# Taller Primer Parcial

Andrés Guillermo Molano Jiménez Phd- amolano@javeriana.edu.co

September 2, 2023

Profesor Catedratico

## Primer Ejercicio

El movimiento vertical de una sonda aterrizando en marte se puede modelar despreciando las fuerzas aerodinámicas mediante la siguiente ecuación diferencial

$$\ddot{z} = a - g$$

en donde $g$ representa la gravedad del planeta y $a$ la aceleración asociada a los propulsores de la sonda, el ingeniero de control de la misión determino que para cumplir con los objetivos de la misma la aceleración asociada a los propulsores de la sonda debe seguir el siguiente comportamiento

$$a = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + g$$

La velocidad inicial de la sonda es $v_0$ y la altura inicial de la maniobra propulsa es $z_0$, se desea que en un tiempo $t_f$ después de iniciar la maniobra la sonda se encuentre a $z_f$metros de altura

1. Encuentre los valores de $a_1, a_{2,} a_3$que garantizan que la sonda termine la maniobra sin velocidad y sin aceleración , para cualquier valor de $v_0, z_0$ y $z_f$

Para encontrar estos valores es necesario es necesario conocer las expresiones resultantes de velocidad y posición de la sonda dada la aceleración entregada, para esto es necesario recordar que la velocidad es la integral de la aceleración es decir que

$$v = \dot{z} = v(0) + \int_0^t \ddot{z} d\tau = v_0 + \int_0^t a_1 + a_2\tau + a_3\tau^2 d\tau = v_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2}t^2 + \frac{a_3}{3}t^3$$

A su vez para encontrar la posición de la sonda podemos integral la velocidad apenas encontrada así

$$z = z(0) + \int_0^t \dot{z} d\tau = z_0 + v_0 t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{6}t^3 + \frac{a_3}{12}t^4$$

una vez encontradas las expresiones para posición y velocidad de la capsula se deben plantear ecuaciones que permitan cumplir con las condiciones en el tiempo $t_f$esto es

$$a(t_f) = 0 \; v(t_f) = 0 \; z(t_f) = z_f$$

al realizar esto aparecen un conjunto de 3 ecuaciones en las 3 incógnitas $a_1, a_2, a_3$ así:

$$\begin{gathered} 0 = a_1 + a_2 t_f + a_3 t_f^2 \\ 0 = v_0 + a_1 t_f + \tfrac{a_2}{2} t_f^2 + \tfrac{a_3}{3} t_f^3 \\ z_f = z_0 + v_0 t_f + \tfrac{a_1}{2} t_f^2 + \tfrac{a_2}{6} t_f^3 + \tfrac{a_3}{12} t_f^4 \end{gathered}$$

Este conjunto de ecuaciones puede llevarse a una forma matricial de la forma $Ax = B$ con el animo de resolver el sistema empleando la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 \\ t_f & \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_0 \\ z_f - z_0 - v_0 t_f \end{bmatrix}$$

De esta forma es posible encontrar la solución de los coeficientes aplicando la inversa de la matriz así

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 \\ t_f & \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -v_0 \\ z_f - z_0 - v_0 t_f \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz se puede calcular empleando cualquiera de los métodos del álgebra lineal, a continuación se presenta la respuesta empleando el método de la matriz de co factores

$$A^{-1} = \frac{C^T}{|A|}$$

Donde la matriz $C$corresponde a la matriz de co factores de A definida como :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad c_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right| \;\; M_{ij} = (A_{p,q})_{p \neq i, q \neq j}$$

Aplicando esta definición se procede a calcular la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 \\ t_f & \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-72 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{32} \end{bmatrix}^T}{t_f^6}$$

En donde cada uno de los términos se encuentran a continuación

$$c_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{vmatrix} = -\frac{t_f^6}{72} \qquad c_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} t_f & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^4}{12} \end{vmatrix} = \frac{t_f^5}{12} \qquad c_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} t_f & \frac{t_f^2}{2} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} \end{vmatrix} = -\frac{t_f^4}{12}$$

$$c_{21} = (-1)^2 \begin{vmatrix} t_f & t_f^2 \\ \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{vmatrix} = \frac{t_f^5}{12} \qquad c_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & t_f^2 \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^4}{12} \end{vmatrix} = \frac{-5t_f^4}{12} \qquad c_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & t_f \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} \end{vmatrix} = \frac{t_f^3}{3}$$

$$c_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} t_f & t_f^2 \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \end{vmatrix} = -\frac{t_f^4}{6} \qquad c_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & t_f^2 \\ t_f & \frac{t_f^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{2t_f^3}{3} \qquad c_{33} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & t_f \\ t_f & \frac{t_f^2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{t_f^2}{2}$$

Entonces la solución final nos queda

$$\begin{bmatrix} 1 & t_f & t_f^2 \\ t_f & \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{3} \\ \frac{t_f^2}{2} & \frac{t_f^3}{6} & \frac{t_f^4}{12} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{t_f} & \frac{12}{t_f^2} \\ -\frac{6}{t_f} & \frac{30}{t_f^2} & -\frac{48}{t_f^3} \\ -\frac{6}{t_f} & -\frac{24}{t_f^3} & \frac{36}{t_f^4} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes solicitando entonces se pueden calcular con la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{6}{t_f} & \frac{12}{t_f^2} \\ -\frac{6}{t_f} & \frac{30}{t_f^2} & -\frac{48}{t_f^3} \\ -\frac{6}{t_f} & -\frac{24}{t_f^3} & \frac{36}{t_f^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -v_0 \\ z_f - z_0 - v_0 t_f \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -\frac{2(z_0 - z_f) + t_f v_0}{t_f^2} \\ \frac{8(z_0 - z_f) + 3 t_f v_0}{t_f^3} \\ -2 \frac{3(z_0 - z_f) + t_f v_0}{t_f^4} \end{bmatrix}$$

1. Empleando Matlab, encuentre y grafique la aceleración, velocidad y posición de la sonda si la velocidad inicial de la sonda es $v_0 = 25 \, \frac{m}{s}$ , la maniobra inicia en $z_0 = 1500 \, m$ de altura y se desea que en 2 minutos la sonda se encuentre en $z_f = 20 \, m$ de altura.

A continuación se presentan los resultados obtenidos el código en Matlab se anexa a la presente solución

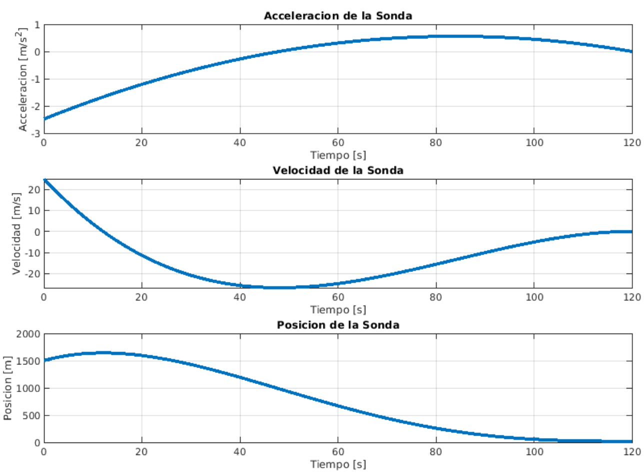


Figure 1: Posición Velocidad y Aceleración de la Sonda

## Segundo Ejercicio

Para la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{b}{s^3 + as^2 + bs + b}$$

Si $s = \omega i$, encuentre los valores de $b$ y $a$ que hacen que

$$\|H(\omega_0)\| = 1 \wedge \measuredangle H(\omega_0) = \pi$$

Remplazando $s = \omega i$en la función de transferencia se llega a

$$H(\omega i) = \frac{b}{(b\omega - \omega^3)i + (b - a\omega^2)}$$

Es importante notar que las condiciones solicitadas hacen que $H(\omega_0) = -1$ esto requiere que para esa frecuencia tengamos un real negativo por ende enviando la parte imaginaria debe ser nula así entonces se llega a la siguiente condición

$$b\omega_0 = \omega_0^3 \Rightarrow b = \omega_0^2$$

Una vez encontrado el valor de $b$ que satisface la condición solicitada en términos de ser un numero real, se debe encontrar $a$ para que el numero sea $-1$ así

$$H(\omega_o i) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - a\omega_0^2} = \frac{1}{1-a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

Entonces la función de transferencia que satisface la condición solicitada tiene la siguiente forma

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^3 + 2s^2 + \omega_o^2 s + \omega_0^2}$$

Los diagramas de bode y nyquist (solo frecuencias positivas) de esta función de transferencia se presentan a continuación para una $\omega_0 = 10 \mathrm{rad}/\mathrm{s}$, en los diagramas se puede evidenciar el cumplimiento de las condiciones establecidas.

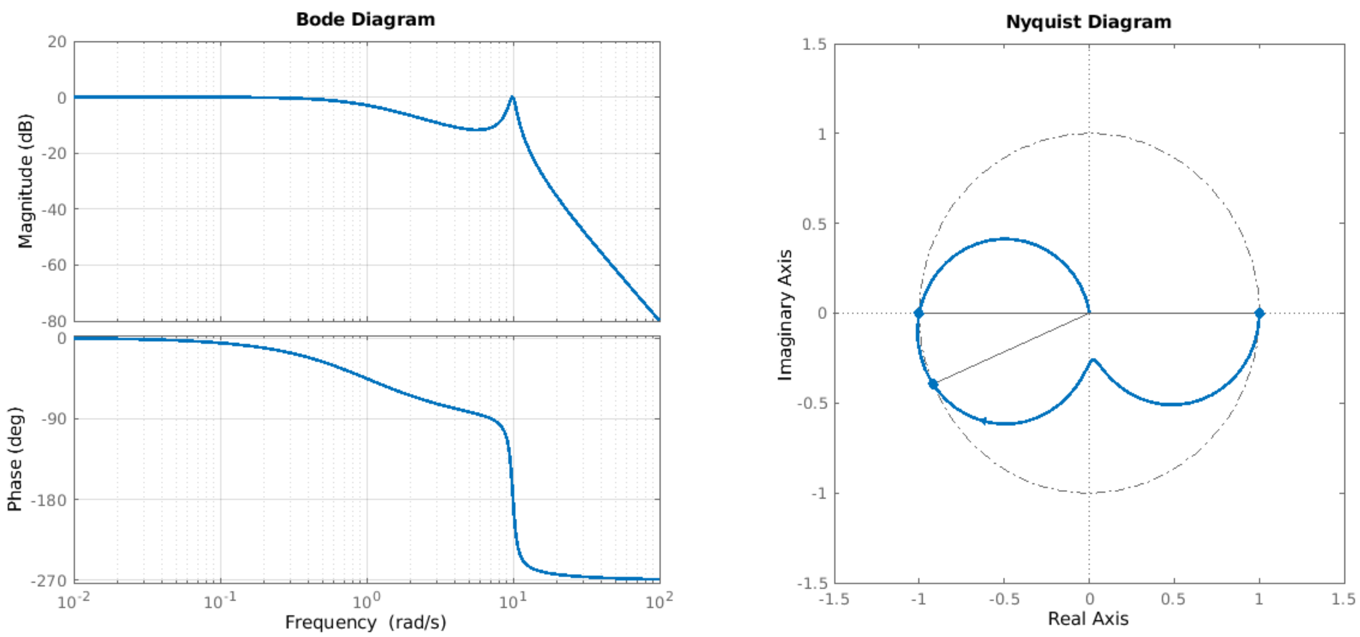


Figure 2: Respuesta en Frecuencia del Sistema

## Tercer Ejercicio

Teniendo presente el siguiente diagrama de bloques

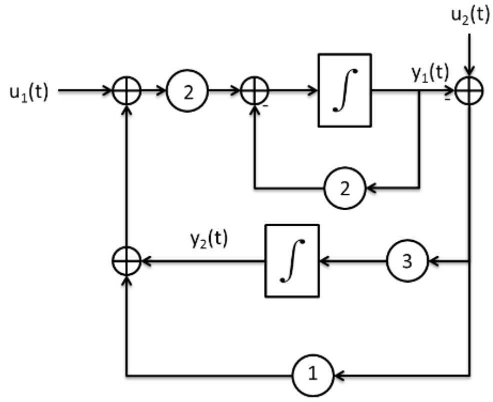


Figure 3: Diagrama de Bloques

Tomando como entradas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ y como salidas $y_1(t)$ y $y_2(t)$ encuentre

1. Una representación en el espacio de estados del sistema dinámico, que permita escribir el sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

Definiendo como estados del sistema las salidas de cada uno de los integradores y siguiendo el diagrama de bloques es posible llegar a las siguientes expresiones para las derivadas de los estados, iniciando por la derivada del estado que concuerda con $y_1$

$$\dot{x_1} = -2x_1 + 2x_2 - 2x_1 + 2u_1 + 2u_2 = -4x_1 + 2x_2 + 2u_1 + 2u_2$$

para el estado que concuerda con $y_2$entonces tendríamos lo siguiente

$$\dot{x_2} = -3x_1 + 3u_2$$

Una vez definidas las ecuaciones encontrar las matrices de la representación se logra escribiendo las ecuaciones en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2. Con base en la representación de encontrada, encuentre la matriz de funciones de transferencia del sistema

Empleando la representación encontrada se debe invertir la matriz $sI - A$para poder encontrar la matriz de funciones de transferencia, para esto recordado que la inversa de una matriz 2x2 es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Se encuentra la matriz $sI - A$ y se aplica la expresión para la inversa

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ 3 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+4)+6} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+6} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix}$$

entonces para calcular la matriz de funciones de transferencia debemos emplear la expresión

$$H(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D$$

Como $C = I$ y $D = 0$ entonces debemos calcular solamente el producto de $(sI - A)^{-1}\,B$ así:

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4s+6} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+4s+6} \begin{bmatrix} 2s & 2(s+3) \\ -6 & 3(s+2) \end{bmatrix}$$

3. Empleando la reducción por diagrama de bloques, encuentre la siguiente función de transferencia $h_{12}(s) = \frac{y_1(s)}{u_2(s)}$

Para resolver el problema es necesario notar que una vez apagada la entrada $u_1$el sistema se comporta como un sistema estándar de la forma controlador - modelo en donde el modelo resulta de hacer la reducción de los siguientes bloques

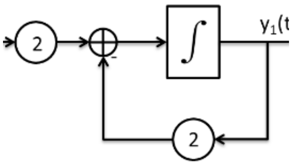


Figure 4: Modelo

Entonces aplicando la formula de la retroacción encontramos

$$M(s) = 2\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}} = \frac{2}{s+2}$$

Y el controlador resulta de hacer una reducción de los siguientes bloques en paralelo

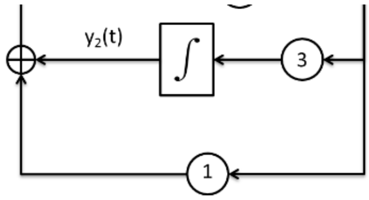


Figure 5: Controlador

Entonces el controlador seria

$$C(s) = \frac{3}{s} + 1 = \frac{s+3}{s}$$

Entonces la función de transferencia solicitada es

$$h_{12}(s) = \frac{C(s)M(s)}{1+C(s)M(s)} = \frac{\frac{2}{s+2}\frac{s+3}{s}}{1+\frac{2}{s+2}\frac{s+3}{s}} = \frac{2(s+3)}{s(s+2)+2(s+3)} = \frac{2(s+3)}{s^2+4s+6}$$

Resultado que concuerda con lo obtenido en la matriz de funciones de transferencia.

4. ¿Cuales son los polos del sistema?

Los polos del sistema son las raíces del polinomio característico $s^2+4s+6$, esto es los valores que cumplen con

$$s^2+4s+6=0$$

estos valores son:

$$s_1 = -2+\sqrt{4-6} = -2+\sqrt{2}i$$
$$s_2 = -2-\sqrt{4-6} = -2-\sqrt{2}i$$

5. ¿El sistema es BIBO estable? , justifique su respuesta

El sistema es BIBO estable por que los polos tiene parte real negativa

# Cuarto Ejercicio

En la actualidad una idea que se puede llevar a a cabo es el uso de vehículos controlados de forma remota, para el reconocimiento en las misiones de paz de la ONU. En la siguiente figura se muestra un concepto de vehículo todo terreno y una propuesta de un sistema de control de velocidad

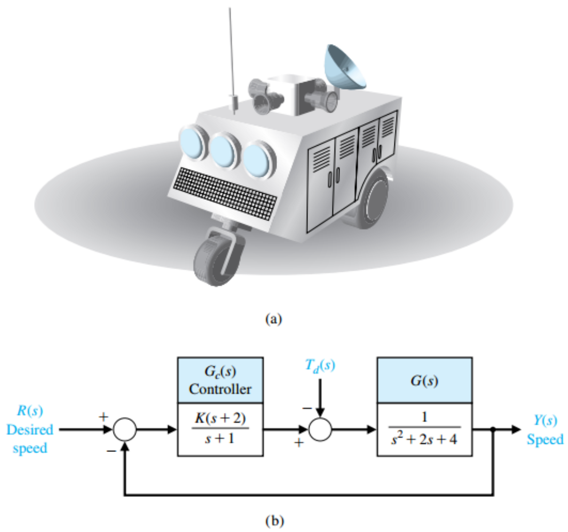


Figure 6: Diagrama de Concepto y Control de velocidad

1. Encuentre la respuesta a la entrada paso del vehículo, en el dominio del tiempo.

Para encontrar la respuesta a entrada paso del vehículo es necesario llevar la función de transferencia a la forma estándar vista en clase

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Para esto se debe entonces cumplir

$$K\omega_0^2 = 1 \; 2\delta\omega_0 = 2 \; \omega_0^2 = 4$$

De donde es posible encontrar

$$\omega_0 = 2 \; K = \frac{1}{4} \; \delta = \frac{1}{2}$$

Entonces nos encontramos ante un sistema sub-amortiguado en ese sentido la salida a una entrada paso en el dominio del tiempo tiene la siguiente expresión

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} \sin(2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}t + \theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t + \theta)$$

donde $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$ entonces la respuesta en tiempo es

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t + \pi/3)$$

Note que el $\frac{1}{4}$ aparece debido a la ganancia $K$

2. Encuentre la función de transferencia en lazo cerrado $V(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ este caso Ajuste $K = 20$ en el Controlador.

La función de transferencia de lazo cerrado para esta configuración seria

$$V(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{\frac{20(s+2)}{(s+1)} \frac{1}{s^2+2s+4}}{1 + \frac{20(s+2)}{(s+1)} \frac{1}{s^2+2s+4}} = \frac{20(s + 2)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 4) + 20(s + 2)} = \frac{20(s + 2)}{s^3 + 3s^2 + 26s + 44}$$

3. Encuentre la ganancia de Lazo del sistema de control $L(s)$ y determine el orden del sistema

La ganancia del lazo del sistema seria el producto del controlado por el modelo en este caso

$$L(s) = G_c(s)G(s) = \frac{20(s + 2)}{(s + 1)(s^2 + 2s + 4)}$$

La ganancia de lazo del sistema no tienen polos en el origen por ende el sistema en lazo cerrado es de orden 0

4. Asumiendo que la perturbación $T_d(s) = 0$ encuentre la salida en lazo cerrando cuando la velocidad deseada es un escalón unitario

En el dominio del tiempo:

Para encontrar la respuesta tipo paso en el dominio del tiempo debemos escribir la salida en el dominio de la frecuencia y separar los términos en fracciones que conocemos así

$$Y(s) = \frac{20(s+2)}{s^3+3s^2+26s+44}\frac{1}{s} = \frac{20}{s^3+3s^2+26s+44} + 2\frac{20}{s^3+3s^2+26s+44}\frac{1}{s}$$

En este sentido entonces podemos recordar que las raíces de un polinomio de orden 3 deben ser 3 y pueden ser

- Todas reales
- 1 raíz real simple y 1 doble compleja conjugada

Asumiendo la segunda opción tendríamos

$$s^3+3s^2+26s+44 = (s+a)(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2) = s^3+(2\xi\omega_0+a)s^2+(\omega_0^2+2\xi\omega_0 a)s+a\omega_o^2$$

de donde se desprende el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} a\omega_0^2 = 44 \\ (\omega_0^2+2\xi\omega_0 a) = 26 \\ 2\xi\omega_0 + a = 3 \end{gathered}$$

El cual no es lineal en las variables $a, \xi, \omega_0$ en estos casos podemos emplear una solución numérica, en este caso empleando Matlab se llega a la siguiente solución

$$a = 1.8435 \; \xi = 0.1184 \; \omega_0 = 4.8855$$

Esta descomposición permite escribir $Y(s)$de la siguiente forma

$$Y(s) = \frac{20}{(s+a)(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + 2\frac{20}{(s+a)(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\frac{1}{s} = \frac{20}{(s+a)(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}(1+\frac{2}{s})$$

El cual a su vez se puede expandir en fracciones parciales como

$$Y(s) = \left(\frac{k_0}{s+a} + \frac{k_1 s+k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\right)\left(1+\frac{2}{s}\right)$$

En donde se deben satisfacer la siguiente expresión

$$\frac{k_0}{s+a} + \frac{k_1 s+k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} = \frac{20}{(s+a)(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}$$

Desarrollando la parte izquierda de la ecuación se llega a lo siguiente

$$k_0(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2) + (s+a)(k_1 s+k_2) = 20$$

Expandiendo y ordenando los coeficientes de los polinomios

$$(k_0+k_1)s^2 + (2\xi\omega_0 k_0 + k_1 a + k_2)s + k_0\omega_0^2 + ak_2 = 20$$

En este sentido se debe satisfacer las siguientes ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2\xi\omega_0 & a & 1 \\ \omega_0^2 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Las cuales se pueden resolver mediante la inversión de la matriz, empleando los valores numéricos de $a, \xi, \omega_0$ se encuentra entonces

$$\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2\xi\omega_0 & a & 1 \\ \omega_0^2 & 0 & a \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7957 \\ -0.7957 \\ 0.5466 \end{bmatrix}$$

Una vez calculados los valores de $k_0, k_1, k_2$podemos regresar a la expresión de $Y(s)$ expandir y analizar cada uno de los términos

$$Y(s) = \frac{k_0}{s+a} + \frac{k_1 s+k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \frac{k_0}{s+a}\frac{2}{s} + \frac{k_1 s+k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\frac{2}{s}$$

Expandiendo las fracciones asociados a la dinámicas de segundo orden y expresando los términos en las formas estándar que se vieron en clase

$$\begin{aligned} Y(s) &= \tfrac{k_0}{s+a} + \tfrac{k_1 s}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \tfrac{k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \tfrac{k_0}{s+a}\tfrac{2}{s} + \tfrac{2k_1}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \tfrac{2k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\tfrac{1}{s} \\ Y(s) &= \tfrac{k_0/a}{(1/a)s+1} + \tfrac{k_1}{\omega_0^2}\tfrac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}s + \tfrac{k_2}{\omega_0^2}\tfrac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \tfrac{2k_0/a}{(1/a)s+1}\tfrac{1}{s} + \tfrac{2k_1}{\omega_0^2}\tfrac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)} + \tfrac{2k_2}{\omega_0^2}\tfrac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

De esta forma es posible identificar cada uno de los términos y asociarlos con las respuestas de sistemas de primero y segundo orden presentadas durante la clase así

- El termino $\frac{k_0/a}{(1/a)s+1}$ corresponde a la respuesta impulso de un sistema de primer orden con $K=\frac{k_0}{a}$ y $T=\frac{1}{a}$
- El termino $\frac{k_1}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}s$ corresponde a la derivada temporal de la respuesta impulso de un sistema de segundo orden sub amortiguado con $K=\frac{k_1}{\omega_0^2}$ , coeficiente de amortiguamiento $\delta=\xi$ y frecuencia natural no amortiguada $\omega_n=\omega_0$
- El termino $\frac{k_2}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}$ corresponde a la respuesta impulso de un sistema de segundo orden sub amortiguado con $K=\frac{k_2}{\omega_0^2}$ , coeficiente de amortiguamiento $\delta=\xi$ y frecuencia natural no amortiguada $\omega_n=\omega_0$
- El termino $\frac{2k_0/a}{(1/a)s+1}\frac{1}{s}$ corresponde a la respuesta paso de un sistema de primer orden con $K=\frac{2k_0}{a}$ y $T=\frac{1}{a}$
- El termino $\frac{2k_1}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}$ corresponde a la respuesta impulso de un sistema de segundo orden sub amortiguado con $K=\frac{2k_1}{\omega_0^2}$ , coeficiente de amortiguamiento $\delta=\xi$ y frecuencia y frecuencia natural no amortiguada $\omega_n=\omega_0$
- El termino $\frac{2k_2}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\frac{1}{s}$ corresponde a la respuesta paso de un sistema de segundo orden sub amortiguado con $K=\frac{2k_2}{\omega_0^2}$ , coeficiente de amortiguamiento $\delta=\xi$ y frecuencia y frecuencia natural no amortiguada $\omega_n=\omega_0$

Una vez identificados los diferentes términos es posible escribir la respuesta en tiempo así

$$y(t)=k_0e^{-at}+\tfrac{k_1}{\omega_0^2}\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t)\right)+\tfrac{k_2+2k_1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t)+\tfrac{2k_0}{a}\left(1-e^{-at}\right)+\tfrac{2k_2}{\omega_0^2}\left(1-\tfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t+\theta\right)\right)$$

En el Dominio de la Frecuencia:
La expresión en el dominio de la frecuencia tiene la siguiente forma

$$Y(s)=\left(\frac{k_0}{s+a}+\frac{k_1 s+k_2}{(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2)}\right)\left(1+\frac{2}{s}\right)$$

¿Cual seria el error en estado estacionario?, justifique su respuesta
El sistema es un sistema tipo cero en lazo cerrado por ende el error en estado estacionario se puede calcular empleando la expresión vista en clase

$$e_p=\frac{1}{1+K_p}$$

Con $K_p=\lim_{s\to 0}G_c(s)G(s)$ esto es entonces

$$K_p=\lim_{s\to 0}G_c(s)G(s)=\frac{20(0+2)}{(0+1)(0^2+2\,0+4)}=\frac{40}{4}=10$$

Entonces el error en estado estacionario quedara definido como

$$e_p=1/11=0.0909$$

5. Si la velocidad de referencia es una sinusoidal de amplitud 1 y frecuencia $\omega=4.82rad/s$
   (a) Cuanto seria la amplitud de la salida en estado estacionario
   (b) Cuanto seria la fase de la salida en estado estacionario

Para dar respuesta a esta pregunta hay que recordar que en estado estacionario cuando ingresamos una referencia sinusoidal a una frecuencia determinada la salida es

$$y_{ss}(t)=\|V(\omega)\|\sin\left(\omega t+\sphericalangle V(\omega)\right)$$

En ese sentido hay que encontrar $\|V(\omega)\|$ y $\sphericalangle V(\omega)$ para la frecuencia indicada esto es

$$V(\omega)=\frac{20(\omega i+2)}{-\omega^3 i-3\omega^2+26\omega i+44}=\frac{20(\omega i+2)}{44-3\omega^2+(26\omega-\omega^3)i}$$

Ahora debemos calcular la magnitud y la fase de este numero complejo y evaluarlo en la frecuencia indicada iniciando por la magnitud

$$\|V(\omega)\|=\frac{20\sqrt{4+\omega^2}}{\sqrt{(44-3\omega^2)^2+(26\omega-\omega^3)^2}}$$

Al evaluarlo en la frecuencia indicada $\|V(4.82)\| = 3.6047$ esta seria entones la amplitud en estado estacionario a la salida.
Por otro lado para encontrar la fase tendríamos entonces que evaluar $\sphericalangle V(\omega)$ lo cual seria

$$\sphericalangle V(\omega) = \sphericalangle 20(\omega i + 2) - \sphericalangle(44 - 3\omega^2 + (26\omega - \omega^3))i$$

Esto es entonces

$$\sphericalangle V(\omega) = \operatorname{atan2}(\omega, 2) - \operatorname{atan2}\left(26\omega - \omega^3, 44 - 3\omega^2\right)$$

Donde atan2 corresponde a la función al arco tangente con 2 argumentos, la cual tiene presente el cuadrante del numero complejo para calcular la fase[1], Al evaluarlo en la frecuencia indicada $\sphericalangle V(4.82) = -1.4853$ rad esta seria entones la fase en estado estacionario a la salida.

## Quinto Ejercicio

Con base en el siguiente diagrama de bloques

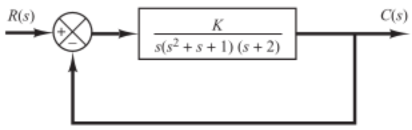


Figure 7: Sistema en Lazo Cerrado

Encuentre los valores de K que garantizan que el sistema es estable en lazo cerrado, emplee el criterio de Routh-Hurwitz
Para poder aplicar el criterio de Routh-Hurwitz es necesario calcular la función de transferencia en lazo cerrado y determinar cual es el polinomio característico esto es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \text{ con } L(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}$$

Entonces aplicando la definición encontramos la siguiente función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

La ecuación característica es entonces

$$s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K = s(s^3 + s^2 + s + 2s^2 + 2s + 2) + K = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

Se procede ahora a construir el arreglo de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 3 & K \\
s^3 & 3 & 2 & 0 \\
s^2 & \frac{7}{3} & K & 0 \\
s^1 & 2 - \frac{9}{7}K & 0 & 0 \\
s^0 & K & 0 & 0
\end{array}$$

Para garantizar estabilidad no deben existir cambios de signos en la primera columna por ende $K > 0$ y el termino $2 - \frac{9}{7}K > 0$ de donde se llega a la condición total que para este caso es

$$0 < K < \frac{14}{9}$$

## Sexto Ejercicio.

Se desea controlar el siguiente sistema dinámico

$$M(s) = \frac{5000}{(s + 1)\left(s^2 + 14s + 100\right)}$$

La respuesta en frecuencia del sistema se presenta a continuación, a la izquierda se presenta el diagrama de bode, en donde se pueden identificar los margenes de ganancia y fase , por otro lado a la derecha se presenta el diagrama de nyquist en donde se visualiza con una cruz roja el punto -1.

[1] visite https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2 para mas información

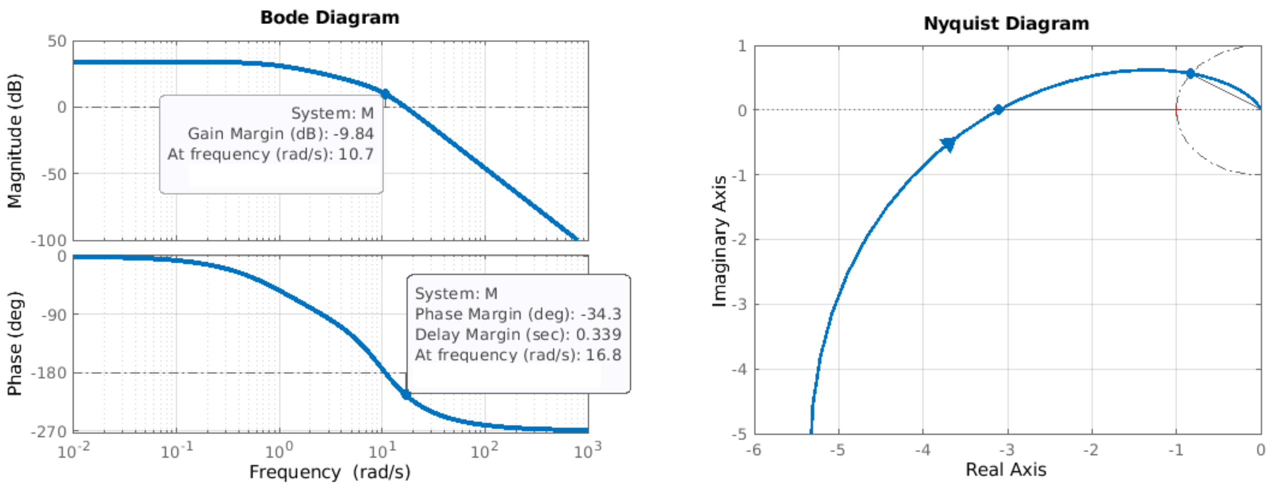


Figure 8: Respuesta en Frecuencia del Sistema

Responda las siguientes preguntas con base en la información presentada y justifique brevemente sus respuesta

1. Si al sistema se le aplicara un controlador proporcional con $K_p = 1$ ¿Que puede decir de la estabilidad del sistema en lazo cerrado?

Si se aplica ese controlador la ganancia de lazo $L(s)$ seria exactamente igual al modelo, por ende su traza de nyquist corresponde a las presentadas en la figura, en donde se puede observar que se encierra el punto -1 por ende el sistema en lazo cerrado es inestable.

2. Encuentre un valor de $K_p$ que entregaría un margen de ganancia de 10db.

Del Diagrama de Niquist se puede observar que $L(\omega_{180}) = -(3 + 3/20) = -3.15$ por ende si se desea un margen de ganancia de 10db se debe cumplir lo siguiente para la ganancia de lazo $L_d(s)$deseada una vez se incluya el controlador

$$20\log(\|L_s(\omega_{180})\|^{-1}) = 10 \Rightarrow \|L_d(\omega_{180})\| = 10^{-1/2} = 0.3162$$

La ganancia $K_p$al ser un real no agrega fase por ende se debe cumplir lo siguiente

$$\|L_d(\omega_{180})\| = K_p \|L(\omega_{180})\| \Rightarrow K_p = \frac{\|L_d(\omega_{180})\|}{\|L(\omega_{180})\|} = \frac{0.3162}{3.15} = 0.1004$$

3. Con el valor encontrado de Kp encontrado ¿cual seria el valor aproximado del margen de fase?

Al Agregar $K_p$el diagrama de fase no se ve alterado lo que ocurre entonces es que ahora

$$20\log\|L_d(\omega)\| = 20\log(K_p) + 20\log\|L(\omega)\|$$

Para la frecuencia critica se debe cumplir lo siguiente

$$0 = 20\log(K_p) + 20\log\|L(\omega_c)\|$$

De donde es posible encontrar el valor en dB que debe tener la ganancia de laso original esto es

$$20\log\|L(\omega_c)\| = -20\log(K_p) = 19.96\text{db}$$

Revisando en la grafica esto ocurre aproximadamente para una frecuencia de 4 rad/s para esa frecuencia la fase aproximada del grafico es

$$\sphericalangle L_d(\omega_c) = -120$$

Por ende el margen de fase aproximado seria

$$MF = -120 + 180 = 60$$

Valide sus resultados empleando Matlab

El diagrama de Nyquist construido con Matlab para el $K_p$ diseñado se presenta a continuación en donde se puede observar que se cumple con el margen de fase y el margen de ganancia estimado empleando el diagrama de bode.

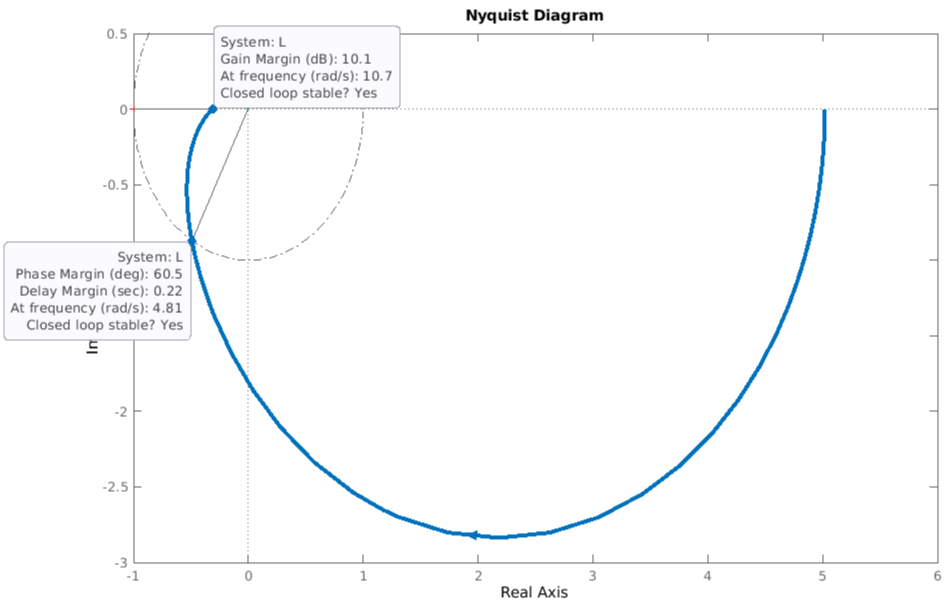


Figure 9: Sistema en Lazo Cerrado