Estadística Inferencial
Diseño de Experimentos

Introducción

Un experimento comparativo simple se basa en la comparación de los resultados de una variable respuesta bajo dos (y solo dos) condiciones distintas. Estas dos condiciones se refieren entonces a un factor con dos niveles.

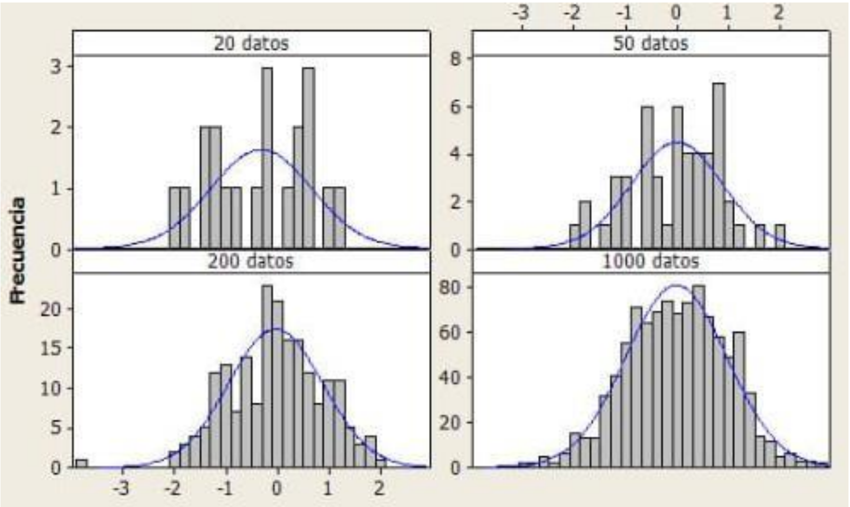
La forma más común de abordar estadísticamente estos experimentos es con una **prueba de hipótesis.**

Ejemplo experimento simple

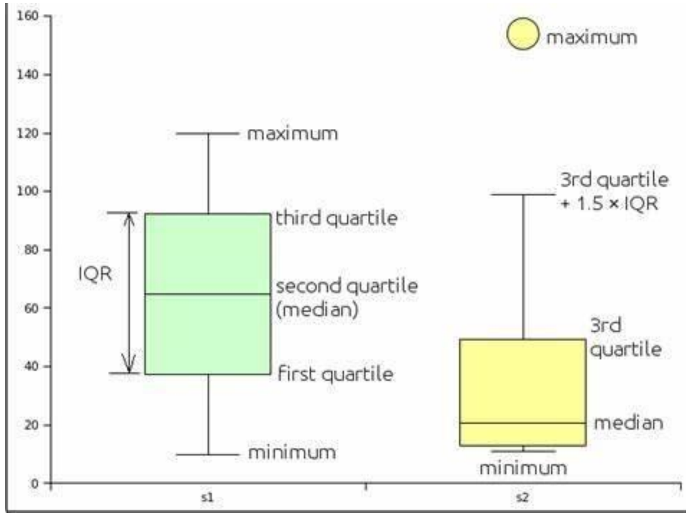
Variable respuesta: número de palabras recordadas en 1 minuto.

Factor: método de memoria (asociación imágenes o repetición silenciosa).

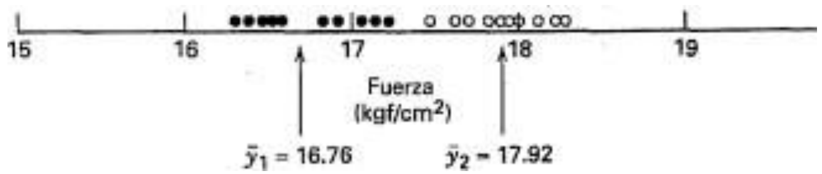
Gráficos



Histograma



Box-plot



Dispersión

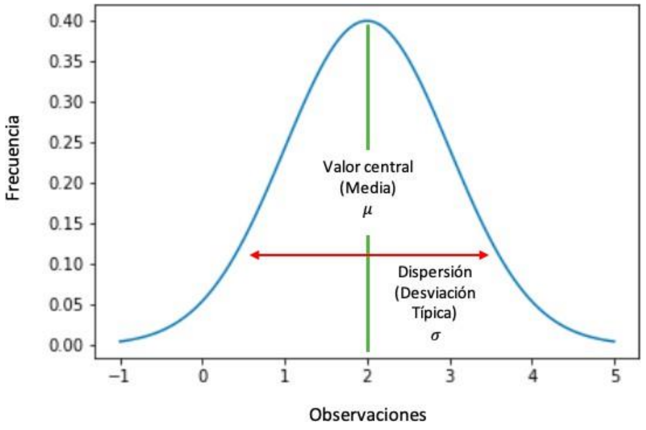
Distribución probabilidad

Una distribución de probabilidad es una función que define la probabilidad de ocurrencia de cada valor de una variable aleatoria. Es decir, una distribución de probabilidad es una función matemática que describe las probabilidades de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Distribución de probabilidad **discreta**: la distribución solo puede tomar un número contable de valores dentro de un intervalo. Normalmente, las distribuciones de probabilidad discretas solo pueden tomar valores enteros, es decir, que no tienen decimales.

Distribución de probabilidad **continua**: la distribución puede tomar un número infinito de valores dentro de un intervalo. En general, las distribuciones de probabilidad continuas pueden tomar valores decimales.

Distribución probabilidad normal



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$-\infty < x < +\infty$$

$$F(x)=P(X \le x)$$

La distribución normal adapta una variable aleatoria a una función que depende de la media y la desviación típica. Dada una variable aleatoria X, decimos que la frecuencia de sus observaciones puede aproximarse satisfactoriamente a una distribución normal tal que:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

Distribución normal estándar:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad Z \sim N(0,1)$$

Distribución probabilidad normal

La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70kg y la desviación estándar 3kg.

Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, encontrar la probabilidad de que un estudiante escogido al azar:

- Pese más de 80kg

- Pese menos de 68 kg

Distribución probabilidad normal

Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación estándar 36.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

Inferencia estadística

El objetivo de la inferencia estadística es sacar conclusiones acerca de una población utilizando una muestra de esta. En la inferencia estadística se utilizan cantidades calculadas a partir de las observaciones de la muestra. Un estadístico se define como cualquier función de las observaciones de una muestra que no contiene parámetros desconocidos. Por ejemplo, suponga que y1, y2,…, yn representa una muestra.

Entonces la media muestral es:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Y la varianza muestral es:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}$$

Grados de libertad: número de elementos independientes.

Distribución muestreo

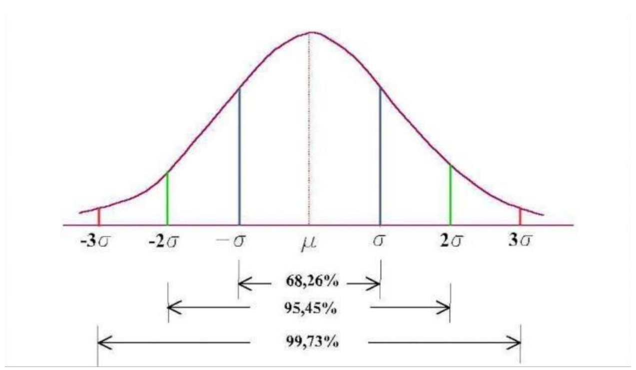
En cada una de las distintas muestras que pueden ser extraídas de una población se pueden calcular estadísticos como la media aritmética o la proporción de elementos que presentan cierta característica. Cuando los elementos son escogidos de manera aleatoria, los estadísticos pueden tomar distintos valores en cada una de las muestras, cada uno de ellos con distinta probabilidad.

La probabilidad de cada uno de los posibles valores que puede tomar un estadístico en muestras extraídas al azar viene dada por una función matemática denominada distribución muestral, que depende del estadístico en cuestión. Se habla así, por ejemplo, de la distribución muestral de la media aritmética o de la distribución muestral de la proporción.

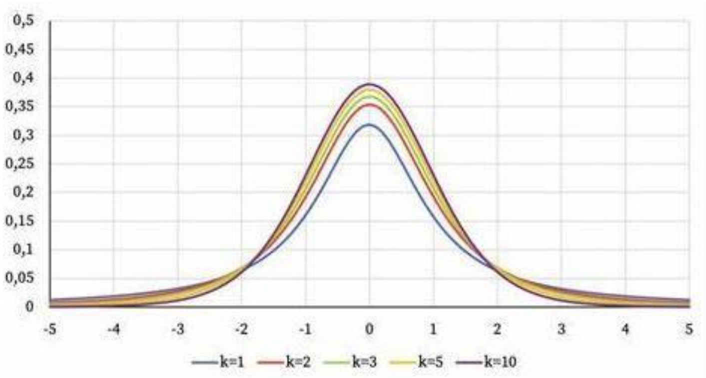
Una distribución muestral es una función de densidad de probabilidad, ya que asigna a cada posible valor de un estadístico su probabilidad de aparecer en una muestra extraída al azar.

Ejemplo: pensemos en una variable aleatoria como la altura de las personas.

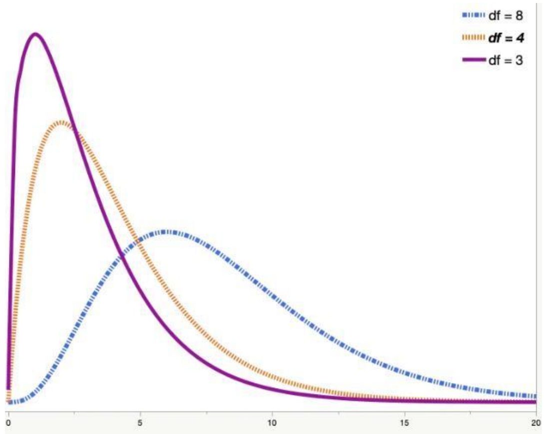
Distribuciones muestrales



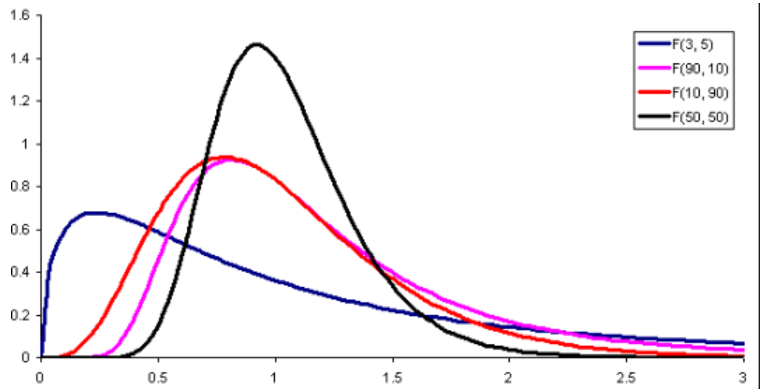
Normal



T-student



Chi - cuadrado



F

Prueba de hipótesis: media

- Plantear hipótesis nula y alternativa.
- Nivel de significancia
- Calcular estadístico de prueba apropiado
- Determinar región critica de rechazo de hipótesis nula
- Concluir

Prueba de hipótesis: media

- Plantear hipótesis nula y alternativa:

Una hipótesis estadística es un enunciado o afirmación ya sea acerca de los parámetros de una distribución de probabilidad o de los parámetros de un modelo. La hipótesis refleja alguna conjetura acerca de la situación del problema

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Prueba de hipótesis: media

- Nivel de significancia:

$$\alpha = P(\text{error tipo I}) = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es verdadera})$$
$$\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{dejar de rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es falsa})$$

Se debe tomar un Alpha apropiado al contexto. Por lo general se toma el 5%, aunque en algunos casos se usa 10% o 1%.

Prueba de hipótesis: media

- Calcular estadístico de prueba apropiado y región de rechazo

Tabla 2-3 Pruebas para medias con varianza conocida

Hipótesis	Estadístico de prueba	Criterios de rechazo
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$\lvert Z_0 \rvert > Z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$Z_0 = \dfrac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$Z_0 < -Z_\alpha$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$Z_0 > Z_\alpha$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_2 \neq \mu_2$		$\lvert Z_0 \rvert > Z_{\alpha/2}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$Z_0 = \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z_0 < -Z_\alpha$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$		$Z_0 > Z_\alpha$

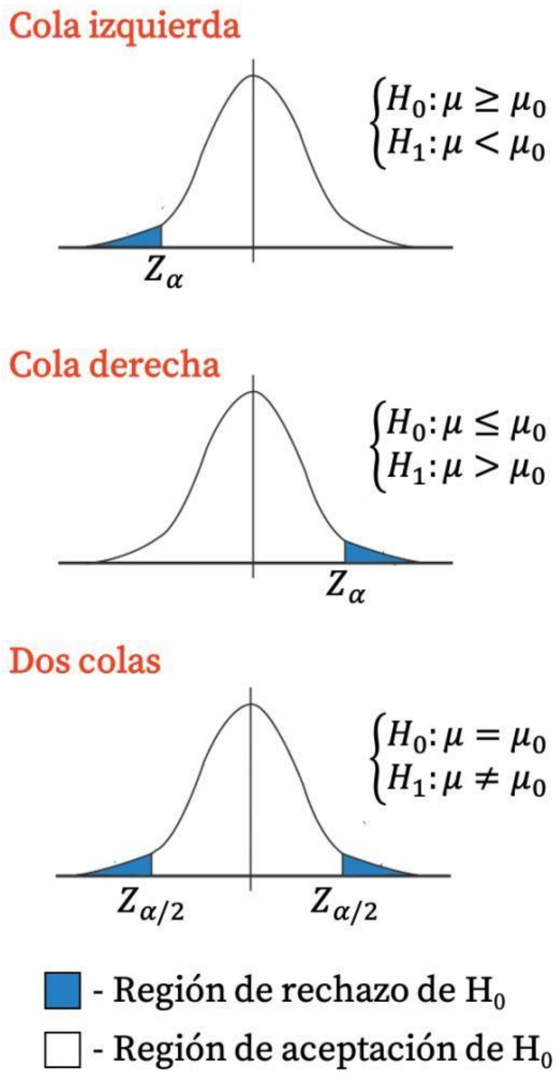
Tabla 2-4 Pruebas para medias de distribuciones normales, varianza desconocida

Hipótesis	Estadístico de prueba	Criterios de rechazo
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$		$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2, n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$t_0 = \dfrac{\bar{y} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$t_0 < -t_{\alpha, n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$		$t_0 > t_{\alpha, n-1}$
	si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$t_0 = \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ $v = n_1 + n_2 - 2$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2, v}$
	si $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t_0 = \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	$t_0 < -t_{\alpha, v}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$v = \dfrac{\left(\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$	$t_0 > t_{\alpha, v}$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Prueba de hipótesis: media

- Las regiones de rechazo se pueden visualizar así:



Prueba de hipótesis: media

- Concluir

Con un nivel de significancia del XXX se puede concluir que se tiene suficiente evidencia estadística para rechazar/no rechazar la hipótesis nula de que la media es igual a XXX/es mayor a XXX.

Intervalo de confianza: media

- Para media única con varianza poblacional conocida:

$$\bar{y} - Z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{y} + Z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}$$

- Para media única con varianza poblacional desconocida:

$$\bar{y} - t_{\alpha/2,n-1} S / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{y} + t_{\alpha/2,n-1} S / \sqrt{n}$$

- Para comparación de medias con varianza conocida:

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{y}_1 - \bar{y}_2 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Prueba de hipótesis: media pareada

Una prueba pareada, también conocida como prueba de diferencias de pares, es una prueba estadística que se utiliza cuando las observaciones en dos muestras están emparejadas de alguna manera. Esto significa que cada observación en una muestra está relacionada con una observación en la otra muestra. Este tipo de prueba se utiliza para comparar las medias de dos muestras relacionadas o dependientes.

Las pruebas pareadas son útiles en situaciones como los siguientes ejemplos:

1. **Estudios antes y después**: Por ejemplo, medir el rendimiento de los estudiantes antes y después de un curso.
2. **Mediciones en pares**: Como en estudios médicos donde se mide el mismo grupo de pacientes antes y después de un tratamiento.
3. **Sujetos emparejados**: Cuando se tienen pares de sujetos que están emparejados en alguna característica relevante.

Prueba de hipótesis: varianza

Tabla 2-7 Pruebas para las varianzas de distribuciones normales

Hipótesis	Estadístico de prueba	Criterios de rechazo
$H_0{:}\sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1{:}\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ o $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$
$H_0{:}\sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1{:}\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$
$H_0{:}\sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1{:}\sigma^2 > \sigma_0^2$		$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$
$H_0{:}\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1{:}\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$ o $F_0 < F_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$
$H_0{:}\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1{:}\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F_0 = \dfrac{S_2^2}{S_1^2}$	$F_0 > F_{\alpha,n_2-1,n_1-1}$
$H_0{:}\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1{:}\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F_0 = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_0 > F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$

Ejercicios

Un gerente de control de calidad de una fábrica de focos debe determinar si la vida media de un gran lote de focos es igual al valor especificado de 375 horas. La desviación estándar de la población es 100 horas. Una muestra compuesta por 64 focos indica una vida media muestral de 350 horas.

Con un nivel de significancia de 5%. ¿existe evidencia de que la vida media es distinta de 375 horas?

Ejercicios

Una empresa de servicio postal garantiza a su empresa que puede reducir el tiempo promedio necesario para recibir un paquete a menos de 2.5 días que es lo que usted experimenta actualmente. Después de utilizar la nueva compañía en 17 ocasiones, el tiempo de entrega promedio fue de 2.2 días y la desviación estándar fue de 0.9 días. ¿Debería cambiar su firma a la nueva empresa de mensajería?, Sea $\alpha = 1\%$

Ejercicios

Se requiere que la resistencia a la ruptura de una fibra sea de por lo menos 150 psi. La experiencia pasada indica que la desviación estándar de la resistencia a la ruptura es 3 psi. Se prueba una muestra aleatoria de cuatro ejemplares de prueba, y los resultados son y1 = 145, y2 = 153, y3 = 150 y y4 = 147.

a) Enunciar las hipótesis que el lector considere que deberían probarse en este experimento.
b) Probar estas hipótesis utilizando a = 0.05. ¿A qué conclusiones se llega?
c) Construir un intervalo de confianza de 95% para la resistencia a la ruptura promedio

Ejercicios

La vida de anaquel de una bebida carbonatada es motivo de interés. Se seleccionan 10 botellas al azar y se prueban, obteniéndose los siguientes resultados:

108 138 124 163 124 159 106 134 115 139

a) Quiere demostrarse que la vida media de anaquel excede los 120 días. Establecer las hipótesis apropiadas para investigar esta afirmación.
b) Probar estas hipótesis utilizando a = 0.01. ¿A qué conclusiones se llega?
c) Encontrar el valor P para la prueba del inciso b.
d) Construir un intervalo de confianza de 99% para la vida media de anaquel

Bibliografía

Gutierrez, H. Análisis y diseño de experimentos. México: Mc Graw Hill, 2004.

Montgomery. Diseño y análisis de Experimentos. 2 Edición. John Wiley and sons, 2002.