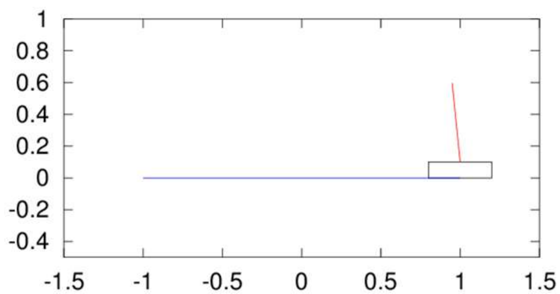
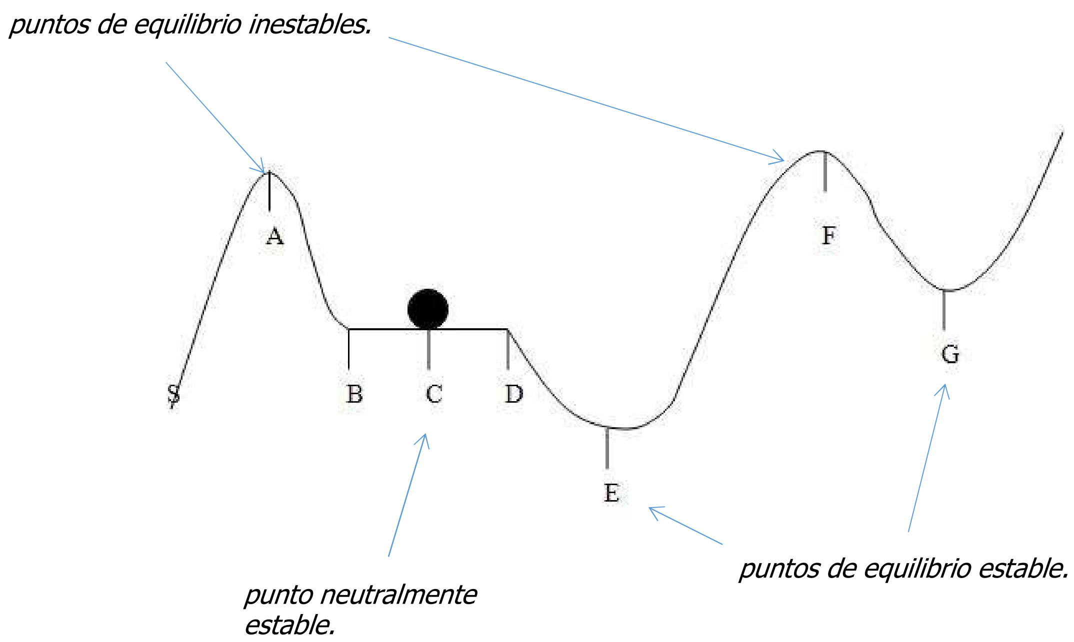
Clase 3: Estabilidad

Estabilidad en sistemas realimentados

- La especificación más importante en lazo cerrado.
- Estabilidad Absoluta: Define si el sistema es estable o inestable.
- Estabilidad Relativa: si el sistema es estable, entonces se busca definir el grado de estabilidad del mismo.



ESTABILIDAD



Estabilidad de Sistemas de control lineal

Respuesta de un sistema:

$$\textbf{Total response} = \textbf{zero-state response} + \textbf{zero-input response}$$

- Métodos para determinar estabilidad:
  - Criterio de Routh Hurwitz.
  - Lugar de las raíces.
  - Diagrama de Bode.
  - Criterio de Nyquist.

BIBO Estabilidad – Estado Cero – Externa

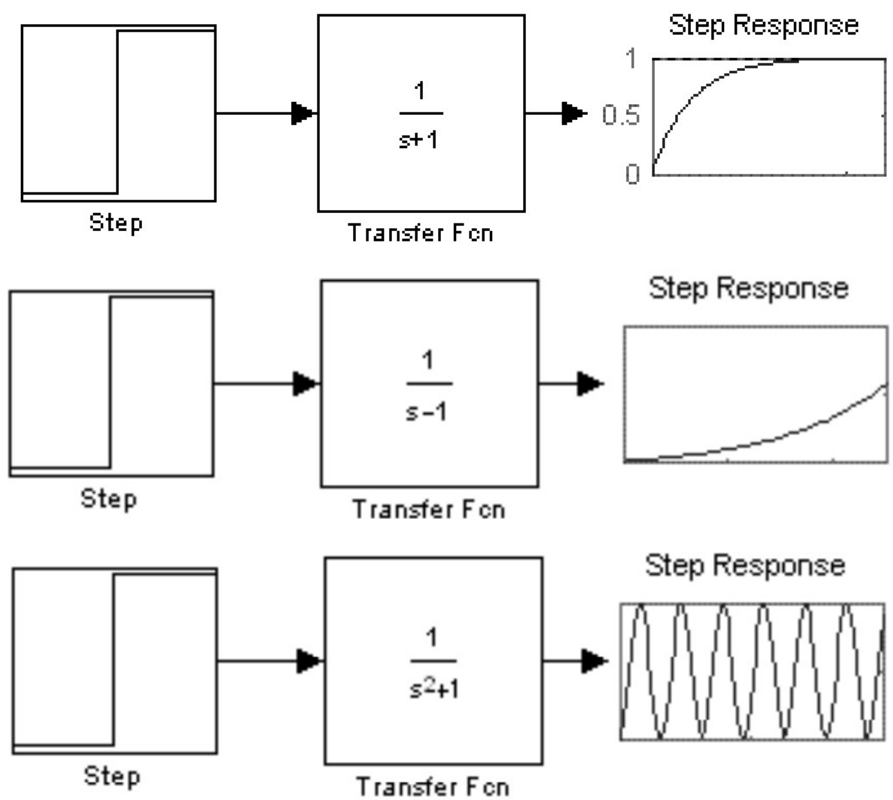
- Def: Sea $u(t)$, $y(t)$ y $g(t)$, la entrada, salida y respuesta impulso del sistema. Con condiciones iniciales cero, el sistema es **BIBO (Bounded-input Bounded-Output) estable**, si su salida es limitada asumiendo una entrada limitada.

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq Q < \infty$$

Siendo Q un valor finito positivo.

- **Conclusión (teorema):** Para BIBO estabilidad, las raíces del polinomio característico o los polos de $g(t)$ no pueden estar localizados en lado derecho del plano s o sobre el eje $j\omega$.

BIBO Estabilidad – Estado Cero – Externa



Estabilidad Asintótica - Entrada Cero – Interna

- Def: Si la respuesta entrada cero de $y(t)$, sujeto a las condiciones iniciales $y^{(k)}(t_0)$ alcanza el valor de cero a medida que t tiende a infinito, **el sistema es Entrada-Cero o Asintóticamente estable:**

1.

$$|y(t)| \leq M < \infty \quad \textit{for all } t \geq t_0$$

and

2.

$$\lim_{t \to \infty} |y(t)| = 0$$

Con M un número positivo que depende de $y^{(k)}(t_0)$

ESTABILIDAD

- ***ESTABILIDAD INTERNA:***

La respuesta a entrada cero, es decir la solución de:

$$\dot{\mathbb{X}} = A\mathbb{X}$$

es *marginalmente estable o estable en el sentido de Lyapunov* si todo estado inicial finito genera una respuesta limitada.

Es *asintóticamente estable* si todo estado inicial finito genera una respuesta limitada que tiende a cero cuando *t* tiende a infinito.

ESTABILIDAD

Teorema:

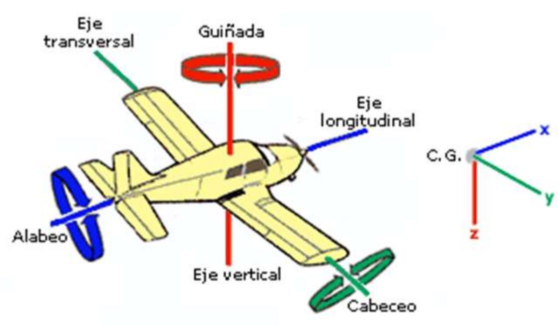
- El sistema descrito por la ecuación

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

- Es marginalmente estable si y solo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real cero o negativa (parte real no positiva). Si tienen parte real cero, deben ser sencillos
- Es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real estrictamente negativa.

ESTABILIDAD

- ¿Qué relación existe entre la estabilidad BIBO (Externa) y la estabilidad Asintótica (interna)?
- La estabilidad BIBO se determina por los polos de G(S) mientras que la estabilidad interna se determina por los valores propios de la matriz A.



ESTABILIDAD

- Función de transferencia:

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(S)}=C(SI-A)^{-1}B+D=\frac{1}{\det(SI-A)}C\left[Adj(SI-A)\right]B+D$$

- La ecuación característica de G(S) es

D(s)=det(SI-A)=0

- Si N(S) y D(S) son coprimos, todas las raíces de la ecuación característica son polos de G(S)

ESTABILIDAD

- Los valores propios de la matriz A son las soluciones de la ecuación característica:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Como existe la posibilidad de cancelación de los términos comunes entre N(s) y D(S) los polos de G(s) están incluidos en el conjunto de raíces de det(sI-A)=0.

ESTABILIDAD

- El conjunto de los polos de G(s) está contenido o es un subconjunto del conjunto de valores propios de A:

$$\{Polos\ de\ G(S)\} \subset \{Valores\ propios\ de\ A\}$$

- De lo anterior se concluye que si todos los valores propios de A tienen parte real negativa todos los polos de G(S) tienen la parte real negativa.

Ejemplo

$$M(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$ BIBO or asymptotically stable (or, simply, stable)

$$M(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$$ Unstable due to the pole at $s = 1$

$$M(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$$ Marginally stable or marginally unstable due to $s = \pm j2$

$$M(s) = \frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}$$ Unstable due to the multiple-order pole at $s = \pm j2$

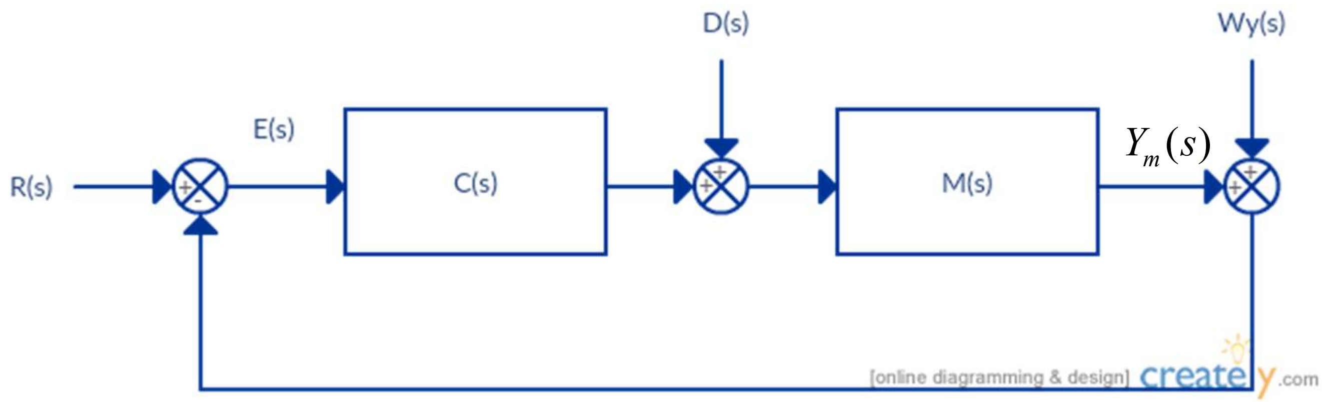
¿Como determinar la Estabilidad?

Teniendo en cuenta la discusión anterior, es posible determinar la estabilidad del sistema si se conocen las raíces **del polinomio característico del sistema**, o lo que es equivalente los **polos de las funciones de trasferencia**, con herramientas como MATLAB es posible determinar estas raíces para sistemas de cualquier orden, pero para fines de diseño, existirán parámetros desconocidos o variables contenidas en la ecuación característica, por lo tanto, no se podrán utilizar métodos numéricos.

Los 3 métodos que existen para determinar la estabilidad de un sistema realimentado son:

- Criterio de Routh-Hurwitz: Criterio Algebraico de difícil aplicación cuando el sistema es de orden superior. (Trabajo Independiente) **revisar KUO 7th Edición Pagina 334**
- Criterio de Nyquist : Criterio Grafico de que permite definir criterios de **estabilidad, nominal y estabilidad robusta** por medio de la función de ganancia de lazo $L(s)$
- Criterio de Bode: Criterio Grafico que permite definir si el sistema pasa por el punto crítico de inestabilidad analizando la magnitud $\left|L(\omega)\right|$ y la fase $\angle L(\omega)$

Sistemas de Control Realimentados



El objetivo de un sistema de control es llevar la medida del modelo $Y_m(s)$
A seguir lo mas posible la señal de referencia $\mathrm{R}(s)$ aun en presencia de errores
De medida $\mathrm{W}_y(s)$ y perturbaciones externas $\mathrm{D}(s)$ la salida del modelo se puede
Expresar por medio de las funciones de sensibilidad $\mathrm{S}(s)$ y sensibilidad
complementaria $\mathrm{V}(s)$ (También conocida como función de trasferencia directa) así:

$$\mathrm{Y}_m(s) = \mathrm{V(s)}\,\mathrm{R(s)} + \mathrm{S(s)}\,\mathrm{M(s)}\,\mathrm{D(S)} - \mathrm{V(s)}\,\mathrm{W}_y(s)$$

Tenga en cuenta que Las funciones de sensibilidad se definen así:

$$V(s) = \frac{C(\mathrm{s})M(\mathrm{s})}{1 + C(s)\,\mathrm{M(s)}} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \qquad S(s) = \frac{1}{1 + C(s)\,\mathrm{M(s)}} = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Sistemas de Control Realimentados

Estas funciones satisfacen el **teorema fundamental** de los sistemas de control en Lazo cerrado

$$S(s)+V(s)=1$$

Definiendo el siguiente error de seguimiento

$$\underline{E}(\mathrm{s})=R(\mathrm{s})-\mathrm{Y}_m(s)$$

$$\underline{E}(\mathrm{s})=R(s)-\mathrm{V(s)\,R(s)}-S(\mathrm{s})\,\mathrm{M(s)\,D(S)}+\mathrm{V(s)\,W}_y(s)$$

$$\underline{E}(\mathrm{s})=(1-\mathrm{V(s))\,R(s)}-S(\mathrm{s})\,\mathrm{M(s)\,D(S)}+\mathrm{V(s)\,W}_y(s)$$

$$\underline{E}(\mathrm{s})=S(s)\,\mathrm{R(s)}-S(\mathrm{s})\,\mathrm{M(s)\,D(S)}+\mathrm{V(s)\,W}_y(s)$$

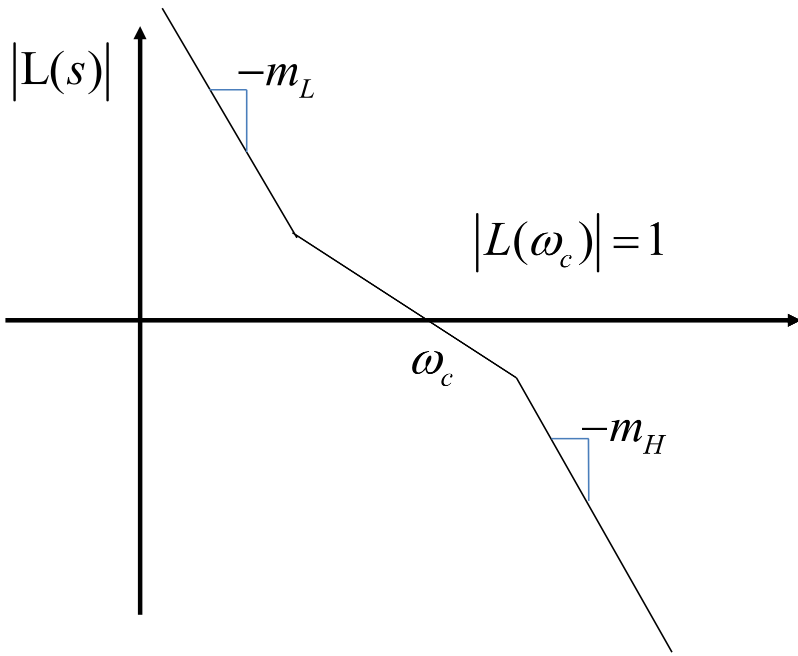
Un control “perfecto” ocurriría si $\underline{E}(s)=0$ para todo s, esto implicaría que :

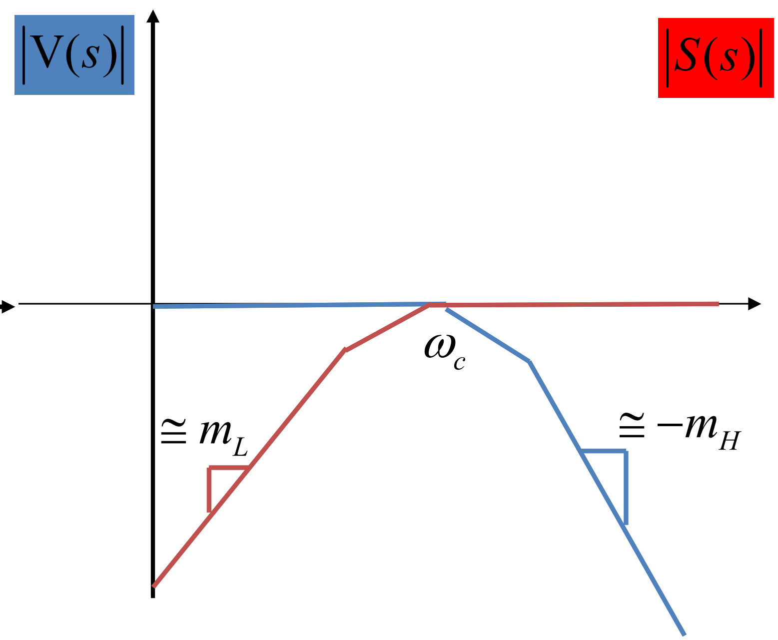
$$S(s)=0$$

$$V(s)=0$$

Lo cual es **contradictorio**, imposible pues contradice el teorema fundamental esto pone en evidencia la naturaleza fundamental de los sistemas de control, Realimentados: “**siempre existe un compromiso entre 2 objetivos en conflicto**”

Afortunadamente, los objetivos conflictivos mencionados, se encuentran en Rangos de frecuencia diferente y por lo general podemos lograrlos usando una Ganancia de lazo grande $|L(s)| \gg 1$ para frecuencias bajas y una ganancia de lazo Pequeña $|L(s)| \ll 1$ en altas frecuencias.

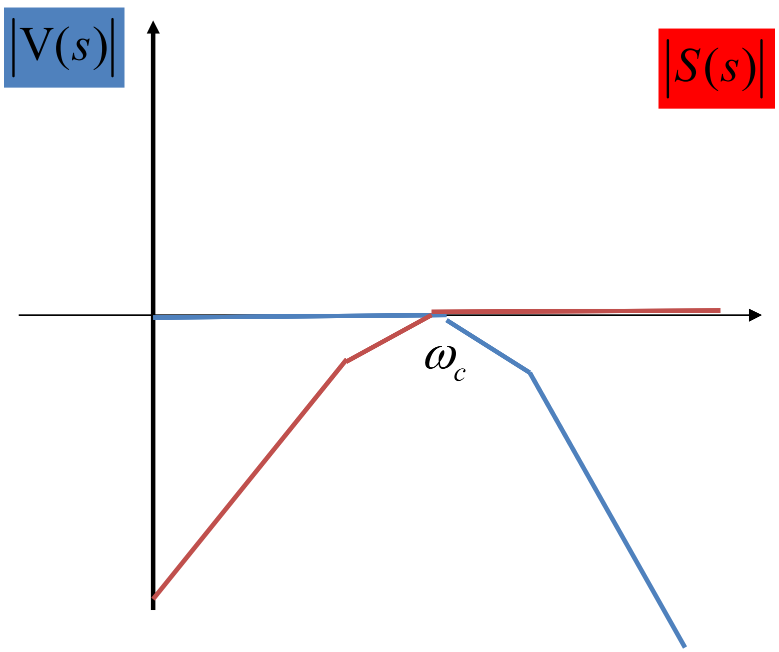




Sistemas de Control Realimentados

Note que las condiciones de control prefecto se cumplen para intervalos de Frecuencia bien definidos

$$|S(\omega)| \cong 0 \quad \forall\omega \ll \omega_c$$
$$|V(\omega)| \cong 0 \quad \forall\omega \gg \omega_c$$



Note que para las frecuencias muy Inferiores a ω_c el error de seguimiento se comporta así :

$$\underline{E}(s) \cong W_y(s)$$

Esto demuestra que el limite del control es el **RUIDO DE MEDIDA**

No puedo controlar algo con una precisión menor a los errores de medición

Implicaciones de Estabilidad

Una ves entendido lo anterior, es claro que las características de la ganancia de lazo $\left|\mathrm{L}(s)\right|$ están estrictamente ligadas a las características del control pero, desde luego **La ganancia de lazo no puede ser escogida arbitrariamente** debemos tener en cuenta:

✓ Estabilidad Nominal

La ganancia de lazo debe ser tal que el sistema de control en lazo cerrado construido Utilizando el modelo M(s) (Modelo Nominal) sea estable

✓ Estabilidad Robusta

El sistema de control debe ser estable aun en presencia de errores de modelo, esto Implica que el controlador diseñado utilizando el modelo nominal M(s), al ser aplicado Al proceso real P(s)=M(s)(1+dP(s)) debe dar como resultado **un sistema de control en Lazo cerrado estable.**

El Punto Critico de Estabilidad

Analizando el esquema de control general, en donde las funciones de sensibilidad se Definen como

$$V(s) = \frac{L(s)}{1 + L(\mathrm{s})} \qquad S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

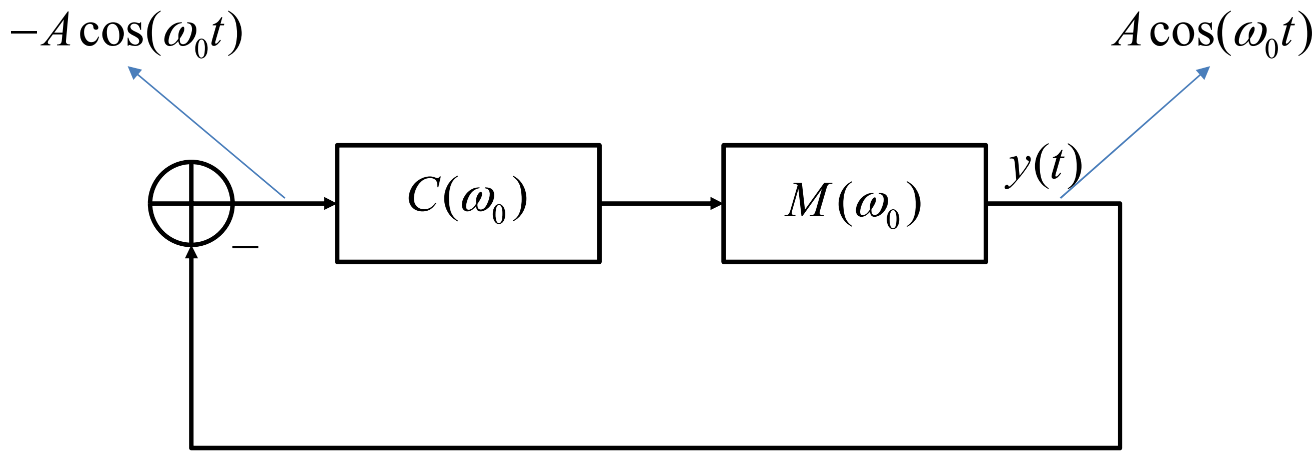
Se puede encontrar una situación muy particular, observe que si $L(s_0) = -1$ entonces

$$V(\mathrm{s}_0) = \frac{-1}{1-1} = \frac{-1}{0} = \infty \qquad S(\mathrm{s}_0) = \frac{1}{1-1} = \frac{-1}{0} = \infty$$

Esto quiere decir que para un punto en el plano S, las funciones de sensibilidad no están definidas, y para una referencia acotada, a esa frecuencia tendríamos una salida no acotada.

En realidad, si el sistema posee una condición inicial y no aplicamos ninguna entrada o ninguna perturbación es decir $R(s) = D(s) = W_y(s) = 0$ tendríamos una condición de oscilación (Criterio de **Barkhausen**)

El Punto Critico de Estabilidad



$$y(t) = -A\left|L(\omega)\right|\cos(\omega t + \angle L(\omega))$$

$$L(\omega_0) = -1 \Rightarrow \left|L(\omega_0)\right| = 1, \left|\angle L(\omega_0)\right| = \pi$$

$$y(t) = -A\cos(\omega t \pm \pi) = A\cos(\omega t)$$

Equivale a una oscilación sostenida (**no deseable en un sistema de control**)
Por esta razón la condición $L(s_0) = -1$ se conoce como condición crítica de Oscilación y al punto (-1,0) en el plano S se le conoce como **punto critico**

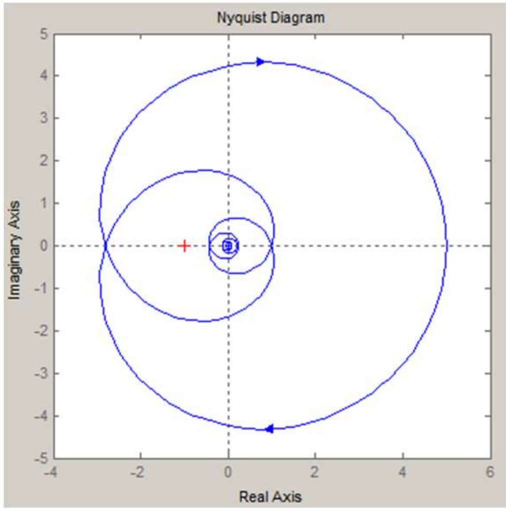
Criterio de Nyquist

El criterio de Nyquist consiste en realizar una gráfica en el plano S de la ganancia De lazo del sistema de control para cada frecuencia natural, es decir un grafico En 2D descrito por las siguientes ecuaciones

$$y(\omega) = imag(L(j\omega))$$

$$x(\omega) = real(L(j\omega))$$

$$-\infty < \omega < \infty$$



La estabilidad del sistema de control realimentado se determina contando Numero de veces (N) que el diagrama encierra el punto critico (-1,0) y Determinando El numero de polos inestables (P) de la ganancia de lazo $L(s)$
La estabilidad del sistema realimentado se da Si y solo si N=P;

Criterio de Nyquist Aplicado a Sistemas de Control

En los sistemas de control, el objetivo es diseñar el controlador C(s) de tal forma Que se cumplan ciertas características, una de ellas es garantizar que la ganancia De lazo equivalente sea de **fase mínima** esto es, la L(s) de un sistema de control Bien diseñado debe cumplir las siguientes condiciones

- ✓ No debe tener polos inestables o polos sobre el eje imaginario
- ✓ El sistema tiene un mínimo de fase posible, dada una respuesta en magnitud $\left|L(j\omega)\right|$ aproximable a :

$$\angle L(j\omega_0) \cong \frac{\pi}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \ln \omega} \ln\left|L(j\omega_0)\right|\right)_{\omega=\omega_0}$$

- ✓ La magnitud de la función de trasferencia de fase mínima no puede ser cero o infinito en cualquier frecuencia finita distinta de cero

Para funciones de fase mínima el criterio de Nyquist se simplifica a:
“Para un sistema en lazo cerrado con ganancia de lazo L(s) de fase mínima y con fase monótonamente decreciente, el sistema es estable en lazo cerrado si la grafica de L(s) no encierra al punto critico”

Criterio de Nyquist Aplicado a Sistemas de Control

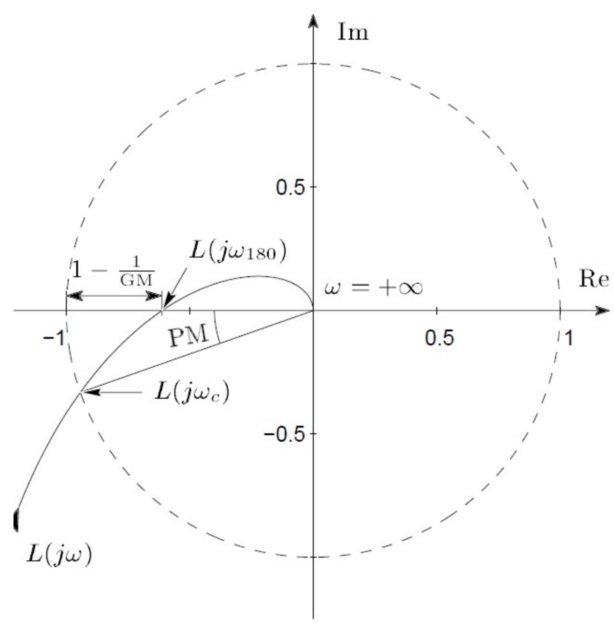
Aplicando el teorema de Nyquist para sistemas de fase mínima y que cumplan la Condición de **fase monótonamente decreciente** se llega a la Siguiente conclusión, para garantizar la **estabilidad Nominal**

La estabilidad nominal del sistema esta Garantizada si y solo si

$$\text{Estabilidad Nominal} \Leftrightarrow \left| L(j\omega_{180}) \right| < 1$$

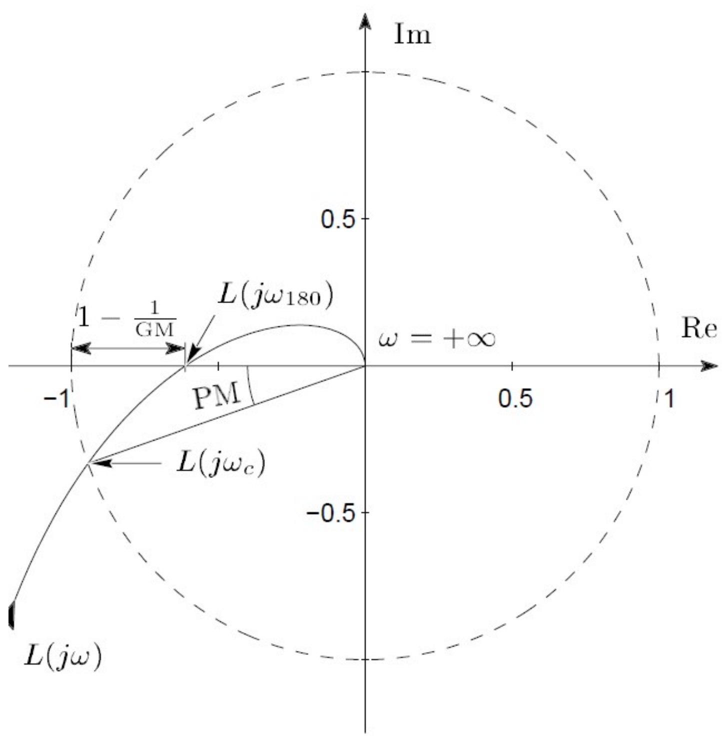
Donde ω_{180} corresponde a la frecuencia Para la cual se cumple que:

$$\left| \angle L(\omega_{180}) \right| = \pi$$



Margen de Ganancia y de Fase

Con base en el diagrama de Nyquist, Podemos definir dos parámetros Importantes, que indican que tan cerca un sistema estable esta a la inestabilidad.



Margen de Ganancia: es el aumento de ganancia permitida (sin modificar la fase) que pondría al sistema en el punto critico

$$MG = 1/\left|L(\omega_{180})\right|$$

Margen de Fase: es el aumento de fase Permitido (sin modificar la magnitud) que Pondría al sistema en el punto critico.

$$PM = \angle L(j\omega_c) + \pi$$

Donde ω_c es la frecuencia de corte es decir:

$$\left|L(\omega_c)\right| = 1$$

Margen de Ganancia y de Fase

El margen de ganancia y el margen de fase son unos indicadores, que sirven para evaluar la **estabilidad robusta**, para errores de modelo particulares

Margen de Fase (Retardo en el Proceso)

Suponga que el proceso tiene la siguiente función de trasferencia

$$P = M(s)e^{-\tau s} \Rightarrow y_p(t) = y_m(t-\tau)$$

La ganancia de lazo nominal (construida con el modelo), **con la cual se diseñaría** el control seria:

$$L_N(s) = C(s)M(s)$$

Cuando el control diseñado se lleve al proceso la ganancia de lazo real será entonces

$$L(s) = C(s)M(s)\,\mathrm{e}^{-\tau s}$$

Por lo tanto la fase de la ganancia de lazo será $\angle L(s) = \angle L_n(s) - \tau s$

Por lo tanto el máximo retardo permitido deberá cumplir $\tau = \dfrac{PM}{\omega_c}$

Margen de Ganancia y de Fase

Margen de Ganancia (Error de Ganancia)

Suponga que el proceso tiene la siguiente función de trasferencia

$$P = \Delta k M(s)$$

La ganancia de lazo nominal (construida con el modelo), **con la cual se diseñaría** el control seria:

$$L_N(s) = C(s)M(s)$$

Cuando el control diseñado se lleve al proceso la ganancia de lazo real será entonces

$$L(s) = C(s)M(s)\Delta k$$

Por lo la magnitud de la ganancia de lazo a la frecuencia ω_{180}

$$L(\omega_{180}) = \frac{1}{MG}\Delta k$$

Por lo tanto el máximo error de escala permitido deberá cumplir $\Delta k = MG$

Estabilidad Robusta

Para entender la estabilidad robusta es necesario aplicar el teorema de Nyquist cuando se utiliza el controlador diseñado con el modelo M(s) al proceso real P(s)
Recuerde que:

$$P(s) = M\left(s\right)\left(1 + \partial P(\mathrm{s})\right)$$

Entonces la ganancia de lazo sobre el proceso será

$$\mathrm{L}(s) = C\left(s\right)M\left(s\right)\left(1 + \partial P(\mathrm{s})\right)$$

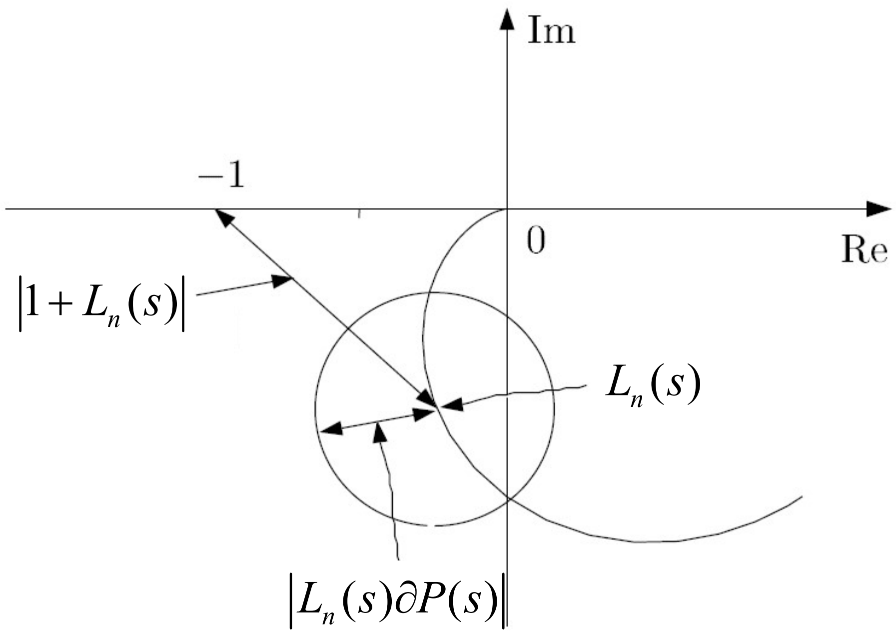
$$\mathrm{L}(s) = L_n(s) + L_n(s)\partial P(\mathrm{s})$$

Note que $\partial P(\mathrm{s})$ se puede ver como un factor de escala alrededor de la ganancia De lazo nominal, esto es un disco de radio máximo $\left|L_n(s)\partial P(\mathrm{s})\right|$ alrededor de la ganancia de lazo nominal.

Estabilidad Robusta

Note que la estabilidad robusta (ER) utilizando el criterio de Nyquist se cumples si garantizamos que el circulo nunca toque el punto critico esto es

$$\mathrm{ER} \Leftrightarrow \left|\mathrm{L}_n(\omega)\partial P(\omega)\right| < \left|1+\mathrm{L}_n(\omega)\right|, \quad \forall \omega$$



$$\mathrm{ER} \Leftrightarrow \frac{\left|\mathrm{L}_n(\omega)\partial P(\omega)\right|}{\left|1+\mathrm{L}_n(\omega)\right|} < 1, \quad \forall \omega$$

$$\mathrm{ER} \Leftrightarrow \left|V_n(\omega)\partial P(\omega)\right| < 1, \quad \forall \omega$$

Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz

Sea Δ(s) el denominador de una función de transferencia G(s):

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

¿Es estable G(s)?

¿Todas las raíces de Δ(s) tienen parte real negativa?

- Condición necesaria y suficiente para la estabilidad de sistemas lineales.
- Si existe al menos una raíz en la parte derecha del semiplano complejo el sistema es inestable.

El **Criterio de Rout-Hurwitz** permite verificar cuantas raíces de Δ(s) se encuentran en el semiplano derecho.

ESTABILIDAD EXTERNA/BIBO – ROUTH HURWITZ

- Criterio de Routh-Hurwitz permite verificar si todas las raíces de un polinomio con coeficientes reales tienen parte real negativa.

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Condiciones necesarias:

- Todos los coeficientes deben ser diferentes de cero.
- Todos los coeficientes deben tener el mismo signo.

Criterio de Routh – Hurwitz:

Se parte de la ecuación característica del sistema

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Se construye la tabla de Routh- Hurwitz de la siguiente forma

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_{n-1} & &
\end{array}$$

donde

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} \qquad c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Y así sucesivamente para los demás coeficientes.

Criterio de Routh- Hurwitz: El número de raíces de *Δ(s)* con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de la primera columna de la tabla.

Para que un sistema sea **estable** se requiere **que no haya cambios de signo** en la primera columna.

Configuraciones de la Primera Columna:

Se pueden presentar tres casos diferentes en la primera columna de la tabla, que determina variaciones en el cálculo de los diferentes coeficientes.

- ***Caso 1:*** Ningún elemento en la primera columna es cero.

- ***Caso 2:*** Hay un cero en la primera columna y algunos de los coeficientes asociados a la fila de este elemento son diferentes de cero.

- ***Caso 3:*** Hay un cero en la primera columna y los otros coeficientes de fila asociada a este elemento son también nulos.

Caso 1: Ningún elemento en la primera columna es cero.

Ejemplo: Sistema de Segundo Orden.

Ecuación característica

$$q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & 0 \end{array} \qquad b_1 = \frac{a_1 a_0 - 0 a_2}{a_1} = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

El requisito para un sistema de segundo orden es que todo sus coeficientes sean positivos, o todos sean negativos.

Ejemplo: Sistema de Tercer Orden

Ecuación característica:

$$q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array} \qquad b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2} \;\text{ y }\; c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0$$

Para que el sistema sea estable es necesario que los coeficientes sean positivos y cumplir la condición $\boldsymbol{a_2 a_1 > a_0 a_3}$.

Si $\boldsymbol{a_2 a_1 = a_0 a_3}$, otro caso.

Caso 2: Hay un cero en la primera columna y algunos de los coeficientes asociados a la fila de este elemento son diferentes de cero.

Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 11 \\
s^4 & 2 & 4 & 10 \\
s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
s^2 & c_1 & 10 & 0 \\
s^1 & d_1 & 0 & 0 \\
s^0 & 10 & 0 & 0
\end{array}$$

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = \frac{-12}{\varepsilon}$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} \rightarrow 6$$

El sistema es inestable debido a que hay un numero negativo grande en la primera columna, ***–12/ε***.

Ejemplo: Sistema Inestable

Ecuación característica:

$$q(s) = s^4 + s^3 + s^2 + s + K$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & K \\ s^3 & 1 & 1 & 0 \\ s^2 & \varepsilon & K & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & K & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} \rightarrow \frac{-K}{\varepsilon}$$

Si ***K* > *0*** → Sistema Inestable.

Si ***K* < *0*** → Sistema Inestable.

Entonces el sistema es inestable para todos los valores de ***K***.

Caso 3: Hay un cero en la primera columna y los otros coeficientes de fila asociada a este elemento son también nulos.

Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \dfrac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Para que el sistema sea estable se necesita que

0 < K < 8.

Cuando ***K = 8*** el sistema tiene estabilidad marginal y además presenta una fila ceros en la matriz, por lo tanto se necesita de un polinomio auxiliar para solucionar esto.

Polinomio Auxiliar

$$U(s) = 2s^2 + Ks^0 = 2\left(s^2 + 4\right) = 2\left(s + j2\right)\left(s - j2\right)$$

Por lo tanto, cuando ***k* = *8*** los factores de ***q*(*s*)** son:

$$q(s) = \left(s + 2\right)\left(s + j2\right)\left(s - j2\right)$$

El sistema es ***marginalmente estable***.

Ejemplo: Control de Soldadura

El sistema se puede representar mediante el siguiente diagrama:

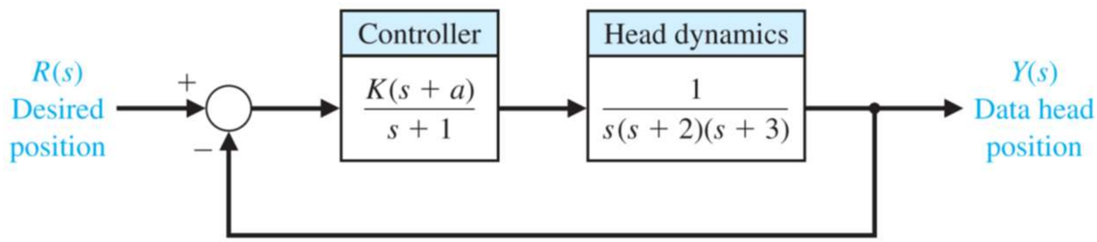


Figure: 06-05

La ecuación característica del sistema es:

$$1+G(s)=1+\frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}=0$$

$$q(s)=s^4+6s^3+11s^2+(K+6)s+Ka$$

Tabla de Routh – Hurwitz

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 11 & Ka \\
s^3 & 6 & (K+6) & \\
s^2 & b_3 & Ka & \\
s^1 & c_3 & & \\
s^0 & Ka & &
\end{array}
$$

$$b_3 = \frac{60-K}{6}$$

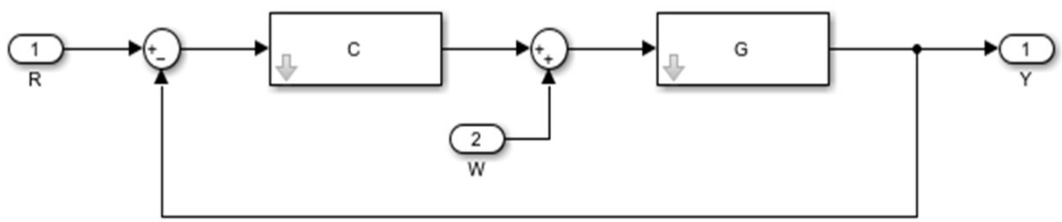
$$c_3 = \frac{b_3(K+6)-6Ka}{b_3}$$

El coeficiente $\boldsymbol{c_3}$ establece el intervalo aceptable de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{a}$. Mientras que en $\boldsymbol{b_3}$ se requiere que $\boldsymbol{K}$ sea menor que ***60***. Si $\boldsymbol{c_3 \geq 0}$, se obtiene que:

$$(K-60)(K+6)+36Ka \leq 0 \;\; \rightarrow \;\; a \leq \frac{(60-K)(K+6)}{36K}, \;\; a > 0$$

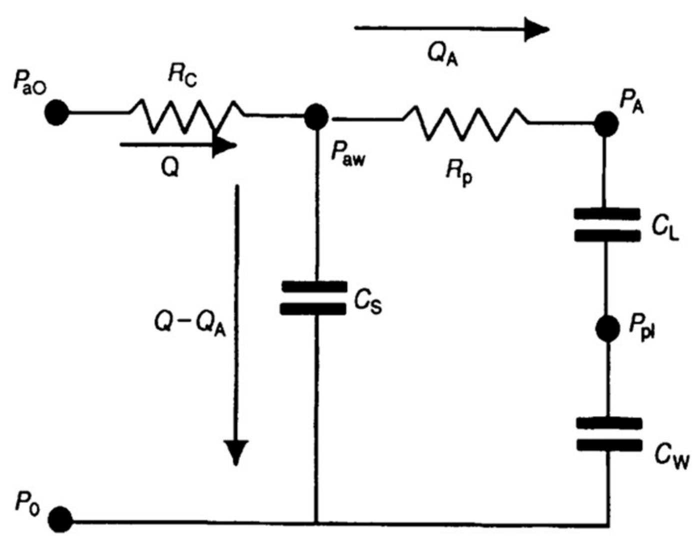
Ejercicio

- Considere el sistema retroalimentado mostrado en la Figura, con una función de transferencia del controlador de la forma $c(s) = k_p$ y una planta $G(s) = \frac{1}{s(sa_1+1)(sa_2+1)}$ con $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$.



- Determinar el rango de valores de k_p, a_1 y a_2 para el cual el sistema es BIBO estable.

Modelo de la mecánica pulmonar



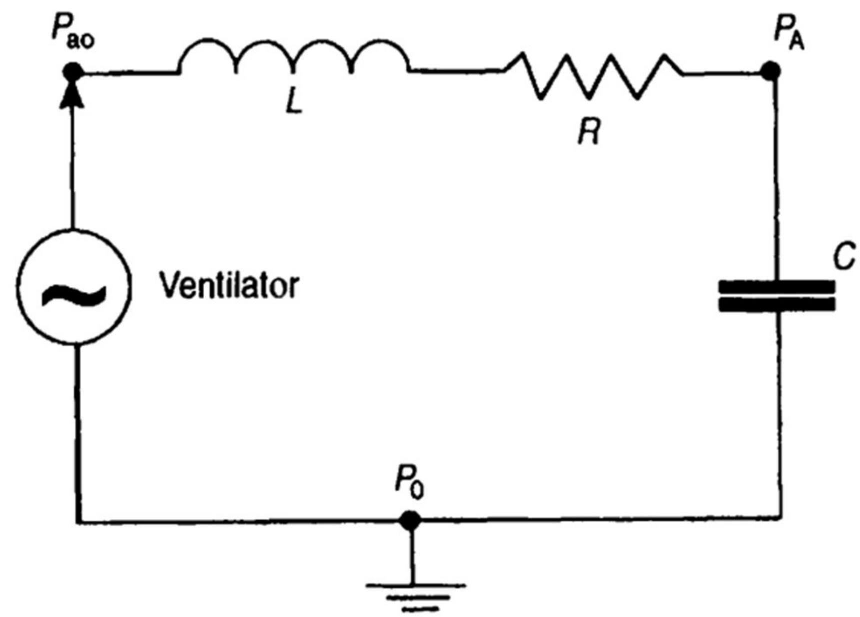
- Rc: resistencia de la vía respiratoria central
- Rp: resistencia de la vía respiratoria periférica.
- CL: expansión del pulmón.
- Cw: expansión de la pared torácica
- Cs: Escape de aire entre la vía respiratoria centra y periférica.

Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation (Michael C. K. Khoo)

Modelo eléctrico simplificado de la mecánica pulmonar

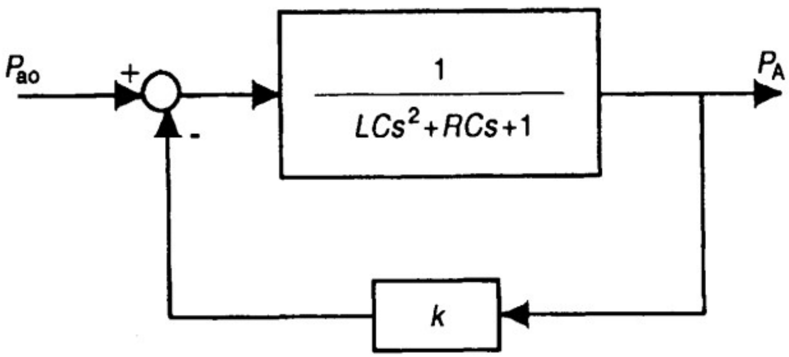
- *R* representa una combinación de resistencia al flujo de aire en las vías respiratorias, resistencia del tejido pulmonar y resistencia de la pared torácica.
- *C* representa la expansión combinada del tejido pulmonar, la pared torácica y las vías respiratorias.
- *L* representa la inercia del fluido en las vías respiratorias.

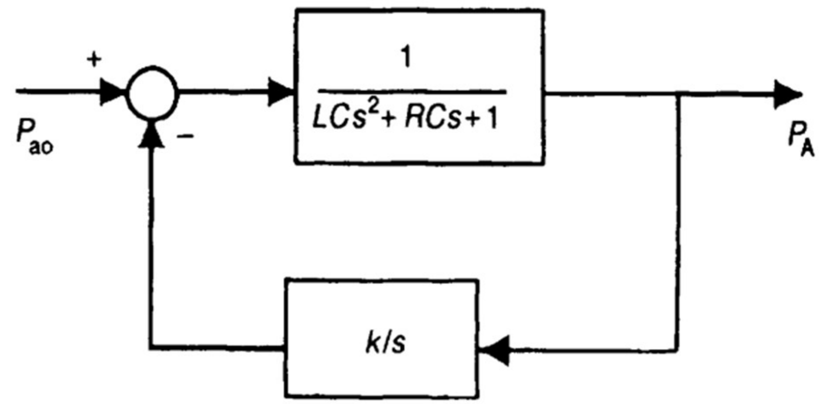
Modelar cómo la presión alveolar (P_A) responde dinámicamente a diferentes formas de onda de presión (P_{ao}) aplicadas en la apertura de la vía aérea.



Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation (Michael C. K. Khoo)

Estabilidad del modelo pulmonar





¿Condiciones de estabilidad para cada caso?

Physiological Control Systems: Analysis, Simulation, and Estimation (Michael C. K. Khoo)