

CAPITULO 5. MODELOS DE SISTEMAS HIDRÁULICOS

OBJETIVOS

1. Obtener modelos conceptuales y cualitativos de diversos sistemas físicos. (CDIO 2.1.2.2)
2. Preparar y ejecutar el plan de acción para formular y resolver un modelo. (CDIO 2.1.1.4)
3. Establecer las conexiones entre los fenómenos físicos y el modelo. (CDIO 2.1.2.3)
4. Usar modelos cuantitativos y soluciones. (CDIO 2.1.2.4)
5. Generalizar suposiciones para simplificar ambientes y sistemas complejos (CDIO 2.1.2.1)
6. Discutir una aproximación desde varias disciplinas para asegurar que el sistema se entienda desde todas las perspectivas relevantes. (CDIO 2.3.1.2)
7. Establecer prioridades dentro de las metas generales (CDIO 2.1.1.3)
8. Identificar sistemas propios y sistemas con interacción entre áreas (CDIO 2.3.2.4)

Clase 1

- Variables y unidades
- Viscosidad y Número de Reynolds
- Flujo Turbulento y Laminar
- Flujo sangre humana
- Elementos: resistencia

Clase 2

- Elementos: Válvulas
- Elementos: Bombas
- Elementos: Capacidad

Clase 3

- Conservación de masa
- Sistemas de tanques

Los sistemas hidráulicos y neumáticos tienen una densidad de potencia mucho mayor que los sistemas electromecánicos. Los actuadores eléctricos están limitados por la saturación de los núcleos magnéticos empleados en su construcción y pueden generar presiones de hasta 200 psi (1.4 MPa), mientras que en los sistemas hidráulicos empleados en aeronáutica se alcanzan presiones hasta de 8000 psi (55 MPa) y en aplicaciones industriales es común encontrar actuadores cercanos a 1000 psi (7 MPa).

En los actuadores electromecánicos los núcleos metálicos se mueven con el actuador o con el motor y por lo tanto la inercia asociada con el actuador es grande y la velocidad de respuesta es baja: el ancho de banda útil es reducido. Además, el fluido empleado en los sistemas hidráulicos ayuda a remover el calor generado por el actuador, mientras que en los sistemas eléctricos es necesario asegurar un flujo conveniente de un medio refrigerante para proteger a los elementos eléctricos y electrónicos de los efectos de la temperatura.

Por otra parte, los sistemas hidráulicos y neumáticos presentan un comportamiento no lineal más significativo que sus contrapartes electromecánicas y por ello su análisis y simulación son más elaborados y complejos.

A diferencia de los sólidos, los fluidos son sustancias que no soportan esfuerzo de cizallamiento ("Shear stress") y se deforman continuamente cuando se someten a cizallamiento. Esta propiedad aplica tanto a los líquidos como a los gases.

Desde el punto de vista molecular en los sólidos existen fuerzas intermoleculares fuertes, mientras que en los fluidos son débiles. Además, las fuerzas intermoleculares entre las moléculas de los gases son mucho más débiles que las existentes entre las moléculas de los líquidos.

Mientras los líquidos tienden a ocupar un volumen fijo o definido, los gases ocupan todo el volumen disponible. Esto está asociado al hecho que la densidad de un líquido permanece aproximadamente constante bajo una presión externa aplicada: se dice que el fluido es incompresible.

Para el objetivo del curso se empleará un modelo concentrado y se linealizará para llegar a modelos aproximados, útiles para un análisis inicial del problema. Se considerarán únicamente fluidos incompresibles en tuberías cerradas.

Un modelo exacto de los sistemas hidráulicos implica plantear ecuaciones diferenciales parciales y no lineales.

COMPONENTES DE SISTEMAS HIDRÁULICOS

Variables y Unidades.

Las variables básicas de los sistemas hidráulicos son la presión y la tasa de flujo.

Variables generalizadas	Variables Hidráulicas	Unidades SI
Esfuerzo, e	Presión, P	Pa (N/m ²)
Flujo, f	Tasa de flujo volumétrico, f o q	Metro cúbico/segundo (m ³ /s)
Momentum, l	Momentum de presión, L_p	N-s/m ²
Desplazamiento, δ	Volumen, V	m ³
Potencia, p	$p(t)f(t)$	W = N-m/s
Energía, E	$\int_V p dV; \int_{l_p} f dl_p$	J = W-s = N-m

Tabla 1

PRESIÓN.

La variable de esfuerzo principal puede ser la altura o la presión:

h = altura de la columna en (m) o ($f t$)

p = presión (N/m^2) o psi

El momentum asociado con la presión es l_p y tiene como unidades N-s/m²

La definición de presión depende de la referencia empleada: se puede definir respecto al cero absoluto o presión absoluta, o respecto a la atmósfera o presión manométrica.

p_{abs} : Medida respecto al vacío, siempre > 0 , en cualquier sistema SI o US.

La presión atmosférica es la fuerza ejercida por la columna de aire sobre una superficie de área unitaria; depende de la temperatura, la densidad del aire y la altura sobre el nivel del mar. Al nivel del mar es aproximadamente:

$$10^5 \frac{N}{m^2} = 10^5 Pa = 1000 mbar = 14.69 psia$$

La presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica:

$P_g = P_{abs} - P_{atmosferica}$	1
-----------------------------------	---

En un cuerpo en el cual se haya hecho vacío la presión manométrica será negativa.

La presión diferencial es la diferencia de presión de dos puntos respecto a una referencia común.

$\Delta P = P_2 - P_1$	2
------------------------	---

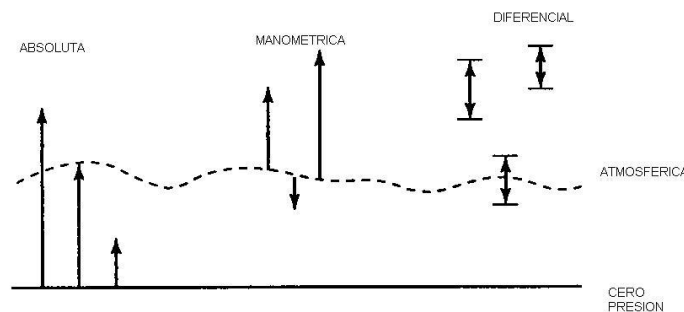


Figura 1

Tanto en el sistema internacional SI cómo en el US existen diferentes unidades de presión:

	atm	ata (kg/cm ²)	Torr (mm Hg)	in Hg (32°F)	mm water (4°C)	in water (60°F)	bar	Mpa	Kpa	PSI (lb/in)
atm	1	1.033	760	29.92	10332.56	406.79	1.013	0.1013	101.32	14.69
ata (kg/cm ²)	0.968	1	735.56	28.96	10000.03	393.71	0.981	0.0981	98.07	14.22
Torr (mm Hg)	1.316x10 ⁻³	1.36 x10 ⁻³	1	0.03937	13.60	0.535	1.333x10 ⁻³	1.333x10 ⁻⁴	0.1333	0.0194
in Hg (32°F)	0.03342	0.0345	25.4	1	345.40	13.60	0.03386	3.387x10 ⁻³	3.387	0.491
mm water (4°C)	9.67x10 ⁻⁵	9.99x10 ⁻⁵	0.0736	2.895x10 ⁻³	1	2.904x10 ⁻³	9.81x10 ⁻⁵	9.81x10 ⁻⁶	9.81x10 ⁻³	1.422x10 ⁻³
in water (60°F)	2.456x10 ⁻³	2.54x10 ⁻³	1.866	0.0736	25.4	1	2.49x10 ⁻³	2.49x10 ⁻⁴	0.249	0.03613
bar	0.9872	1.02	750.06	29.53	10197.44	401.47	1	0.1	100	14.50
Mpa	9.872	10.20	7500	295.3	101974.42	4018.60	10	1	1000	145
Kpa	9.87x10 ⁻³	0.01	7.50	0.2953	101.97	4.018	0.01	0.001	1	0.145
PSI (lb/in)	0.068	0.070	51.71	2.036	703.09	27.71	0.0689	6.893x10 ⁻³	6.893	1

Tabla 2¹

Ejemplo 1. Un condensador contiene una mezcla de agua, aire y vapor de agua, la presión interna P_A es de 3.2 psia. Cuál será la lectura de un manómetro calibrado en psig y conectado en un punto situado 4.5 pies por debajo de la superficie libre del líquido. La gravedad específica del agua se asume igual a uno y la presión atmosférica es de 14.7 psi.

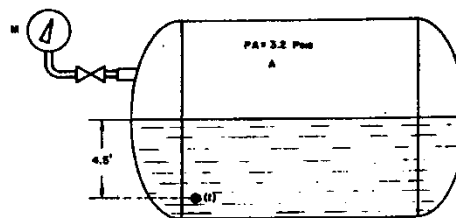


Figura 2

¹<https://pdf4pro.com/view/pressure-unit-conversion-table-pipefittingweb-com-44e085.html>
At; www.pipefittingweb.com

Se deben convertir todas las presiones a la misma referencia:

La lectura del manómetro superior, en unidades manométricas es:

$$P_m(\text{psig}) = (P_a - 14.7)\text{psig}$$

$$P_m = 3.2 - 14.7 = -11.5\text{psig}$$

Como la presión manométrica es negativa, indica que en el volumen superior del condensador existe vacío.

La presión debida a la columna de agua de 4.5' de altura es:

$$p = G_F \omega h$$

Con:

G_F = Gravedad específica del fluido

ω = densidad del agua: $= 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$

h = altura de la columna ft

La presión en el punto 1, en unidades manométricas:

$$P_1 = (1)(62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3})(4.5\text{ft}) \times \left(\frac{1}{144 \frac{\text{in}^2}{\text{ft}^2}} \right) + (-11.5)\text{psig}$$

$$P_1 = 1.96\text{psig} + (-11.5)\text{psig}$$

$$P_1 = -9.54\text{psig}$$

El manómetro conectado en 1 también indicará vacío. Si se quiere dar la lectura en unidades absolutas:

$$P_{1a} = (-9.54 + 14.7)\text{psia} = 5.16\text{psia}$$

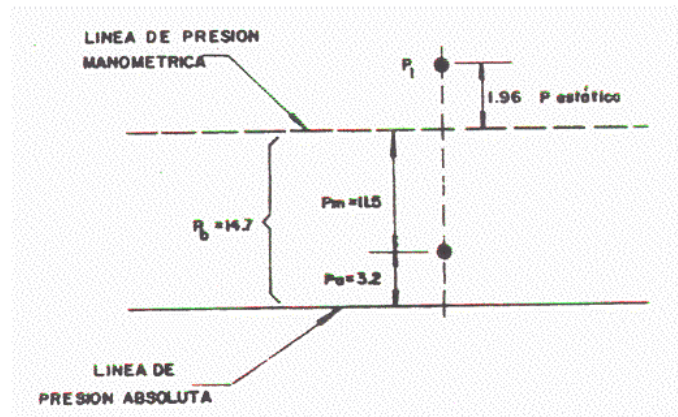


Figura 3

(En el sistema US la densidad está dada en unidades de peso (lb) sobre volumen)

Trabajando en el sistema SI y en presión absoluta:

$$P_m = (3.2)psia \times \frac{1 \text{ kPa}}{0.145 \text{ psia}} = 22.07 \text{ kPa}$$

La presión en el punto 1:

$$\begin{aligned} P_1 &= \rho g h = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 4.5 \text{ ft} \times \frac{0.305 \text{ m}}{\text{ft}} + 22.07 \text{ kPa} \\ P_1 &= 13,45 \text{ kPa} + 22.07 \text{ kPa} \\ P_1 &= 35.52 \text{ kPa} \\ P_1 &= 35.25 \text{ kPa} \times \frac{0.145 \text{ psia}}{1 \text{ kPa}} = 5.15 \text{ psia} \end{aligned}$$

FLUJO^{2,3}

El flujo es la variable de "flujo" y se puede definir en unidades de volumen:

f o q = tasa de flujo volumétrico (m^3/s) o (ft^3/s)

la variable "desplazamiento" es la integral de flujo: V = volumen (m^3) o (ft^3)

Empleando unidades de masa:

² Fisher-Rosemount. Technical Data Sheet # 00816-0100-3031. March 2001

³ APV Flow Principles. 1997

\dot{m} = tasa de flujo másico $\frac{kg}{s}$ o $\frac{lbm}{s}$

O la integral correspondiente: m = masa (kg) o (lbm)

La potencia en un sistema hidráulico está dada por:

$$Potencia = Flujo \times Presión$$

La energía:

$E = \int^v p dV; \int^{l_p} q dl_p;$	3
---------------------------------------	---

El flujo de un fluido a través de una tubería cerrada está definido por cuatro factores principales:

- Velocidad
- Fricción
- Densidad
- Viscosidad

La velocidad del fluido depende de la diferencia de presión aplicada al mismo: a mayor Δp mayor velocidad v y por lo tanto más volumen de producto que pasa a través de una sección de ducto de área transversal A :

$f = q = Av$	4
--------------	---

La fricción entre el fluido y la pared interna del tubo reduce la velocidad y afecta el perfil del flujo: la fricción es mayor en las capas cercanas a la pared del tubo que en el centro de este.

La densidad (ρ) del fluido afecta su tasa de flujo: a mayor densidad se requiere una mayor presión para mantener la tasa de flujo deseada. En fluidos compresibles, como gases y vapores, o líquidos con aire o gas atrapado, un cambio en la presión produce un cambio en la densidad y por lo tanto en la tasa de flujo.

Viscosidad

La viscosidad es una medida de la capacidad del líquido para resistir fuerzas de desplazamiento y depende de la fricción interna de las moléculas. Cuando el fluido

se impulsa con una fuerza F aplicada sobre una sección de área A , la capa superior se desplaza más rápido que la capa inferior y entre las dos se desarrolla una fuerza de fricción.

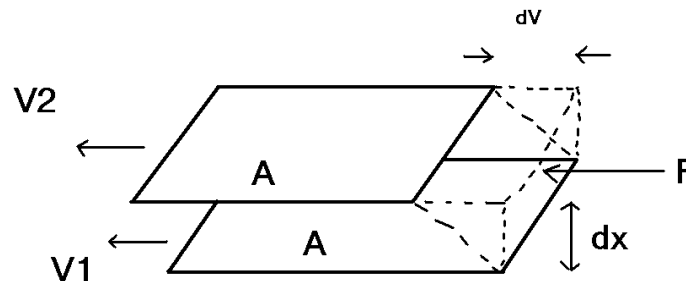


Figura 4

Como se definió en el capítulo 4 en la sección de Acople Resistivo la tensión de cizallamiento ("Shear stress") es:

$\tau = \frac{F}{A} \left(\frac{N}{m^2} = Pa \right)$	5
--	---

La viscosidad dinámica o absoluta es la relación entre la tensión de cizallamiento y el gradiente de velocidad medido en la dirección perpendicular al desplazamiento:

$\eta = \frac{\tau}{dv/dy} \quad (Pa - s)$	6
--	---

A mayor fuerza requerida para mover las capas entre sí, mayor viscosidad dinámica.

En sistema SI la unidad es el Poise (P), igual a 0.1 Pa-s y a 100 cP (centipoise). Un centipoise es igual a 1 mPa-s. El agua a 20 °C tiene una viscosidad de 1 cP.

La viscosidad depende de la temperatura y en los líquidos disminuye cuando T aumenta. A mayor viscosidad menor velocidad del fluido.

Dependiendo de la relación entre viscosidad y tasa de cizallamiento $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ los fluidos se clasifican en "Newtonianos" y "No Newtonianos". En los primeros la viscosidad es independiente de la tasa de cizallamiento, como en el agua y los productos acuosos.

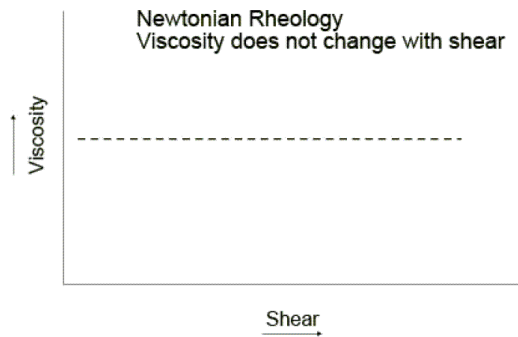


Figura 5

En los "No Newtonianos" la viscosidad disminuye cuando la tasa de cizallamiento aumenta. Tixotropía es la propiedad de algunas sustancias de comportarse como un fluido cuando están agitadas y retornar a un estado semisólido cuando están en reposo.

Ejemplo de sustancias tixotrópicas son la sangre, leche y aceite vegetal.

En los "No Newtonianos" de tipo pseudo plástico además de la característica anterior, es necesaria una fuerza mínima para que el fluido fluya, como en la pintura de látex, la crema dental y la pasta de tomate.

En los elementos reopécticos la viscosidad aumenta cuando la tasa de cizallamiento aumenta: la arcilla.

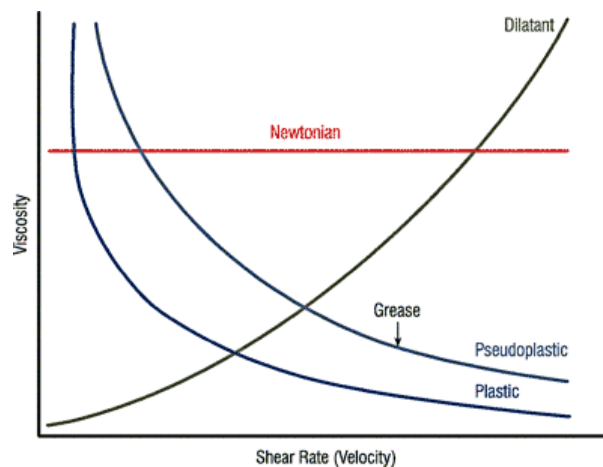


Figura 6

Fluid	Absolute Viscosity		
	(N s/m ² , Pa s)	(centipoise, cP)	(10 ⁻⁴ lb/s ft)
Acetic acid	0.001155	1.155	7.76
Acetone	0.000316	0.316	2.12
Alcohol, ethyl (ethanol)	0.001095	1.095	7.36
Alcohol, methyl (methanol)	0.00056	0.56	3.76
Alcohol, propyl	0.00192	1.92	12.9
Benzene	0.000601	0.601	4.04
Blood	0.003 - 0.004		
Bromine	0.00095	0.95	6.38
Carbon Disulfide	0.00036	0.36	2.42
Carbon Tetrachloride	0.00091	0.91	6.11
Castor Oil	0.650	650	
Chloroform	0.00053	0.53	3.56
Decane	0.000859	0.859	5.77
Dodecane	0.00134	1.374	9.23
Ether	0.000223	0.223	1.50
Ethylene Glycol	0.0162	16.2	109
Trichlorofluoromethane refrigerant R-11	0.00042	0.42	2.82
Glycerine	0.950	950	6380
Heptane	0.000376	0.376	2.53
Hexane	0.000297	0.297	2.00
Kerosene	0.00164	1.64	11.0
Linseed Oil	0.0331	33.1	222
Mercury	0.0015	1.53	10.3
Milk	0.003		
Octane	0.00051	0.51	3.43
Phenol	0.0080	8.0	54
Propane	0.00011	0.11	0.74
Propylene	0.00009	0.09	0.60
Propylene glycol	0.042	42	
Toluene	0.000550	0.550	3.70
Turpentine	0.001375	1.375	9.24
Water, Fresh	0.00089	0.89	6.0

Tabla 3⁴

La tabla 3 resume la viscosidad absoluta o dinámica en cP (mPa-s) de varias sustancias conocidas

La viscosidad depende de la temperatura y en los líquidos disminuye cuando T aumenta. Bajo condiciones de presión constante, a mayor viscosidad menor velocidad del fluido.

Mientras que en los líquidos la viscosidad disminuye cuando la temperatura aumenta, en los gases la viscosidad aumenta con la temperatura, debido

⁴ https://www.engineeringtoolbox.com/absolute-viscosity-liquids-d_1259.html

fundamentalmente al aumento de colisiones entre moléculas cuando aumenta la temperatura.

gases	T (°C)	η ($\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$)
air	15	17.9
hydrogen	0	8.42
helium	0	18.6
nitrogen	0	16.7
oxygen	0	18.1

Tabla 4

También se define la viscosidad cinemática, como la relación entre la viscosidad dinámica de un fluido y su densidad:

$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\text{Pa}\cdot\text{s}}{\text{kg}/\text{m}^3} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$	7
--	---

En el sistema SI la unidad es el *Stoke* (St) = $10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$, pero es más común emplear el centistoke igual a $1 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$. La viscosidad cinemática es la resistencia de un fluido a fluir bajo el efecto de la gravedad.

Ejemplo 2⁵ . La viscosidad del aceite lubricante para motores varía con la temperatura y la presión. Como las condiciones de operación se conocen detalladamente, el aceite lubricante se puede especificar claramente. El número SAE (Society of Automotive Engineers) describe el comportamiento del aceite lubricante para las condiciones de arranque y operación.

El primer número, siempre seguido por la letra W, describe el comportamiento en las condiciones de arranque y el segundo número para las condiciones de alta temperatura de operación.

⁵ [Society of Automotive Engineers](#) (SAE), December 1999

Viscosity Grades for Motor Oils: Low Temperature Specifications

sae prefix	cranking maximum	dynamic viscosity (mPa·s)		
		temperature (°C)	pumping maximum	temperature (°C)
0W	6,200	-35	60,000	-40
5W	6,600	-30	60,000	-35
10W	7,000	-25	60,000	-30
15W	7,000	-20	60,000	-25
20W	9,500	-15	60,000	-20
25W	13,000	-10	60,000	-15

Viscosity Grades for Motor Oils: High Temperature Specifications

sae suffix	kinematic viscosity (mm ² /s)	dynamic viscosity (mPa·s)
	low shear rate at 100 °C	high shear rate at 150 °C
20	5.6 - 9.3	>2.6
30	9.3 - 12.5	>2.9
40	12.5 - 16.3	>2.9*
40	12.5 - 16.3	>3.7**
50	16.3 - 21.9	>3.7
60	21.9 - 26.1	>3.7

* 0W-40, 5W-40, 10W-40 ** 15W-40, 20W-40, 25W-40

Tabla 5

Aceite grado 10W-40 tendrá una viscosidad dinámica no mayor de 7000 mPa·s (o cP) cuando está almacenado en el cárter a una temperatura tan baja como -25 °C. y una viscosidad dinámica no menor de 2.9 mPa·s (o cP) en los compartimentos de alta presión del motor a una temperatura cercana a la de recalentamiento de 150 °C. Para el mismo aceite la viscosidad cinemática es de 12.5 a 16.3 $\frac{mm^2}{s}$ o cS a una temperatura de 100°C.



Tabla 6

"25W-60: Si elije un aceite para motor 25W-60 fluirá como un aceite de viscosidad 25 en climas fríos y, a continuación, con la viscosidad de un aceite de viscosidad 60 cuando el motor est  a la temperatura máxima. 25W-60 está especialmente formulado para automóviles con más de 100 000 kilómetros"⁶

Número de Reynolds

Los factores que afectan el flujo de un fluido se relacionan en un parámetro adimensional llamado Número de Reynolds:

$Re = \frac{f}{Dv} = \frac{vD\rho}{\eta} = \frac{vD}{\nu}$	8
--	---

⁶ https://www.castrol.com/es_co/colombia/home/motor-oil-and-fluids/engine-oils/engine-oil-viscosity-grades/25w-60.html

Si el flujo se expresa como flujo másico el número de Reynolds también se puede escribir como:

$R_e = \frac{\dot{m}}{\eta D}$	9
--------------------------------	---

Las variables se deben expresar en el mismo sistema de unidades:

$$v = \text{velocidad} \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$D = \text{diametro interno del ducto} \ (m)$$

$$\rho = \text{densidad} \left(\frac{kg}{m^3} \right)$$

$$\eta = \text{viscosidad absoluta o dinámica} \ (Pa - s)$$

$$\nu = \text{viscosidad cinemática} \left(\frac{m^2}{s} \right)$$

$$f = \text{tasa de flujo volumétrico} \left(\frac{m^3}{s} \right)$$

$$\dot{m} = \text{tasa de flujo másico} \left(\frac{kg}{s} \right)$$

Para una combinación de baja velocidad del fluido y alta viscosidad el número de Reynolds es bajo y el fluido fluye en capas suaves, con un perfil parabólico: baja velocidad en las capas cercanas a la pared del ducto y alta en el centro. Este patrón se denomina Flujo laminar y se asocia con $R_e \leq 2000$

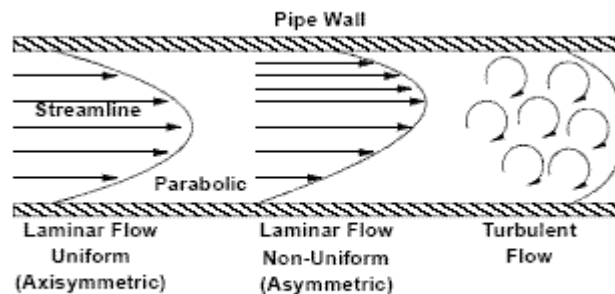


Figura 7

Para una combinación de alta velocidad y baja viscosidad el flujo se rompe en remolinos turbulentos de velocidad promedio igual, formando un patrón de flujo turbulento. La viscosidad es menos influyente y el perfil de velocidad es más

uniforme. Este régimen está asociado con $R_e \geq 4000$. Entre los dos valores de número de Reynolds existe una zona de transición.

Una visión práctica de los regímenes de flujo se obtiene observando el flujo turbulento del humo expedido por un cigarrillo y el avance laminar de la ceniza. También se puede observar en el flujo de agua a baja y alta velocidad.



Flujo laminar: flujo suave, en capas, común a bajas velocidades



Figura 8⁷ Flujo turbulento: flujo en remolinos, aparece a grandes velocidades

⁷ © 2009 Haukur Herbertsson. Sin royalties: esta imagen está disponible para uso no comercial. # Creative: 149270744

Ejemplo 3. Calcular el número de Reynolds para la siguiente aplicación:

- Flujo de agua: 285 l/m; Temperatura agua: 70 °C; Tubería de cobre tipo K, diámetro nominal: 1".
- ¿Para qué tasa de flujo el régimen es laminar?

El diámetro interno de la tubería de cobre tipo K⁸:

Dimensions and Physical Characteristics of Copper Tube TYPE K								
Nominal or standard size (inches)	Nominal dimensions (inches)			Calculated values (based on nominal dimensions)				
	(mm)			Cross sectional area of bore (square inches)	Weight of tube only (pounds per linear foot)	Weight of tube & water (pounds per linear foot)	Contents of tube (per linear foot)	
	Outside diameter	Inside diameter	Wall thickness				Cubic feet	Gallon
1/4	0.375 9.52	0.305 7.75	0.035 0.89	0.073	0.133	0.177	0.00051	0.00379
3/8	0.500 12.7	0.402 10.2	0.049 1.24	0.127	0.269	0.324	0.00088	0.00660
1/2	0.625 15.9	0.527 13.4	0.049 1.24	0.218	0.344	0.438	0.00151	0.0113
5/8	0.750 19	0.652 16.6	0.049 1.24	0.334	0.418	0.562	0.00232	0.0174
3/4	0.875 22.2	0.745 18.9	0.065 1.65	0.436	0.641	0.829	0.00303	0.0227
→ 1	1.125 28.6	0.995 25.3	0.065 1.65	0.778	0.837	1.18	0.00540	0.0404

Tabla 7

D= 25,3 mm. Área de la sección transversal: $5,02 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

La velocidad del fluido:

$$v = \frac{q}{A} = \frac{4,75 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{5,02 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 9,46 \text{ m/s}$$

La viscosidad dinámica o absoluta del agua a T = 30°C:

$$\nu = 8,01 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

⁸ engineeringtoolbox.com

Temperature - t - (°C)	Dynamic Viscosity - μ - (10 ⁻³ Pa s (N s/m ²))	Kinematic Viscosity - ν - (10 ⁻⁶ m ² /s)
0	1.787	1.787
5	1.519	1.519
10	1.307	1.307
20	1.002	1.004
30	0.798	0.801
40	0.653	0.658
50	0.547	0.553
60	0.467	0.475
70	0.404	0.413
80	0.355	0.365
90	0.315	0.326
100	0.282	0.294

Tabla 8

El número de Reynolds:

$$Re = \frac{9,45 \text{ m/s} \times 2,53 \times 10^{-2} \text{ m}}{4,13 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}} = 5,79 \times 10^5$$

Flujo en régimen turbulento.

b. Para que el flujo este en régimen laminar, $Re < 2000$, la velocidad debe ser:

$$v \leq \frac{4,13 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \times 2 \times 10^3}{2,53 \times 10^{-2} \text{ m}}$$

$$v \leq 3,26 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Que corresponde a un flujo:

$$q \leq 3,26 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 5,02 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$q \leq 0,98 \text{ l/m}$$

Ejemplo 4. Regímenes de flujo en situaciones de la naturaleza.

- a. Una ballena de 10 m nada a una velocidad de 10 m/s en agua de mar, densidad 1013 kg/m^3 y viscosidad absoluta $1,08 \times 10^{-3} \text{ Pa-s}$.



Figura 9

$$Re = \frac{vD\rho}{\eta} = \frac{10 \text{ m/s} \times 10 \text{ m} \times 1.013 \text{ kg/m}^3}{1,08 \times 10^{-3} \text{ Pa-s}} = 9,37 \times 10^7$$

Régimen turbulento

- b. Una bacteria de longitud = $1 \text{ }\mu\text{m}$ nada a una velocidad de $30 \text{ }\mu\text{m/s}$, en la misma agua:



Figura 10

$$R = 2,8 \times 10^{-5}$$

Régimen laminar, dominado por la fricción.

c. Velocidad de un nadador en agua a 30 °C aproximadamente 1 m/s, l = 1,8 m:

$$Re = \frac{1 \frac{m}{s} \times 1,8m}{8,01 \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}}$$

$$Re = 2,25 \times 10^6$$

Turbulento, predominan las fuerzas inerciales.

d. ¿Se puede nadar en miel a la misma temperatura de 30 °C?

Temp. [°C]	Dyn. Viscosity [mPa.s]	Kin. Viscosity [mm²/s]	Density [g/cm³]
40	1346.7	957.22	1.4069
38	1620	1150.4	1.4082
36	1983.6	1407.3	1.4095
34	2455.2	1740.2	1.4108
32	3075.2	2177.7	1.4121
30	3872.6	2739.8	1.4134

Tabla 9

$$Re = \frac{1 \frac{m}{s} \times 1,8m}{2,74 \times 10^{-3} \frac{m^2}{s}} = 657$$

Laminar: predomina la fricción. No se puede nadar.

Flujo laminar

Para régimen de flujo laminar, tubería recta de sección circular de longitud l > r y fluido Newtoniano de viscosidad dinámica μ constante, la resistencia al flujo es:

$R_h = \frac{8\mu l}{\pi r^4}$	10
--------------------------------	----

El flujo depende de la fricción y es lineal respecto a la presión (Bulk Flow Law):

$$q = \frac{1}{R_h} \Delta p$$

La ley de Poiseuille:

$q = \left(\frac{\pi r^4}{8 \mu l} \right) \Delta P$	11
---	----

Se debe emplear como un indicativo del flujo e incluye los factores que se necesitan para evaluarlo.

El parámetro más crítico es la variación en el diámetro del conducto, que afecta al flujo a la cuarta potencia: un aumento del 20% en el radio del conducto, duplica el flujo.

Flujo de sangre humana.⁹

El flujo laminar es más eficiente que el turbulento, debido a las pérdidas internas de energía por la turbulencia. Parte de la energía perdida se convierte en ruido.

En la aorta ($d=2,5$ cm, $v = 50$ cm/s, $\eta = 0.04$ Poise, $\rho = 1$ g/cc), $Re = 3125$, turbulento.

Fuera de los grandes vasos el flujo es laminar: para un vaso de diámetro 1 cm $Re = 1250$, laminar.

Esta estrategia de modificación de flujo en función del radio permite al sistema cardiovascular variar selectivamente el flujo de sangre hacia los diferentes órganos. Por ejemplo: aumentar flujo hacia los músculos durante ejercicio y al tracto gastrointestinal durante la digestión.

Si los cambios fueran en función de la presión arterial, se modificaría la presión para todos los órganos; sería un sistema muy ineficiente desde el punto de vista energético.

7. ⁹ Francis L. Belloni. TEACHING THE PRINCIPLES OF HEMODYNAMICS. VOLUME 22 : NUMBER 1 – ADVANCES IN PHYSIOLOGY EDUCATION – DECEMBER 1999

Ejemplo 5. En el cuerpo humano el volumen de sangre es de 5 l y el flujo cardiaco normal, llamado CO, es de 5l/min (todo el volumen circula en un minuto).

La CO se define como:

$$CO = \frac{\text{Mean Arterial Pressure} - \text{Rigth Atrial Pressure}}{\text{Total Peripheral Resistance}}$$

- a. Cuál es la resistencia Total cuando la presión arterial media es de 95 mmHg, la presión auricular derecha es de 5 mmHg.

$$TPR = \frac{\text{Mean Arterial Pressure} - \text{Rigth Atrial Pressure}}{CO}$$

$$TPR = \frac{90 \text{ mmHg}}{5 \text{ lmin}^{-1}} = 18 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{l}^{-1} = 0.018 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}$$

Para la representación vascular mostrada:

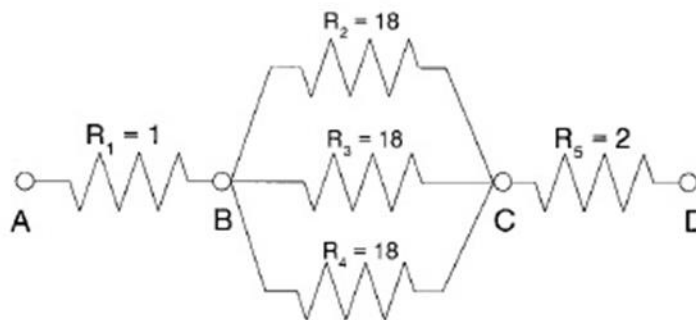


Figura 11

$P_a = 90 \text{ mmHg}$; $P_d = 0$; R en $\text{mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}$

- b. ¿Cuál es el flujo total?

$$R_T = (1 + 6 + 2) = 9 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}$$

$$q = \frac{\Delta P}{R_T} = \frac{90 \text{ mmHg}}{9 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}} = 10 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

c. ¿Cuáles son las presiones intermedias B y C?

$$P_B = (90 - 10) = 80 \text{ mmHg}$$

$$P_C = 2 \times 10 = 20 \text{ mmHg}$$

d. ¿Si se presenta una oclusión total en la rama 4, cual es el flujo total?

La nueva resistencia es:

$$R_{T2} = (1 + 9 + 2) = 12 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}$$

El nuevo flujo:

$$q_2 = \frac{\Delta P}{R_{T2}} = \frac{90 \text{ mmHg}}{12 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}} = 7.5 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

e. ¿Si se adiciona un vaso sanguíneo con resistencia de $18 \text{ (mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1})$ en paralelo con la combinación R_2 , R_3 y R_4 original, cuál es el nuevo flujo?

La nueva resistencia es:

$$R_3 = (1 + 4.5 + 2) = 7.5 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}$$

El nuevo flujo:

$$q_3 = \frac{\Delta P}{R_{T3}} = \frac{90 \text{ mmHg}}{7.5 \text{ mmHg} \cdot \text{min} \cdot \text{ml}^{-1}} = 12 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$$

LEYES DE LOS ELEMENTOS

Tres características de los fluidos se pueden aproximar como elementos concentrados: la resistencia al paso de un fluido, la capacidad hidráulica y la inercia asociada a un fluido en movimiento. Se desarrollarán modelos para las dos primeras, mientras que los efectos de la inercia no se considerarán en este curso.

También se incluirá un modelo básico de la bomba centrífuga que actúa como generador de presión y de la válvula o restricción variable.

Resistencia

Cuando un fluido pasa a través de un tubo corto, o de una restricción fija (como la platina de orificio) o una restricción variable (como una válvula), hay una caída de presión a lo largo del elemento.

Para el desarrollo del modelo se asume un fluido incompresible, estable, en una dimensión (no hay cambio de altura), en régimen de flujo turbulento y sin cambio de fase (siempre líquido)

El perfil del fluido a través de una restricción como la platina de orificio¹⁰ es:

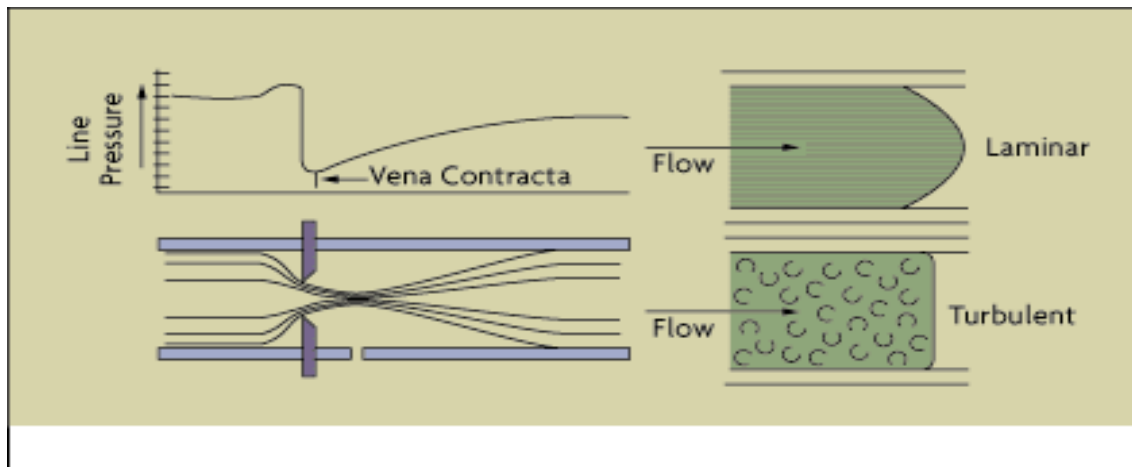


Figura 12

Cuando el flujo pasa a través de una restricción fija, el área de la sección transversal disminuye, la velocidad aumenta y la presión disminuye.

El punto de mínima área, máxima velocidad y mínima presión se denomina "vena contracta" y se presenta aguas abajo de la restricción.

La ecuación de continuidad o conservación de masa:

$q = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \text{constante}$	12
--	----

q : tasa de flujo $\frac{m^3}{s}$
 v : velocidad $\frac{m}{s}$

¹⁰ Meriam – Orifice Plate Data Sheet

A : área sección transversal m^2

En términos de la masa la ecuación es:

$$\rho q = (\rho v)A = \text{constante}$$

$$\rho: \text{densidad} \left(\frac{kg}{m^3} \right)$$

Asumiendo densidad constante, en la vena contracta la ecuación de continuidad es:

$$v_{VC} \cdot A_{VC} = A_1 v_1 \Rightarrow v_{VC} = v_1 \left(\frac{A_1}{A_{VC}} \right)$$

La ecuación de energía (Bernoulli) aplicadas aguas arriba de la vena contracta:

$$\left[\text{Energía mecánica} \right]_{\text{del fluido}} + \left[\text{Energía térmica} \right]_{\text{del fluido}} - \left[\text{Trabajo hecho} \right]_{\text{por el fluido}} = \text{Constante}$$

$\left[\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z \right] + [-q + U] - W = \text{Constante}$	13
--	----

El primer término es la suma de la energía cinética más la energía potencial asociada con la presión estática más la energía potencial asociada con la elevación. El segundo término es la suma de la energía interna del fluido menos el calor perdido y el tercero es el trabajo hecho por el fluido. Para este análisis se asume que la elevación z no cambia.

Un aumento en la velocidad del fluido (v) implica una disminución de la presión y viceversa. Como la presión de salida es menor que la presión de entrada no se recupera toda la energía mecánica.

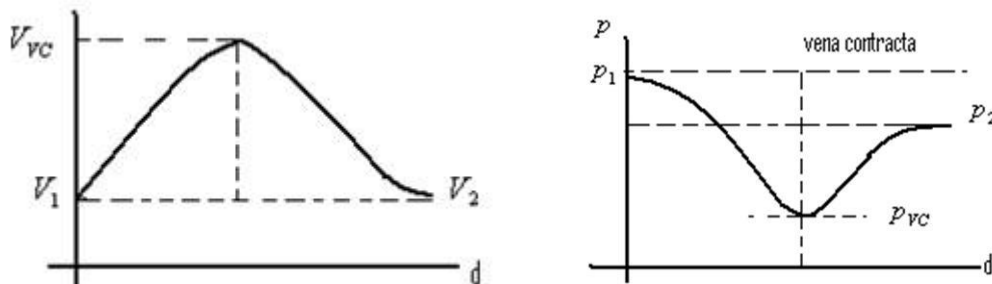


Figura 13

Cuando las áreas de las secciones transversales sean iguales, la velocidad inicial y la velocidad final serán iguales.

Cuando el fluido pasa a través de la restricción parte de la energía mecánica del fluido, se transforma de potencial a cinética.

Planteando la ecuación de la energía mecánica con $\Delta gz = 0$

$$\left[\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 \right] = \frac{\rho v_{VC}^2}{2} + P_{VC}$$

Tomando diámetros arriba y diámetros abajo de la vena contracta se puede asumir que no se hace trabajo mecánico en la restricción ($W=0$) y que la energía disipada se convierte en calor, y la ecuación de Bernoulli se convierte en:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + H_1$$

Como las velocidades son iguales:

$$p_1 = p_2 + H_1$$

H_1 es proporcional al cuadrado de la velocidad y a la densidad e incluye todas las pérdidas de energía debida a los efectos térmicos, ruido etc.

$$H_1 = K_1 \frac{\rho v^2}{2}$$

K_1 : Coeficiente de pérdida de presión.

$$p_1 - p_2 = K_1 \frac{\rho V_2^2}{2} \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{K_1 \rho}}$$

$q = A_2 v_2 = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{K_1 \rho}}$	14
--	----

Usando la definición de la gravedad específica:

$$G = \frac{\rho}{\rho_w}$$

$\rho_w = \text{densidad del agua}$

la ecuación característica flujo - presión de una restricción es:

$q = A_2 \sqrt{\frac{2}{K_1 \rho_w}} \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{G}}$	15
--	----

La relación **$q - \Delta p$** es no lineal y puede tener diferentes coeficientes:

Para una restricción tipo platina de orificio: $\beta = d/D$

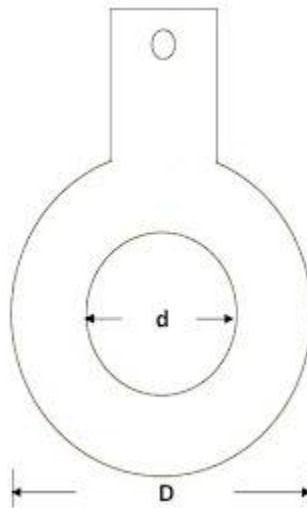


Figura 14

$$q = \left[\frac{C_d}{\sqrt{1 - \beta^4}} \epsilon \frac{\pi d^2}{4} \right] \sqrt{2\rho \Delta p}$$

C_d : coeficiente de descarga

ϵ : factor de expansión tubería

Para una tubería se define el factor de fricción, o coeficiente de resistencia, independiente del régimen de flujo, como:

$f = \frac{\Delta p_l}{\frac{1}{2} \rho \bar{v}^2} \left(\frac{d}{L} \right)$	16
--	----

V: velocidad promedio

D: diámetro tubería

L: longitud

f se calcula también a partir de la geometría del tubo.

En términos del flujo, las pérdidas de presión para un tramo de tubería recta, régimen turbulento son:

$\Delta p_l = f \frac{8 \rho L}{\pi^2} \left(\frac{q^2}{d^5} \right)$	17
--	----

Para un análisis aproximado de la caída de presión se pueden combinar las pérdidas en un tramo corto de tubería, con acoples y accesorios en la línea de instalación de una válvula (sin esta) como:

$\Delta p = k_L G_F (q)^2$	18
----------------------------	----

$$k_L = \text{coeficiente de fricción} \frac{Pa}{\left(m^3/s\right)^2};$$

G_f : gravedad específica del fluido

La válvula de control de flujo es una resistencia variable.

VALVULAS DE CONTROL.

Dispositivo para controlar el flujo a través de un tubo o conducto. Es en esencia, un orificio de restricción variable que modula, en respuesta a una señal de control, $m(t)$, el caudal de un fluido de proceso, $f(t)$, para mantener el equilibrio del sistema.

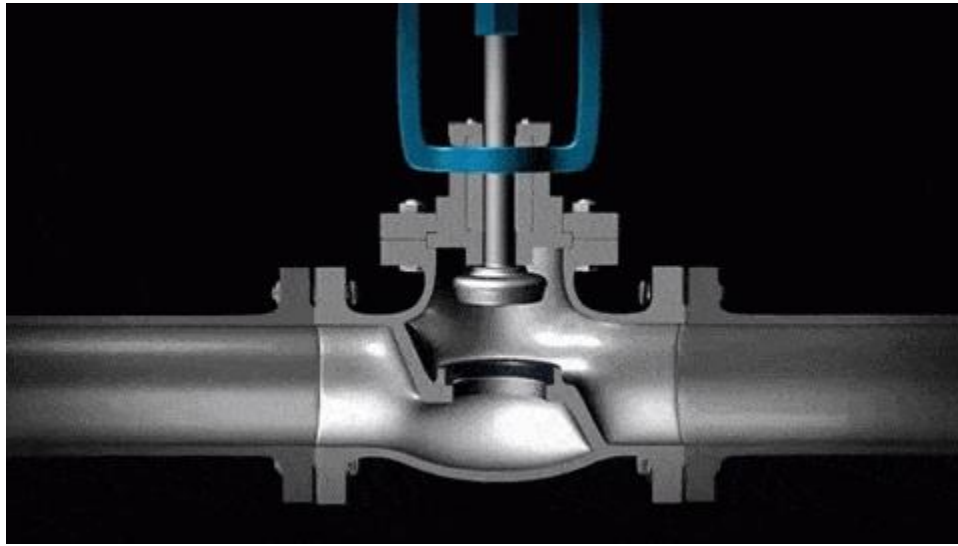


Figura 15

Las válvulas se pueden clasificar por su **Función** o su tipo de construcción, o por el tipo de movimiento etc.

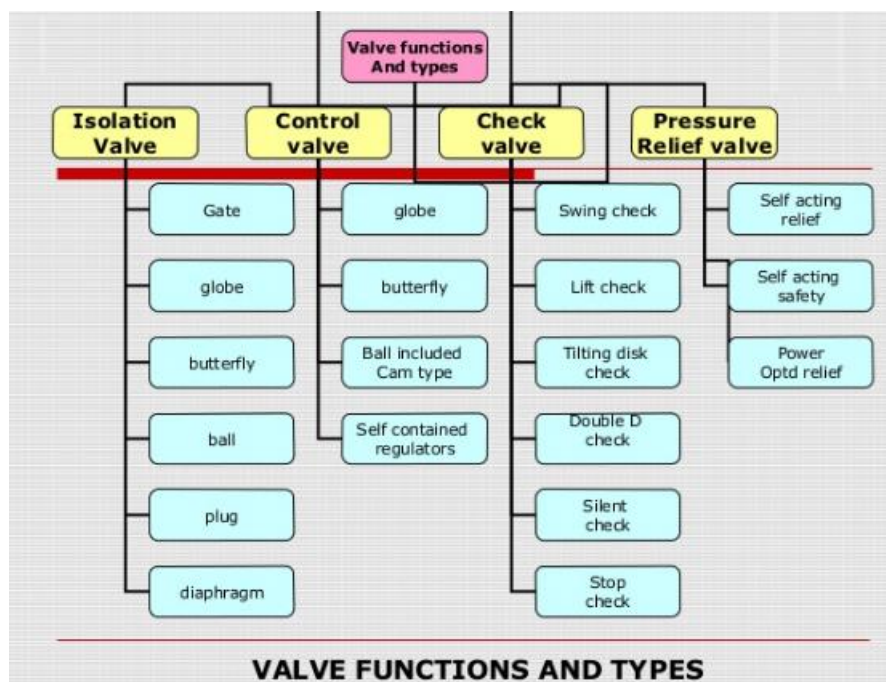


Figura 16¹¹

¹¹ Process Isolation Valves (Ian Sutton, in Plant Design and Operations (Second Edition), 2017

"**Process isolation** or battery limit valves are usually situated at the perimeter of a facility or operating unit. They typically cut off the flow of flammable or hazardous materials into the facility and should be safely accessible during a major emergency.

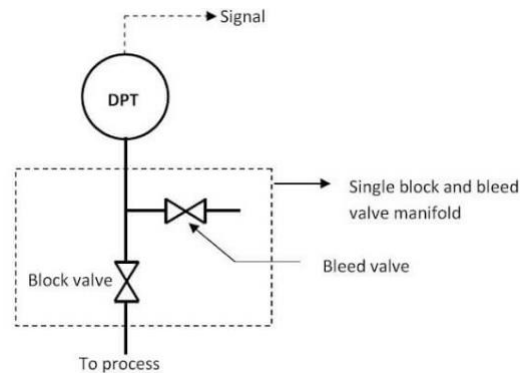


Figura 17

They may also be used to stop materials from leaving the facility to prevent the creation of problems downstream. They may have automatic actuators so that they can be operated remotely but they should always be in a location such that they can be operated manually.

Control Valve.

Control valves and on-off valves serve different purposes depending on the degree of control you need for your system. Control valves are more precise, whereas on-off valves are more all-or-nothing.

An on-off valve is a much less precise instrument than the control valve. It either allows for unimpeded flow or it shuts off flow completely.

A control valve regulates the rate of fluid flow as the position of the valve plug or disk is changed by an actuator. Control valves are used to maintain a process variable as close as possible to the desired set point.

On-off valves and control valves are similar in some senses, but the difference lies in their degrees of control. Where control valves can be very precise, on-off valves can do exactly what their name suggests: turn on or turn off. Each of the different valves has an important place in the system.

Check valves

Check valves are automatic valves that open with forward flow and close against reverse flow. They are also known as non-return valves.

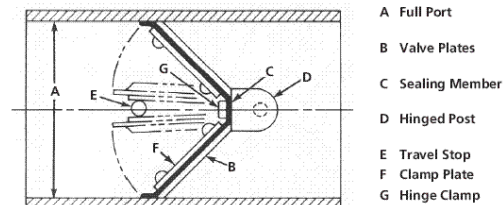


Figura 18

Pressure Relief Valves.¹²

A pressure Relief Valve is a safety device designed to protect a pressurized vessel or system during an overpressure event.

An overpressure event refers to any condition which would cause pressure in a vessel or system to increase beyond the specified design pressure or maximum allowable working pressure (MAWP).

The primary purpose of a pressure Relief Valve is protection of life and property by venting fluid from an over-pressurized vessel."



Figura 19

¹² (http://www.wermac.org/valves/valves_pressure_relief.html).

Ecuación de flujo

La ecuación 15 relaciona el flujo y la presión en una restricción es:

$$q = \left[A_2 \sqrt{\frac{2}{K_1 \rho_w}} \right] \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{G}}$$

Para una válvula:

$q = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{G_F}}$	19
---------------------------------------	----

C_v es el coeficiente de flujo de la válvula $\frac{gpm}{\sqrt{psi}}$: flujo de agua, en gpm, que pasa a través de la válvula totalmente abierta cuando la caída de presión es de 1 psi.

La ecuación q vs. Δp es no lineal, depende del punto de operación (\bar{q} y $\Delta \bar{p}$). Si este punto cambia durante el ciclo de trabajo las características instaladas o dinámicas del elemento cambian.

En el sistema SI se define K_v ($\frac{m^3/h}{\sqrt{Pa}}$): flujo de agua, en m^3/h , que pasa a través de la válvula totalmente abierta cuando la caída de presión es de 10^5 Pa (1 bar)

$$K_v = 0.86 C_v (m^3/h) \quad C_v = 1.16 K_v (gpm)$$

Ejemplo 6¹³. En el proceso se transfiere crudo desde un tanque de almacenamiento hasta una torre de separación. El flujo nominal es de 700 gpm, la gravedad específica es de 0.94 y la presión de vapor es de 13.85 psia a la temperatura de trabajo de 90 °F.

Sin válvula instalada, la caída de presión desde la descarga de la bomba hasta la entrada de la torre es de 6 psi.

Validar las posiciones de la válvula, Punto 1, Punto 2 y la Propuesta
Cuales deben ser las presiones P1 y P2

¹³ Tomado de referencia 10

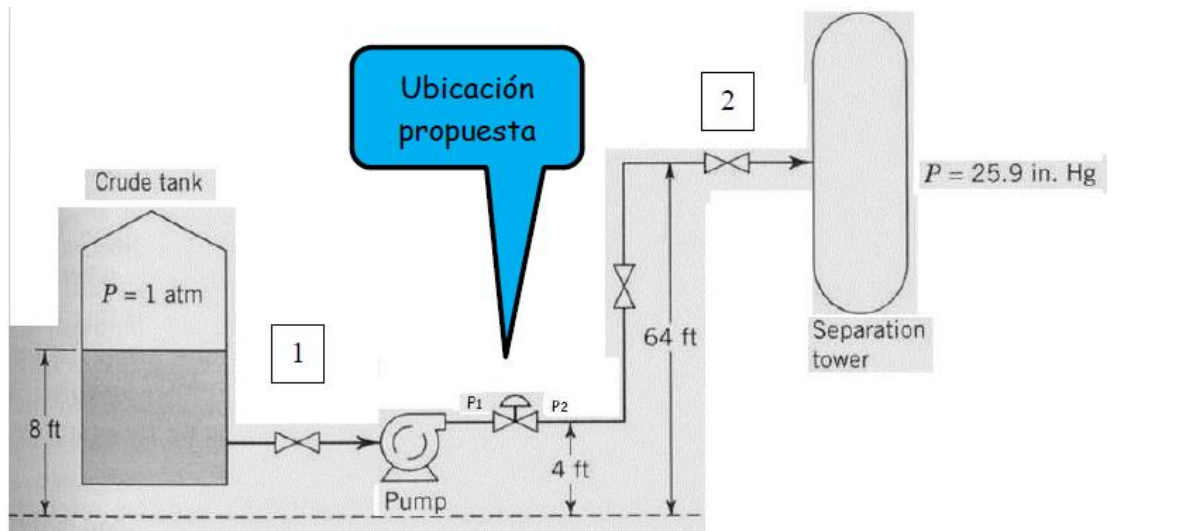


Figura 20

Posición 1: la válvula nunca se debe colocar en la succión de una bomba, la presión puede ser menor que la presión de vapor y se presentara "flashing" y posible cavitación.

Posición 2: La presión en la torre de separación es:

$$25.9 \text{ inch of mercury} = 12.7 \text{ psia} = -2 \text{ psig}$$

En el separador existe vacío, presión menor que la atmosférica. Como la presión de vapor del fluido es de 13.85 psia el fluido cambia de fase en cercanías de la torre de separación. Para que la válvula no presente problemas de "flashing" P_2 debe ser mayor que 13,85 psia.

¿Cuál debe ser la presión 2?

La cabeza hidrostática debida a los 60 ft de tubería vertical es:

En el sistema US:

$$p_H = S \times h = 0,94 \times 60 \text{ ft} = 56,4 \text{ ft} = 24,5 \text{ psi}$$

La caída de presión en la línea es de 6 psi (Como estas dos presiones son diferenciales, es lo mismo en psig que en psia)

Por lo tanto la presión P_2 debe ser mayor de:

$$P_2 > (24,5 + 6) + 12,7 = 43,2 \text{ psia}$$

$$P_2 > 28,5 \text{ psig}$$

La ubicación planteada en la gráfica es la más adecuada para la válvula.

¿Qué presión debe haber en la descarga de la bomba o P1?

Si se asume una caída de presión diferencial sobre la válvula de 5 psi, la bomba debe tener una presión de descarga de:

$$P_1 = 28,5 + 5 = 33,5 \text{ psig}$$

Ejemplo 7¹⁴. Calcular el máximo flujo a través de una válvula de 8" de diámetro y $C_{vmax} = 750 \frac{gpm}{\sqrt{psi}}$. La caída de presión disponible sobre la válvula es de 5 psi y el fluido tiene una gravedad específica de 0,94

$$q = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{G_F}} = 750 \sqrt{\frac{5}{0,94}} = 1730 \text{ gpm}$$

Conexión serie de restricciones hidráulicas

Dos elementos con características de restricción similares instalados en serie. Se asume que Δp_0 se mantiene constante, independiente del flujo Q .

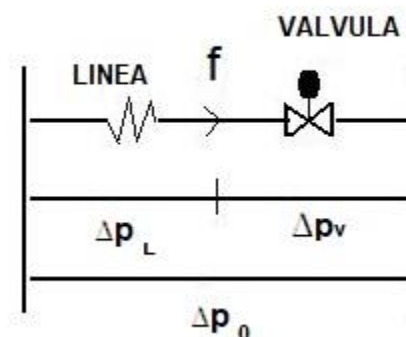


Figura 21

¹⁴ Tomado de referencia 10

La caída de presión sobre el elemento uno, línea, se puede representar a partir de la ecuación 18:

$$\Delta p_L = k_L G q^2$$

La caída de presión sobre la válvula es:

$$\Delta p_v = G \left(\frac{q}{C_v} \right)^2$$

La caída de presión total es:

$$\Delta p_0 = \Delta p_v + \Delta p_L = \left(\frac{1}{C_v^2} + k_L \right) G q^2$$

El flujo a través de la conexión serie de dos elementos restrictivos es:

$q = \frac{C_v}{\sqrt{1 + k_L C_v^2}} \sqrt{\frac{\Delta p_0}{G}}$	20
--	----

Este flujo es menor que el flujo que puede pasar a través de cualquiera de los elementos conectados independientemente.

Ejemplo 8. Sin la válvula del ejemplo 6 instalada, la caída de presión dinámica sobre la tubería, para un flujo nominal de 700 gpm, es de 6 psi. ¿Cuál es el máximo flujo a través de la válvula instalada en la línea?

El coeficiente de fricción de la línea y accesorios es:

$$k_L = \frac{\Delta p}{G_F q^2}$$

$$k_L = \frac{6}{0,94 \times 700^2} = 1,3 \times 10^{-5} \frac{\text{psi}}{\text{gpm}^2}$$

De la ecuación 20:

$$q_{max} = \frac{C_{vmax}}{\sqrt{1 + k_L C_{vmax}^2}} \sqrt{\frac{\Delta p_0}{G}} = \frac{750}{\sqrt{1 + 1,3 \times 10^{-5} (750)^2}} \sqrt{\frac{11}{0,94}}$$

$$q_{max} = 260,1 \times 3,42 = 889 \text{ gpm}$$

La capacidad inherente (sin instalar) de la válvula es de 1730 gpm @ 5psi de caída de presión. Cuando se instala en la tubería, la resistencia de esta limita el flujo máximo a través de la conexión serie a 889 gpm, quedando una capacidad instalada adicional del 27%.

BOMBAS.¹⁵

En los sistemas hidráulicos la fuente de energía es una bomba constituida por un propulsor excitado por un motor eléctrico. El rendimiento de una bomba está definido por su curva característica que establece el rango de flujos a las diferentes presiones posibles.

El punto de operación en la curva Presión vs Flujo estará en línea con la demanda de flujo y las pérdidas de presión del sistema alimentado por la bomba. Existen dos familias principales de bombas: centrífugas y de desplazamiento positivo (rotatorias y reciprocantes)

Bombas centrífugas

La bomba centrífuga impulsa el fluido por medio de un elemento rotatorio y, está constituida por dos componentes fundamentales: el impulsor (impeller) y la espiral (volute).

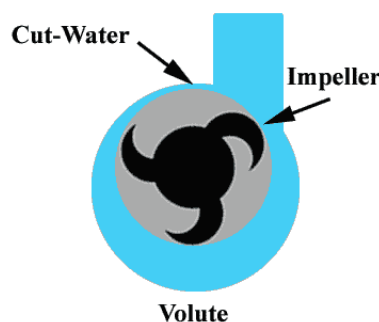


Figura 22

¹⁵ Simon Hotton How to read a Pump curve. https://www.northridgepumps.com/article-9_how-to-read-a-pump-curve, Accessed Oct 2022

El impulsor es manejado por un motor e imprime velocidad al fluido y la espiral fuerza al fluido a que salga del cuerpo de la bomba a través del puerto de descarga, convirtiendo la velocidad en presión. Esto se logra por la disposición del impulsor dentro de la espiral, formando un paso estrecho en la descarga. El impulsor empuja al fluido con la superficie externa, no con la concavidad interna.

En este proceso de conversión de energía mecánica a hidráulica se crea una presión negativa en la cavidad de la bomba, que succiona más líquido por su puerto de entrada. La bomba centrífuga también se describe como una "máquina de flujo".

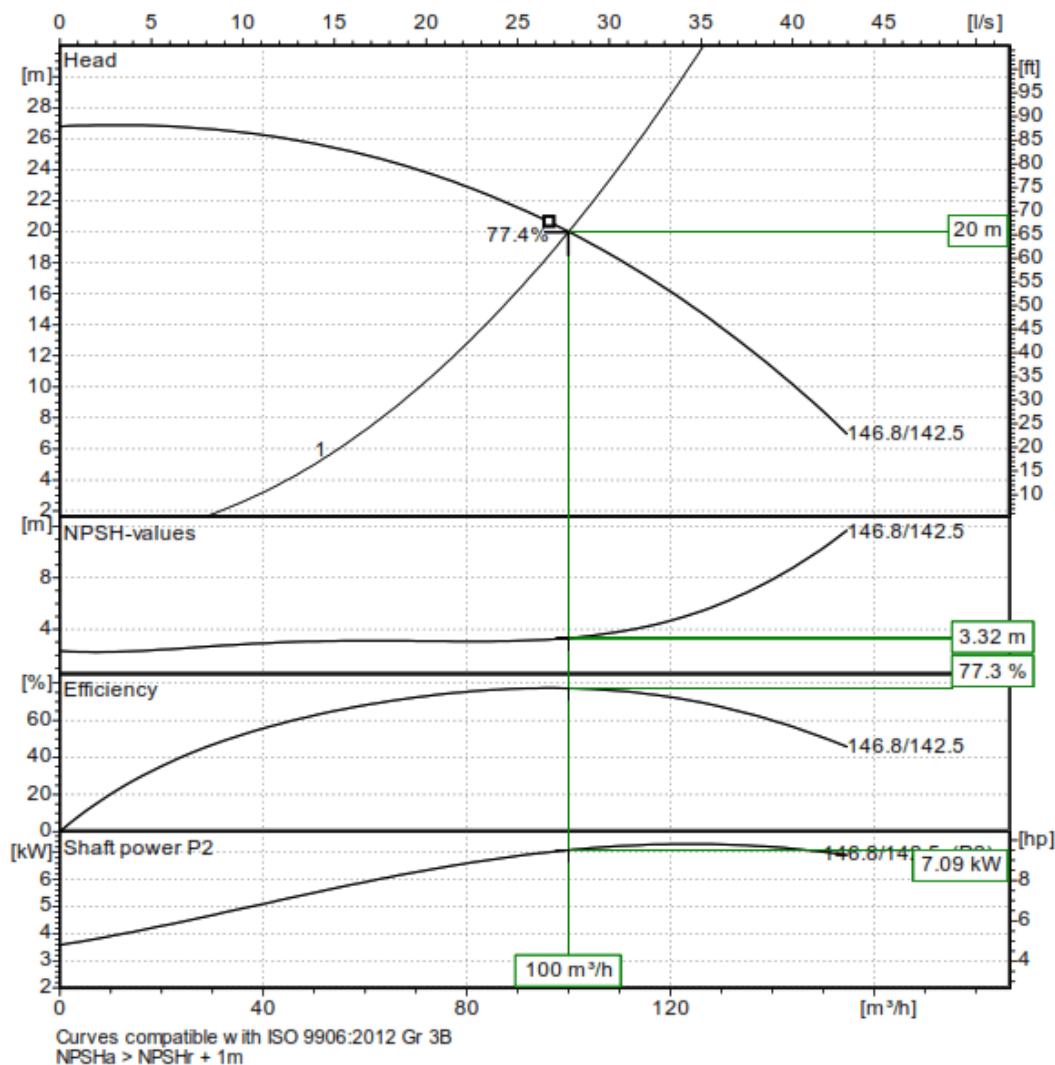


Figura 23

La característica Δp vs. Q de una bomba centrífuga es no lineal, y depende de las revoluciones (ω) del propulsor. En el eje izquierdo presión de descarga (típicamente en metros cabeza de agua), en el eje horizontal el flujo (típicamente en l/s). (El numero al final de la curva indica el diámetro del impeller)

La segunda gráfica muestra la Cabeza Neta de Succión Positiva (NPSH: Net Positive Suction Head) requerida para suministrar el flujo y la presión de descarga necesarios.

La tercera gráfica muestra la eficiencia en la conversión de energía y el punto para el cual se logra la mejor eficiencia (BEP: Best Efficiency Point). La última gráfica muestra la potencia requerida en el eje.

Sobre la curva de la bomba se superpone la curva del sistema: la presión de descarga y el flujo que demanda el sistema. Donde las dos curvas se cruzan es el punto de operación del sistema

Para las gráficas mostradas el punto de operación está en 20 mca (metros cabeza de agua) para un flujo de 100 m³/h (27.8 l/s), para lo cual se requiere una NPSH de 3.32 mca, la eficiencia de la bomba es de 77.3% y la potencia en el eje es de 7.1 kW. (Cuando la demanda del sistema cambie, se necesita un esquema de control para asegurar la presión y flujo requeridos y la operación de la bomba en región eficiente y segura)

Para analizar sistemas hidráulicos que incluyen bomba se define sobre la característica de la bomba el punto de operación $(\Delta \bar{p}, \bar{f})$ para una velocidad determinada $\bar{\omega}$.

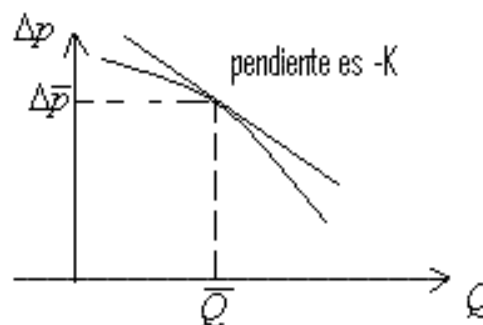


Figura 24

$$\Delta \hat{p} = -K \hat{f}$$

$$\hat{f} = -\frac{1}{K} \Delta \hat{p}$$

Con $-\frac{1}{K} = \left. \frac{df}{d\Delta p} \right|_{(\Delta \hat{p}, \hat{f})}$

Bomba de desplazamiento positivo

Un cuerpo desplazador se introduce dentro de la cámara de la bomba y reduce el volumen dentro de ese espacio cerrado, empujando una porción del fluido fuera de la bomba. El volumen que se desplaza depende del tamaño de la bomba y por ello estas bombas también se llaman “bombas volumétricas”.

Cuando el desplazador, por ejemplo, un pistón en las bombas de pistón se saca de la cámara crea una presión negativa que absorbe fluido por el puerto de entrada.

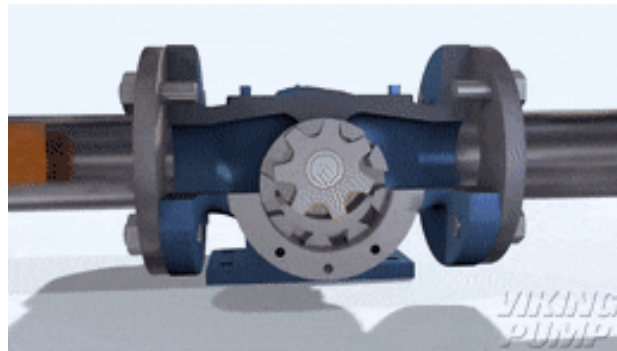


Figura 25 Bombas de desplazamiento positivo rotatoria

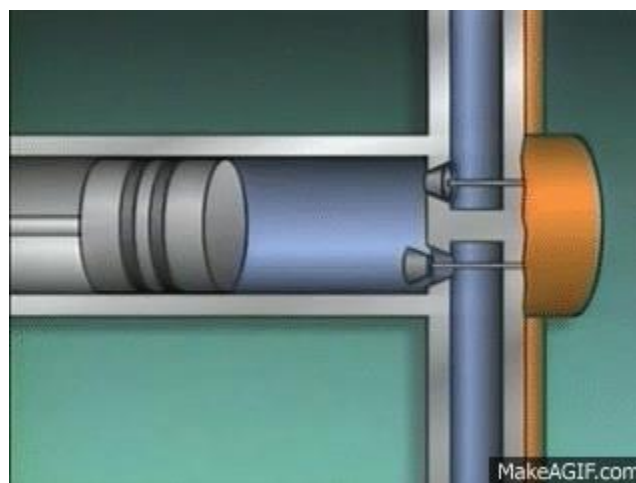


Figura 26 Bombas de desplazamiento positivo reciprocante

A diferencia de las bombas centrífugas, la curva característica de una bomba de desplazamiento es generalmente una línea recta.

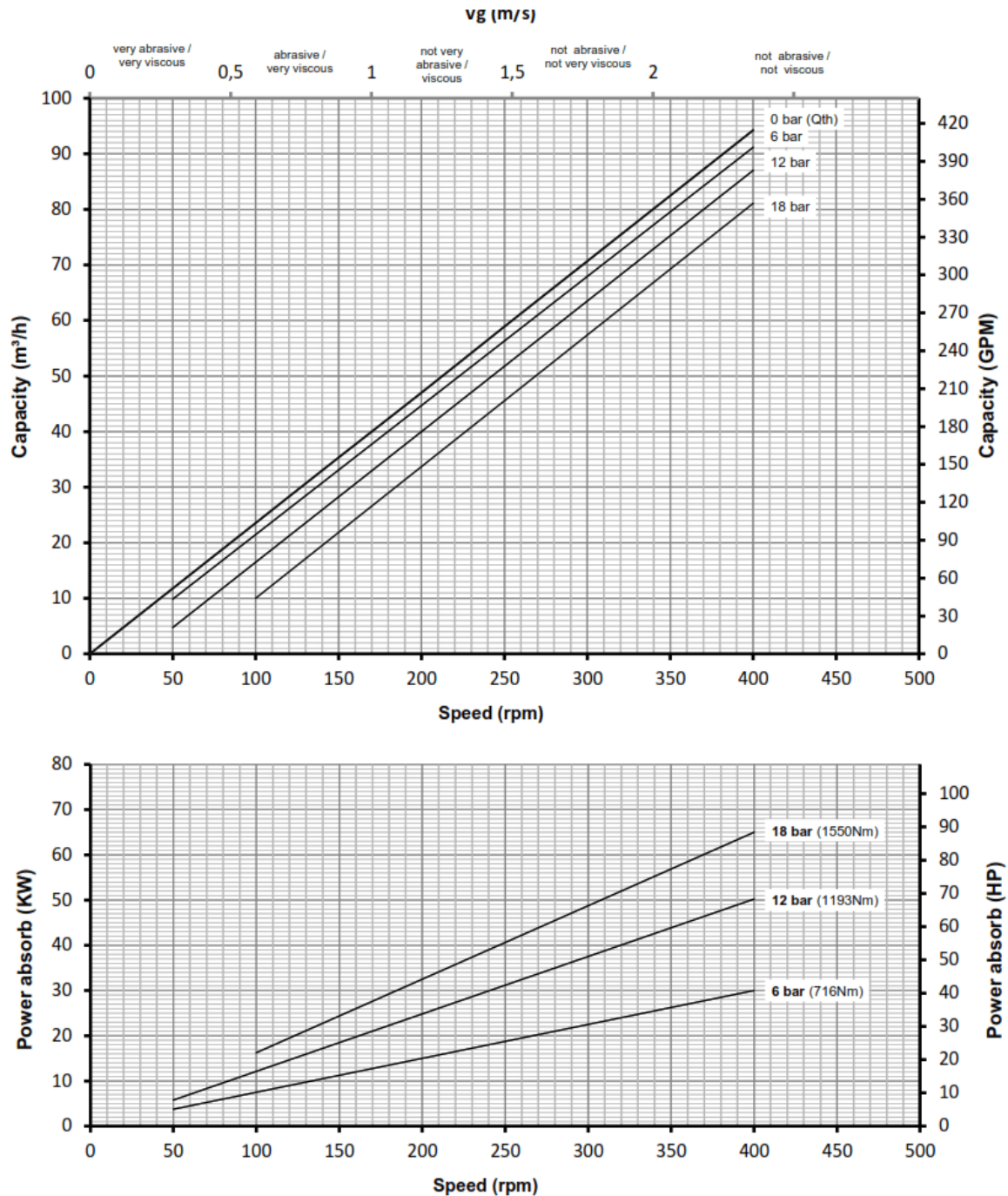


Figura 27

En la tabla 10 se comparan las características de los dos tipos de bombas

Property	Centrifugal	Positive Displacement
Effective Viscosity Range	Efficiency decreases with increasing viscosity (max. 200 Cp)	Efficiency increases with increasing viscosity
Pressure tolerance	Flow varies with changing pressure	Flow insensitive to changing pressure
	Efficiency decreases at both higher and lower pressures	Efficiency increases with increasing pressure
Priming	Required	Not required
Flow (at constant pressure)	Constant	Pulsing
Shearing (separation of emulsions, slurries, biological fluids, food stuffs)	High speed damages shear-sensitive mediums	Low internal velocity. Ideal for pumping shear sensitive fluids

Tabla 10¹⁶

Curva sistema hidráulico ¹⁷

Cabeza Total: suma de la presión estática más presión dinámica que la bomba debe alcanzar.

Cabeza Estática: función de la diferencia de altura entre la succión y la descarga (o la contrapresión que debe superar la bomba).

Cabeza dinámica debida a las perdidas por fricción en el sistema de tuberías, acoples, reducciones etc.

El punto de operación del Sistema es la intercepción entre la curva del Sistema y la curva de la bomba.

Cuando hay cambios en el flujo o en las condiciones de presión del proceso aguas abajo de la bomba, es necesario ajustar las diferencias en flujo y presión.

¹⁶ <https://www.michael-smith-engineers.co.uk/resources/useful-info/centrifugal-pumps>

¹⁷ Al-Kjalifah M. & McMillan G. Control

Valves vs. Variable speed drive for Flow control, ISA Automation Island July/August 2013

Hay dos esquemas fundamentales de control: por medio de válvula y empleando variadores de velocidad (No dentro del alcance de este curso)

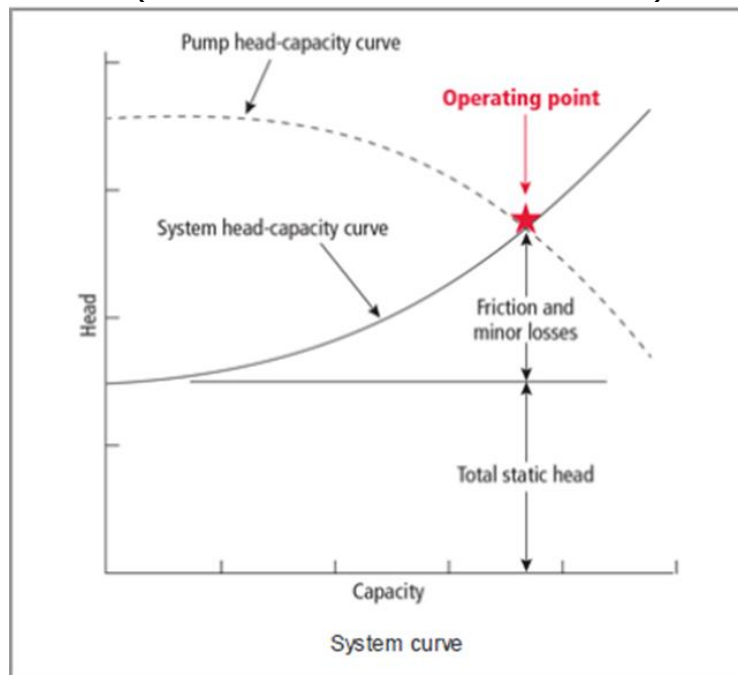


Figura 28 Curva sistema hidráulico

Para bomba centrífuga de velocidad constante se emplea válvula de control instalada en la descarga de la bomba:

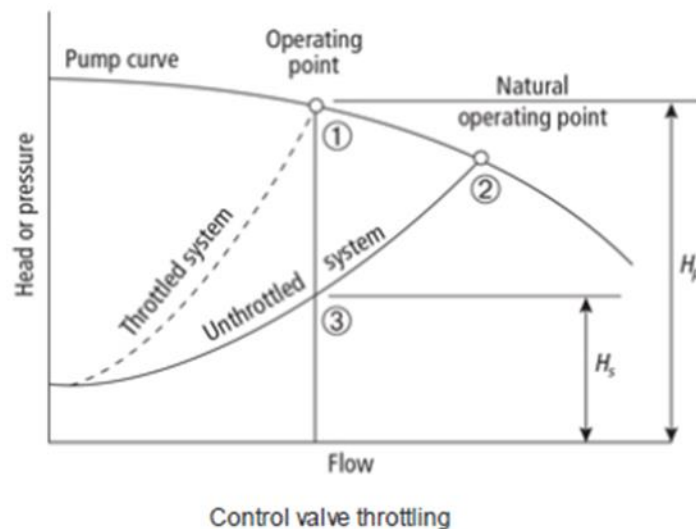


Figura 29 Control por válvula

Si se esta en el punto de operación estacionario o “natural”, se tienen el flujo y la presión de equilibrio (punto 2).

Si se presenta un cambio en las condiciones de proceso (es dinámico) el sistema va a ir a un nuevo punto de operación (por ejemplo a 3), con una nueva presión de sistema y un nuevo flujo.

La bomba, que ahora entrega menos flujo, aumenta su presión de salida y esta diferencia de presión debe ser asumida por la válvula:

$$\Delta p_v = P_{p1} - P_{s3}$$

El controlador debe ir cerrando la válvula para disminuir el flujo, lo cual va aumentando la caída de presión sobre la válvula: El sistema pasa de la condición “Unthrotled” (no reducido o no estrangulado el flujo) a la condición “throttled” (reducido o estrangulado el flujo)

Esta forma de control implica disipar potencia en el elemento de control.

Capacidad Hidráulica

Cuando se almacena líquido en un tanque abierto existe una relación algebraica entre el nivel del líquido y la presión en el fondo del tanque:

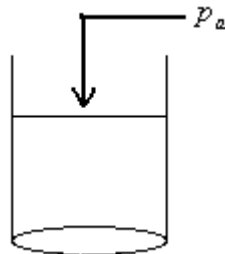


Figura 30

$p = \rho g h + p_a$	21
----------------------	----

Donde

ρ : Densidad del fluido $\frac{kg}{m^3}$

p = presión absoluta en el fondo del tanque $\frac{N}{m^2} = Pa$

$$g = 9,807 \frac{m}{s^2}$$

p_a : Presión atmosférica.

Si p se mide respecto a la p_a o sea presión manométrica:

$$p_g = \rho g h.$$

¿Qué relación existe entre el volumen del producto almacenado en el tanque y la presión?

El volumen en el tanque esta dado por la expresión:

$$V = \int_0^h A(h') dh'$$

que se puede representar gráficamente y en forma general como:

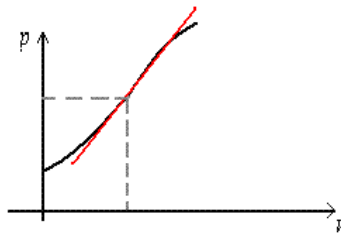


Figura 31

El recíproco de la pendiente de la gráfica p - V se denomina capacidad hidráulica $C(h)$ y depende del punto de operación.

$$C(h) = \frac{1}{dp/dV} = \frac{dV}{dp} = \left(\frac{dV}{dh} \right) \left(\frac{dh}{dp} \right)$$

Del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{d}{dh} \int_0^h A(h') dh' = A(h)$$

$$\frac{dp}{dh} = \rho g \Rightarrow \frac{dh}{dp} = \frac{1}{\rho g}$$

$C(h) = \frac{A(h)}{\rho g}$	22
------------------------------	----

Si el área de la sección transversal es constante independiente de h entonces $\frac{dV}{dh} = A$ y la capacidad hidráulica es constante $C = \frac{A}{\rho g}$. La capacidad hidráulica NO es el volumen del tanque, es la capacidad de almacenar energía potencial.

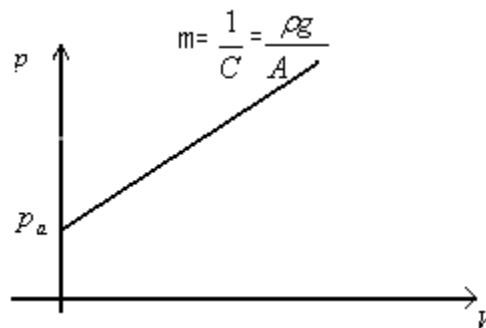


Figura 31

$p = \rho g \left(\frac{V}{A} \right) + p_a = \frac{1}{C} V + p_a$	23
---	----

Para evaluar el volumen de producto almacenado en el tanque para todo instante se emplea la ley de conservación de masa.

Ejemplo 9. Evaluar la capacidad hidráulica de un tanque cilíndrico.



Figura 32 Tanques cilíndricos

a) En posición vertical, asumiendo diámetro constante en toda la altura.

La capacidad hidráulica está dada por:

$$C(h) = \frac{A(h)}{\rho g}$$

Pero $A = \pi R^2$ independiente de h

$$C(h) = \frac{\pi R^2}{\rho g}$$

b) En posición horizontal, asumiendo tapas planas

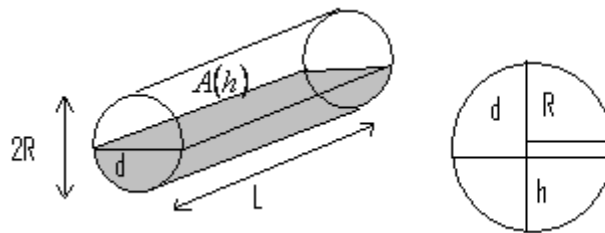


Figura 33

$A=2dL$ pero d es función de h entonces $A(h)=d(h)L$.

La relación entre d y h es:

$$\begin{array}{ll} h=0 & d=0 \\ h=R & d=2R \\ h=2R & d=0 \end{array}$$

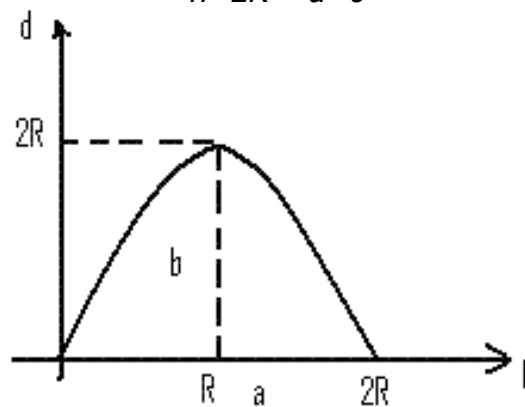


Figura 34

Ecuación de una elipse con centro en $(R, 0)$.

$$\frac{(d-0)^2}{4R^2} + \frac{(h-R)^2}{R^2} = 1 \Rightarrow \frac{d^2}{4R^2} = 1 - \frac{(h-R)^2}{R^2} \Rightarrow d^2 = 4R^2 \left[\frac{R^2 - (h-R)^2}{R^2} \right]$$

$$d = 2\sqrt{R^2 - (h-R)^2}$$

Verificando:

$$h=0 \quad d = 2\sqrt{R^2 - (R)^2} = 0$$

$$h=R \quad d=2R$$

$$h=2R \quad d = 2\sqrt{R^2 - (R)^2} = 0$$

$$A(h) = 2\sqrt{R^2 - (h-R)^2}L \Rightarrow C(h) = \frac{2L}{\rho g} \sqrt{R^2 - (h-R)^2}$$

Ejemplo 10. Tanque esférico. El volumen de un tanque esférico en función de la altura de producto en el tanque es:

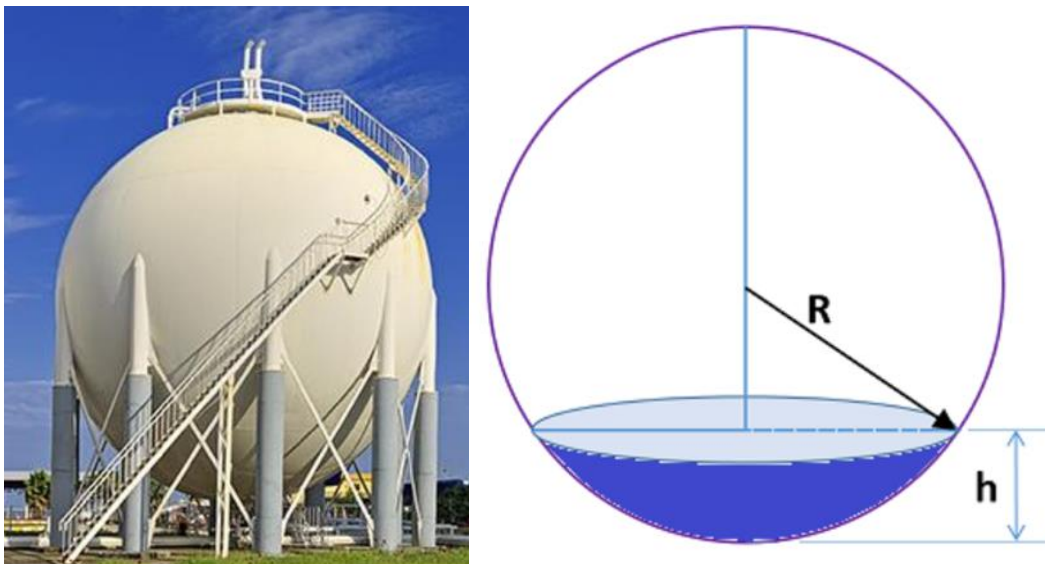



Figura 35

"Spherical storage tanks are preferred for storage of high pressure fluids. A spherical tank is considered stronger than its counterparts such as the common fixed roof tank, open top tank, and floating roof tank. The even distribution of stresses on the sphere's surfaces, both internally and externally, generally means that there are no

weak points. One engineer states "pressure inside a true spherical tank is identical on every axis".¹⁸



$$V = \int_0^h A(h') dh'$$

$$A(h) = \pi x^2 = \pi [R^2 - R^2 + 2Rh - h^2]$$

$$= \pi [2Rh - h^2]$$

EL VOLUMEN EN FUNCION DE h:

$$V = \int_0^h \pi [2Rh' - h'^2] dh' = 2R\pi \int_0^h h' dh' - \pi \int_0^h h'^2 dh'$$

$$V(h) = R\pi h^2 \Big|_0^h - \pi \frac{h'^3}{3} \Big|_0^h = R\pi h^2 - \frac{\pi h^3}{3}$$

$$V(h) = \frac{\pi h^2}{3} [3R - h]$$

EN FUNCION DEL V_T DE LA ESFERA

$$V_T = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V(h) = V_T \left[\frac{h^2(3R-h)}{4R^3} \right]$$

La capacidad hidráulica:

$$C(h, t) = \frac{A(h)}{\rho g} = \frac{\pi h(t)[2R - h(t)]}{\rho g}$$

¹⁸ <https://www.linkedin.com/pulse/why-spherical-storage-tanks-prevalent-gas-oil-bryan-bulling/>

Aplicación de medición de volumen: Tanques cilíndricos horizontales con casquetes esféricos¹⁹

“Cylinders are widely used for storage due to their being less expensive to produce than spheres. However, cylinders are not as strong as spheres due to the weak point at each end. This weakness is reduced by hemispherical or rounded ends being fitted. If the whole cylinder is manufactured from thicker material than a comparable spherical vessel of similar capacity, storage pressure can be similar to that of a sphere.”²⁰

Preguntas en un sistema de inventario de tanques:

- ¿Cuánto producto hay en un tanque de almacenamiento?
- ¿Cuánto producto ha sido adicionado a un tanque? (Recibido o transferido)?
- ¿Cuánto producto ha sido removido de un tanque? (Vendido, transferido, o por pérdidas debidas a fugas de material)?
- ¿Cuál es la capacidad restante del tanque?
- Si la cantidad de producto está cambiando inesperadamente con el tiempo, ¿Qué tan cerca está de derramarse el tanque? (o por arriba de niveles críticos)?
- ¿Qué tan cerca está de vaciarse el tanque? (o por debajo de niveles críticos)?



Figura 36

¹⁹ J. C. Ravelo Hernández; E. Morgado López; Dra. I. I. Siller Alcalá; J. M. Jaimes Ponce, y R. Alcántara Ramírez. Método para la obtención del volumen en tanques horizontales con casquetes esféricos parcialmente llenos. SOMI XVIII Congreso de Instrumentación Metrología ISA184

²⁰ <https://www.wermac.org/equipment/pressurevessel>

CONSERVACION DE MASA Y CONTROL DE NIVEL

La ley de conservación de la masa:

$$\left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa} \\ \text{entrante} \\ \text{al sistema} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Flujo de masa} \\ \text{saliente} \\ \text{del sistema} \end{array} \right] = \left| \begin{array}{c} \text{Tasa de} \\ \text{acumulación de masa} \\ \text{en el sistema} \end{array} \right|$$

$\frac{dm(t)}{dt} = \dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t)$ $\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$	24
--	----

Cuando hay reacciones químicas se hace balance de masa por cada componente.

Para un tanque:

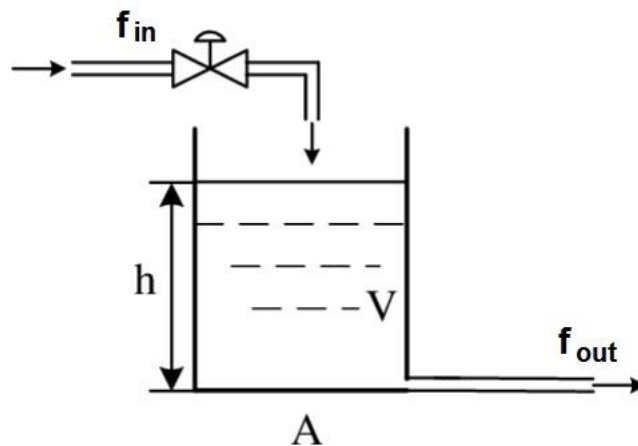


Figura 29

Como $m = \rho V$

$\frac{d}{dt} \rho V(t) = \rho_{in} f_{in}(t) - \rho_{out} f_{out}(t)$	25
--	----

Asumiendo que en el tanque no se modifica el producto, solo se almacena, no hay cambio en la densidad:

$\frac{d}{dt} V(t) = f_{in}(t) - f_{out}(t)$	26
--	----

El volumen de producto almacenado en el tanque para todo instante se puede obtener a partir de:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t [f_{in}(t') - f_{out}(t')] dt'$$

el primer termino de lado derecho es el volumen inicial.

Para un tanque de sección dependiente de h el volumen estará dado por:

$$V = \int_0^h A(h') dh'$$

La tasa de cambio del nivel del producto en el tanque será:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left(\frac{dV}{dh} \right) \left(\frac{dh}{dt} \right);$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{d}{dh} \int_0^h A(h') dh' = A(h)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A(h)} [f_{in}(t) - f_{out}(t)]$$

Como el cambio en la altura está asociado a un cambio en la presión:

$$\frac{dp}{dt} = \rho g \frac{dh}{dt}$$

$$\dot{p} = \frac{\rho g}{A(h)} [f_{in}(t) - f_{out}(t)]$$

$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{C(h)} [f_{in}(t) - f_{out}(t)]$	27
---	----

Como variable de estado se puede seleccionar h , p o V : todas indican la tasa de variación del producto en el tanque. Cuando el área es variable con h el sistema es no lineal.

Ejemplo 8. En un tanque de sección transversal constante entra líquido a una tasa $f_i(t)$ y sale a través de una válvula descrita por la relación no lineal

$f = C_v \sqrt{\frac{\Delta p}{G}}$. El área de la sección transversal del tanque es A y la densidad del líquido es ρ .

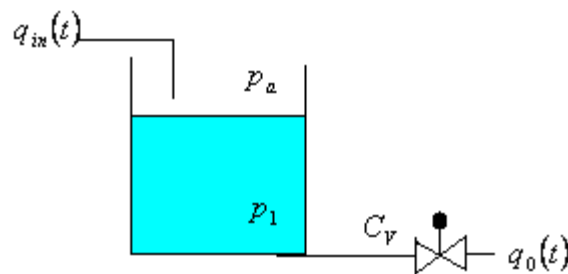


Figura 30a

Plantear la ecuación para la presión en el fondo del tanque, linealizar y obtener la función de transferencia $\frac{\hat{p}_1(s)}{\hat{f}_{in}(s)}$.

Como $A(h)=A$

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{C_h} [f_{in}(t) - f_o(t)]$$

El flujo de salida es:

$$f_o = C_v \sqrt{\frac{(p_1 + p_a) - p_a}{G_F}}$$

con $G_F = \rho / \rho_w$

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{C_h} \left[f_{in}(t) - C_v \sqrt{\frac{p_1}{G_F}} \right]$$

Linealizando alrededor del punto de operación:

$$\sqrt{p_1} = \sqrt{\bar{p}_1} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{p}_1}} |_{\bar{p}_1} (p_1 - \bar{p}_1)$$

$$\dot{p}_1 \approx \frac{1}{C_h} f_{in}(t) - \frac{C_v}{C_h \sqrt{G_F}} \sqrt{\bar{p}_1} - \frac{C_v}{2C_h \sqrt{G_F} \bar{p}_1} (p_1 - \bar{p}_1)$$

El punto de equilibrio:

$$0 = \frac{1}{C_h} \left[\bar{f}_{in} - \frac{C_v}{\sqrt{G_F}} \sqrt{\bar{p}_1} \right]$$

$$\bar{f}_{in} = \frac{C_v}{\sqrt{G_F}} \sqrt{\bar{p}_1} = \bar{q}_0$$

El equilibrio en el nivel del tanque se obtiene cuando el flujo entrante es igual al flujo saliente.

Restando el punto de equilibrio de la ecuación original se obtiene la ecuación diferencial en términos de las variables incrementales:

$$\dot{\hat{p}}_1 = \frac{1}{C_h} \left[\hat{f}_{in}(t) - \frac{C_v}{2\sqrt{G_F} \sqrt{\bar{p}_1}} \hat{p}_1 \right]$$

Si se define:

$$R_h = \frac{2\sqrt{G_F} \sqrt{\bar{p}_1}}{C_v} = \frac{2G_F \bar{f}_{in}}{C_v^2}$$

La función de transferencia:

$$s\hat{p}_1(s) + \frac{1}{R_h C_h} \hat{p}_1(s) = \frac{1}{C_h} \hat{f}_{in}(s)$$

$$\frac{\hat{p}_1(s)}{\hat{f}_{in}(s)} = \frac{1/C_h}{s + 1/R_h C_h}$$

Sistema de capacidad sencillo con constante de tiempo $\tau_H = R_h C_h$.

b) Si $A = 2m^2$; $\rho = 1000 \left(\frac{Kg}{m^3} \right)$, $G_F = 1$; $C_V = 5 \times 10^{-5} \frac{m^3/s}{\sqrt{N/m^2}}$; $\bar{f}_{in} = 6 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$;
 $p_a = 1,013 \times 10^5 N/m^2$.

$$R = \frac{2 \times 6 \times 10^{-3} m^3/s}{25 \times 10^{-10} \frac{m^8/s}{N}} = 4,8 \times 10^6 \frac{N \cdot s}{m \cdot s}$$

$$C = \frac{A}{\rho g} = \frac{2m^2}{1000 \frac{Kg}{m^3} \times 9,8 m/s} = 2,04 \times 10^{-4} \frac{m^5}{N}$$

$$\hat{p}_1(s) = \frac{4,9 \times 10^3}{s + 1,02 \times 10^{-3}} \hat{q}_{in}(s) \quad \tau = R_H C_H = 980s$$

Para un cambio fijo del 10% en el flujo entrante, respecto al punto de operación.

$$\hat{f}_{in}(s) = f_{in} - \bar{f}_{in} \quad \bar{f}_{in} = 6 \times 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s} \right)$$

El cambio es de $0,6 \times 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s} \right)$.

$$\hat{f}_{in}(s) = \frac{6,6 \times 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s} \right) - 6 \times 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s} \right)}{s} = \frac{0,6 \times 10^{-3} \left(\frac{m^3}{s} \right)}{s}$$

$$\hat{p}_1(s) = \left(\frac{4,9 \times 10^3}{s + 1,02 \times 10^{-3}} \right) \left(\frac{0,6 \times 10^{-3}}{s} \right)$$

$$\hat{p}_1(t) = 2881 \left(1 - e^{-t/980} \right) \text{ Tiempo en segundos.}$$

$$\hat{h}_1(t) = (\rho g)^{-1} \hat{p}_1(t) = 0,294 \left(1 - e^{-t/980} \right)$$

$$p_1(t) = 2881 \left(1 - e^{-t/980} \right) + \bar{p}_1$$

$$h_1(t) = 0,294 \left(1 - e^{-t/980} \right) + \bar{h}_1$$

Dónde:

$$\bar{f}_{in} = \bar{f}_0 = 5 \times 10^{-5} \frac{m^3/s}{\sqrt{N/m^2}} \sqrt{\bar{p}_1} = 6 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

$$(\bar{p}_1) = \left(\frac{6 \times 10^{-3}}{5 \times 10^{-5}} \right)^2 N/m^2 = 1,44 \times 10^4 N/m^2$$

$$\bar{h}_1 = \frac{1,44 \times 10^4 \text{ N/m}^2}{1000 \text{ Kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}} = 1,47 \text{ m}$$

$$h_1(t) = 0,294 \left(1 - e^{-t/980}\right) + 1,47 \text{ m}$$

Para $t \gg$

$$\hat{p}_1(t) = (2881 + 1,157 \times 10^5) \text{ N/m}^2 = 1,158 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

La presión manométrica cuando $t \rightarrow \infty$ es: $p_g = p_1 - p_{atmosferica} = 0,172 \text{ N/m}^2$ y estaba en 0,144 un cambio del 20%: como el sistema es no lineal el cambio del 10% a la entrada produce un cambio del 20% en $p_1(h_1)$.

La solución empleando MATLAB:

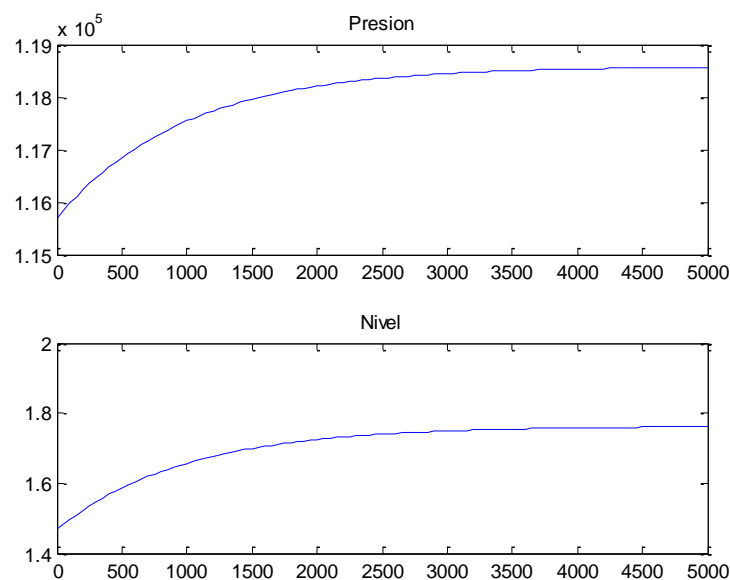


Figura 30b

%Clase 14 Tanque sencillo

```
num = [4.9e+3]
```

```
den = [1 1.02e-3]
```

```
nivel = tf(num,den)
```

```
t = 0.0:50:5000;
```

```
u = (0.6e-03)*ones(size(t));
```

```
[presion,t,x]= lsim(nivel,u,t,0)
subplot (2,1,1);plot (t, (1.157e+05 + presion)), title 'Presion'
subplot (2,1,2);plot (t, (1.469 + 1.02e-04*presion)), title 'Nivel'
```

Ejemplo 9. Encontrar la función de transferencia para $H_2(s)$, nivel en el segundo tanque, en función de $Q_{in}(s)$ y $Q_d(s)$, disturbio presente en el primer tanque.

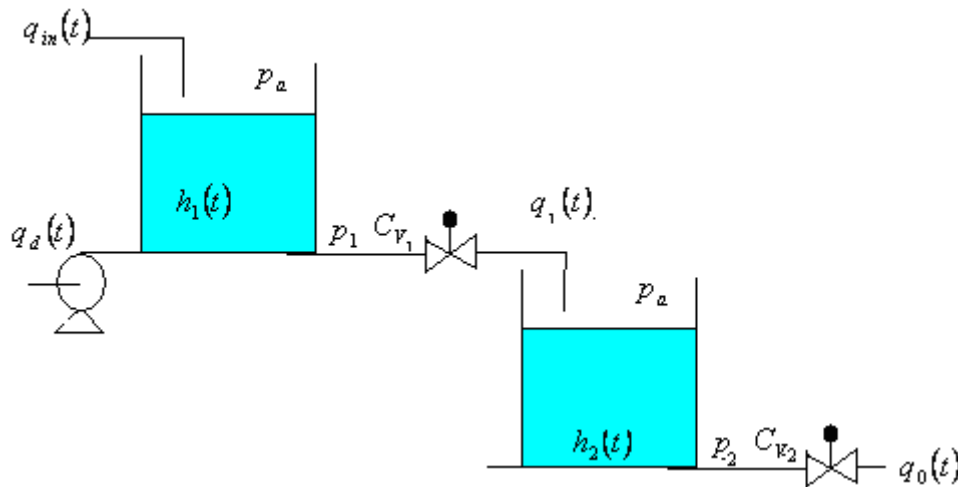


Figura 31a

Flujo en (m^3/s) , altura en m , tanques de sección transversal constante.

La ecuación de conservación para el primer tanque es, asumiendo densidades constantes:

$$\rho \frac{dh_1}{dt} = \frac{\rho}{A_1} [q_{in}(t) - q_1(t) - q_d(t)]$$

hay dos flujos salientes del tanque 1:

$$q_1(t) = C_{v1} \sqrt{\frac{(p_1 + p_a) - p_a}{G_F}} = C_{v1} \sqrt{\frac{\rho g h_1}{G_F}}$$

$$q_1(t) = C'_{v1} \sqrt{h_1} \Rightarrow C'_{v1} = C_v \sqrt{\frac{\rho g}{G_F}}$$

El flujo a través de la válvula 1 es independiente de la existencia del segundo tanque: los sistemas no interactúan.

Linealizando y restando las condiciones de equilibrio

$$\hat{q}_{in}(t) - \hat{q}_d(t) - C_1 \hat{h}_1(t) = A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt}$$

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \hat{q}_{in}(s) - \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \hat{q}_d(s)$$

Con

$$C_1 = \frac{1}{2} C_{V1}' \left(\sqrt{\bar{h}_1} \right)^{-1}; \quad \tau_1 = \frac{A_1}{C_1}; \quad K_1 = \frac{1}{C_1}$$

Si aumenta el disturbio $\hat{Q}_d(s)$ el nivel en el tanque 1 baja.

Si $\hat{Q}_d(s)=0$

$$H_1(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} \hat{q}_{in}(s)$$

Pero

$$\hat{p}_1(s) = \rho g \hat{H}_1(s) = \frac{\rho g \frac{1}{C_1}}{\frac{A_1}{C_1} s + 1} \hat{q}_{in}(s)$$

$$\hat{p}_1(s) = \frac{\rho g}{A_1 s + C_1} \hat{q}_{in}(s) = \frac{\rho g \frac{1}{A_1}}{s + \frac{C_1}{A_1}} \hat{q}_{in}(s) = \frac{1/C_h}{s + \frac{\rho g C_1}{A_1 \rho g}} \hat{q}_{in}(s)$$

$$\hat{p}_1(s) = \frac{1/C_h}{s + \frac{1}{C_h} \frac{C_{V1}}{2\rho g \sqrt{\bar{h}_1}}} \hat{q}_{in}(s)$$

$$R = \frac{2\rho g \sqrt{\bar{h}_1}}{C_{V1} \sqrt{\rho g / G_F}} = \frac{2\sqrt{\rho g \bar{h}_1}}{C_{V1} \sqrt{G_F}} = \frac{2\sqrt{\rho g \bar{h}_1}}{K}$$

Equivalente al análisis anterior.

Para el segundo tanque se emplea un procedimiento igual:

$$\rho \frac{d h_2}{dt} = \frac{\rho}{A} [q_1(t) - q_2(t)]$$

Con $q_2(t) = C'_{V_2} \sqrt{h_2(t)}$ la condición de equilibrio $\bar{q}_1(t) = \bar{q}_2(t)$. Después de linealizar se obtiene la función de transferencia:

$$H_2(s) = \frac{K_2}{\tau_2 s + 1} H_1(s)$$

$$H_2(s) = \frac{K_2 K_1}{\tau_2 s + 1} \left[\frac{1}{\tau_1 s + 1} \hat{q}_{in}(s) - \frac{1}{\tau_1 s + 1} \hat{q}_d(s) \right]$$

$$C_2 = \frac{1}{2} C'_{V_2} \left(\sqrt{\bar{h}_2} \right)^{-1} ; \quad \tau_2 = \frac{A_2}{C_2}; \quad K_2 = \frac{C_1}{C_2}$$

Dos sistemas de primer orden en cascada: dos polos reales negativos y las constantes de tiempo efectivas son: $\tau_{1eff} = \tau_1$; $\tau_{2eff} = \tau_2$.

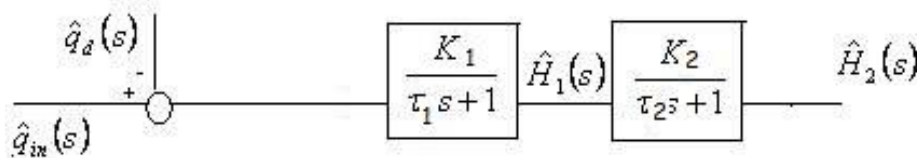


Figura 31b

Ejemplo 10. Para los dos tanques interactuantes obtener el diagrama de bloques y la función de transferencia linealizada

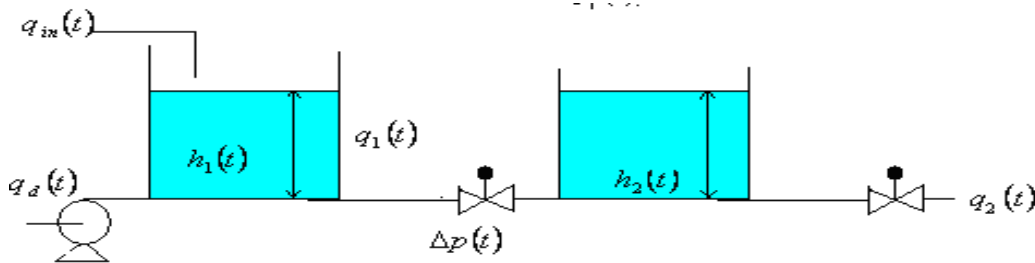


Figura 32a

La diferencia de presión sobre la válvula 1 es:

$$\Delta p(t) = [p_a + \rho g h_1(t)] - [p_a + \rho g h_2(t)] = \rho g [h_1(t) - h_2(t)]$$

El flujo a través de esta válvula es:

$$q_1(t) = C_{V_1} \sqrt{\frac{\rho g [h_1(t) - h_2(t)]}{G_F}} = \left(C_{V_1} \sqrt{\frac{\rho g}{G_F}} \right) \sqrt{h_1(t) - h_2(t)}$$

Este es un proceso interactuante: el flujo a través de la válvula depende del nivel de los dos tanques. La relación causa-efecto es bidireccional.

Planteando nuevamente las ecuaciones de balance:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dh_1}{dt} &= \frac{\rho}{A_1} [q_{in}(t) - q_1(t) - q_d(t)] \\ q_1(t) &= C'_{V_1} \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \end{aligned}$$

La ecuación de balance para el segundo tanque

$$\rho \frac{dh_2}{dt} = \frac{\rho}{A_2} [q_1(t) - q_2(t)]$$

El flujo de salida:

$$q_2(t) = C_{V_2} \sqrt{\frac{\rho g h_2(t)}{G_F}} = C_{V_2} \sqrt{\frac{\rho g}{G_F}} \sqrt{h_2(t)}$$

Cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: los dos niveles y los dos flujos de salida.

Es necesario linealizar las ecuaciones del flujo de salida de los dos tanques

$$q_1(t) = \bar{q}_1 + C_4[\bar{h}_1(t) - \bar{h}_1] - C_4[\bar{h}_2(t) - \bar{h}_2]$$

$$C_4 = \left. \frac{dq_1}{d\bar{h}_1} \right|_{\bar{x}_e} = - \left. \frac{dq_1}{d\bar{h}_2} \right|_{\bar{x}_e} = \frac{1}{2} C_{v_1} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{m^3/s}{m} \right)$$

$$q_2(t) = \bar{q}_2 + C_2[\bar{h}_2(t) - \bar{h}_2]$$

$$C_2 = \left. \frac{dq_2}{d\bar{h}_2} \right|_{\bar{x}_e} = \frac{1}{2} C_{v_2} (\bar{h}_2)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{m^3/s}{m} \right)$$

Restando las ecuaciones en el punto de equilibrio:

$$\frac{d\hat{h}_1}{dt} = \frac{1}{A_1} [\hat{q}_{in}(t) - \hat{q}_1(t) - \hat{q}_d(t)]$$

Pero

$$\hat{q}_1 = C_4[\hat{h}_1] - C_4[\hat{h}_2]$$

Trasformando al plano s y reorganizando:

$$s\hat{H}_1(s) = \frac{1}{A_1} (\hat{q}_{in}(s) - \hat{q}_d(s)) - \frac{C_4}{A_1} (\hat{H}_1(s) - \hat{H}_2(s))$$

$$\hat{H}_1(s) = \frac{1/C_4}{A_1/C_4 s + 1} (\hat{q}_{in} - \hat{q}_d) + \frac{1}{A_1/C_4 s + 1} \hat{H}_2$$

$$\tau_4 = \frac{A_1}{C_4}; \quad K_4 = \frac{1}{C_4}$$

$$\hat{H}_2(s) = \frac{\frac{C_4}{C_4 + C_2}}{\frac{A_2}{C_4 + C_2} s + 1} \hat{H}_1(s)$$

$$\tau_5 = \frac{A_2}{C_4 + C_2}; \quad K_5 = \frac{C_4}{C_4 + C_2}$$

El diagrama de bloques del sistema interactuante:

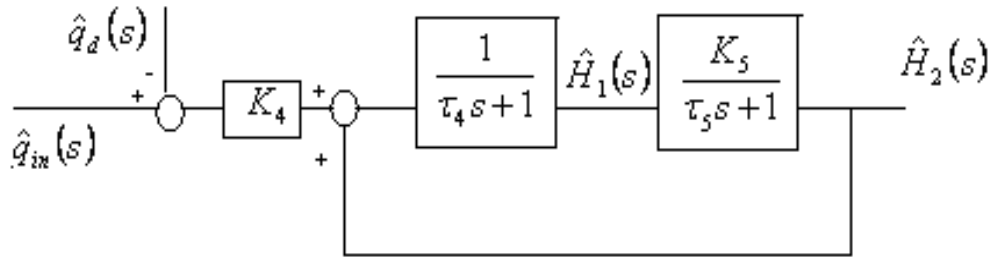


Figura 32b

La interacción produce una realimentación interna en este caso positiva: La función de transferencia total:

$$\hat{H}_2(s) = \frac{\frac{K_4 K_5}{1 - K_5}}{\frac{\tau_4 \tau_5}{1 - K_5} s^2 + \frac{\tau_4 + \tau_5}{1 - K_5} s + 1} [\hat{q}_{in}(s) - \hat{q}_d(s)]$$

Las constantes de tiempo de la respuesta de tiempo de $h_2(t)$, τ_{1eff} y τ_{2eff} se encuentran a partir de las raíces del denominador:

$$s_{1,2} = \frac{-(\tau_4 + \tau_5) \pm \sqrt{(\tau_4 + \tau_5)^2 - 4(\tau_4 \tau_5)(1 - K_5)}}{2(\tau_4 \tau_5)}$$

Asumiendo constantes de tiempo iguales $\tau_4 = \tau_5 = \tau$

$$s_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{(K_5)}}{\tau}, \quad \frac{-1 - \sqrt{(K_5)}}{\tau}$$

$$\tau_{4,5eff} = \frac{1 + \sqrt{(K_5)}}{1 + \sqrt{(K_5)}}, \quad \frac{1 - \sqrt{(K_5)}}{1 - \sqrt{(K_5)}}$$

la relación es:

$$\frac{\tau_{5eff}}{\tau_{4eff}} = \frac{1 + \sqrt{(K_5)}}{1 - \sqrt{(K_5)}} > 1 \quad \text{para } \tau_4 = \tau_5 = \tau$$

Mientras que en el sistema no interactuante:

$$\frac{\tau_{2eff}}{\tau_{1eff}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = 1 \quad \text{Para } \tau_1 = \tau_2 = \tau$$

Dependiendo de los valores de sistema interactuante puede tener raíces reales negativas, complejos conjugados y aun llegar a ser oscilatorio.

REFERENCIAS

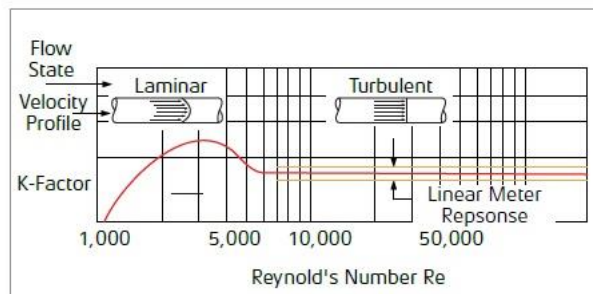
1. APV Fluid Handling. *Hydraulics Basic Concepts*.
2. Southern Clay Products. *A Brief Discussion of Rheological Profiles*. ChemBrief VOL.4 • ISSUE 3 November 2004
3. Emerson Automation Solutions. *The Engineer's Guide to DP Flow Measurement*. 2020 EDITION
4. © 2009 Haukur Herbertsson. Sin royalties: esta imagen está disponible para uso no comercial. # Creative: 149270744.
5. Topic 9: Fluids and Swimming Low Reynold's Number . (Life at Low Reynold's Number, Berg and Purcell). Available: http://www.sfu.ca/~eemberly/phys347/lectures/9_Fluids_Low_Reynolds.pdf
6. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. *Modelling and Analysis of Dynamic Systems*. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
7. Francis L. Belloni. Teaching The Principles Of Hemodynamics. Volume 22 : NUMBER 1 – Advances In Physiology Education – DECEMBER 1999
8. Pedrollo. Centrifugal pumps. Available at: <https://www.pedrollo.com/public/allegati/>
9. ISA. Standard 51.1-1979 (R1993). Process Instrumentation Terminology. ISA Research Triangle Park NC. Reaffirmed May 26 – 1995
10. Smith C. and Corripio A. Principles and Practice of Automatic Process Control. 2nd Edition. New York. John Wiley & Sons. 1997
11. J. C. Ravelo Hernández; E. Morgado López; Dra. I. I. Siller Alcalá; J. M. Jaimes Ponce, y R. Alcántara Ramírez. Método para la obtención del volumen en tanques horizontales con casquetes esféricos parcialmente llenos. SOMI XVIII Congreso de Instrumentación Metrología ISA184.

PROBLEMAS

1. Un tubo de 8 pulgadas de diámetro nominal, diámetro interno $D=7.981$ pulgadas (202.717 mm) tiene un caudal de 2000 gal/min (7570.82l/min) de agua a una temperatura de 68 °F (20 °C), densidad de 62.3157 lbf/ft³ (998.2021 kg/m³), y una viscosidad dinámica de 1.002 cP.

Calcular el número de Reynolds usando los dos conjuntos de unidades.

2. Un medidor de flujo tipo turbina²¹ se recomienda para caudales en régimen turbulento, según la gráfica:



Universal Turbine Meter Performance Curve

Para una aplicación particular un medidor de 12" de diámetro se va a usar en la medición de caudal en un rango:

Mínimo 1,900 BPH (US barrel-petrol/hour)

Máximo: 18000 BPH.

La viscosidad cinemática del producto varía desde 5,74 cSt a 253,7 cSt.

Se puede usar el medidor?

3. Un tanque de almacenamiento tiene una altura de 3 m y un diámetro constante de 4 m. La tasa de flujo volumétrico de salida está dada por la relación:

$$q_{out}(t) = K\sqrt{h(t)}$$

$$K = 1,5 \frac{m^{5/2}}{min}$$

²¹ Smith Meter® Turbine Meters. MV Series Turbine Meter Bulletin AB02008 Issue/Rev. 0.0 (3/05)

Donde $h(t)$ es la altura de líquido en el tanque. Para un tiempo dado, el tanque está en el estado estable con un flujo de $2,1 \text{ m}^3/\text{min}$.

- a. ¿Cuál es el valor del nivel en estado estable?
 - b. Evaluar la función de transferencia en términos de variables incrementales. Indicar claramente la constante de tiempo y la ganancia
 - c. ¿Cuál es el máximo valor del incremento tipo paso en el flujo entrante posible, para que el tanque no se rebose?
 - d. ¿Cuál es el máximo valor del incremento tipo rampa en el flujo entrante posible, para que el tanque no se rebose?
4. Un tanque cilíndrico, figura P4, de altura 2,5 m y diámetro de la base de 2 m, recibe dos caudales w_1 y w_2 y tiene un caudal de salida w_3 , todos en kg/minuto y de densidad 800 kg/m^3 . El punto de operación es:

$$\bar{h} = 1,75\text{m};$$

$$\bar{w}_1 = 100 \frac{\text{kg}}{\text{min}},$$

$$\bar{w}_2 = 120 \text{kg/min}$$

$$\bar{w}_3 = 200 \text{kg/min}$$

- a. ¿Si el tanque estaba inicialmente vacío, cuánto tiempo se necesita para que el nivel llegue a 1 metro?
- b. A la altura de un metro apareció una perforación ilegal en el tanque que produce una fuga de líquido dada aproximadamente por la ecuación:

$$q_4 = 0,025\sqrt{h-1} \quad h \text{ en m y } q \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

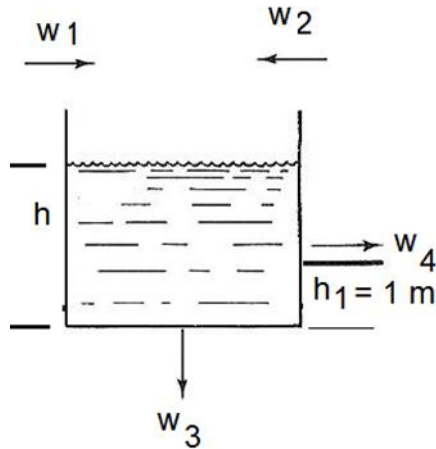


Figura P4

Si las tasas de flujo no cambian:

¿Se reboza el tanque? Explique.

¿Se estabiliza el nivel en un valor máximo? Explique y calcule el nivel, si lo hay.