Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

VIGILADA MINEDUCACIÓN

Diseños 2k
Diseño de Experimentos

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Colombia

Introducción

Los diseños factoriales se usan ampliamente en experimentos que incluyen varios factores cuando es necesario estudiar el efecto conjunto de los factores sobre una respuesta.

Un caso especial es el de *k* factores, cada uno con sólo dos niveles. Estos niveles pueden ser cuantitativos, como dos valores de temperatura, presión o tiempo, o bien cualitativos, como dos máquinas, dos operadores, los niveles "alto" y "bajo" de un factor, o quizá la presencia o ausencia de un factor. Una réplica completa de este diseño requiere 2 x 2 x ... x 2 = *2^k* observaciones y se le llama diseño factorial *2^k*

Introducción

Factor		Combinación de	Réplica			
A	B	tratamientos	I	II	III	Total
−	−	A bajo, B bajo	28	25	27	80
+	−	A alto, B bajo	36	32	32	100
−	+	A bajo, B alto	18	19	23	60
+	+	A alto, B alto	31	30	29	90

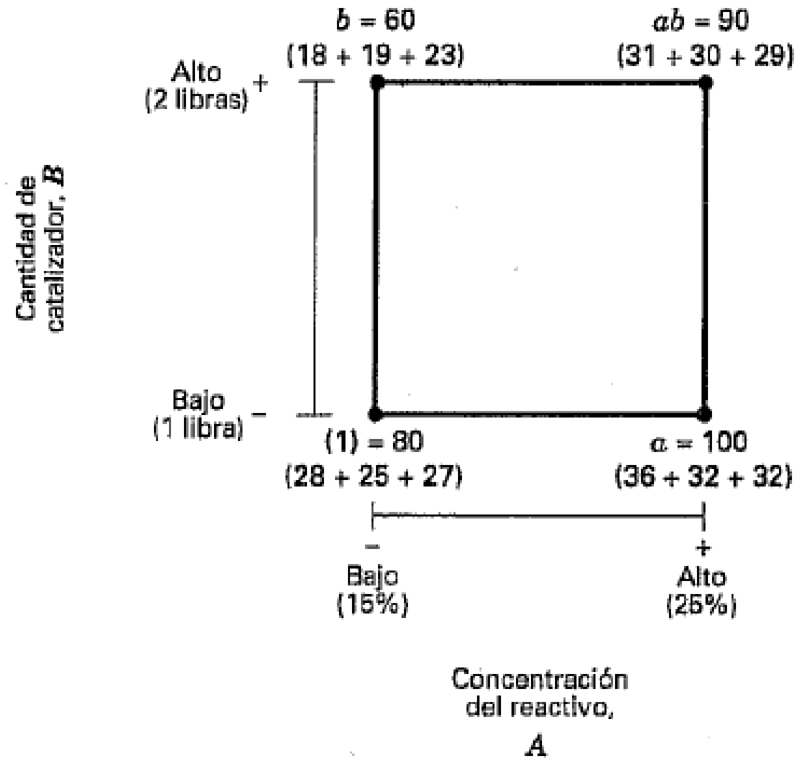


Figura 6-1 Combinaciones de los tratamientos en el diseño 2^2.

Procedimiento de análisis de un diseño factorial

- Estimar los efectos de los factores.
- Formular el modelo (con replicas o de solo una réplica).
- Realizar la prueba estadística (ANOVA)
- Ajustar el modelo
- Analizar los residuos
- Interpretar los resultados.

Estimación los efectos de los factores 2^2

$$A = \bar{y}_{A^+} - \bar{y}_{A^-}$$
$$= \frac{ab+a}{2n} - \frac{b+(1)}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n}[ab+a-b-(1)]$$

$$AB = \frac{ab+(1)}{2n} - \frac{a+b}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n}[ab+(1)-a-b]$$

$$B = \bar{y}_{B^+} - \bar{y}_{B^-}$$
$$= \frac{ab+b}{2n} - \frac{a+(1)}{2n}$$
$$= \frac{1}{2n}[ab+b-a-(1)]$$

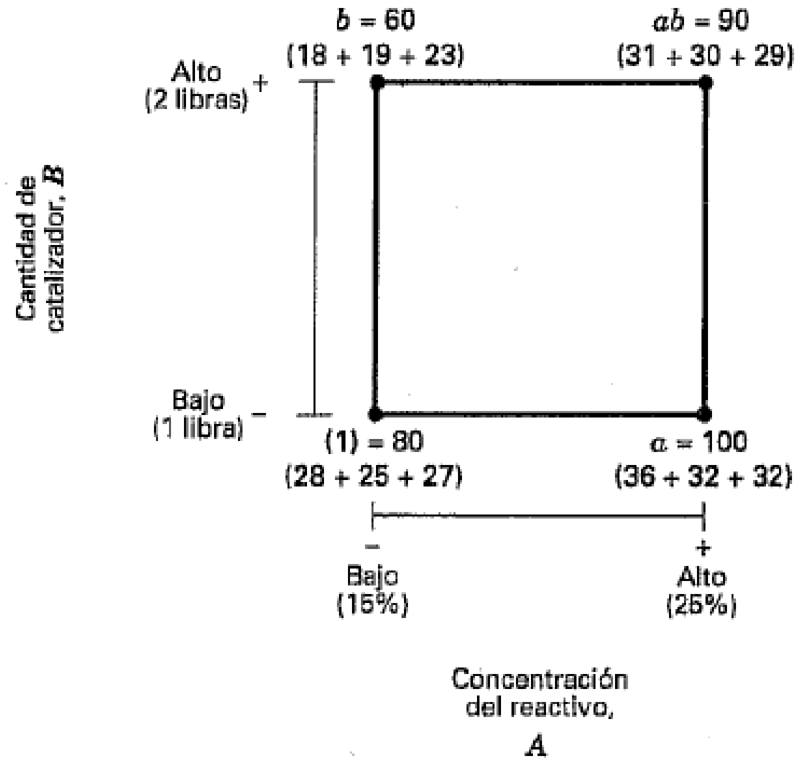


Figura 6-1 Combinaciones de los tratamientos en el diseño 2^2.

SS para diseño 2^2

$$SS_A = \frac{[ab + a - b - (1)]^2}{4n}$$

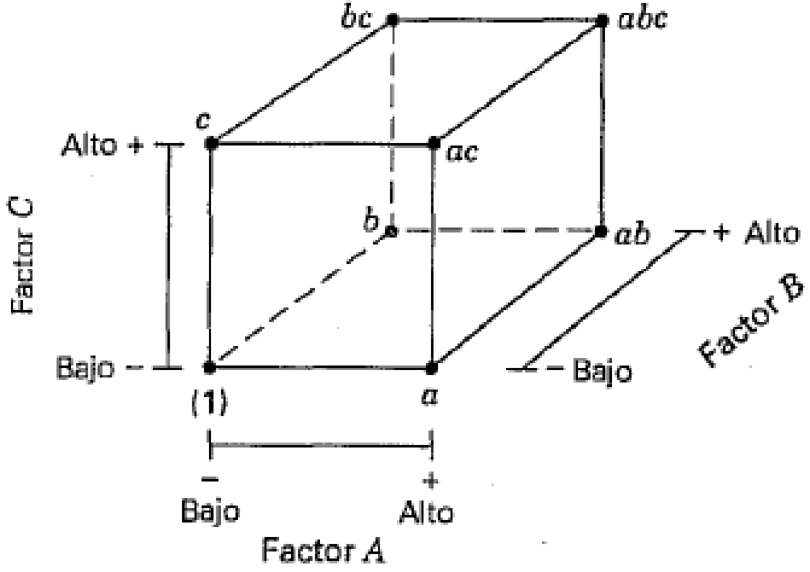
$$SS_B = \frac{[ab + b - a - (1)]^2}{4n}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{4n}$$

$$SS_{AB} = \frac{[ab + (1) - a - b]^2}{4n}$$

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_{AB}$$

Diseño 2^3



a) Vista geométrica

Corrida	Factor A	B	C
1	−	−	−
2	+	−	−
3	−	+	−
4	+	+	−
5	−	−	+
6	+	−	+
7	−	+	+
8	+	+	+

b) La matriz del diseño

Figura 6-4 El diseño factorial 2^3.

Diseño 2^3

$$A = \overline{y}_{A^+} - \overline{y}_{A^-}$$

$$B = \overline{y}_{B^+} - \overline{y}_{B^-}$$

$$C = \overline{y}_{C^+} - \overline{y}_{C^-}$$

etc, etc, ...

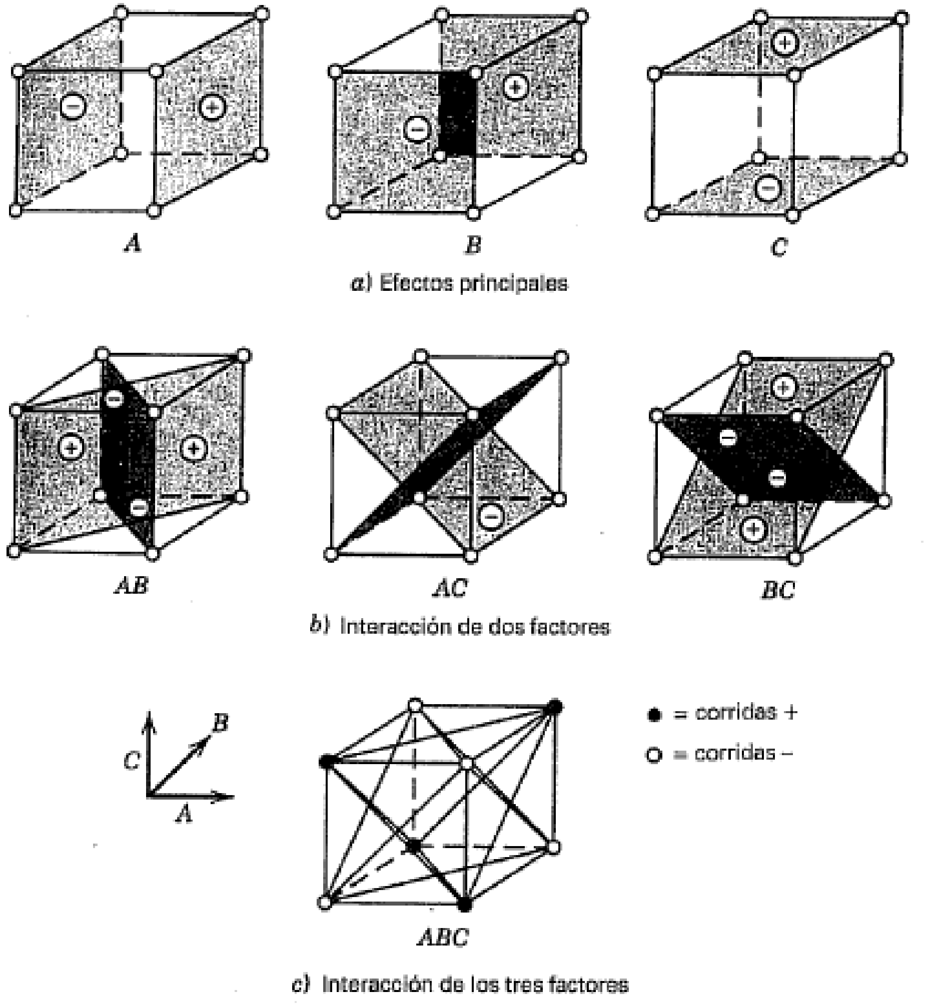
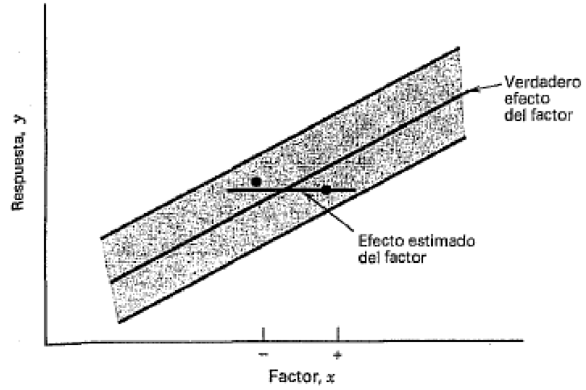


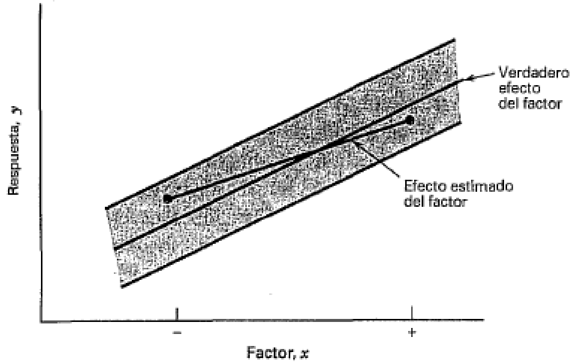
Figura 6-5 Representación geométrica de los contrastes que corresponden a los efectos principales y las interacciones del diseño 2^3.

Diseño 2^k de una sola replica

- Estos son diseños factoriales $2k$ con **una observación** en cada esquina del “cubo”.
- Estos diseños son conocidos como “unreplicated $2k$ factorial design”, o diseños de “**una sola réplica**”.
- Son diseños ampliamente usados.
- Hay riesgos: como hay una sola observación en cada esquina del cubo, hay una probabilidad de que observaciones inusuales perturben los resultados.



a) Distancia pequeña entre los niveles del factor



b) Separación agresiva de los niveles del factor

Figura 6-9 El impacto de la elección de los niveles del factor en un diseño no replicado.

Diseño 2^k de una sola replica

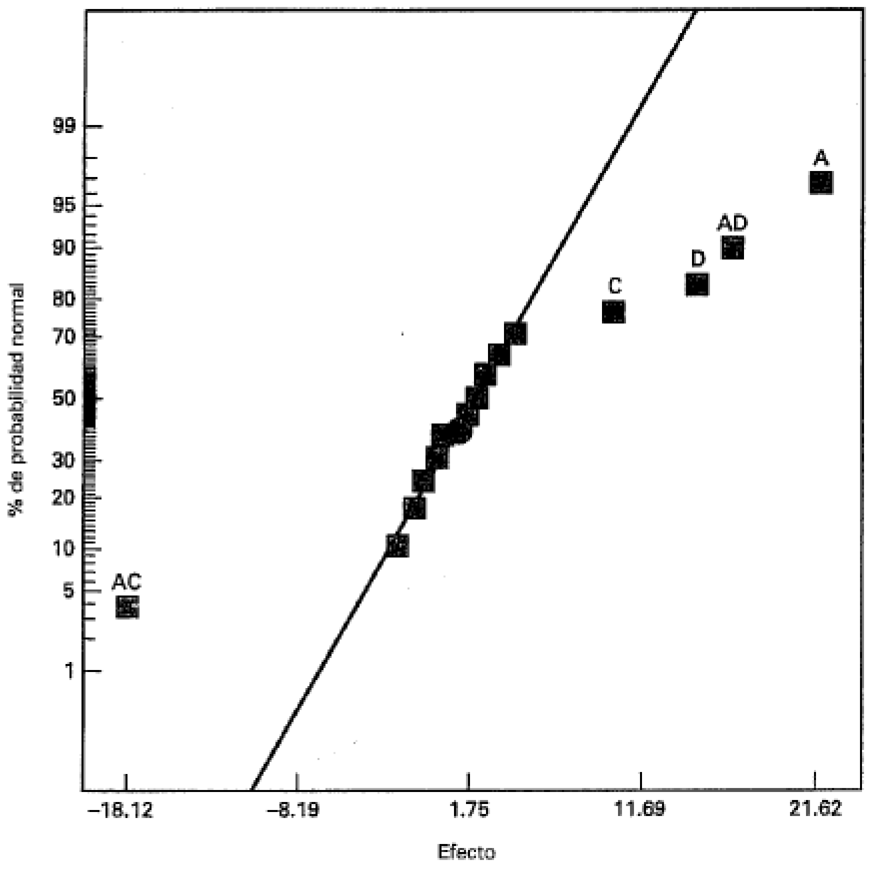
No hacer replicaciones causa **problemas** en las pruebas estadísticas.

– Las réplicas permiten un mejor estimado del “error puro” (el **estimado interno** del error).

¿Cuáles son las soluciones potenciales a este problema?

– “Normal ProbabilityPlots” de efectos.

Normal Probability Plots



Si todos los efectos se ubican sobre una recta, no habría efectos declarados como significativos. Aquellos efectos que se salen de este patrón rectilíneo serán declarados como significativos.

Ejercicio

Un ingeniero está interesado en los efectos de la velocidad de corte *(A),* la geometría de la herramienta *(B)* y el ángulo de corte *(C)* sobre la vida (en horas) de una máquina herramienta. Se eligen dos niveles de cada factor y se corren tres réplicas de un diseño factorial 2^3. Los resultados fueron los siguientes:

A	*B*	*C*	Combinación de tratamientos	Réplica I	Réplica II	Réplica III
−	−	−	(1)	22	31	25
+	−	−	*a*	32	43	29
−	+	−	*b*	35	34	50
+	+	−	*ab*	55	47	46
−	−	+	*c*	44	45	38
+	−	+	*ac*	40	37	36
−	+	+	*bc*	60	50	54
+	+	+	*abc*	39	41	47

a) Estimar los efectos de los factores. ¿Qué efectos parecen ser grandes?
b) Usar el análisis de varianza para confirmar las conclusiones del inciso *a.*

Ejercicio 2

Se llevó a cabo un experimento para mejorar el rendimiento de un proceso químico. Se seleccionaron cuatro factores y se corrieron dos réplicas de un experimento completamente aleatorizado. Los resultados se presentan en la tabla siguiente:

Combinación de tratamientos	Réplica I	Réplica II	Combinación de tratamientos	Réplica I	Réplica II
(1)	90	93	*d*	98	95
a	74	78	*ad*	72	76
b	81	85	*bd*	87	83
ab	83	80	*abd*	85	86
c	77	78	*cd*	99	90
ac	81	80	*acd*	79	75
bc	88	82	*bcd*	87	84
abc	73	70	*abcd*	80	80

a) Estimar los efectos de los factores.
b) Construir la tabla del análisis de varianza y determinar cuáles factores son importantes para explicar el rendimiento.
c) Escribir un modelo de regresión para predecir el rendimiento, suponiendo que los cuatro factores se hicieron variar en el rango de -1 a +1 (en unidades codificadas).
d) Graficar los residuales contra el rendimiento predicho y en una escala de probabilidad normal. ¿El análisis residual parece ser satisfactorio?.

Bibliografía

Gutierrez, H. Análisis y diseño de experimentos. México: Mc Graw Hill, 2004.

Montgomery. Diseño y análisis de Experimentos. 2 Edición. John Wiley and sons, 2002.