



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

[VIGILADA MINEDUCACIÓN]

Diseños fraccionados 2k-p Diseño de Experimentos



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Colombia

Introducción

Cuando el número de factores de un diseño factorial 2^k se incrementa, el número de corridas necesarias para realizar una réplica completa del diseño rebasa con rapidez los recursos de la mayoría de los experimentadores.

Si el experimentador puede suponer razonablemente que ciertas interacciones de orden superior son insignificantes, es posible obtener información de los efectos principales y las interacciones de orden inferior corriendo únicamente una fracción del experimento factorial completo. Estos diseños factoriales fraccionados se encuentran entre los tipos de diseños de uso más generalizado en el diseño de productos y procesos y en el mejoramiento de procesos

Introducción

El uso exitoso de los diseños factoriales fraccionados se basa en tres ideas clave:

1. El principio de efectos esparcidos o escasez de efectos. Cuando hay varias variables, es posible que el sistema o proceso esté dominado principalmente por algunos de los efectos principales y las interacciones de orden inferior.
2. La propiedad de proyección. Todo experimento factorial fraccional contiene factoriales completas en unos pocos factores.
3. Experimentación secuencial. Es posible combinar las corridas de dos (o más) diseños factoriales fraccionados para ensamblar secuencialmente un diseño más grande para estimar los efectos de los factores y las interacciones de interés

Fracción ½ del diseño 2k

Consideremos una situación en la que tres factores, cada uno con dos niveles, son de interés, pero los experimentadores no están en posición de correr las $2^3 = 8$ combinaciones de tratamientos. Sin embargo, pueden llevar a cabo cuatro corridas. Esto sugiere una fracción un medio de un diseño 2^3 , puesto que el diseño contiene $2^3 - 1 = 4$

Tabla 8-1 Signos positivos y negativos del diseño factorial 2^3

Combinación de tratamientos	Efecto factorial							
	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>
<i>a</i>	+	+	−	−	−	−	+	+
<i>b</i>	+	−	+	−	−	+	−	+
<i>c</i>	+	−	−	+	+	−	−	+
<i>abc</i>	+	+	+	+	+	+	+	+
<i>ab</i>	+	+	+	−	+	−	−	−
<i>ac</i>	+	+	−	+	−	+	−	−
<i>bc</i>	+	−	+	+	−	−	+	−
(1)	+	−	−	−	+	+	+	−

→ Generador de fracción

Fracción ½ del diseño 2k

Tabla 8-1 Signos positivos y negativos del diseño factorial 2³

Combinación de tratamientos	Efecto factorial							
	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>
<i>a</i>	+	+	-	-	-	-	+	+
<i>b</i>	+	-	+	-	-	+	-	+
<i>c</i>	+	-	-	+	+	-	-	+
<i>abc</i>	+	+	+	+	+	+	+	+
<i>ab</i>	+	+	+	-	+	-	-	-
<i>ac</i>	+	+	-	+	-	+	-	-
<i>bc</i>	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

- Para la fracción principal, el contraste para estimar el efecto de A, es el mismo para estimar el efecto de BC.
- Este fenómeno se conoce con el nombre de “aliasing” y ocurre en todos los diseños fraccionales.
- Los factores alias se encuentran directamente de las columnas en la tabla de signos + y -

Fracción ½ del diseño 2k

Tabla 8-1 Signos positivos y negativos del diseño factorial 2^3

Combinación de tratamientos	Efecto factorial							
	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>
<i>a</i>	+	+	-	-	-	-	+	+
<i>b</i>	+	-	+	-	-	+	-	+
<i>c</i>	+	-	-	+	+	-	-	+
<i>abc</i>	+	+	+	+	+	+	+	+
<i>ab</i>	+	+	+	-	+	-	-	-
<i>ac</i>	+	+	-	+	-	+	-	-
<i>bc</i>	+	-	+	+	-	-	+	-
(1)	+	-	-	-	+	+	+	-

- Los alias serán: $A = -BC$, $B = -AC$, $C = -AB$
- Suponiendo que después de correr la fracción principal se corre la fracción alterna. Los dos grupos de corridas conformarán un experimento factorial completo. Este es un ejemplo de experimentación secuencial.

Resolución del diseño

Al diseño $2^{(3-1)}$ precedente se le llama diseño de resolución III. En este diseño, los efectos principales son alias de las interacciones de dos factores.

- Diseños de resolución III. Se trata de diseños en los que ninguno de los efectos principales es alias de ningún otro efecto principal, pero los efectos principales son alias de las interacciones de dos factores, y algunas de las interacciones de dos factores pueden ser alias entre sí. (2_{III}^{3-1})
- Diseños de resolución IV. Se trata de diseños en los que ninguno de los efectos principales es alias de ningún otro efecto principal ni de las interacciones de dos factores, pero las interacciones de dos factores son alias entre sí. (2_{IV}^{4-1})
- Diseños de resolución V. Se trata de diseños en los que ninguno de los efectos principales ni de las interacciones de dos factores son alias de otro efecto principal o interacción de dos factores, pero las interacciones de dos factores son alias de las interacciones de tres factores. (2_V^{5-1})

Construcción diseño fraccional un medio

Una fracción un medio del diseño 2^k de la resolución más alta puede construirse apuntando el diseño básico, que consta de las corridas de un diseño factorial $2^{(k - 1)}$ completo, y agregándole después el factor k-ésimo identificando sus niveles positivo y negativo con los signos positivo y negativo de la interacción del orden más alto

Tabla 8-2 Las dos fracciones un medio del diseño 2^3

Corrida	Diseño factorial 2^2 completo (diseño básico)		$2^{3-1}_{III}, I = ABC$			$2^{3-1}_{III}, I = -ABC$		
	A	B	A	B	C = AB	A	B	C = -AB
1	-	-	-	-	+	-	-	-
2	+	-	+	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-	-	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	-

Ejemplo 8.1

Tabla 6-10 Experimento del índice de filtración en la planta piloto

Número de corrida	Factor				Etiqueta de la corrida	Índice de filtración (gal/h)
	A	B	C	D		
1	-	-	-	-	(1)	45
2	+	-	-	-	a	71
3	-	+	-	-	b	48
4	+	+	-	-	ab	65
5	-	-	+	-	c	68
6	+	-	+	-	ac	60
7	-	+	+	-	bc	80
8	+	+	+	-	abc	65
9	-	-	-	+	d	43
10	+	-	-	+	ad	100
11	-	+	-	+	bd	45
12	+	+	-	+	abd	104
13	-	-	+	+	cd	75
14	+	-	+	+	acd	86
15	-	+	+	+	bcd	70
16	+	+	+	+	abcd	96

Tabla 8-3 El diseño 2^{4-1}_{IV} con la relación de definición $I=ABCD$

Corrida	Diseño básico				Combinación de tratamientos	Índice de filtración
	A	B	C	$D = ABC$		
1	-	-	-	-	(1)	45
2	+	-	-	+	ad	100
3	-	+	-	+	bd	45
4	+	+	-	-	ab	65
5	-	-	+	+	cd	75
6	+	-	+	-	ac	60
7	-	+	+	-	bc	80
8	+	+	+	+	abcd	96

2^{4-1}_{IV}

Ejemplo 8.1

Tabla 8-4 Estimaciones de los efectos y los alias del ejemplo 8-1^a

Estimación	Estructura de los alias
$\ell_A = 19.00$	$\ell_A \rightarrow A + BCD$
$\ell_B = 1.50$	$\ell_B \rightarrow B + ACD$
$\ell_C = 14.00$	$\ell_C \rightarrow C + ABD$
$\ell_D = 16.50$	$\ell_D \rightarrow D + ABC$
$\ell_{AB} = -1.00$	$\ell_{AB} \rightarrow AB + CD$
$\ell_{AC} = -18.50$	$\ell_{AC} \rightarrow AC + BD$
$\ell_{AD} = 19.00$	$\ell_{AD} \rightarrow AD + BC$

^aLos efectos significativos se indican en negritas.

Ejercicio 1

R.D. Snee ("Experimentación con un número grande de variables", en Experiments in Industry: Design, Analysis and Interpretation 01 Results, de R.D. Snee, L.B. Rare y J.B. Trout, editores, ASQC) describe un experimento en el que se usó un diseño $2^{(5-1)}$ con ABCDE de generador para investigar los efectos de cinco factores sobre el color de un producto químico. Los factores son A =solvente/reactivo, B =catalizador/reactivo, C =temperatura, D = pureza del reactivo y E = pH del reactivo. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$e = -0.63$	$d = 6.79$
$a = 2.51$	$ade = 5.47$
$b = -2.68$	$bde = 3.45$
$abe = 1.66$	$abd = 5.68$
$c = 2.06$	$cde = 5.22$
$ace = 1.22$	$acd = 4.38$
$bce = -2.09$	$bcd = 4.30$
$abc = 1.93$	$abcde = 4.05$

- Construir una gráfica de probabilidad normal de los efectos. ¿Qué efectos parecen estar activos?
- Calcular los residuales. Construir una gráfica de probabilidad normal de los residuales y graficar los residuales contra los valores ajustados. Comentar las gráficas.
- Si algunos de los factores son insignificantes, plegar el diseño $2^{(5-1)}$ aun diseño factorial completo en los factores activos. Comentar el diseño resultante e interpretar los resultados.

Ejercicio 2

En un artículo de 1.1. Pignatiello, Jr. y J.S. Ramberg del Journal of Quality Technology (vol. 17, pp. 198-206) se describe el uso de un diseño factorial fraccionado con réplicas para investigar el efecto de cinco factores sobre la altura libre de los resortes de hojas utilizados en una aplicación automotriz. Los factores son A = temperatura del horno, B = tiempo de calentamiento, C = tiempo de transferencia, D = tiempo de retención y E = temperatura del aceite de templado. Los datos se presentan a continuación:

A	B	C	D	E	Altura libre		
-	-	-	-	-	7.78	7.78	7.81
+	-	-	+	-	8.15	8.18	7.88
-	+	-	+	-	7.50	7.56	7.50
+	+	-	-	-	7.59	7.56	7.75
-	-	+	+	-	7.54	8.00	7.88
+	-	+	-	-	7.69	8.09	8.06
-	+	+	-	-	7.56	7.52	7.44
+	+	+	+	-	7.56	7.81	7.69
-	-	-	-	+	7.50	7.25	7.12
+	-	-	+	+	7.88	7.88	7.44
-	+	-	+	+	7.50	7.56	7.50
+	+	-	-	+	7.63	7.75	7.56
-	-	+	+	+	7.32	7.44	7.44
+	-	+	-	+	7.56	7.69	7.62
-	+	+	-	+	7.18	7.18	7.25
+	+	+	+	+	7.81	7.50	7.59

- Escribir la estructura de los alias de este diseño. ¿Qué resolución tiene este diseño?
- Analizar los datos. ¿Qué factores influyen en la altura libre promedio?
- Analizar los residuales de este experimento y comentar los resultados.
- ¿Este diseño es el mejor posible para cinco factores en 16 corridas? Específicamente, ¿es posible encontrar un diseño fraccionado para cinco factores en 16 corridas con una resolución más alta que la de este diseño?

Ejercicio 3

En un artículo de Industrial and Engineering Chemistry ("Información adicional acerca de la planeación de experimentos para aumentarla eficiencia de la investigación") se utiliza un diseño 2⁵- 2 para investigar el efecto de A = temperatura de condensación, B = cantidad del material 1, C = volumen del solvente, D = tiempo de condensación y E = cantidad del material 2 sobre el rendimiento. Los resultados obtenidos son los siguientes:

$$\begin{array}{cccc} e = 23.2 & ad = 16.9 & cd = 23.8 & bde = 16.8 \\ ab = 15.5 & bc = 16.2 & ace = 23.4 & abcde = 18.1 \end{array}$$

- a) Verificar que los generadores que se utilizaron en el diseño fueron $I = ACE$ e $I = BDE$.
- b) Determinar los alias de este diseño.
- c) Estimar los efectos principales.
- d) Elaborar la tabla del análisis de varianza.
- e) Graficar los residuales contra los valores ajustados. Construir también la gráfica de probabilidad normal de los residuales. Comentar los resultados

Ejercicio 4

Construir un diseño $2^{(7-2)}$ seleccionando dos interacciones de dos factores como los generadores independientes. Apuntar la estructura de los alias completa de este diseño. ¿Cuál es la resolución de este diseño?

Bibliografía

Gutierrez, H. Análisis y diseño de experimentos. México: Mc Graw Hill, 2004.

Montgomery. Diseño y análisis de Experimentos. 2 Edición. John Wiley and sons, 2002.