$$S_n < \frac{n}{n+1} < 1$$

故 $\{S_n\}$ 有上界. 所以极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在.

解 2. 易知当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$.

则

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n < e^{n\left(-\frac{k}{n}\right)} = e^{-k}$$

故

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n < \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} < \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{e-1}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{1}{e-1}$$

另一方面, 对任意正整数 $n > m$, 有

$$S_n > \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则


$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \sum_{k=1}^m e^{-k} = \frac{e^{-1} - e^{-m-1}}{1 - e^{-1}}$$


令 $m \rightarrow \infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \frac{1}{e-1}$$

综上所述

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{e-1}$$

 **注意** 本题也可应用 Taylor 公式求极限, 简单粗暴, 但运算量稍大.

 **练习 5.4** 设 $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

由不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+$$

故


$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) < x_n < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)$$

即

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < x_n < \ln 2$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ln 2.$$

 **注意** 本题中 x_n 的恒等变换称为 Catalan 恒等式.

 **练习 5.5** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由不等式


$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$


故

$$\frac{en}{(n+1)\sqrt[n+1]{n+1}} < \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{en}{n+1}$$

两边令取极限, 则由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

 **注意** 本题还有许多其他解法, 后文将再提到.

 **练习 5.6** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + i^2}$.

解 设

$$S_n = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + i^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

由

$$\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} < \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \frac{dx}{1+x^2}$$

故

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} < S_n < \int_0^n \frac{dx}{1+x^2}$$


又


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_{\frac{1}{n}}^{\frac{n^2+1}{n}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_0^n = \frac{\pi}{2}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + i^2} = \frac{\pi}{2}.$$

 **注意** 本题若是 n 项求和, 则可应用定积分定义. 在这类形似可用定积分来解但实际上又不能解的题目经常是定积分定义与夹逼定理相结合解题.

 **练习 5.7** (2019 北京大学) 讨论数列

$$a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}}$$

的敛散性.

解 由

$$\sqrt[k]{n-k} \geq 1, k = 1, 2, \cdots, n-1$$

知

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}} \\
 &\geq \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n-2 + \sqrt[n]{n-1 + 1}}}}} \\
 &\geq \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n-2 + 1}}}} \\
 &\geq \cdots \\
 &\geq \sqrt[n]{2}
 \end{aligned}$$

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$$

知, n 充分大时


$$\sqrt[n]{4} < \sqrt[n]{5} < \cdots < \sqrt[n]{n+1} < 2$$

故

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}} \\
 &\leq \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n-2 + \sqrt[n]{n-1 + 2}}}}} \\
 &\leq \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \sqrt[n]{3 + \cdots + \sqrt[n]{n-2 + 2}}}} \\
 &\leq \cdots \\
 &\leq \sqrt[n]{3}
 \end{aligned}$$

因此由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$


 **练习 5.8** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi$.

解

$$\begin{aligned}
 0 &< \left| \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi \right| &= \left| \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi - \sin n \pi \right| \\
 &= \left| 2 \sin \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2} \pi \cos \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{2} \pi \right| \\
 &\leq 2 \left| \sin \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{2} \pi \right| \\
 &\leq (\sqrt{n^2 + 1} - n) \pi \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi = 0.$$

 **注意** 本题还可以应用 Taylor 公式, 将在后文提到.

第 6 章 Abel 变换


6.1 知识讲解

命题 6.1. Abel 变换

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两数列, 记 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i (k = 1, 2, \dots)$, 则

$$\sum_{k=1}^p a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

6.2 例题分析


 **练习 6.1** 设 $S_n = a + 3a^2 + \dots + (2n-1)a^n$, 求 $\{S_n\}$ 的极限.


解 由 Abel 变换知

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)a^k = (2n-1) \sum_{k=1}^n a^k - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^k a^i = \frac{a}{1-a} + \frac{2a^2(1-a^{n-1})}{(1-a)^2} - \frac{(2n-1)a^{n+1}}{1-a}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-a} + \frac{2a^2}{(1-a)^2} = \frac{a(1+a)}{(1-a)^2}.$$

 **注意** 本题也可应用幂级数解之.


 **练习 6.2** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ 存在. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0.$$

证明 设 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. 由 Abel 变换及 Cauchy 命题知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

 **注意** 本题也可应用级数理论和 Stolz 定理解之.

 **练习 6.3** 设 $A_n = \sum_{i=1}^n a_k$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限, $\{p_n\}$ 为单调递增的正数数列, 且 $p_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. 由 Abel 变换及 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n A_n - \sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) A_k}{p_n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (p_{k+1} - p_k) A_k}{p_n} \\
 &= A - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_n - p_{n-1}) A_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} \\
 &= A - A \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$



第7章 拉链定理

7.1 知识讲解


定理 7.1. 拉链定理

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$



7.2 例题分析

 **练习 7.1** 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$$

知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2} - x_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1} - x_{2n-1}) = 0$$

设 $y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{n}$. 由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_{2n+2} - x_{2n+1}) - (x_{2n} - x_{2n-1})}{2(n+1) - 2n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+2} - x_{2n}) - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1} - x_{2n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

同理可证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0.$$

第8章 级数收敛的必要条件

8.1 知识讲解

定理 8.1. 级数收敛的必要条件

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$



8.2 例题分析

练习 8.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n!}{n^n}$.

解 设 $x_n = \frac{2^n!}{n^n}$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n!}{n^n} \text{ 收敛}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n!}{n^n} = 0.$$

练习 8.2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

证明 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

由 Stolz 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

第9章 单调有界定理

9.1 知识讲解

定理 9.1. 单调有界定理

单调递增且有上界的数列必收敛; 单调递减且有下界的数列必收敛.



9.2 例题分析

练习 9.1 (北京大学) 设 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 并求其值.

证明 显然 $\{a_n\}$ 单调递增. 当 $n = 1$ 时, $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

假设 $n = k (k \in \mathbb{N}_+)$ 时, $a_k < 2$. 则 $n = k + 1$ 时, $a_{k+1} = \sqrt{2}^{a_k} < \sqrt{2}^2 = 2$. 故由数学归纳法知, 对于每个正整数 n , 都有 $a_n < 2$. 由单调有界定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设为 $A (A \leq 2)$. 在递推关系两边取极限, 得

$$A = \sqrt{2}^A$$

故

$$A = 2$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.$$

注意 有读者可能会疑惑上界 2 是怎么来的, 其实是先求 $\{a_n\}$ 极限, 再反过来猜测其上界为 2, 这是一种好用的方法.

练习 9.2 设 $\{x_n\}$ 为正数列, 且满足 $x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2, n \in \mathbb{N}_+$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 由均值不等式

$$2\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}} \leq x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$$

即

$$x_{n+1} < x_n$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减, 又 $x_n > 0$, 故由单调有界定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 $A (A > 0)$.

在

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_n} < 2$$

两边取极限得

$$A + \frac{1}{A} \leq 2$$

又


$$A + \frac{1}{A} \geq 2$$

故

$$A + \frac{1}{A} = 2$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = 2.$$

 **练习 9.3** 设 $a > 0, x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}, n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由于

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + a} - \sqrt{x_{n-1} + a} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\sqrt{x_n + a} + \sqrt{x_{n-1} + a}}$$


所以 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ 同号 \cdots 与 $x_2 - x_1$ 同号, 又 $x_2 - x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}} - \sqrt{a} > 0$, 故 $x_{n+1} - x_n > 0$, 即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.


又

$$x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a + \sqrt{a}}}}} < \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a + \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

即 $\{x_n\}$ 有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设为 $A (A > 0)$. 令 $x_{n+1} = \sqrt{x_n + a}$ 两边 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

 **注意** 有读者可能会奇怪证明 $\{x_n\}$ 有上界时为什么要那么放缩, 其实在这类无限循环连根式的问题中, 经常就是找一个数, 使其在无限的根号下值永远不改变, 且又能达到放缩目的, 这个数一般是可以解出来的, 例如在本题中, 由方程 $\sqrt{a + x} = x$ 可解出 $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, 又 $\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} > \sqrt{a}$, 故能达到放缩目的, 可如此放缩. 另外, 也可以应用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有上界.

 **练习 9.4** (Ramanujan 恒等式的推广) 求 $f(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-1)\sqrt{1 + (x+n)\sqrt{1 + \cdots}}}}}$ ($x > 0$) 的表达式.

解 设 $f_n(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-1)\sqrt{1 + (x+n)}}}}$, 则显然 $f_n(x)$ 关于 n 是递增的.

又

$$x + 1 = \sqrt{1 + x(x+2)} = \cdots = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots + (x+n-1)(x+n+1)}}} > f_n(x)$$

故由单调有界准则知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 存在, 且 $f(x) \leq x + 1$.

设 $g_n(x) = \sqrt{1 + x\sqrt{1 + x\sqrt{1 + x\sqrt{1 + \cdots + x\sqrt{1 + x}}}}}$ (有 n 重根号, 且 $x > 0$), 则显然 $g_n(x)$ 关

于 n 是递增的.

且

$$[g_n(x)]^2 - xg_{n-1}(x) - 1 = 0$$

由

$$g_n(x) < \sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+\cdots+x\sqrt{1+\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2-1}}}}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

知 $g(x)$ 有上界. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ 存在, 设为 $g(x)$ ($g(x)$ 恒正). 令 $[g_n(x)]^2 - xg_{n-1}(x) - 1 = 0$ 两

边 $n \rightarrow \infty$, 则 $g(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

故

$$x+1 \geq f(x) > g(x) > x$$

设 $h(x) = x+1 - f(x) \in [0, 1)$.

由于

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

因此

$$f^2(x) = 1 + xf(x+1)$$

$$(x+1-h(x))f(x) = 1 + x(x+2-h(x+1))$$

$$(x+1)f(x) - h(x)f(x) = (x+1)^2 - xh(x+1) \leq (x+1)f(x) = (x+1)(x+1-h(x))$$

$$\frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x+1)}{x+1}$$

故


$$0 \leq \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x+1)}{x+1} \leq \frac{h(x+2)}{x+2} \leq \cdots \leq \frac{h(x+n)}{x+n} < \frac{1}{x+n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$


即

$$h(x) = 0$$

所以

$$f(x) = x+1.$$

 **注意** 本题求 $g_n(x)$ 上界的方法与上一题类似.

 **练习 9.5** 证明: $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$.

证明 设

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

又 $\{S_n\}$ 单调递增, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 设为 S .

因为 $m < n$ 时

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = S_m$$

再令 $m \rightarrow \infty$, 则

$$e \geq S$$

又


$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &= S_n\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 则

$$e \leq S$$

综上所述

$$e = S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

 **练习 9.6** 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ 存在.

证明 (法一) 设 $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$, 显然 $\{x_n\}$ 单调递增.
又由练习 11.4 知

$$\begin{aligned}x_n &= \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{2^2} + \sqrt{\frac{3}{2^3} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{2^n}}}}} \\ &< \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \quad (n \text{ 重根号}) \\ &< \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{2}\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 有上界, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 即极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ 存在.
(法二) $n \geq 3$ 时, 对于每个整数 $k \leq n-2$, 易知

$$\sqrt{n-k} < 2\sqrt{n-k-1}$$


又

$$\sqrt{n-1+\sqrt{n}} < \sqrt{n-1+2\sqrt{n-1}+1} = \sqrt{n-1}+1$$

故

$$\begin{aligned} x_n &< \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+\sqrt{n-1}+1}}}} \\ &< \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2+2\sqrt{n-2}+1}}}} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-3+\sqrt{n-2}+1}}} \\ &< \cdots \\ &< 2 \end{aligned}$$

其余同法一.

 **练习 9.7** (2018 考研数学一) 已知正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

解 令 $f(x) = xe^x - e^x + 1$ ($x \geq 0$), 则

$$f'(x) = xe^x \geq 0$$

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x) \geq f(0) = 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

从而

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 > x_n e^{x_n}$$

即

$$x_{n+1} < x_n$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减, 又 $\{x_n\}$ 有下界 0, 所以 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 A .

在

$$x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$$

两边令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$Ae^A = e^A - 1$$

即 $f(A) = 0$, 故 $A = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

第 10 章 上下极限

10.1 知识讲解

定义 10.1. 极限点

数列的极限点是数列收敛子列的极限. 这里约定: 若存在正(负)无穷大量的子列, 则将 $+\infty(-\infty)$ 作为其极限点. ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点等价于对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{x_n\}$ 的无穷多个项属于 ξ 的 ε 邻域.

定理 10.1

任何数列必有极限点.

定义 10.2. 上极限和下极限

数列的上极限是数列的最大极限点, 数列的下极限是数列的最小极限点. 这里在比较大小时将 $+\infty, -\infty$ 作为数来对待. 由定义可以知道上极限和下极限都是唯一的. 上极限记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, 下极限记为 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 有时上极限记为 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, 下极限记为 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

定理 10.2

任何数列必有上极限和下极限.

定理 10.3

数列收敛的充分必要条件是数列的上极限和下极限均为有限数且相等. 此时, 数列只有一个极限点, 且该有限数就是数列的极限.

定理 10.4

数列为正无穷大量(负无穷大量)的充分必要条件是数列的上极限和下极限均为 $+\infty(-\infty)$.



注意 由于数列上下极限所具有的必然存在性, 其用途十分广泛, 功能十分强大.

10.2 例题分析

练习 10.1 设函数 f 在 $[a, b]$ 上连续, 非负且严格单调递增, 由积分中值定理, $\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists | x_k \in (a, b)$, s.t.

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^k(t) dt$$

证明: $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = b$.

证明 对于任意给定的 $0 \leq \varepsilon \leq b$, 有

$$f^k(x_k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^k(t) dt \geq \frac{1}{b-a} \int_{b-\varepsilon}^b f^k(t) dt \geq \frac{1}{b-a} \int_{b-\varepsilon}^b f^k(b-\varepsilon) dt = \frac{\varepsilon}{b-a} f^k(b-\varepsilon)$$

即

$$f(x_k) > \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}} f(b-\varepsilon)$$

故

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{\varepsilon}{b-a}} f(b-\varepsilon) = f(b-\varepsilon)$$

由 f 的连续性及单调性知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \geq b - \varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \geq b$$

又


$$b \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \geq b$$

故

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = b$$

即

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = b$$

 **练习 10.2** (第一届全国大学生数学竞赛数学类决赛) 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有定义, 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

证明 由

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, 成立

$$f'(0) - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < f'(0) + \varepsilon$$

当 $n > \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$ 时

$$\frac{k}{n^2} (f'(0) - \varepsilon) < f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2} (f'(0) + \varepsilon), k = 1, 2, \dots, n$$

故

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (f'(0) - \varepsilon) < \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} (f'(0) + \varepsilon)$$

从而

$$\frac{f'(0) - \varepsilon}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{f'(0) + \varepsilon}{2}$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$



注意 值得一提的是, 本题也是个求数列极限的好用结论. 如下面一题.

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

解 令 $f(x) = \ln(1+x)$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)} = \sqrt{e}.$$

本题也可以应用夹逼定理.

练习 10.3 设数列 $\{b_n\}$ 由 $b_1 = 1$ 和 $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ 生成. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

解 由于 $b_1 = 1 \in [\frac{3}{2}, 2]$, 故由数学归纳法易知 $\frac{3}{2} \leq b_n \leq 2$ 对所有的正整数 n 成立.

所以

$$\frac{3}{2} \leq A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq B = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 2$$

在递推公式两边取上极限和下极限, 则

$$\begin{aligned} A &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 + \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n} = 1 + \frac{1}{B} \\ B &= 1 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = 1 + \frac{1}{A} \end{aligned}$$

故

$$(A - B) \left(1 - \frac{1}{AB}\right) = 0$$

又

$$\frac{3}{2} \leq A \leq B$$

故

$$A = B$$

所以 $\{b_n\}$ 收敛, 设极限为 $l \in [\frac{3}{2}, 2]$. 在递推公式两边取极限, 可解得 $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



注意 本题用到了结论: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

练习 10.4 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = l$ ($|\lambda| < 1$). 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{l}{1-\lambda}$.

证明 设 $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}$. 由于 $\{b_n\}$ 收敛, 因此 $\{b_n\}$ 有界. 取 $M > 0$, 使得 $|a_1| < M, |b_n| < (1-\lambda)M$. 又

$$|a_n| = |b_n + \lambda a_{n-1}| \leq |b_n| + |\lambda a_{n-1}|$$

由数学归纳法易知

$$|a_n| < M, n = 1, 2, \dots$$

设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = B, A, B$ 都是有限数. 在 $b_n = a_n - \lambda a_{n-1}$ 两边取上极限得

$$l = A - \lambda A$$

取下极限得

$$l = B - \lambda B$$

故

$$A = B = \frac{l}{1-\lambda}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{l}{1-\lambda}.$$



注意 本题需要先证 $\{a_n\}$ 有界, 这样其上下极限都是有限数, 取上下极限后才会有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n - \lambda \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = A - \lambda A$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n - \lambda a_{n-1}) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n - \lambda \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} = B - \lambda B$$

否则若 $A = +\infty$ 或其他情形, 那么将不能这么写开来. 这一点在应用上下极限的方法时都要注意. 另外, 证明有界的过程也体现出了 $|\lambda| < 1$ 的作用.

练习 10.5 (华东师范大学) 设 $a > 0, b > 0, a_1 = a, a_2 = b, a_{n+2} = 2 + \frac{1}{a_{n+1}^2} + \frac{1}{a_n^2} (n = 1, 2, \dots)$.

求证: 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 显然, 当 $n > 2$ 时, $a_n > 2$. 设 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = B$, 则 $A \geq B > 2$, 且由递推关系知 A, B 均为有限数.

在递推关系两边取上下极限得

$$A = 2 + \frac{2}{B^2}$$

$$B = 2 + \frac{2}{A^2}$$

由此解得

$$A = B$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.



第 11 章 Toeplitz 定理

11.1 知识讲解


定理 11.1. Toeplitz 定理

设 $n, k \in \mathbb{N}_+, t_{nk} \geq 0, \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a.$$

(1) 若将条件 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 改为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 且 $a = 0$, 则结论仍成立;

(2) 若不要求 t_{nk} 非负, 将条件 $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 改为存在 $M > 0$, 使得对每个正整数 n 成立 $|t_{n1}| + |t_{n2}| + \cdots + |t_{nk}| \leq M$ 且 $a = 0$, 则结论仍成立.

 **注意** Toeplitz 定理证明不难, 只需要拟合法及分段估计, 但结论十分强大, 令 $t_{nk} = \frac{1}{n}$, 即推出 Cauchy 命题, 也可用以快速证明 Stolz 定理等.

11.2 例题分析

 **练习 11.1** 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a$.

证明 设 $t_{nk} = \frac{C_n^k}{2^n}$, 则显然 $t_{nk} > 0, \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$ 由于


$$0 < t_{nk} = \frac{C_n^k}{2^n} < \frac{n^k}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$$

由 Toeplitz 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k a_k = a.$$

 **练习 11.2** 由 Toeplitz 定理导出 $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 公式.

证明 先叙述 Stolz 定理:

设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = l (l \text{ 可以是有限数} + \infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

设 $x_n = a_n - a_{n-1}, y_n = b_n - b_{n-1}, a_0 = b_0 = 0, t_{nk} = \frac{x_k}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$, 则

$$x_n > 0, t_{nk} > 0, \sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$$


且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_n} = 0$$

故由 Toeplitz 定理知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \cdot \frac{y_k}{x_k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n t_{nk} \frac{y_k}{x_k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_k}{x_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} \\ &= l. \end{aligned}$$

 **注意** 类似地, 还可以应用 Toeplitz 定理证明 $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理.

 **练习 11.3** 设 $p_k > 0, k = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a.$$

证明 设

$$t_{nk} = \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, k, n \in \mathbb{N}_+$$

显然 $t_{nk} > 0$, 且

$$t_{n1} + t_{n2} + \cdots + t_{nn} = 1$$

又

$$0 < t_{nk} = \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} < \frac{p_{n-k+1}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-k+1}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$$

故由 Toeplitz 定理知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n1} a_1 + t_{n2} a_2 + \cdots + t_{nn} a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= a. \end{aligned}$$



第 12 章 Wallis 公式

12.1 知识讲解

命题 12.1. Wallis 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$


或

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

或

$$\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

12.2 例题分析

 **练习 12.1** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right) \sqrt{n}$.

解 由于

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right) &= \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \\ &= \frac{(-1)(-1-2) \cdots (-1-2(n-1))}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{-\frac{1}{2}}{n} \right) \sqrt{n} = (-1)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

第 13 章 Stirling 公式

13.1 知识讲解

命题 13.1. Stirling 公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, 0 < \theta_n < 1$$

或

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{\theta_n}{12n}, 0 < \theta_n < 1$$

或

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (n \rightarrow \infty)$$

或

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \cdots\right)$$

或

$$\ln n! = \ln \sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{B_2}{1 \cdot 2n} + \frac{B_4}{3 \cdot 4n^3} + \cdots + \frac{B_{2m}}{(2m-1)(2m)n^{2m-1}} + \frac{B_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}} \theta_n, \text{ 其中 } 0 < \theta_n < 1, B_{2n} \text{ 是 Bernoulli 数.}$$



注意 涉及 $n!$ 时经常用到 Stirling 公式.

13.2 例题分析

练习 13.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由 Stirling 公式知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n}} \\ &= e. \end{aligned}$$

练习 13.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

解

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n \sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n} \\
&= \sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n} \\
&= \sqrt{2\pi} e.
\end{aligned}$$

练习 13.3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right]$.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left[((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}} - (n!)^{\frac{1}{n}} \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \left\{ \left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} \left\{ \exp \left\{ \frac{\ln \left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} \right]}{n(n+1)} \right\} - 1 \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} \ln \left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} \right]}{n(n+1)} \quad (\text{等价无穷小}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} \left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} - 1 \right]}{n(n+1)} \quad (\text{等价无穷小}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} [\exp\{n \ln(n+1)! - (n+1) \ln n!\} - 1]}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} [n \ln(n+1)! - (n+1) \ln n!]}{n(n+1)} \quad (\text{等价无穷小}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} [n \ln n - \ln n!]}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \right]^{\frac{1}{n}} [n \ln n - \ln n!]}{n(n+1)} \quad (\text{Stirling 公式}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2\pi n} \right)^{\frac{1}{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n - \ln n!}{e(n+1)} \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln(n+1) - \ln(n+1)! - n \ln n + \ln n!}{(n+2) - (n+1)} \\
&= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{e}. \quad (\text{等价无穷小})
\end{aligned}$$



注意 本题也可应用夹逼定理来求极限, 或先证明极限存在, 然后逆用 Stolz 定理. 一般来说, 对于指数上带未知数的极限题较难以直接处理, 经常先取对数, 然后应用等价无穷小或洛必达法则等. 又如下题

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.

解

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e^{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}}{x} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x}} - 1}{x} \\
 &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(1+x) - \ln(1+2x)}{2x^2} \\
 &= e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x - \frac{x^2}{2}) - (2x - \frac{4x^2}{2}) + o(x^2)}{2x^2} \\
 &= \frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

当然, 这道函数极限题还可以应用 Lagrange 中值定理直接求等.

第 14 章 压缩映射原理

14.1 知识讲解

定义 14.1. 压缩映射

设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上有定义, $f([a, b]) \subset [a, b]$, 并存在一个常数 k , 满足 $0 < k < 1$, 使得对一切 $x, y \in [a, b]$ 成立不等式 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, 则称 f 是 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 称常数 k 为压缩常数.

定理 14.1. 压缩映射原理说法一

设 f 是 $[a, b]$ 上的一个压缩映射, 则

- (1) f 在 $[a, b]$ 中存在唯一的不动点 $\xi = f(\xi)$;
- (2) 由任何初始值 $a_0 \in [a, b]$ 和递推关系 $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}_+$, 生成的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛于 ξ ;
- (3) 成立估计式 $|a_n - \xi| \leq \frac{k}{1-k}|a_n - a_{n-1}|$ 和 $|a_n - \xi| \leq \frac{k^n}{1-k}|a_1 - a_0|$.
(即事后估计与先验估计)

定理 14.2. 压缩映射原理说法二

对于任一数列 $\{x_n\}$, 若存在常数 $r \in (0, 1)$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, 恒成立

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r|x_n - x_{n-1}|$$


则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

特别地, 若数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n) (n \in \mathbb{N}_+)$ 给出, 其中 f 可微, x_n 恒在区间 I 中, 且存在 $r \in (0, 1)$ 使得

$$|f'(x)| \leq r < 1, x \in I$$

则 $\{x_n\}$ 收敛.

14.2 例题分析

 **练习 14.1** (武汉大学) 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{c(1+x_n)}{c+x_n}$ ($c > 1$ 为常数), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 设 $f(x) = \frac{c(1+x)}{c+x}$ ($x > 0$), 则 $x_{n+1} = f(x_n)$, 且

$$|f'(x)| = \left| \frac{c(c-1)}{(c+x)^2} \right| = \frac{c(c-1)}{(c+x)^2} < \frac{c(c-1)}{c^2} = 1 - \frac{1}{c} < 1$$


故由压缩映射原理知 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 A ($A > 0$).

在递推公式两边取极限得

$$A = \frac{c(1+A)}{c+A}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \sqrt{c}.$$

 **注意** 应用压缩映射原理求极限的解题思路大多比较套路, 没太多新花样, 会一题就容易举一反三, 故只列举一题.

第 15 章 Stolz 定理

15.1 知识讲解

定理 15.1. $\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 严格单调减少, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l \quad (l \text{ 可以是有限数 } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$


定理 15.2. $\frac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理

设数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的无穷大量, 且


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l \quad (l \text{ 可以是有限数 } +\infty, -\infty)$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

 **注意** 作为离散型的 L'Hospital 定理, 在许多求已知数列极限的问题中十分有用, 但要注意其条件和结论的先后顺序, 不要颠倒, 在解题中也要注意验证其条件成立与否.

15.2 例题分析

 **练习 15.1** 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{a_{n+1}^2}{n} + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}_+$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n$.

解 依题意得

$$a_n = \frac{a_{n+1}^2}{n} + a_{n+1} > a_{n+1}$$

所以 $\{a_n\}$ 严格单调递减, 又 $\{a_n\}$ 有下界 0, 故 $\{a_n\}$ 收敛.

(法一) 由

$$a_n = \frac{a_{n+1}^2}{n} + a_{n+1}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1} \left(\frac{a_{n+1}}{n} + 1 \right)} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{\frac{1}{n}}{\frac{a_{n+1}}{n} + 1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} + n}$$

即

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1} + n}$$

故由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{\ln n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{\ln(n+1) - \ln n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(a_{n+1} + n) \frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{n} + 1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n = 1.$$

(法二) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \geq 0$.

若 $A > 0$, 则

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - a_n &= -\frac{a_{n+1}^2}{n} < -\frac{A^2}{n} \\
 a_{n+1} &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) + a_1 = -A^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + a_1
 \end{aligned}$$

由于调和级数是发散的, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

矛盾. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

又


$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{n} + 1$$

两边取极限知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

由 Stolz 定理知


$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \ln n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{a_n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} a_n \ln(1 + \frac{1}{n})}{a_n - a_{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} n \ln(1 + \frac{1}{n}) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

 **注意** 法一巧妙地避开了求 $\{a_n\}$ 的极限, 但其变换数列的方法没那么容易想到; 法二的想法比较自然, 但需要先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

 **练习 15.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{\sqrt[n]{n!}}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n \ln n - \ln n!}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(n+1) \ln(n+1) - \ln(n+1)! - n \ln n + \ln n!}{(n+1) - n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
 &= e.
 \end{aligned}$$

 **练习 15.3** (2019 复旦大学) 设 $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}, n \geq 2$.

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

并计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(a_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$.

解 显然 $\{a_n\}$ 严格单调递增, 故要么 $\{a_n\}$ 存在有限极限, 要么 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

若 $\{a_n\}$ 存在有限极限 $a (a > 0)$, 则在递推公式两边取极限得

$$a = a + \frac{1}{a}$$

这对任何有限数 a 都不可能成立, 矛盾. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

则


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{n - (n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \right) = 2$$


故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(a_n - \sqrt{2n})}{\ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{a_n + \sqrt{2n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - 2n}{\ln n} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n^2 - 2n) - (a_{n-1}^2 - 2n + 2)}{\ln n - \ln(n-1)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} - 2}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

 **注意** 本题应用 Stolz 定理有一定技巧性, 若直接对 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 应用 Stolz 定理等则很不好做. 两小题应用 Stolz 的关键都是避免根号参与运算.

 **练习 15.4** 设 $a_n > 0$, 且 $a_{n+1} - \frac{1}{a_{n+1}} = a_n + \frac{1}{a_n}$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

解 显然 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 若 $\{a_n\}$ 有上界, 则由单调有界定理知, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 设为 $A (A > 0)$.

在递推关系两边取极限, 得

$$A - \frac{1}{A} = A + \frac{1}{A}$$

这对任何数 A 都不可能成立. 故 $\{a_n\}$ 无上界, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

由 Stolz 定理知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)^2}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)^2}{(n+1) - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{a_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}}{a_{n+1} - a_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} - a_n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = 1.$$



第 16 章 Heine 定理

16.1 知识讲解

定理 16.1. Heine 定理

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是: 对于任意满足条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 且 $x_n \neq x_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

推论 16.1. Heine 定理的推论

函数 f 在点 a 存在极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的充分必要条件是: 对于任意满足条件 $x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}_+, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.



注意 Heine 定理也叫归结原理, 是沟通数列极限和函数极限的桥梁, 利用这个定理, 可以将许多数列极限问题归结为函数极限问题去解决, 因此具有独特的重要性.

16.2 例题分析

练习 16.1 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

解 显然 $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}_+$. 又

$$x_{n+1} = \ln(1 + x_n) < x_n, \forall n \in \mathbb{N}_+$$

故 $\{x_n\}$ 严格单调递减, 由单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛, 设其极限为 $A (A > 0)$. 在递推公式两边取极限


$$A = \ln(1 + A)$$

得

$$A = 0$$


由 Stolz 定理, Heine 定理, 等价无穷小及 Taylor 公式知


$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n \ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x - \ln(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

 **练习 16.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

解 由 Heine 定理, L'Hospital 法则及等价无穷小知

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^t \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}{\sqrt{t}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 2\sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{t}} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

 **注意** 后文将给出 Taylor 公式解法.

 **练习 16.3** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x dx}{\arctan(nx)} \right)^n$.

解 令 $t = nx$, $F(x) = \int_0^x \frac{t dt}{\arctan t} - \frac{t^2}{\pi}$.

故


$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x dx}{\arctan(nx)} = \frac{1}{n^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{t dt}{\arctan t}$$

由等价无穷小, Heine 定理, Lagrange 中值定理及 L'Hospital 法则知

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{1}{3\pi n^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{t dt}{\arctan t} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{3\pi n^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{t dt}{\arctan t} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{3\pi x^2} \int_{x\pi}^{2x\pi} \frac{t dt}{\arctan t} - 1 \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3\pi} \frac{F(2\pi x) - F(\pi x)}{2x - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3\pi} (F(\pi x))' \Big|_{x=\xi} \quad (\xi \in (\pi x, 2\pi x)) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x - 2x \arctan(\pi x)}{3 \arctan(\pi x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3 \arctan(\pi x)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctan(\pi x)}{\frac{1}{x}} \\
 &= \frac{2}{3\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2\pi}{1 + \pi^2 x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= \frac{4}{3\pi^2}
 \end{aligned}$$


故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x dx}{\arctan(nx)} \right)^n = \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(\frac{1}{3\pi n^2} \int_{n\pi}^{2n\pi} \frac{t dt}{\arctan t} \right) \right\} = e^{\frac{4}{3\pi^2}}.$$

 **注意** 有读者可能会奇怪 $F(x)$ 是怎么设出来的, 其实就是后面的步骤算着算着为了应用 Lagrange 中值定理而凑出来的.

第 17 章 无穷乘积

17.1 例题分析

 **练习 17.1** 设 $\{a_n\}$ 为正数列, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)}$.

解 因为 $\{a_n\}$ 为正数列, 所以 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 要么收敛要么发散到正无穷.

若 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)} = 0$$

若 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) = +\infty$, 则

$$0 < \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)} < \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)} = 0.$$

第 18 章 幂级数

18.1 例题分析

 **练习 18.1** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^{k-1}}$.

解 构造幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n|} = 1$$

故 $x \in (-1, 1)$ 时, 该级数收敛.

又

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1, 1)$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^{k-1}} = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4}.$$

 **练习 18.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k}$.

解 构造幂级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, 其收敛半径为 1. 则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$
$$f'(1-x) = -\frac{\ln x}{1-x}$$

故

$$[f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x)]' = 0$$

从而对于 $\forall x \in (0, 1)$, 有


$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = C \text{ (常数)}$$

令 $x \rightarrow 0^+$, 故

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 2.$$

 **注意** 其实本题证明了一个结论: $\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x), 0 < x < 1, \text{Li}_2(x)$ 为二重对数.

第 19 章 微分中值定理

19.1 知识讲解

定理 19.1. Cauchy 中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, 且对于任意 $x \in (a, b), g'(x) \neq 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

定理 19.2. Lagrange 中值定理

在 Cauchy 中值定理中取 $g(x) = x$.



注意 微分中值定理在一些求数列极限和函数极限的问题中都能起到作用.

19.2 例题分析

练习 19.1 已知 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n^2 \sum_{k=1}^n a_k \right) = \frac{3}{2}$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{n}$.

解 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. 由于 $a_n > 0$, 故 $\{S_n\}$ 严格单调递增, 且要么 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 要么 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

此时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n^2 \sum_{k=1}^n a_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = 0$$

矛盾. 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n^2 \sum_{k=1}^n a_k \right) = \frac{3}{2}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

由 Lagrange 中值定理知

$$S_{n+1}^{\frac{3}{2}} - S_n^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} (S_{n+1} - S_n) \sqrt{\xi} = \frac{3}{2} a_{n+1} \sqrt{\xi}, \xi \in (S_n, S_{n+1})$$

又

$$a_{n+1} \sqrt{S_n} < a_{n+1} \sqrt{\xi} < a_{n+1} \sqrt{S_{n+1}}$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \sqrt{S_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n^2 \sum_{k=1}^n a_k} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \sqrt{S_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 S_{n+1} - a_{n+1}^3)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 S_{n+1})} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

故由夹逼定理知


$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}^{\frac{3}{2}} - S_n^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

所以由 Stolz 定理

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n \sqrt{S_n} \sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{S_n}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{S_n^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{S_{n+1}^{\frac{3}{2}} - S_n^{\frac{3}{2}}}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

 **练习 19.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right)$.

解 由 Lagrange 中值定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{\xi^2 + 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \xi \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1.$$

第 20 章 Taylor 公式

20.1 知识讲解

定理 20.1. 带 Peano 余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域中的任一点 x , 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

其中, 余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

定理 20.2. 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有 n 阶连续导数, 且在 (a, b) 上有 $n+1$ 阶导数. 设 $x_0 \in [a, b]$ 为一定点, 则对于任意 $x \in [a, b]$, 成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

其中, 余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \text{ 在 } x \text{ 和 } x_0 \text{ 之间}.$$



注意 无论应用 Taylor 公式求数列极限还是函数极限, 展开到哪项都是有讲究的, 展开项数太少将导致出错.

20.2 例题分析

练习 20.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! e)$.

解 由 Taylor 公式知

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!}, 0 < \theta < 1$$

所以

$$2\pi n! e = 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right), N \in \mathbb{N}_+$$


故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!e) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\pi}{n+1} \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

 **练习 20.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

解 由 Taylor 公式

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n\left(-\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

 **练习 20.3** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

解 令 $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt$$

由 Taylor 公式

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \quad (t \rightarrow 0)$$

知

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{\ln(1+t)}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{1 - \frac{t}{2}}{t^2} dt + O(1) = \sqrt{n} - \frac{\ln n}{4} + O(1)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 2.$$

 **练习 20.4** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi$.

解 由 Taylor 公式知

$$\sqrt{n^2 + 1} = n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sqrt{n^2 + 1} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\&= 0.\end{aligned}$$



第 21 章 定积分定义

21.1 知识讲解

定义 21.1. 定积分定义

设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的有界函数, 在 $[a, b]$ 上任意取分点 $\{x_i\}_{i=0}^n$, 作成一种划分

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

并任意取点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 记小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 并令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (\Delta x_i)$, 若当 $\lambda \rightarrow 0$, 极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

存在, 且极限值既与划分 P 无关, 又与 ξ_i 的取法无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 和式

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$


称为 Riemann 和, 其极限值 I 称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

若 $f \in R[a, b]$, 则


$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f \left[a + \frac{k}{n}(b-a) \right] \frac{b-a}{n}$$

21.2 例题分析

 **练习 21.1** 设 $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}_+$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 由练习 5.4 的 Catalan 恒等式及定积分定义知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

 **练习 21.2** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{i}{n}}$.

解 由

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n+1} < \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n + \frac{i}{n}} < \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n}\pi = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$$

故由夹逼定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n}\pi}{n + \frac{i}{n}} = \frac{2}{\pi}.$$

 **练习 21.3** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 由定积分定义

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\int_0^1 \ln x dx} \\ &= e. \end{aligned}$$

 **练习 21.4** 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n + \frac{1}{i}}$.


解 由于

$$2^{\frac{i}{n}} > \frac{2^{\frac{i}{n}}}{1 + \frac{1}{ni}} = 2^{\frac{(i-1)}{n}} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{ni}} = 2^{\frac{i-1}{n}} \frac{e^{\frac{\ln 2}{n}}}{1 + \frac{1}{ni}} > 2^{\frac{i-1}{n}} \frac{1 + \frac{\ln 2}{n}}{1 + \frac{1}{ni}} > 2^{\frac{i-1}{n}}$$

故由 $y = 2^x$ 连续性及单调性知 $\exists \xi_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$, 使得 $\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1 + \frac{1}{ni}} = 2^{\xi_i}$.

由定积分定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2^{\frac{i}{n}}}{n + \frac{1}{i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{\xi_i} \frac{1}{n} = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}.$$

 **注意** 本题解法具有较大的推广价值, 在很多形似定积分定义式的式子中都可以使用该方法进行处理.

第 22 章 积分第一中值定理

22.1 知识讲解

定理 22.1. 积分第一中值定理

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号, 则存在 $\eta \in [m, M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \eta \int_a^b g(x)dx$$

这里 M 和 m 分别表示 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的上确界和下确界.

推论 22.1

特别地, 若加上条件: $f \in C[a, b]$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$



注意 其实上述推论可改进为 $\xi \in (a, b)$, 这在谢惠民的数学分析习题课讲义中有提到, 不过一般的教科书都是说 $\xi \in [a, b]$.

22.2 例题分析

练习 22.1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx$.

解 由积分第一中值定理知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\xi+3} \int_0^1 x^n dx \quad (\xi \in (0, 1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\xi+3}}{\sqrt{n+1}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

练习 22.2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

解 对 $\forall \varepsilon > 0$, 不妨 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, 则


$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \frac{\pi}{2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) + \varepsilon$$

在不等式两边分别取上下极限, 综合可得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \varepsilon$$

故由 ε 的任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

 **练习 22.3** (第九届全国大学生数学竞赛数学类预赛) 设 $f(x) = \arctan x$, A 为常数. 若 $B =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right) \text{ 存在, 求 } A, B.$$

解 由于 $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right)$ 存在, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - A \right) = 0$$

由定积分定义知

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

下面证明一个适用更广的结论.

结论 若函数 f 可导, $f' \in R[a, b]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n} - \int_a^b f(x) dx \right] = \frac{b-a}{2} [f(b) - f(a)].$$

证明 设 $x_i = a + \frac{b-a}{n}i$, 则


$$\begin{aligned} & n \left[\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n} - \int_a^b f(x) dx \right] \\ &= n \left[\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x_i) - f(x)) dx \right] \\ &= n \left[\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x_i - x) dx \right] \quad (\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)) \\ &= n \left[\sum_{i=1}^n \eta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) dx \right] \quad \left(\eta_i \in \left[\min_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f'(x), \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f'(x) \right] \right) \\ &= \frac{b-1}{2} \sum_{i=1}^n \eta_i (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n} - \int_a^b f(x) dx \right] = \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x) dx = \frac{b-1}{2} [f(b) - f(a)].$$

由以上结论即知

$$B = \frac{\pi}{8}.$$

 **注意** 本题所用结论的证明的最后一步用到了 Newton-Leibniz 公式, 需要指出若一个函数可积, 且存在原函数, 则有 Newton-Leibniz 公式, 这有别于一般教科书上所讲. 另外, 本题

所用结论是一个经典的加边问题, 其有一系列的推广, 在此直接给出结论, 都是用积分第一中值定理和分部积分来证明的


$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) + \frac{b-a}{2n} (f(b) - f(a)) \right) = \frac{(b-a)^2}{6} (f'(b) - f'(a))$$

...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^s \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{C_i}{i!n^i} (f^{(i-1)}(b) - f^{(i-1)}(a)) \right) = \frac{(-1)^s B_s(b-a)^s (f^{(s-1)}(a) - f^{(s-1)}(b))}{s!}$$

其中, B_n 是 Bernoulli 数, $C_i = (-1)^i B_i(b-a)^i$, S 为正整数.

这个结论和后文的 Euler-Maclaurin 求和公式是比较直接的.

 **练习 22.4** 设 $f \in C[-1, 1]$, 证明: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx = \pi f(0)$.

证明 由 $f \in C[-1, 1]$ 知, f 有界, 设 $f(x) < M$ ($x \in [-1, 1]$).

h 充分小时, 由积分第一中值定理知

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_0^{\sqrt{h}} \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi) \int_0^{\sqrt{h}} \frac{h}{h^2 + x^2} dx \quad (\xi \in (0, \sqrt{h})) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi) \left[\arctan \frac{x}{h} \right]_0^{\sqrt{h}} \\ &= \frac{\pi}{2} f(0) \end{aligned}$$

同理

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\sqrt{h}}^0 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

由

$$\left| \int_{\sqrt{h}}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx \right| < M \left| \int_{\sqrt{h}}^1 \frac{h}{h^2 + x^2} dx \right| = M \left(\arctan \frac{1}{h} - \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} \right)$$

又

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\arctan \frac{1}{h} - \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\sqrt{h}} = 0$$

故


$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{h}}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \int_{\sqrt{h}}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx \right| = 0$$

同理


$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\sqrt{h}} \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx = 0$$

综上所述

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{hf(x)}{h^2 + x^2} dx = \pi f(0).$$

 **注意** 在这类积分号下求极限的题目中, 常用方法之一是使用分段处理的方法, 分一段其值就是所求的值, 其他段则值为 0, 关键在于找准分界点. 本题原题为 $h = \frac{1}{n}$ 的情况, 在此

进行了小小的推广.

 **练习 22.5** 已知 $f \in C[0, 1]$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x) dx$.

解 由于 $f \in C[0, 1]$, 故 $\left(\int_0^x f(t) dt\right)' = f(x)$.

因此

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x) dx = \int_0^1 \sqrt[n]{x} d\left(\int_0^x f(t) dt\right) = \int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt\right) x^{\frac{1}{n}-1} dx$$

设 $f(x) < M, x \in [0, 1]$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt\right) x^{\frac{1}{n}-1} dx \\ & \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \left|\int_0^x f(t) dt\right| x^{\frac{1}{n}-1} dx \\ & \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \int_0^x |f(t)| dt x^{\frac{1}{n}-1} dx \\ & < \frac{1}{n} \int_0^1 M x^{\frac{1}{n}} dx \\ & = \frac{M}{n+1} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{x} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

第 23 章 Euler-Maclaurin 求和公式

23.1 知识讲解

命题 23.1. Euler-Maclaurin 求和公式


设函数 $f \in C^{(2m+2)}[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b) \right] h \\ - \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} \left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right] - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} h^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi)(b-a)$$

其中, $\xi \in [a, b]$, $B_{2k} (k = 1, 2, \cdots, m+1)$ 是 Bernoulli 数, $B_0 = 1, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \cdots$


 **注意** Euler-Maclaurin 求和公式在一些加边问题中都能起到作用.

23.2 例题分析

 **练习 23.1** 设 $x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - x_n \right)$.

解 令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. 由 Euler-Maclaurin 求和公式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - x_n \right) = -\frac{f(1) - f(0)}{2} = \frac{1}{4}.$$

 **注意** 利用 Euler-Maclaurin 求和公式, 我们可以较轻松地求出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[n \left(\frac{\pi}{4} - x_n \right) - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{24} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left\{ \frac{1}{24} - n \left[n \left(\frac{\pi}{4} - x_n \right) - \frac{1}{4} \right] \right\} = \frac{1}{2016} \\ \dots$$

第 24 章 多重积分定义

24.1 知识讲解

定义 24.1. n 重积分

设 Ω 为 \mathbb{R}^n 上的零边界闭区域, 函数 $u = f(\mathbf{x})$ 在 Ω 上有界. 将 Ω 用曲面网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \dots, \Delta\Omega_n$ (称为 Ω 的一个划分), 记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积, 并记所有的小区域 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径为 λ . 在每个 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 \mathbf{x}_i , 若 λ 趋于零时, 和式

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) \Delta V_i$$

的极限存在且与区域的分法和点 \mathbf{x}_i 的取法无关, 则称 $f(\mathbf{x})$ 在 Ω 上可积, 并称此极限为 $f(\mathbf{x})$ 在有界闭区域 Ω 上的 n 重积分, 记为

$$\int_{\Omega} f dV \left(= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i) \Delta V_i \right)$$

$f(\mathbf{x})$ 称为被积函数, Ω 称为积分区域, \mathbf{x} 称为积分变量, dV 称为体积元素, $\int_{\Omega} f dV$ 也称为积分值.

在 \mathbb{R}^2 中, $f(x, y)$ 在 D 上的二重积分记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

在 \mathbb{R}^3 中, $f(x, y, z)$ 在 Ω 上的三重积分记为

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \text{ 或 } \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

在 \mathbb{R}^n 中, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 Ω 上的 n 重积分记为


$$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \text{ 或 } \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

若二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上可积, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f \left(a + \frac{b-a}{n} i, c + \frac{d-c}{n} j \right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}.$$


类似地, 可推广至 n 重积分.

24.2 例题分析

 **练习 24.1** (2010 考研数学一) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}.$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{j^2}{n^2}\right)} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \iint_D \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

 **注意** 本题是一道考研题, 虽然看起来很简单, 但要是了解二重积分定义, 将无从入手, 听说当年做出来的人并不会太多.