

# 2DGS

## 前向

初始化 $t_u, t_v$ :

利用open3d对稀疏点云求法向，得到单位向量 $t_n$

在训练过程中2D椭圆图元用四元数 $q$ 与两个尺度因子 $s_u, s_v$ 表达，其中 $q$ 代表的旋转矩阵的第三列初始化为 $t_n$ ，前两列通过正交化得到，在后续的优化过程中对传到前两列的梯度计算并传递到四元数与scale上

### compute2DGSBBox.forward

2DGS在计算图像上高斯的投影点 `point_image` 和 `radii` 时和3DGS不一样，2DGS不是forward地将高斯投影到图像上，而是通过在图像上划定一个bbox `B_1`，将其映射到高斯局部平面上，得到另一个bbox `B_2`（`B_2`不一定是长方形，但一定是平行四边形），通过约束 `B_2` 的各边到原点的距离为1，计算出 `B_1` 的 `x_1, x_2, y_1, y_2`，并取 `B_1` 的中心为投影点，过程如下：

$$W = W_2 C, \quad H = \begin{bmatrix} s_u t_u & s_v t_v & 0 & p_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & 0 c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$T = (KWH)^T = [t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3]_{3 \times 4}$$

代码中的 `T` 即为公式中的  $T$ ，均为  $3 \times 4$  的矩阵（省略法向方向的变换）；

由论文， $KWH$ 本身将高斯局部平面点的齐次坐标映射到相机平面上，则 $(KWH)^T$ 将相机平面上的平面齐次坐标映射到高斯局部平面上。

2DGS在相机平面通过x-plane和y-plane确定像素点 $(x, y)$ ，分别将x-plane和y-plane通过 $(KWH)^T$ 映射到局部平面上，两个面相交的线与局部平面上的交点即为“采样点”

设像素坐标系为 $xy$ 坐标系，高斯局部坐标系为 $uv$ 坐标系，在 $xy$ 坐标系下的 $x, y$ 平面齐次坐标分别为：

$$hx = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, hy = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix}$$

则 $T$ 右乘 $hx, hy$ 可将 $xy$ 下的平面齐次坐标映射到 $uv$ 下，即（上标表示向量第几个元素）：

$$[t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3] = \begin{bmatrix} -t_0^0 + t_3^0 x \\ -t_0^1 + t_3^1 x \\ -t_0^2 + t_3^2 x \end{bmatrix} = h_u$$

应用距离公式：

$$\frac{|h_u^2|}{\sqrt{(h_u^0)^2 + (h_u^1)^2}} = 1$$

注意aligned axis的x-plane变换到uv后不一定aligned到uv axis；因此需要用距离公式做约束，得到一个一元二次方程

两边平方移项可得：

$$(t_0^0)^2 + (t_0^1)^2 - (t_0^2)^2 + x^2[(t_3^0)^2 + (t_3^1)^2 - (t_3^2)^2] - 2x(t_0^0 t_3^0 + t_0^1 t_3^1 - t_0^2 t_3^2) = 0$$

根 $x_1, x_2$ 分别表示了uv平面上bbox的u-plane映射到xy平面上x-plane的位置，则`center`可表示为两根之和/2，也即：

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{a} = \frac{t_0^0 t_3^0 + t_0^1 t_3^1 - t_0^2 t_3^2}{(t_3^0)^2 + (t_3^1)^2 - (t_3^2)^2}$$

两根之差除以2即为图像上bbox的半径，也即splating过程中的`my_radius`

为什么不直接用`T.t`将 $(0, 0, 1, 1)^T$ 变换到相机平面得到中心点？

因为投影变换不是仿射的，空间gs椭圆/椭圆面投影到图像上不一定是对称的，2dgs使用backward的采样方式实际上是为了规避雅可比近似带来的误差，因此在确定相机平面上2dgs的center时不能直接用透视变换投影2dgs质心，而要用**bbox确定中心**保证采样的对称性

通过以上方法得到投影点和半径后，即可使用splatting的tile-based排序方法

## computeLocalGaussian.forward

输入：KWH\_t (3x4)，pix\_xy，point\_image

$$\begin{aligned}
 Tt &= KWH_{4 \times 3} \\
 k &= -Tt_{0,:} + xTt_{3,:} = \begin{bmatrix} -T_{00} + xT_{30} \\ -T_{01} + xT_{31} \\ -T_{02} + xT_{32} \end{bmatrix} \\
 l &= -Tt_{1,:} + yTt_{3,:} = \begin{bmatrix} -T_{10} + xT_{30} \\ -T_{11} + xT_{31} \\ -T_{12} + xT_{32} \end{bmatrix} \\
 p &= k \times l \\
 \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_2l_3 - k_3l_2 \\ k_3l_1 - k_1l_3 \\ k_1l_2 - k_2l_1 \end{bmatrix} \\
 d &= \left(\frac{p^1}{p^3}\right)^2 + \left(\frac{p^2}{p^3}\right)^2 \\
 g &= \exp\left(-\frac{d}{2}\right)
 \end{aligned}$$

## 反向

对于

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^N c_i \bar{\alpha}_i T_i \quad \text{where } \bar{\alpha}_i = \alpha_i g_i, T_i = \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \bar{\alpha}_j)$$

梯度传递路径如下：

$$\begin{cases} c_i \rightarrow sh_i \\ \alpha_i \rightarrow o_i \\ T_i \rightarrow \begin{cases} \alpha_j \rightarrow o_j \\ g_j \rightarrow R, S \end{cases} \\ g_i \rightarrow R, S \end{cases}$$

则梯度  $\frac{\partial L}{\partial \alpha}, \frac{\partial L}{\partial g}$  计算如下：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \hat{c}}{\partial \bar{\alpha}_i} &= c_i T_i - \frac{\sum_{j=i+1}^N c_j \bar{\alpha}_j T_j}{1 - \bar{\alpha}_i} \\
 &= (c_i - \frac{\sum_{j=i+1}^N c_j \bar{\alpha}_j T_j}{T_{i+1}}) T_i \\
 &= (c_i - A_i) T_i
 \end{aligned}$$

其中  $A_i$  是有递推公式的，因此可以节省计算时间

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{\sum_{j=i+1}^N c_j \bar{\alpha}_j T_j}{T_{i+1}} \\
 &= c_{i+1} \bar{\alpha}_{i+1} + \frac{\sum_{j=i+2}^N c_j \bar{\alpha}_j T_j}{T_{i+1}} \\
 &= c_{i+1} \bar{\alpha}_{i+1} + \frac{\sum_{j=i+2}^N c_j \bar{\alpha}_j T_j}{T_{i+2}} * (1 - \bar{\alpha}_{i+1}) \\
 &= c_{i+1} \bar{\alpha}_{i+1} + A_{i+1} (1 - \bar{\alpha}_{i+1})
 \end{aligned}$$

则可以从后往前递推  $A_i$  以及  $\partial L / \partial \bar{\alpha}_i$

从而  $\partial L / \partial \alpha_i = \partial L / \partial \bar{\alpha}_i * g_i, \partial L / \partial g_i = \partial L / \partial \bar{\alpha}_i * \alpha_i$

# computeLocalGaussian.backward

## 由 $g$ 到 $T$

当xy平面上的投影点 $p_g$ 到像素点 $p_I$ 的距离 $\hat{d}$ 小于 $d$ 时，则使用投影点，此时会产生 `dL_dmean2D` 以及对  $KWH_i$ 新的梯度

$$\hat{d} = p_I - p_g$$
$$g = \exp\left(-\frac{\hat{d}^2}{2\sigma^2}\right)$$

从而：

$$\frac{dL}{dp_g} = [-L_g g(p_I - p_g)]$$

计算高斯权重：

$$\frac{dL}{dg_i} = \alpha_i \frac{dL}{d\tilde{\alpha}_i}$$
$$\frac{dg_i}{dd_i} = -\frac{g}{2}$$
$$\frac{dd_i}{dp} = \begin{bmatrix} 2p_1/p_3^2 \\ 2p_2/p_3^2 \\ -2((p_1^2 + p_2^2)/p_3^3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial p}{\partial k} = \begin{bmatrix} 0 & l_3 & -l_2 \\ -l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & -l_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial p}{\partial l} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dk}{dTt_{0,:}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{dk}{dTt_{3,:}} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$
$$\frac{dl}{dTt_{1,:}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \frac{dl}{dTt_{3,:}} = \begin{bmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

从而

$$\frac{dL}{dT_{0,:}} = \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \frac{dp}{dT_{0,:}}$$
$$= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \begin{bmatrix} 0 & -T_{12} + yT_{32} & T_{11} - yT_{31} \\ T_{12} - yT_{32} & 0 & -T_{10} + yT_{30} \\ -T_{11} + yT_{31} & T_{10} - yT_{30}y & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \begin{bmatrix} 0 & l_3 & -l_2 \\ -l_3 & 0 & l_1 \\ l_2 & -l_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{dL}{dd} \begin{bmatrix} dp_2l_3 - dp_3l_2 \\ -dp_1l_3 + dp_3l_1 \\ dp_1l_2 - dp_2l_1 \end{bmatrix}$$

同理

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dT_{1,:}} &= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \frac{dp}{dT_{1,:}} \\
&= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{dL}{dd} \begin{bmatrix} -dp_2k_3 + dp_3k_2 \\ dp_1k_3 - dp_3k_1 \\ -dp_1k_2 + dp_2k_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dT_{3,:}} &= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \frac{dp}{dT_{3,:}} \\
&= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \begin{bmatrix} 0 & -x(-T_{12} + yT_{32}) + y(-T_{02} + xT_{32}) & x(-T_{11} + yT_{31}) - y(-T_{01} + yT_{31}) \\ x(-T_{12} + yT_{32}) - y(-T_{02} + xT_{32}) & 0 & -x(-T_{10} + yT_{30}) + y(-T_{00} + xT_{30}) \\ -x(-T_{11} + yT_{31}) + y(-T_{01} + xT_{31}) & x(-T_{10} + yT_{30}) - y(-T_{00} + xT_{30}) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{dL}{dd} \frac{dd}{dp} \begin{bmatrix} 0 & -xl_3 + yk_3 & xl_2 - yk_2 \\ xl_3 - yk_3 & 0 & -xl_1 + yk_1 \\ -xl_2 + yk_2 & xl_1 - yk_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{dL}{dd} \begin{bmatrix} dp_2(xl_3 - yk_3) + dp_3(-xl_2 + yk_2) \\ dp_1(-xl_3 + yk_3) + dp_3(xl_1 - yk_1) \\ dp_1(xl_2 - yk_2) + dp_2(-xl_1 + yk_1) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## compute2DGSBBox.backward

输入 `dL_KWH_t` ( $3 \times 4$ )

下面这一步只有用到滤波的时候才会使用，目前没有写滤波

前向为  $KWH\_t \Rightarrow p_I$ ，注意  $T = (KWH)^T$

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{02} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{12} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{22} \end{bmatrix} \\
a &= T_{02}^2 + T_{12}^2 - T_{22}^2 \\
b &= -2(T_{00}T_{02} + T_{10}T_{12} - T_{20}T_{22}) \\
c &= T_{00}^2 + T_{10}^2 - T_{20}^2 \\
ax^2 + bx + c &= 0
\end{aligned}$$

则两根之差

$$p_I \cdot x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{T_{00}T_{02} + T_{10}T_{12} - T_{20}T_{22}}{T_{02}^2 + T_{12}^2 - T_{22}^2}$$

## 由 $T$ 到 $R, S, p$

前向为:  $R, S, W, K \Rightarrow KWH\_t$

$$K = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x & 0 \\ 0 & f_y & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$H = SR$$

$$Y = HW_R^T$$

$$p_v = p_w^T W_R^T + W_T^T$$

$$M = \begin{bmatrix} Y_{0,:} & 0 \\ Y_{1,:} & 0 \\ p_v^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = MK$$

展开可得：

$$Y = \begin{bmatrix} H_{00}W_{R00} + H_{01}W_{R10} + H_{02}W_{R20} & H_{00}W_{R01} + H_{01}W_{R11} + H_{02}W_{R21} & H_{00}W_{R02} + H_{01}W_{R12} + H_{02}W_{R22} \\ H_{10}W_{R00} + H_{11}W_{R10} + H_{12}W_{R20} & H_{10}W_{R01} + H_{11}W_{R11} + H_{12}W_{R21} & H_{10}W_{R02} + H_{11}W_{R12} + H_{12}W_{R22} \\ H_{20}W_{R00} + H_{21}W_{R10} + H_{22}W_{R20} & H_{20}W_{R01} + H_{21}W_{R11} + H_{22}W_{R21} & H_{20}W_{R02} + H_{21}W_{R12} + H_{22}W_{R22} \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} f_x M_{00} + c_x M_{02} & f_y M_{01} + c_y M_{02} & M_{02} & M_{02} \\ f_x M_{10} + c_x M_{12} & f_y M_{11} + c_y M_{12} & M_{12} & M_{12} \\ f_x M_{20} + c_x M_{22} & f_y M_{21} + c_y M_{22} & M_{22} & M_{22} \end{bmatrix}$$

则：

$$\frac{dL}{dM} = \begin{bmatrix} f_x L_{KWH_t}^{00} & f_y L_{KWH_t}^{01} & c_x L_{KWH_t}^{00} + c_y L_{KWH_t}^{01} + L_{KWH_t}^{02} + L_{KWH_t}^{03} & 0 \\ f_x L_{KWH_t}^{10} & f_y L_{KWH_t}^{11} & c_x L_{KWH_t}^{10} + c_y L_{KWH_t}^{11} + L_{KWH_t}^{12} + L_{KWH_t}^{13} & 0 \\ f_x L_{KWH_t}^{20} & f_y L_{KWH_t}^{21} & c_x L_{KWH_t}^{20} + c_y L_{KWH_t}^{21} + L_{KWH_t}^{22} + L_{KWH_t}^{23} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $M$ 到 $Y$ 和 $p_v$ ：

$$\frac{dL}{dp_w} = [L_M^{20} \quad L_M^{21} \quad L_M^{22}]^T$$

$$\frac{dL}{dY} = \begin{bmatrix} f_x L_{KWH_t}^{00} & f_y L_{KWH_t}^{01} & c_x L_{KWH_t}^{00} + c_y L_{KWH_t}^{01} + L_{KWH_t}^{02} + L_{KWH_t}^{03} \\ f_x L_{KWH_t}^{10} & f_y L_{KWH_t}^{11} & c_x L_{KWH_t}^{10} + c_y L_{KWH_t}^{11} + L_{KWH_t}^{12} + L_{KWH_t}^{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $Y$ 到 $H$ （注意这里 $W$ 矩阵为 $W2C.T$ ）

$$\frac{dL}{dH} = \begin{bmatrix} L_Y^{00}W_{R00} + L_Y^{01}W_{R01} + L_Y^{02}W_{R02} & L_Y^{00}W_{R10} + L_Y^{01}W_{R11} + L_Y^{02}W_{R12} & L_Y^{00}W_{R20} + L_Y^{01}W_{R21} + L_Y^{02}W_{R22} \\ L_Y^{10}W_{R00} + L_Y^{11}W_{R01} + L_Y^{12}W_{R02} & L_Y^{10}W_{R10} + L_Y^{11}W_{R11} + L_Y^{12}W_{R12} & L_Y^{10}W_{R20} + L_Y^{11}W_{R21} + L_Y^{12}W_{R22} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $H$ 到 $R$ 和 $S$

注意这里 $R$ 每一行是一个向量/轴

$$H = SR \quad R = \begin{bmatrix} R_{00} & R_{01} & R_{02} \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} s_0 R_{00} & s_0 R_{01} & s_0 R_{02} \\ s_1 R_{10} & s_1 R_{11} & s_1 R_{12} \\ s_2 R_{20} & s_2 R_{21} & s_2 R_{22} \end{bmatrix}$$

则

$$\frac{dL}{dS} = \begin{bmatrix} L_H^{00}R_{00} + L_H^{01}R_{01} + L_H^{02}R_{02} \\ L_H^{10}R_{10} + L_H^{11}R_{11} + L_H^{12}R_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

四元数到旋转矩阵如下（每一行是一个向量，第三行是没用的因为 $dL/dH$ 第三行为0）：

$$q = [r, x, y, z]$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xy + rz) & 2(xz - ry) \\ 2(xy - rz) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz + rx) \\ 2(xz + ry) & 2(yz - rx) & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

从而：

$$\frac{dL}{dq} = \begin{bmatrix} 2z(L_R^{01} - L_R^{10}) - 2yL_R^{02} + 2xL_R^{12} \\ 2y(L_R^{01} + L_R^{10}) + 2zL_R^{02} - 4xL_R^{11} + 2rL_R^{12} \\ -4yL_R^{00} + 2x(L_R^{01} + L_R^{10}) - 2rL_R^{02} + 2zL_R^{12} \\ -4z(L_R^{00} + L_R^{11}) + 2r(L_R^{01} - L_R^{10}) + 2xL_R^{02} + 2yL_R^{12} \end{bmatrix}$$