Clase 2: Modelos y Sistemas Electromecánicos

MODELO

- Un buen diseño requiere un buen modelo.

- Método 1: a partir de los principios fundamentales.

- Método 2: obtener un modelo a partir de los datos experimentales.

DESARROLLO DE MODELOS

- Entrada – Salida:
  - Ecuación diferencial lineal:

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{du^m}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u(t)$$

  - Ecuación de diferencia:

$$a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_{0y} y(k) = b_m u(k+m) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

  - Respuesta a entrada cero se obtiene a partir de las *n* condiciones iniciales. Solución homogénea.
  - Respuesta en estado cero: depende únicamente de la entrada. Solución particular.

Aplicación de la transformada de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales lineales

- Función de transferencia: $G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
- Considere: $$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$
- Empleando Laplace, tomando **condiciones iniciales cero**, se tiene:

$$\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right)Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Nota: enfocado a SISO, SLIT, $G(s)$ es la respuesta impulso del sistema.

Comentarios adicionales

- Una función de transferencia es **estrictamente propia** si el orden del polinomio del denominador es mayor que el del numerador ($n > m$). Si $n = m$ entonces es **propia** y si $n < m$ se llama **impropia**.
- La **ecuación característica** de un sistema es ajustar el polinomio del denominador de la función de transferencia a cero.

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- La función de transferencia puede ser extendida a sistemas MIMO

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{R_j(s)}$$

MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADO

- El **estado** de un sistema en el tiempo t_0 es la mínima cantidad de información que junto con la entrada $u[t_0 , \infty)$ determinan la respuesta del sistema para todo $t \geq t_0$.
- El **estado** resume la información pasada requerida para determinar el comportamiento futuro del sistema.
- Se **definen variables de estado** en sistemas con almacenamiento de energía; no aplica para sistemas instantáneos.

MODELOS EN EL ESPACIO DE ESTADO

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}$$

- **X** vector de variables de estado del sistema (n x 1)
- **A** matriz del sistema (n x n)
- **B** matriz de entrada (n x p)
- **U** vector de variables de entrada (p x 1)
- **Y** vector de variables de salida (q x 1)
- **C** matriz de salida (q x n)
- **D** matriz “hacia adelante” (q x p)

SOLUCIÓN ECUACIÓN DE ESTADO

- Dada la ecuación dinámica de estado de un sistema LIT:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX} + \mathbf{DU}$$

- (solución en frecuencia) para el caso invariante la transformada de Laplace es:

$$\mathbb{L}\{\dot{\mathbf{X}}\} = \mathbb{L}\{\mathbf{A}\,\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{U}(t)\}$$

$$s\,\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\,\mathbf{U}(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}(0) + \mathbf{BU}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{Respuesta debida al estado inicial}} + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\;\mathbf{U}(s)}_{\text{Respuesta debida a la entrada externa}}$$

SOLUCIÓN ECUACIÓN DE ESTADO

- Solución en tiempo:

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}X) = \left(\frac{d}{dt}e^{-At}\right)X + e^{-At}\frac{dx}{dt}$$

$$= (e^{-At})(-A)X + e^{-At}\dot{X}$$

$$= e^{-At}(-AX + \dot{X})$$

$$= e^{-At}BU(t)$$

- Integrando ambos lados:

$$\int_0^t \frac{d}{dt'}(e^{-At'}X)dt' = e^{-At'}X(t')\,|_0^t = \int_0^t e^{-At'}BU(t')dt'$$

$$X(t) = e^{At}X(0) + e^{At}\int_0^t e^{-At'}BU(t')dt'$$

SOLUCIÓN ECUACIÓN DE ESTADO

- Solución en tiempo:

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

- Se define la matriz de transición de estados:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\Phi(s)\right\}$$

$$\mathbf{\Phi}(s) = \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}$$

SOLUCIÓN ECUACIÓN DE ESTADO

- Comparando las soluciones en el tiempo y la frecuencia:

$$X(t) = \underbrace{\Phi(t)X(0)}_{\substack{\text{Respuesta no forzada} \\ \text{(Homogenea o natural o a entrada cero)}}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau}_{\text{Respuesta forzada o en estado cero}}$$

- $\Phi(t)$ relaciona el estado en cualquier tiempo *t* con el estado en el instante inicial.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

- la respuesta para estado cero, X(0) = 0, es

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{\cancel{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}}_{\text{Respuesta debida al estado inicial}} + \underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\;\mathbf{U}(s)}_{\text{Respuesta debida a la entrada externa}}$$

- Entonces:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}\;(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\,\mathbf{U}(s)$$

- La inversa de (sI – A) determina los polos y la respuesta.
- SISO: función escalar, racional
- MIMO: arreglo matricial pxq, elementos racionales

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

- Sólo existe una representación entrada – salida: la respuesta impulso y la función de transferencia son únicas.

- La función de transferencia que se obtiene es racional.

- Si D = 0, la función de transferencia es estrictamente propia.

Principios físicos

- Ley de Ampere: un conductor que porta corriente produce un campo magnético a su alrededor.
- Ley de Faraday: un campo magnético variable en el tiempo induce un voltaje en un conductor que pasa a través de él.
- Ley de Lorentz: un conductor que porta corriente en presencia de un campo magnético experimentará una fuerza sobre él.
- Un conductor eléctrico que se mueve dentro de un campo magnético tendrá un voltaje inducido sobre él: este es el principio generador.

Sistemas Electromecánicos

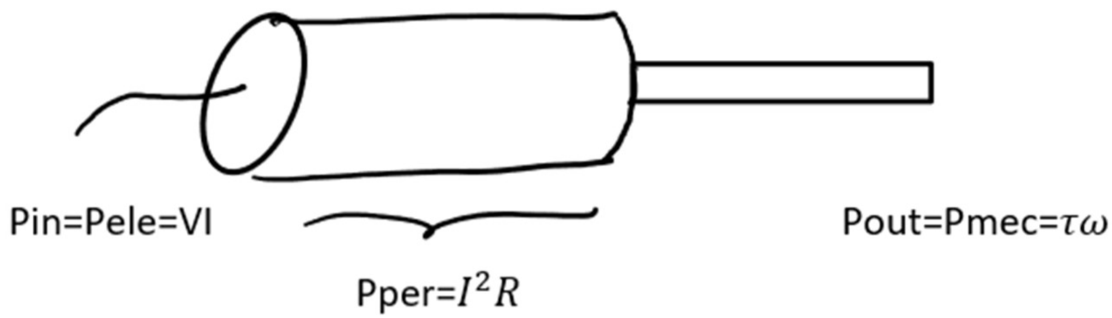
- Elementos de medición o transducción: micrófonos, parlantes, celdas de carga, etc.
- Elementos de control y producción de fuerza como solenoides, electroimanes y relevadores.
- Equipos convertidores de energía como motores y generadores.

Acople por campo magnético

$$\begin{bmatrix} Energía \\ Eléctrica \\ de\ Entrada \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Energía \\ Mecánica \\ de\ Salida \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Aumento \\ en\ la\ Energía \\ Almacenada \\ en\ el\ campo \\ Magnético \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Energía \\ Convertida \\ en\ Calor \end{bmatrix}$$

- La energía convertida en calor se debe a la corriente que circula por los arrollamientos de resistencia no nula y por la fricción de los elementos mecánicos.

Acople por campo magnético

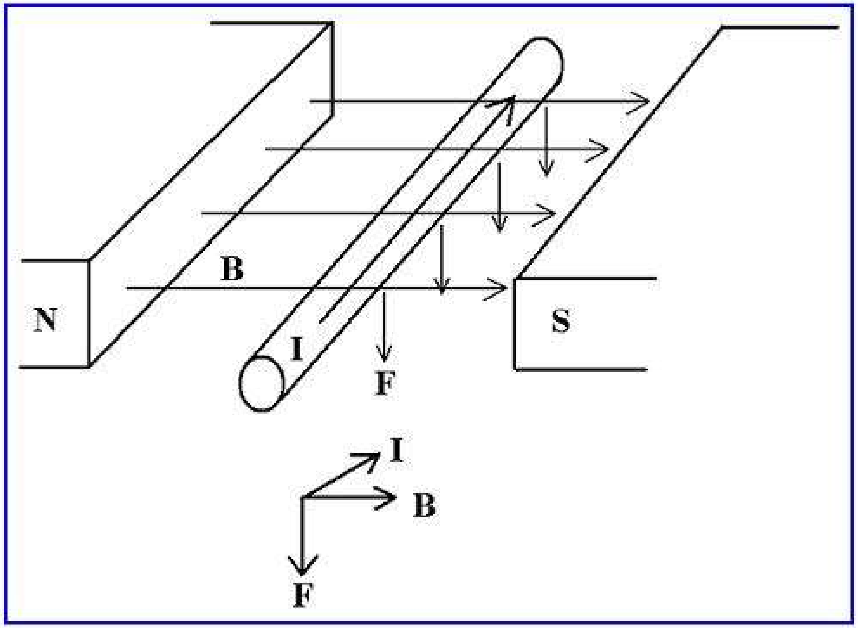


$$\eta = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = \frac{P_{OUT}}{P_{OUT} + P_{PERDIDA}}$$

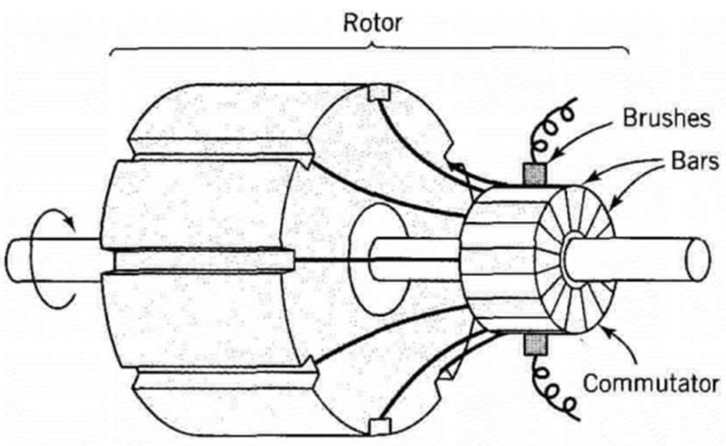
Motor DC

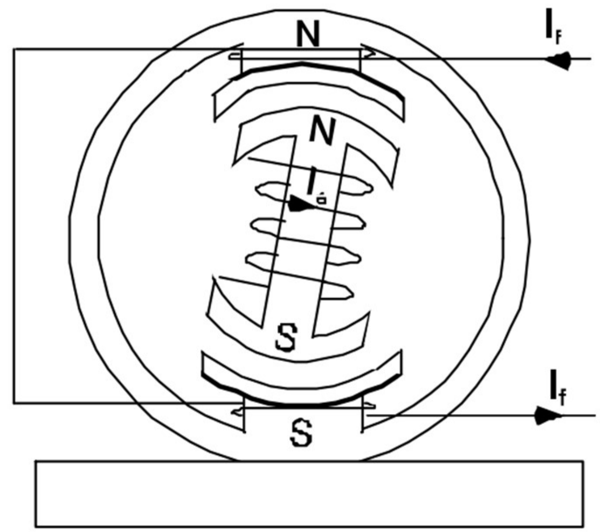
- Un conductor que porta una corriente de intensidad ***I*** en presencia de un campo magnético de intensidad ***B*** experimenta una fuerza ***F*** dada por la ley de Lorentz:

$$f = \underbrace{I\,L}_{\substack{\text{debida a la}\\ \text{corriente de}\\ \text{Armadura}}} \times \underbrace{B}_{\substack{\text{debida al}\\ \text{campo}}}$$



Motor DC





https://www.rose-hulman.edu/class/ee/HTML/NSF/CCLI_EMD_DUE_0088904/PDFS/lecture_notes_25.pdf

Motor DC

- Un rotor de radio *r*, con *n* conductores cada uno de longitud *l*, colocados bajo un flujo uniforme B_f y dispuestos en cuatro bobinas, la corriente de armadura/rotor se divide en dos circuitos paralelos, el torque es:

$$T_{em} = (nlr)B_f \frac{i_a}{2}$$

- Para un motor de imán permanente

$$T_{em} = \frac{(nlrB_f)}{2} i_a \qquad T_{em} = K_t i_a \qquad K_t = \frac{(nlrB_f)}{2}$$

Motor DC

- El torque producido es función lineal de la corriente i_a
- El estator experimenta un torque igual pero de sentido contrario y por ello el motor se debe fijar a un soporte estático.
- La constante K_t se denomina la “constante de momento del motor” y es dada en las hojas de especificación del fabricante.
- En el sistema SI tiene unidades de [Nm/A] y en el sistema US [oz·in/A].

Motor DC

- Para una velocidad ω_m (rad/s) el voltaje inducido total (*Back EMF*) se puede calcular multiplicando la *fem* inducida por conductor por *n/2*, número de conductores en serie en cada circuito paralelo:

$$e_m = \frac{(nlrB_f)}{2}\omega_m \qquad\qquad e_m = K_e\omega_m$$

- El voltaje es proporcional a la velocidad y cambia de signo cuando cambia el sentido de giro.

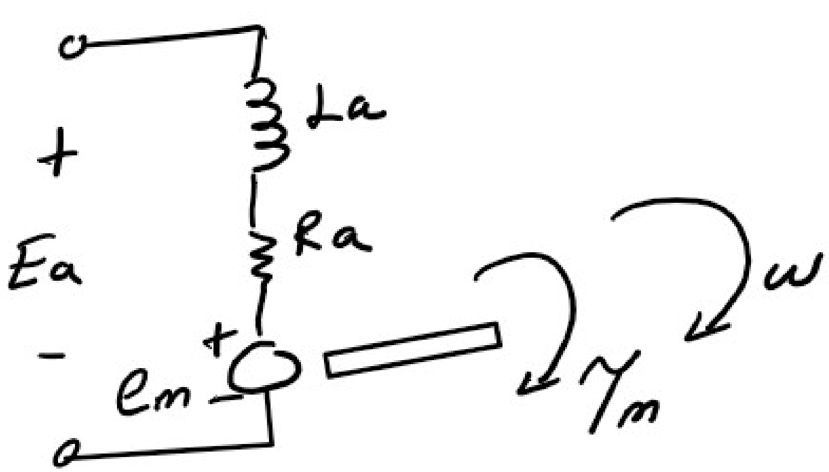
Motor DC

- *Ke* es la “Constante de voltaje del motor” [V/rad/s].

- En el sistema SI las constantes de torque K_t y de voltaje K_e son iguales:

$$K_T = K_E = \frac{(nlrB_f)}{2}$$

Motor DC



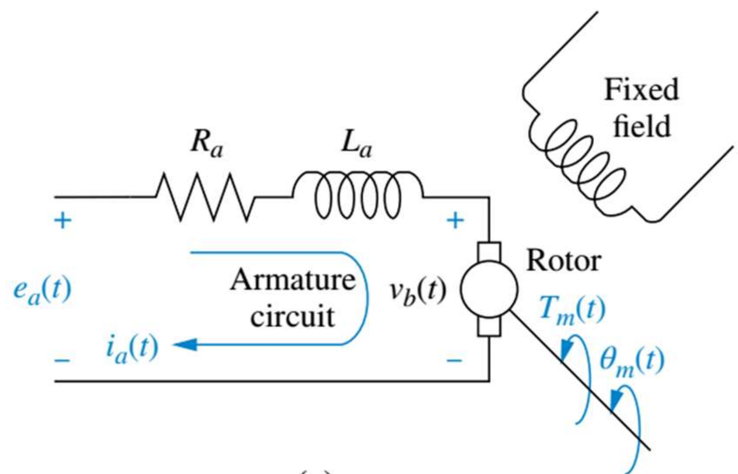
- KVL para el circuito de armadura

$$e_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_m$$

- Desde el punto de vista de la dinámica rotacional

$$J\dot{\omega}_m = T_m + T_L$$
$$J\dot{\omega}_m = K_t i_a + T_L$$
$$\dot{\theta} = \omega_m$$

Modelo completo Motor DC



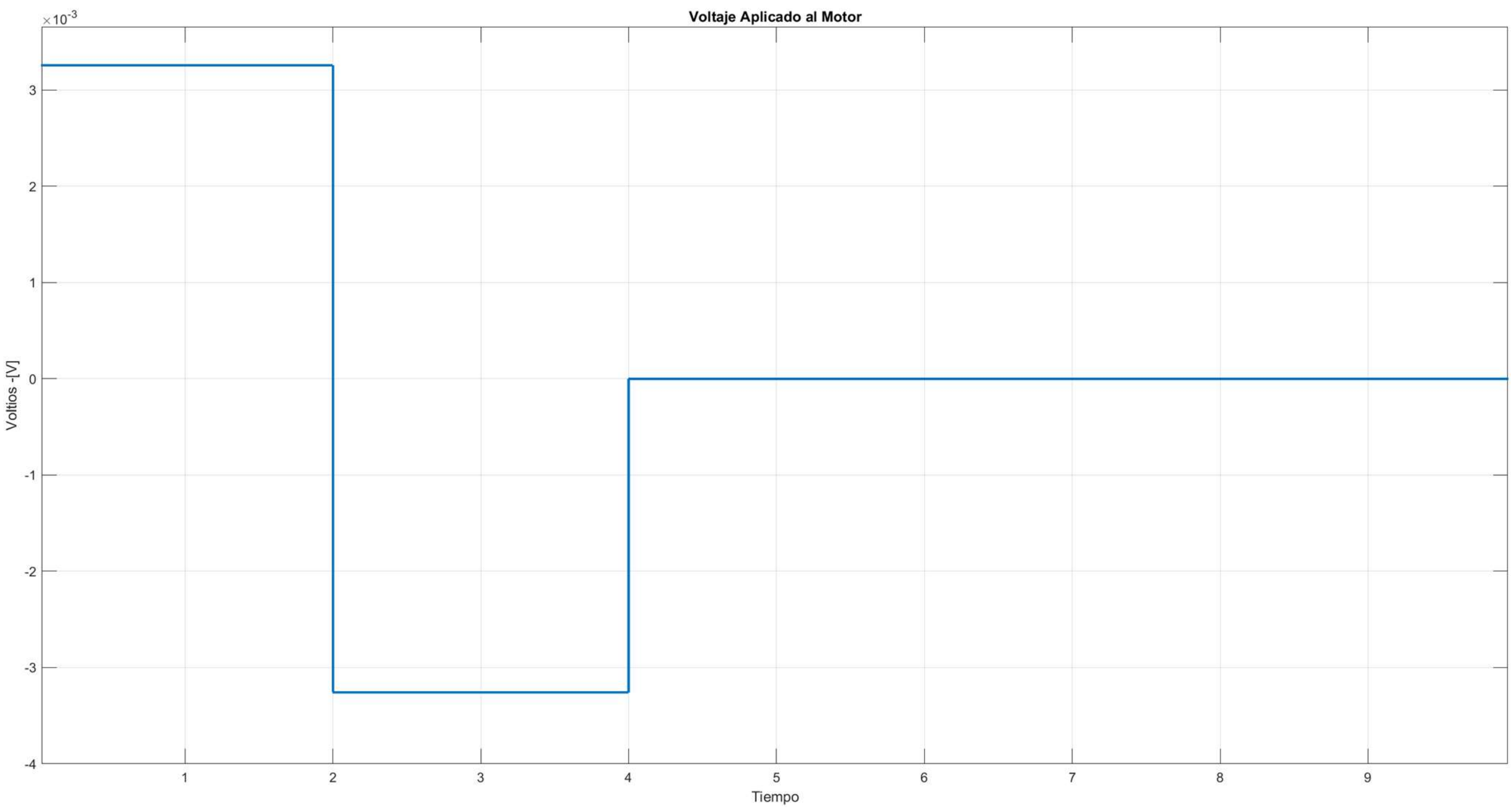
Construyamos el Diagrama de Bloques del Sistema de Ecuaciones que modelan un motor DC desde la tensión Hasta el Angulo

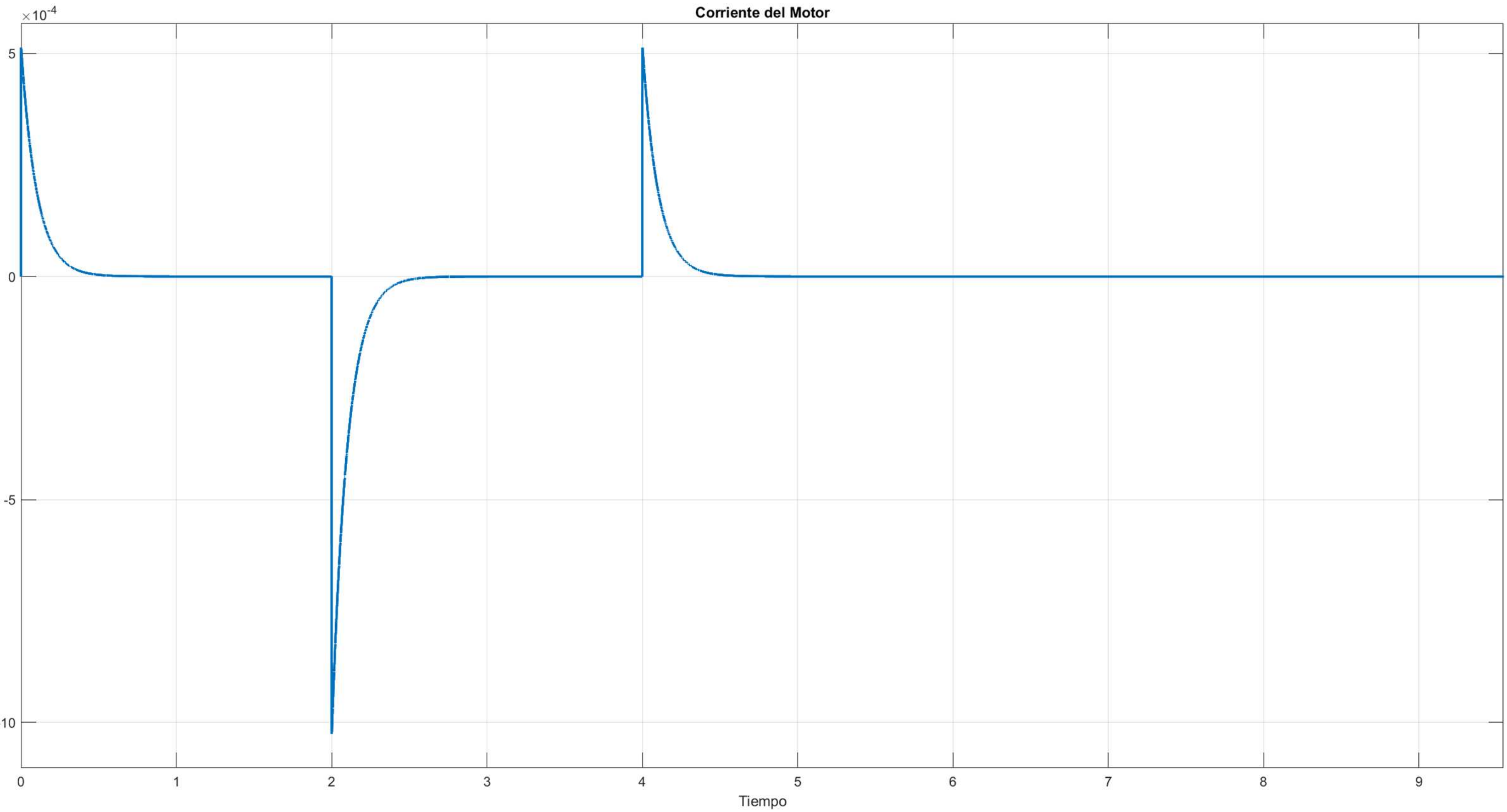
Let's Do This!

Vamos a Simplificar Usando Algebra de Bloques

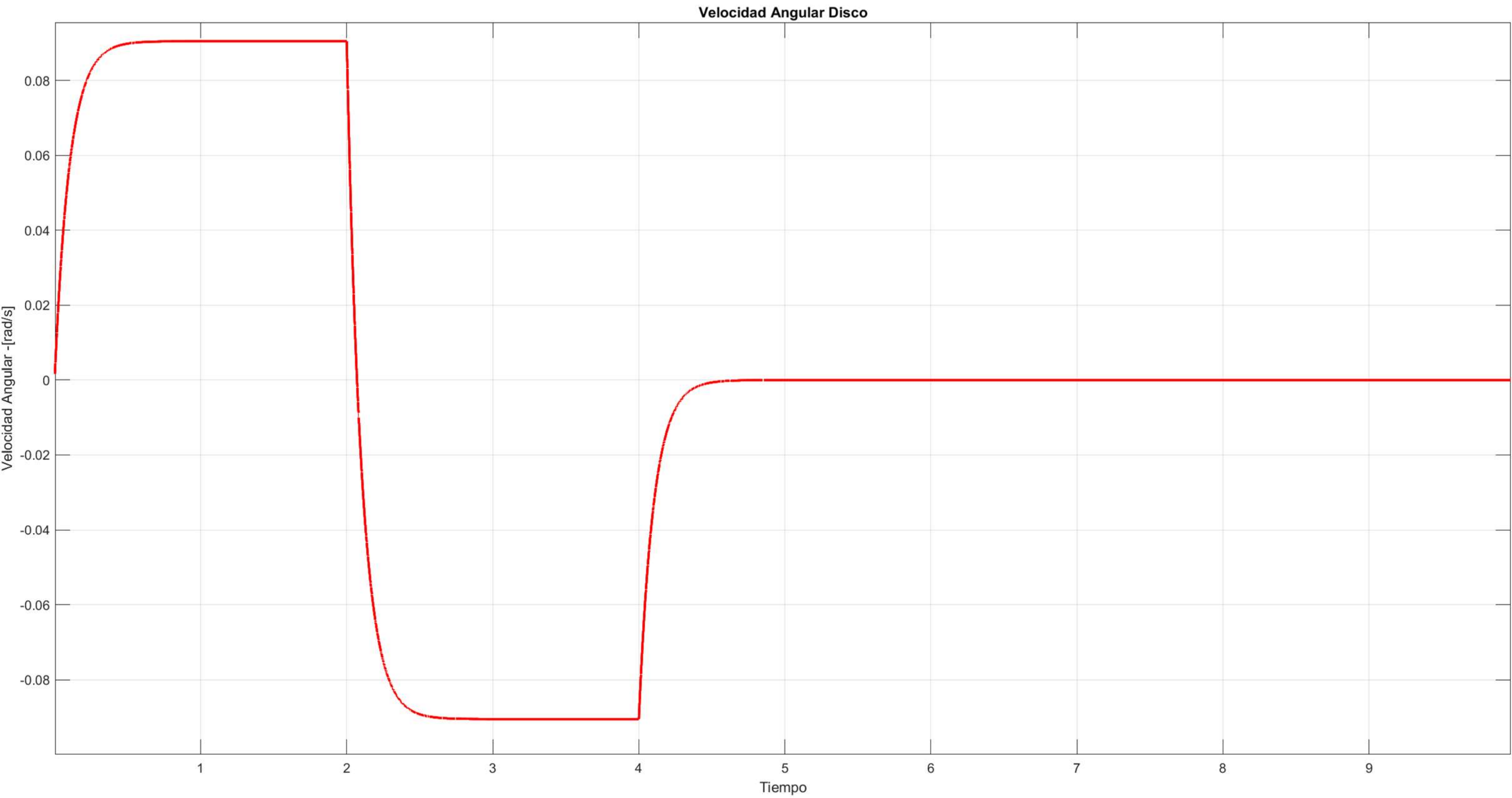
MATLAB®

&SIMULINK®

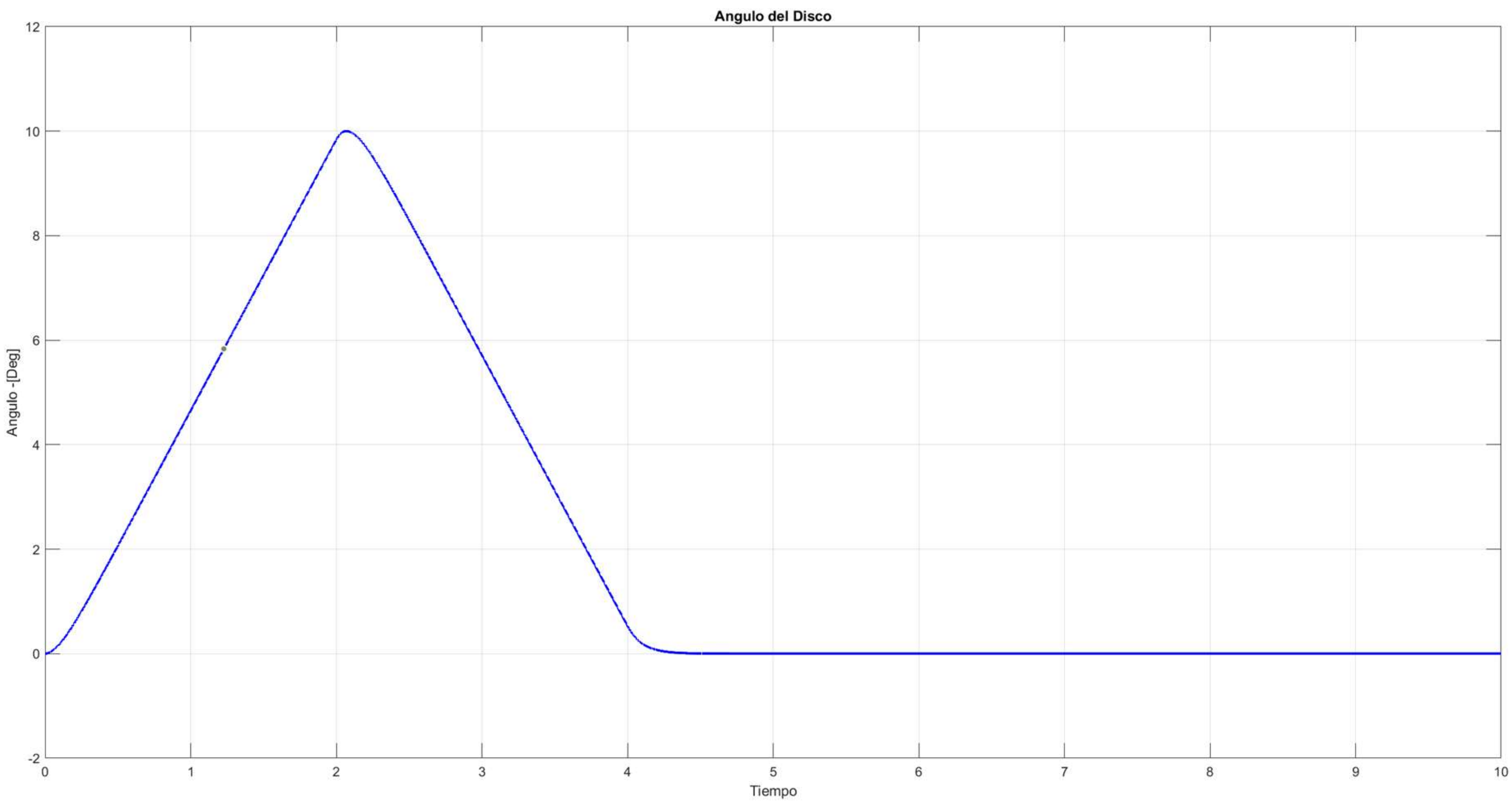

Voltaje Aplicado al Motor
×10^-3
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
Voltios -[V]
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Tiempo



Corriente del Motor
×10^-4
5
0
-5
-10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Tiempo



Velocidad Angular Disco
Velocidad Angular -[rad/s]
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Tiempo



Angulo del Disco
Angulo -[Deg]
Tiempo
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Criterios de Selección de un Motor DC

- El torque T_m desarrollado por el motor se divide en dos componentes básicas:
  - T_l : Momento de la carga externa
  - T_o : Perdidas internas del motor

$$T_m = (T_L + T_o) \\ = \mathrm{K_T} i_A$$

$$i_A = \left(\frac{1}{K_T}\right) T_L + \left(\frac{1}{K_T}\right) T_o$$

Criterios de Selección de un Motor DC

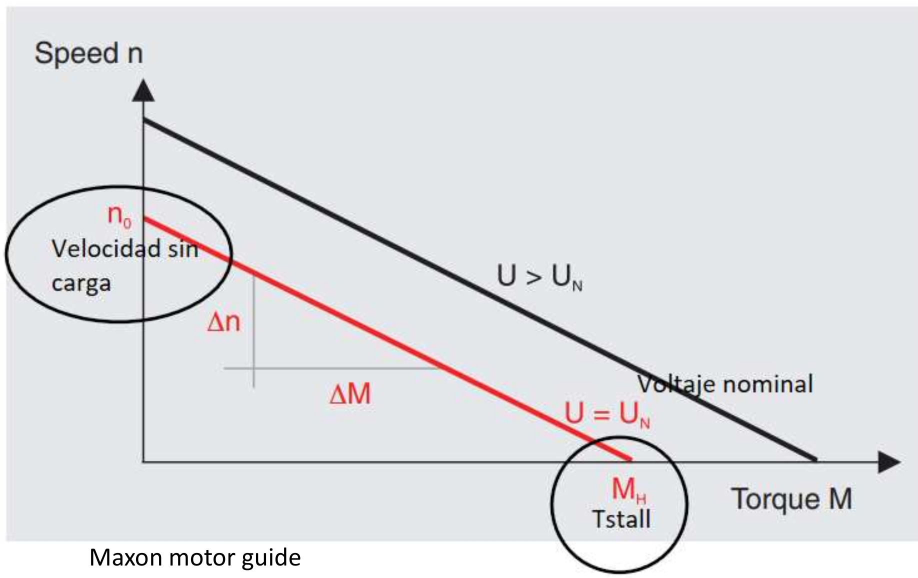
- La forma más común de representar las características de un motor es por medio de la **familia de curvas de velocidad, corriente, potencia y eficiencia vs torque**.

$$\omega_m = \frac{E_a - I_a R_a}{K_E} = \frac{E_a}{K_E} - \left(\frac{R_a}{K_E K_T}\right) T_L - \left(\frac{R_a}{K_E K_T}\right) T_O$$

$$\omega_m = -\left(\frac{R_a}{K_E K_T}\right) T_L + \left(\frac{E_a}{K_E}\right) - \left(\frac{R_a}{K_E K_T}\right) T_O$$

- Las gráficas se construyen definiendo los 2 puntos extremos: Condición de no carga (*No Load - NL*) y condición atorado (*Stall*) y trazando una línea recta.

Criterios de Selección de un Motor DC



Maxon motor guide

- El corte sobre el eje Y corresponde a la velocidad sin carga externa $T_L = 0$:

$$\omega_{NL} = \frac{E_a}{K_E} - \left(\frac{R_a}{K_E K_T} \right) T_o$$

Criterios de Selección de un Motor DC

- La velocidad del motor decrece cuando aumenta el torque de carga y aumenta con el voltaje aplicado.
- La pendiente de la curva velocidad-torque.

$$m = -\frac{R_a}{K_E K_T} = \frac{\Delta\omega_m}{\Delta T_L} \qquad \frac{rpm}{mNm}\, o\, \frac{rps}{Nm}$$

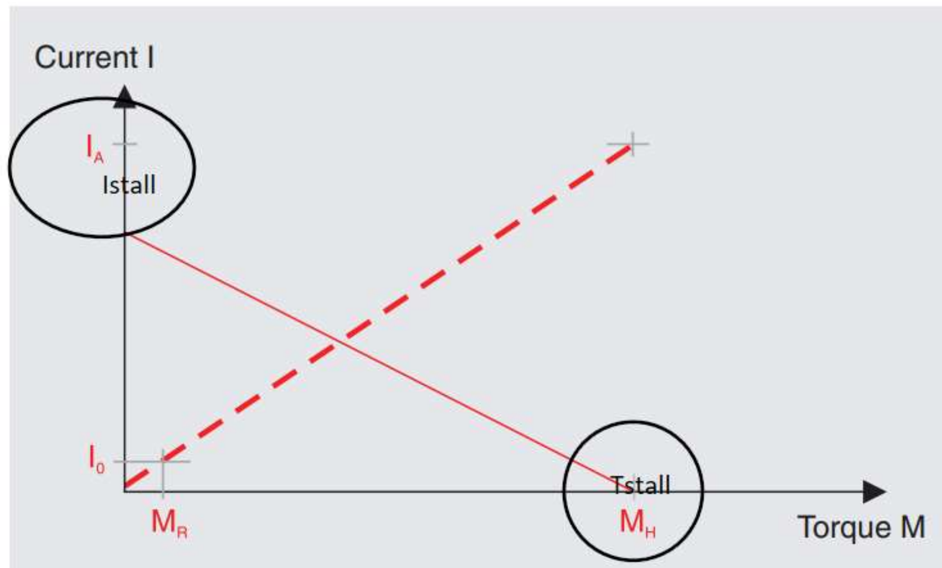
- Indica la capacidad de potencia del motor: a menor pendiente menos sensible es la velocidad del motor a las variaciones de carga.

Criterios de Selección de un Motor DC

- La curva de Corriente - Torque es independiente del voltaje aplicado y se traza entre la corriente sin carga I_0 y la corriente con el motor atorado (I_{Stall})

$$I_0 = \frac{T_0}{K_T}$$

$$I_{stall}\Big|_{W_M=0} = \frac{Ea}{Ra} = \frac{T_{stall}}{K_T}$$

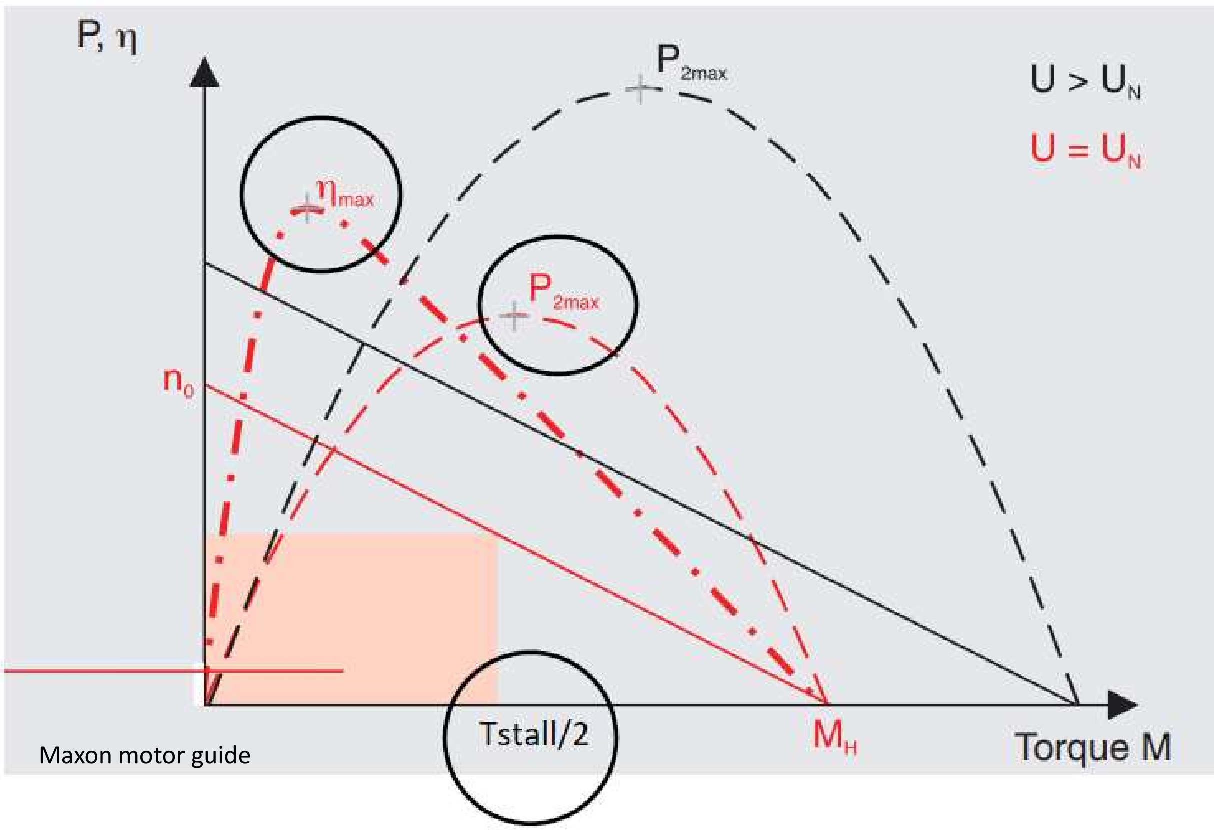


Maxon motor guide

Criterios de Selección de un Motor DC

- Los motores DC desarrollan el más alto momento cuando arrancan y consumen la mayor corriente.
- La curva de potencia mecánica vs torque se construye de las graficas de velocidad-torque: la potencia es igual al área del rectángulo bajo la línea ω -T.
- Para un voltaje nominal dado esta área es máxima para una velocidad igual a ($\omega_{NL}/2$) y un momento igual a ($T_{stall}/2$).
- La curva es una parábola cuyo máximo valor depende del cuadrado del voltaje aplicado.

Criterios de Selección de un Motor DC



Criterios de Selección de un Motor DC

- El balance de la conversión electromecánica es:

$$P_{el} = P_{mec} + P_{calor}$$

$$V_A I_A = \omega_m T_m + R_A I_A{}^2$$

- Para torque en mN-m y velocidad angular en rpm la potencia mecánica es:

$$P_{mec} = \left(\frac{\pi}{30000} \right) w_m T_m$$

Criterios de Selección de un Motor DC

- La eficiencia del motor

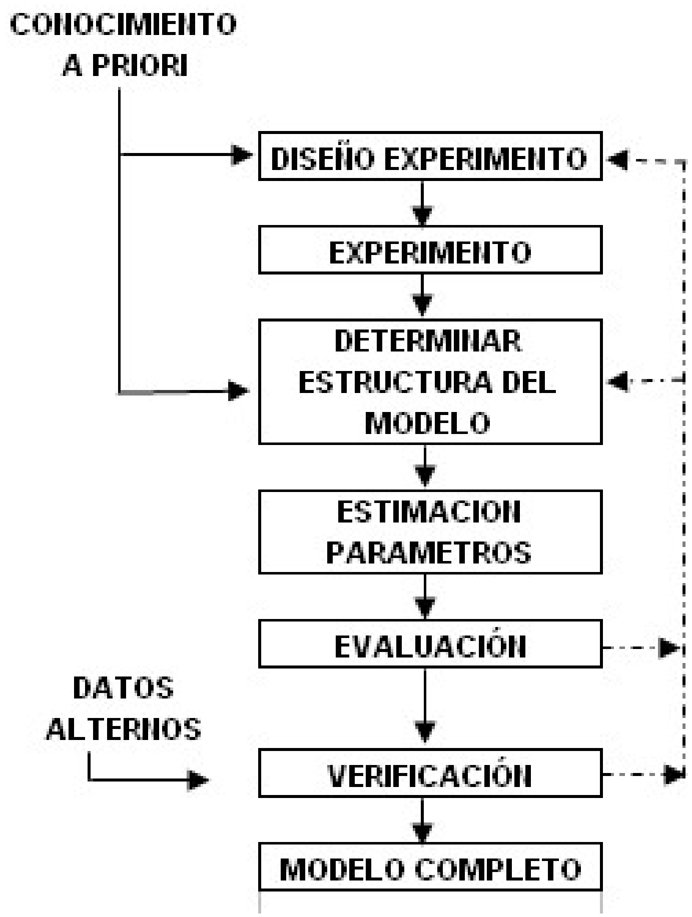
$$\eta = \frac{P_{mec}}{P_{EL}} = \frac{\omega_M T_M}{E_A I_A}$$

$$\eta = \frac{\pi}{30000}\frac{W_M T_M}{E_A I_A}$$

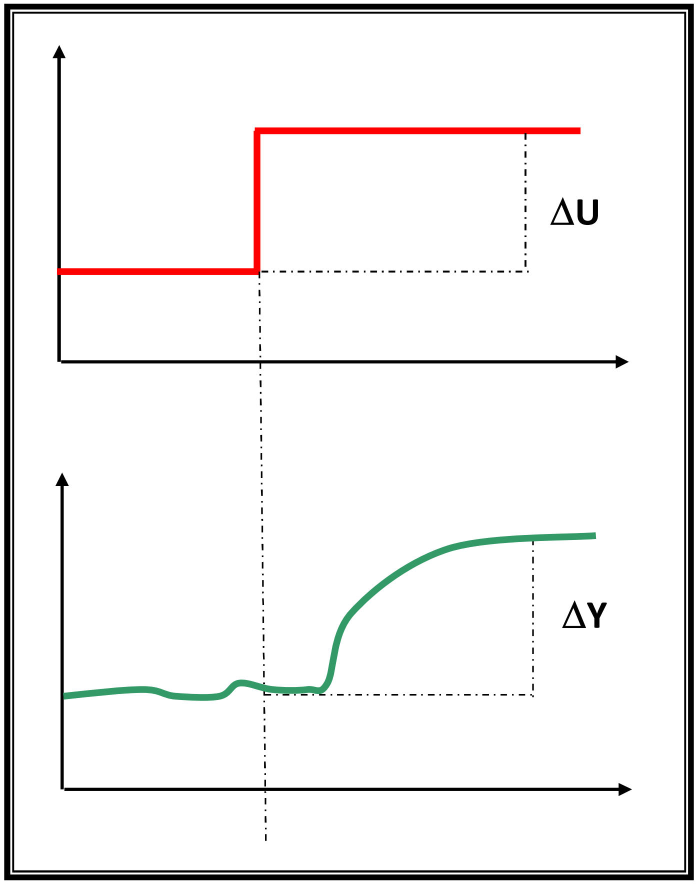
$$W_M \ \ en \ \ rpm \ \mathrm{y} T_M \ \ en \ mN - m$$

- Para un voltaje nominal aplicado, aumenta cuando ω_m aumenta (T_m disminuye)
- La eficiencia máxima ocurre aproximadamente en $T_{stall}/7$ y no coincide con el momento para potencia máxima ($T_{stall}/2$); por lo tanto se debe escoger entre operación a potencia mecánica máxima o eficiencia máxima.

IDENTIFICACIÓN



PROCESOS AUTOREGULADOS



- La gran mayoría de los procesos industriales tiene una respuesta en forma de *S alargada* ante un cambio instantáneo en la variable manipulada.

MODELO FOPDT

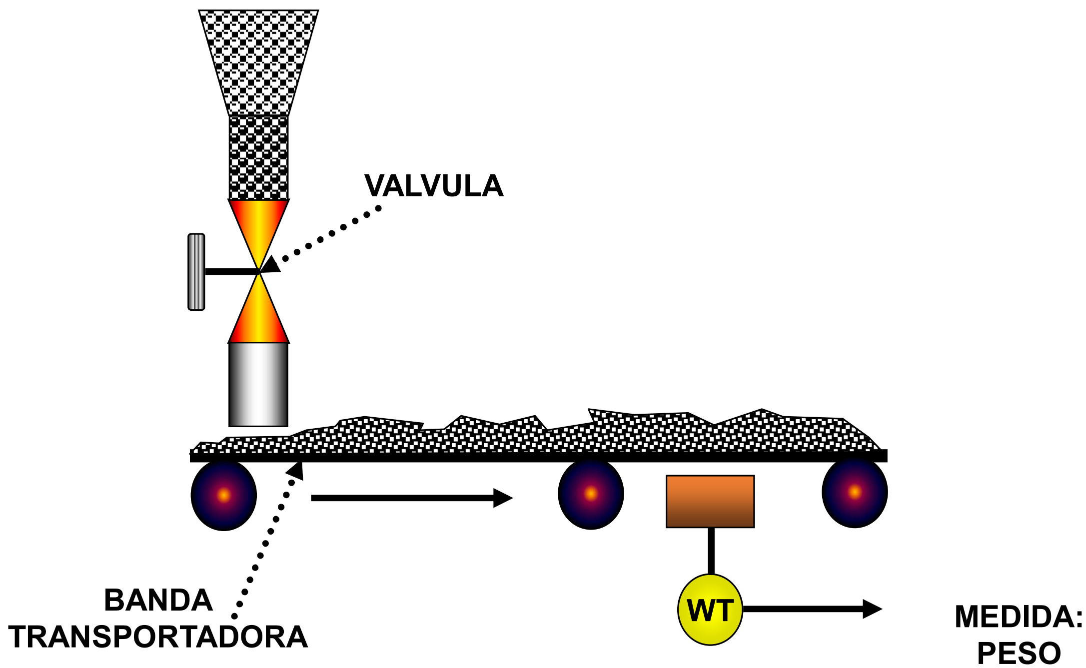
Primer orden más tiempo muerto.

$$G(s) = \frac{\Delta \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\Delta \boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})} = \frac{Ke^{-L}}{\tau s + 1}$$

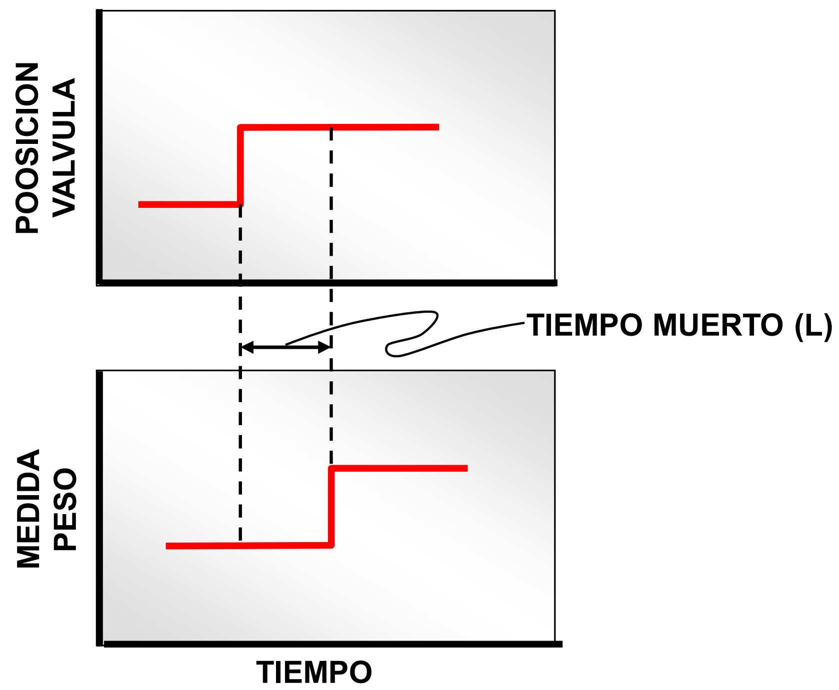
MODELO DE PRIMER ORDEN CON TIEMPO MUERTO

- ✓ Ganancia del proceso (Kp). Es una medida de la sensibilidad del proceso: $\Delta Y / \Delta U$
- ✓ Tiempo muerto (L). tiempo en que tarda la variable medida en cambiar frente a un cambio en la variable manipulada
- ✓ Constante de tiempo (τ). Rapidez de respuesta del proceso: Tiempo en que tarda en el alcanzarse el 63.2% del total del cambio

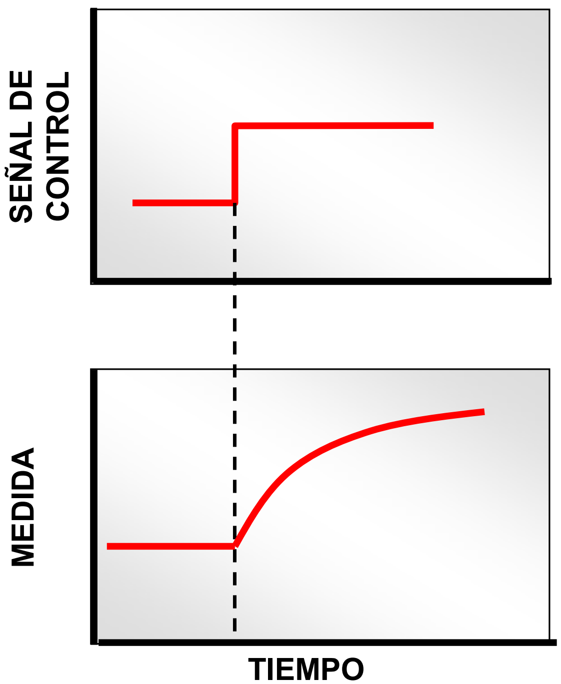
PROCESO: TIEMPO MUERTO



PROCESO: TIEMPO MUERTO

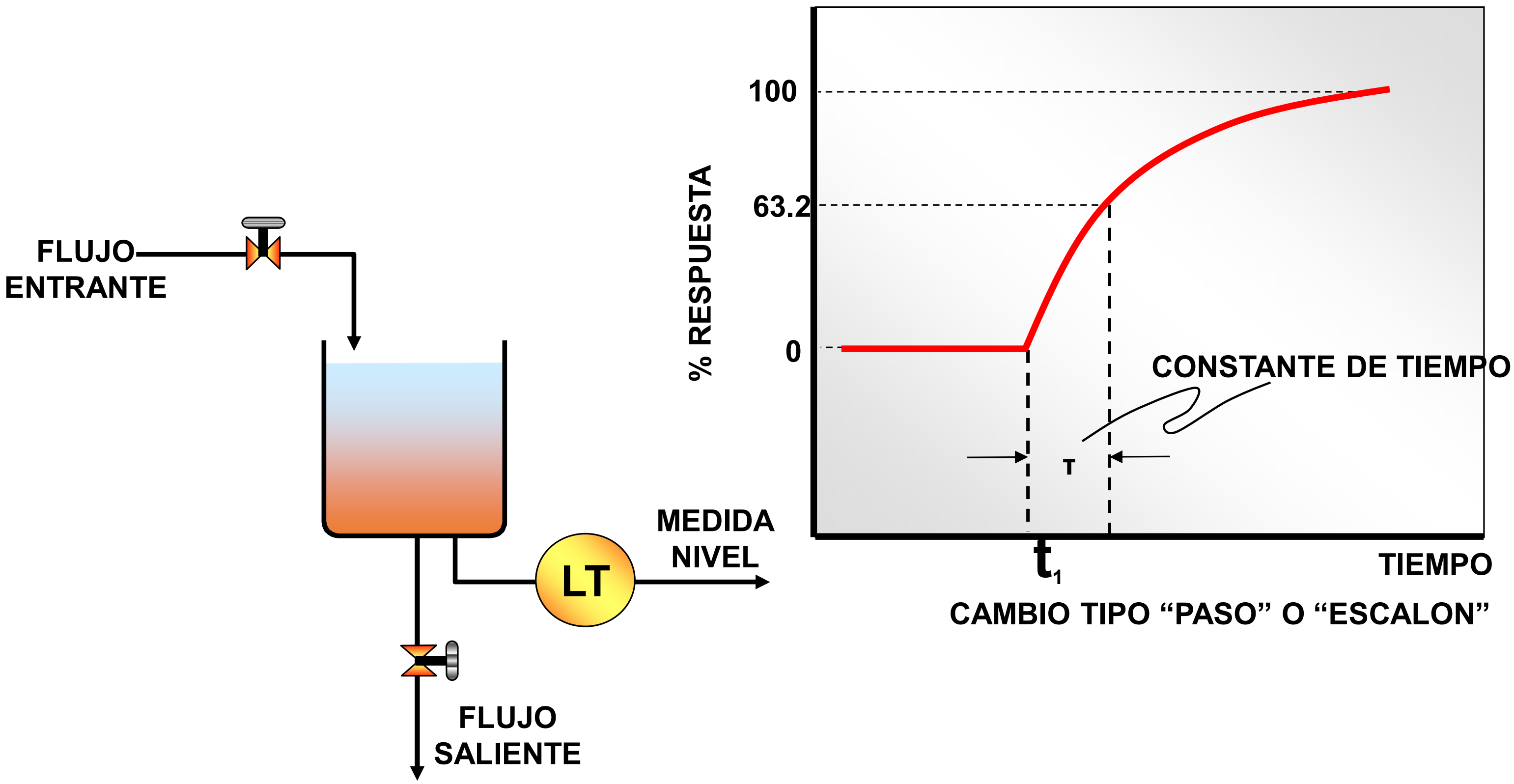


PROCESO: CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO (VELOCIDAD RESPUESTA)

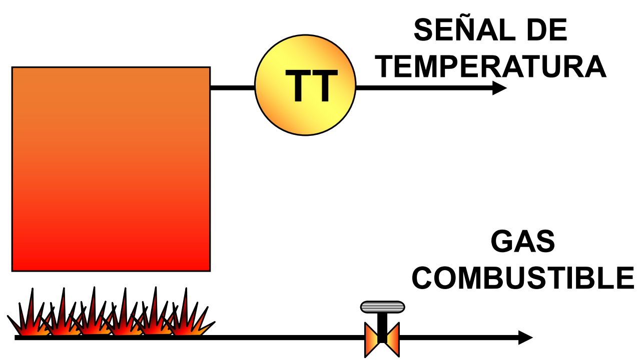


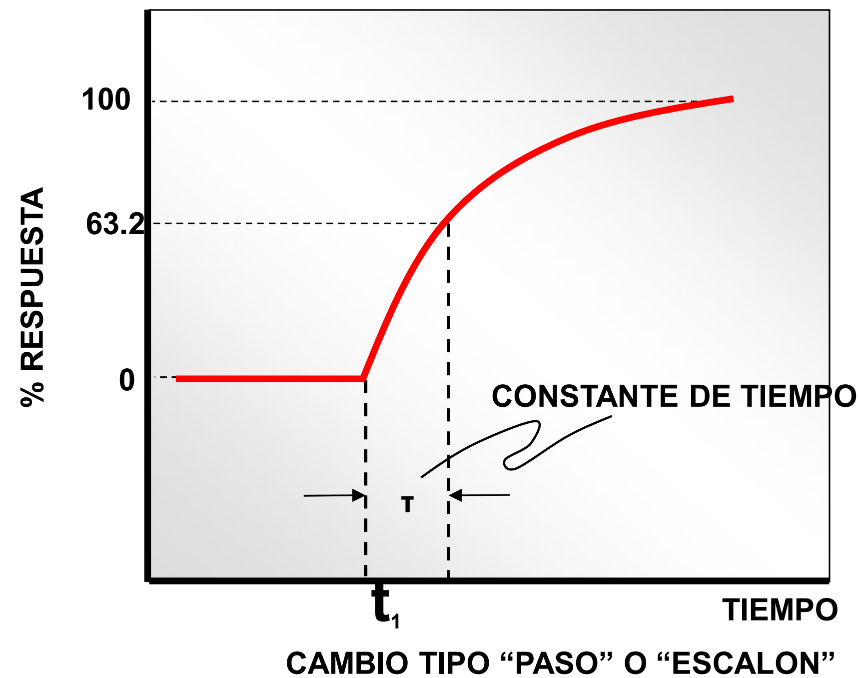
CAMBIO TIPO “PASO” O “ESCALON”

PROCESO: CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO (VELOCIDAD RESPUESTA)



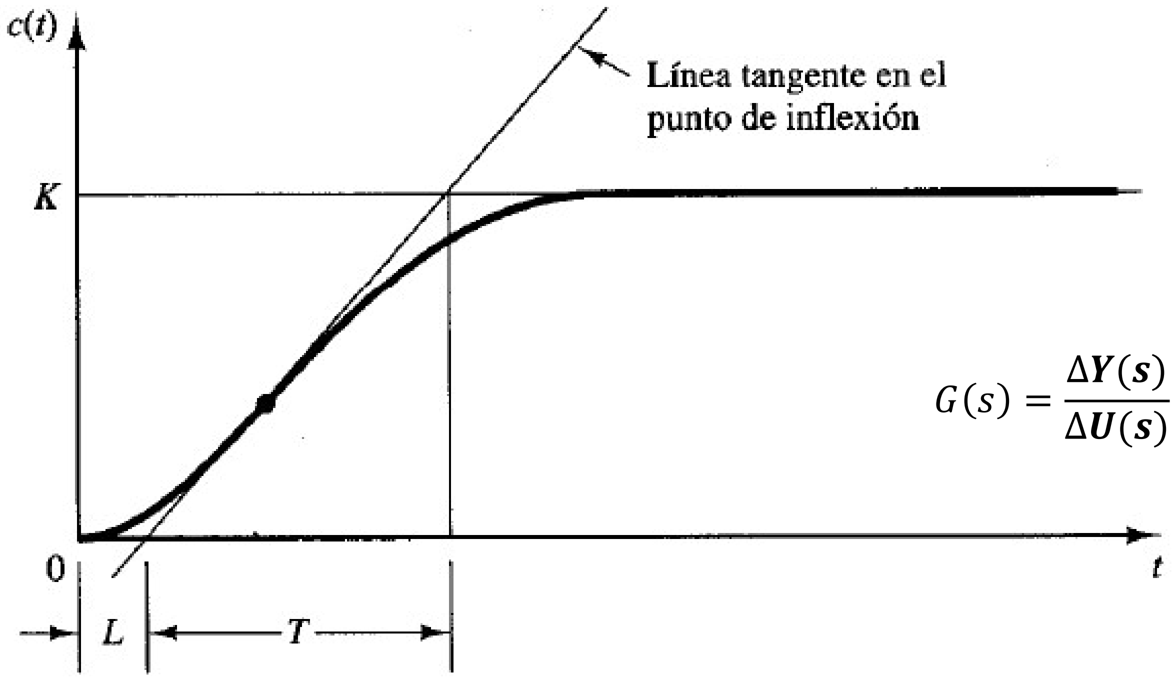
PROCESO: CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO (VELOCIDAD RESPUESTA)





MODELOS DE PROCESOS

Una primera aproximación al modelo es:

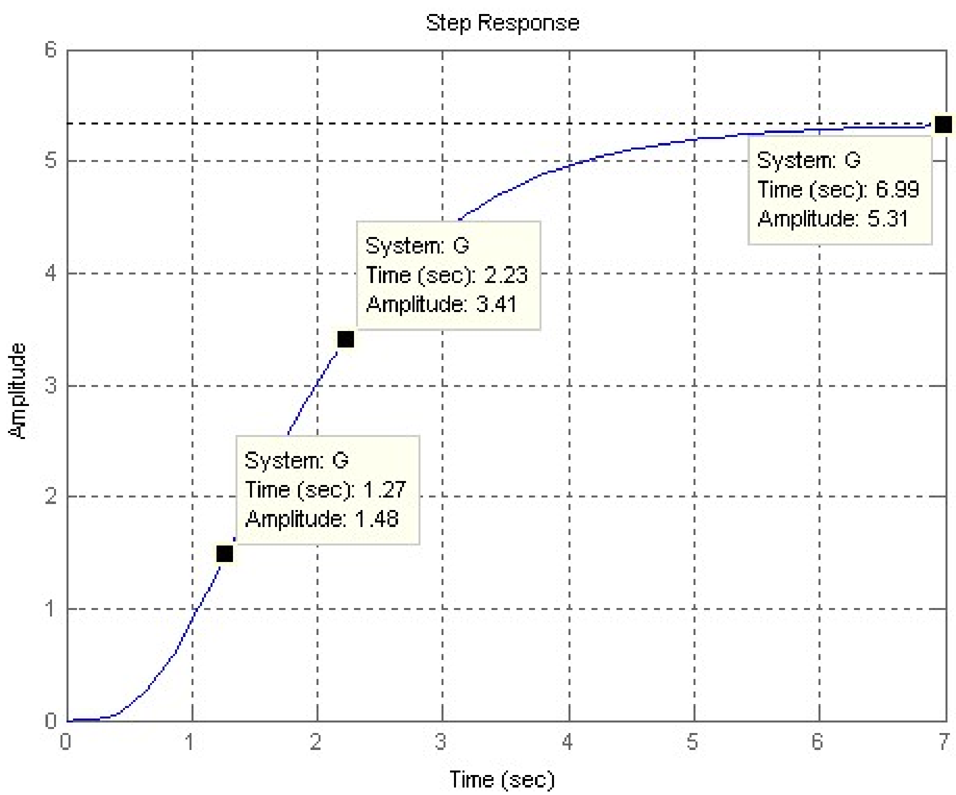


$$G(s) = \frac{\Delta \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s})}{\Delta \boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})} \approx \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

MODELOS DE PROCESOS

Otra posibilidad Para eliminar la Recta Tangente es:

Ajustar el Modelo a dos valores en tiempos que dependen de L y τ



$$\Delta \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{s}) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s+1}\frac{\Delta u}{s} = K\Delta u e^{-Ls}\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s+1}\right)$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace

$$\Delta y(t) = K\Delta u u(t-L)(1-e^{-\frac{t-L}{\tau}})$$

$$t_2 = L + \tau \ y \ t_1 = L + \frac{\tau}{3}$$

$$\Delta y(t_2) = K\Delta u\ (1-e^{-1}) \text{ y } \Delta y(t_1) = K\Delta u(1-e^{-1/3})$$

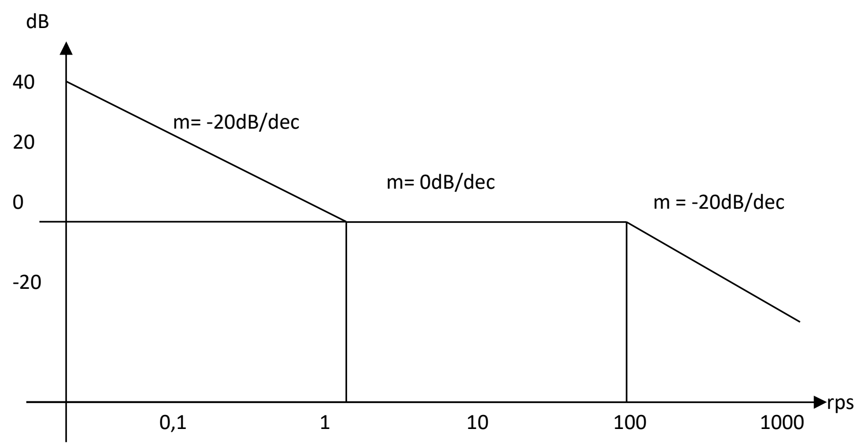
$$\Delta y(t_1) = 0.283\Delta y \text{ y } \Delta y(t_2) = 0.632\Delta y$$

Este método es menos sensible al ruido.

METODO DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

- La función de transferencia G(s) de un sistema estable, polos del sistema con parte real negativa, o función con polo sencillo en s = 0, se puede obtener experimentalmente.
- Primera aproximación: los polos y ceros de la función de transferencia ocurren en las intersecciones de las asíntotas.
- El diagrama de fase se emplea para corroborar la función de transferencia identificada a partir de las gráficas de magnitud.
- Se hacen iteraciones para refinar los parámetros.

Ejemplo



Asíntota de baja frecuencia: -20dB/dec: polo en s=0
Asíntota de alta frecuencia: -20dB/dec : polo en s=100
Asíntota de media frecuencia: -20dB/dec : cero en s=1

Ejemplo

- Función de transferencia.

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+100)}$$

- La ganancia en

$$\omega = 0.1$$

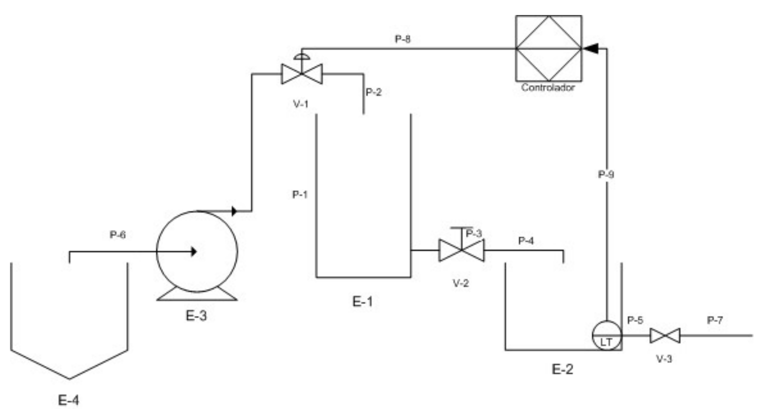
$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\left|\frac{K(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+100)}\right|\right)_{\omega=0.1} = 20dB$$

20log K +20-40=20 log K=2, K=100;

$$G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+100)}$$

Ejercicio

La figura muestra un sistema de control de nivel para un proceso de dos tanques acoplados. La válvula se puede modelar como un sistema de primer orden y el proceso tiene una respuesta de segundo orden, más un tiempo muerto debido a la tubería que conecta los tanques. Para el sistema obtenga un modelo de primer orden más tiempo muerto.



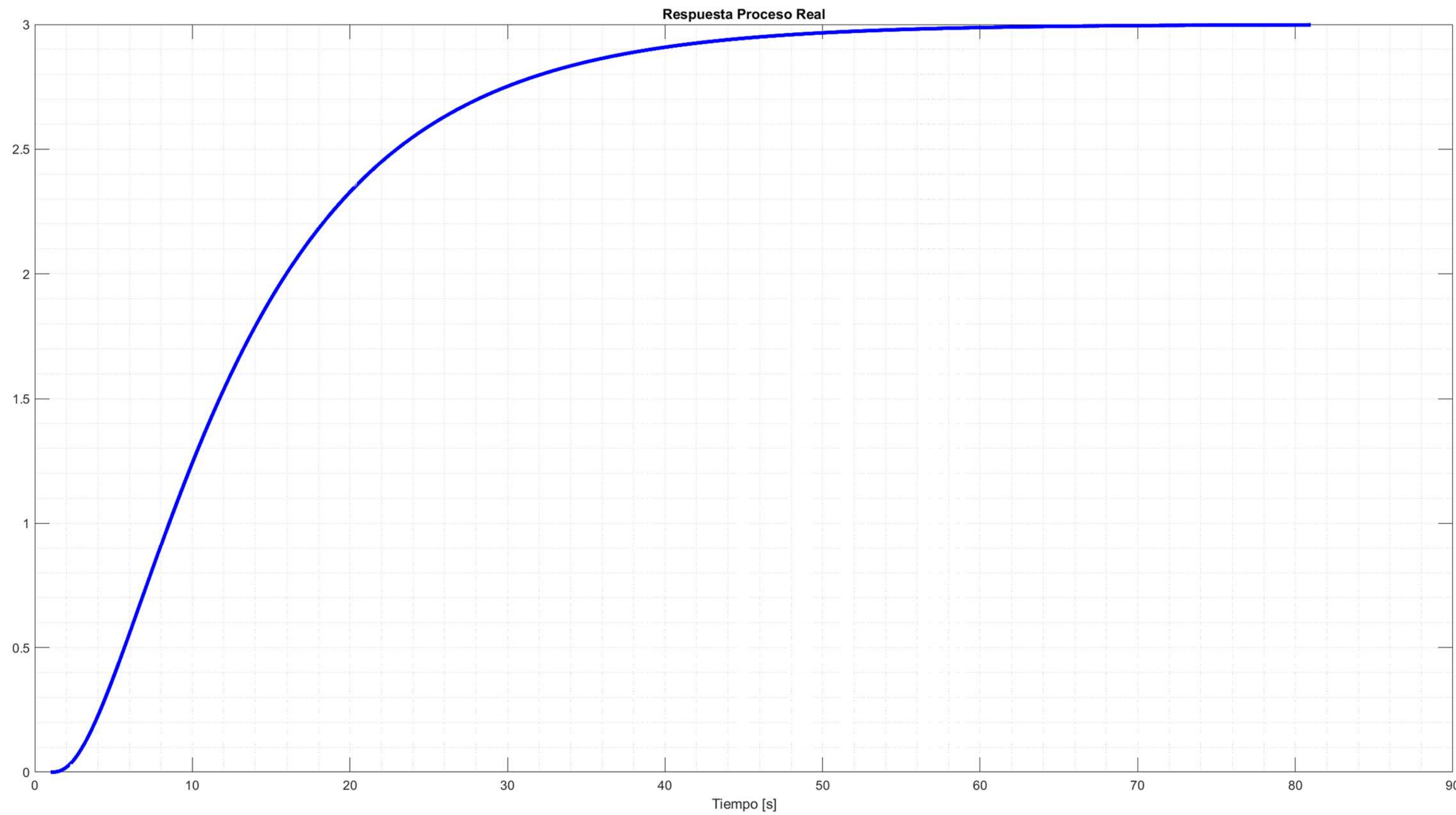
$$G_{válvula}(s) = \frac{0.5}{0.5s+1}$$

$$G_{proceso}(s) = \frac{6e^{-s}}{(3s+1)(10s+1)}$$

$$G_{sensor}(s) = 1$$

MATLAB®

&SIMULINK®


Respuesta Proceso Real
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
Tiempo [s]