Análisis de varianza II
Diseño de Experimentos

Introducción

Modelo con efectos aleatorios:

Los a tratamientos son una muestra aleatoria de una población más grande de tratamientos. En esta situación sería deseable poder extender las conclusiones (las cuales se basan en la muestra de los tratamientos) a la totalidad de los tratamientos de la población, sea que se hayan considerado explícitamente en el análisis o no.

Ejemplo

Suponga que una fábrica produce un cierto producto en lotes, y queremos saber si hay una variación significativa en la calidad del producto entre los diferentes lotes. Se asume que los lotes representan una **muestra aleatoria** de todos los posibles lotes que podrían producirse.

Se tiene los siguientes datos de 5 lotes, con 4 mediciones de calidad por cada lote:

Lote	Medición 1	Medición 2	Medición 3	Medición 4
1	9.5	9.7	9.6	9.8
2	9.2	9.1	9.3	9.4
3	9.8	9.9	9.7	9.6
4	9.4	9.6	9.5	9.3
5	9.7	9.8	9.9	9.8

Modelo de efectos aleatorios

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1,\ 2,\ \ldots,\ a \\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \end{cases}$$

Y_{ij} es la medición de calidad del lote i en la medición j.

μ es la media general de todas las mediciones.

τ_i es el efecto aleatorio del lote i, que sigue una distribución normal con media 0 y varianza σ_τ^2.

ϵ_{ij} es el error aleatorio, que sigue una distribución normal con media 0 y varianza σ_ϵ^2.

Gran diferencia con modelo de efectos fijos

Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Modelo de efectos aleatorios

$$V(y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma^2$$

$$SS_T = SS_{\text{Tratamientos}} + SS_E$$

$$H_0: \sigma_\tau^2 = 0$$
$$H_1: \sigma_\tau^2 > 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}} - MS_E}{n}$$

$$F_0 = \frac{\dfrac{SS_{\text{Tratamientos}}}{a-1}}{\dfrac{SS_E}{N-a}} = \frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}$$

Método de análisis de varianza

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{\text{Tratamientos}} - MS_E}{n}$$

Intervalo de confianza

$$\frac{L}{1+L} \leq \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_\tau^2 + \sigma^2} \leq \frac{U}{1+U}$$

$$L = \frac{1}{n}\left(\frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}\frac{1}{F_{\alpha/2,a-1,N-a}} - 1\right)$$

$$U = \frac{1}{n}\left(\frac{MS_{\text{Tratamientos}}}{MS_E}\frac{1}{F_{1-\alpha/2,a-1,N-a}} - 1\right)$$

Ejercicio 0

Una compañía textil fabrica un tejido en un gran número de telares. Le gustaría que los telares fueran homogéneos a fin de obtener un tejido de resistencia uniforme. El ingeniero del proceso sospecha que, además de la variación usual de la resistencia dentro de las muestras del tejido del mismo telar, puede haber también variaciones significativas en la resistencia entre un telar y otro. Para investigar esta posibilidad, er ingeniero selecciona cuatro telares al azar y hace cuatro determinaciones de la resistencia del tejido fabricado en cada telar.

Tabla 12-1 Datos de la resistencia del ejemplo 12-1

	Observaciones				
Telares	1	2	3	4	$y_{i.}$
1	98	97	99	96	390
2	91	90	93	92	366
3	96	95	97	95	383
4	95	96	99	98	388
					$1527 = y_{..}$

Ejercicio 1

Un fabricante sospecha que los lotes de materia prima suministrados por su proveedor difieren de manera significativa en el contenido de calcio. Hay un gran número de lotes actualmente en el almacén. Se seleccionan cinco de ellos para hacer un estudio. Un químico hace cinco determinaciones en cada lote y obtiene los dispuestos en el Excel adjunto (E1).

a) ¿Existe una variación significativa en el contenido de calcio de un lote a otro? Utilizar a = 0.05.
b) Estimar los componentes de la varianza.
c) Encontrar un intervalo de confianza de 95% para $\sigma_\tau^2 / (\sigma_\tau^2 + \sigma^2)$.
d) Analizar los residuales de este experimento. ¿Se satisfacen los supuestos del análisis de varianza?

Ejercicio 2

En un artículo de Joumal of Quality Technology (vol. 13, no. 2, pp. 111-114) se describe un experimento para investigar los efectos de cuatro sustancias químicas blanqueadoras sobre la brillantez de la pulpa. Estas cuatro sustancias químicas se seleccionaron al azar de una población grande de agentes blanqueadores potenciales. Los datos se encuentran en el Excel adjunto (E2).

a) ¿Existe alguna diferencia en los tipos de sustancias químicas? Utilizar a = 0.05.
b) Estimar la variabilidad debida al tipo de sustancias químicas.
c) Estimar la variabilidad debida al error aleatorio.
d) Analizar los residuales de este experimento y comentar la adecuación del modelo.

Ejercicio 3 – efectos fijos

Se estudia la resistencia a la tensión del cemento portland. Pueden usarse económicamente cuatro diferentes técnicas de mezclado. Se han colectado los datos adjuntos en el Excel (E3).

a) Probar la hipótesis de que las técnicas de mezclado afectan la resistencia del cemento. Utilizar a = 0.05.
b) Usar el método Tukey con a = 0.05 para hacer comparaciones entre pares de medias.
c) Construir una gráfica de probabilidad normal de los residuales. ¿Qué conclusiones se sacarían acerca de la validez del supuesto de normalidad?
d) Graficar los residuales contra la resistencia a la tensión predicha. Comentar la gráfica.

Ejercicio 4 – prueba hipotesis

A continuación, se presenta el tiempo de combustión de dos cohetes químicos con formulaciones diferentes. Los ingenieros de diseño se interesan tanto en la media como en la varianza del tiempo de combustión.

Datos en Excel adjunto (E4).

a) Probar la hipótesis de que las dos varianzas son iguales. Utilizar a = 0.05.
b) Utilizando los resultados del inciso a, probar la hipótesis de que los tiempos de combustión promedio son iguales. Utilizar a = 0.05. ¿Cuál es el valor P para esta prueba?
c) Comentar el papel del supuesto de normalidad en este problema. Verificar el supuesto de normalidad para ambos tipos de cohetes.

Bibliografía

Gutierrez, H. Análisis y diseño de experimentos. México: Mc Graw Hill, 2004.

Montgomery. Diseño y análisis de Experimentos. 2 Edición. John Wiley and sons, 2002.