
CAPITULO 3 SISTEMAS NO LINEALES, LINEALIZACIÓN Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

OBJETIVOS

1. Utilizar datos, indicios e información para formular las ecuaciones de un sistema (CDIO 2.1.1)
2. Identificar suposiciones y fuentes de error (CDIO 2.1.1)
3. Calcular órdenes de magnitud, límites y tendencias (CDIO 2.1.3.)
4. Plantear pruebas de consistencia y error (CDIO 2.1.3)
5. Discutir la generalización de soluciones analíticas (CDIO 2.1.3)
6. Identificar márgenes y tolerancias (CDIO 2.1.4).
7. Computar las soluciones al problema. (CDIO 2.1.5)
8. Ilustrar discrepancias en los resultados, recomendaciones y posibles mejoras de las soluciones. (CDIO 2.1.5)
9. Utilizar datos de prueba y resultados esenciales de la solución. (CDIO 2.1.5)
10. Clasificar los factores críticos, efectos colaterales, métricas y variables adicionales que complementan el modelo propuesto. (CDIO 2.3.3)
11. Enunciar compromisos y “tradeoffs” en la solución de sistemas (CDIO 2.3.4)

En todos los sistemas reales es común encontrar sistemas no lineales y con retardo de transporte, ya sea en la alimentación de energía o de materia prima. Una cualquiera de estas dos condiciones hace que los métodos de análisis y diseño empleados tradicionalmente en el diseño de sistemas de control no se puedan aplicar directamente.

Por ello es necesario desarrollar métodos aproximados de análisis, ya sea empleando un procedimiento de linealización basado en la expansión en serie de Taylor alrededor del punto de operación; o usando herramientas para soluciones numéricas o simulando el comportamiento del sistema para un rango de sus entradas y variables internas.

Clase 1

Sistemas No lineales
Linealización
Puntos de equilibrio
Variables incrementales
Aproximación por serie de Taylor

Clase 2

Linealización ecuación diferencial
Linealización ecuaciones de estado
Sistemas con retardo de transporte

Clase 3 (Se requiere MATLAB)

Métodos numéricos:
Euler; Predicción – corrección
Runge – Kutta
Aplicación de **MATLAB** ODE solvers.
Simulación

Taller 4 Sistemas No Lineales y con retardo

SISTEMAS NO LINEALES

Cuando la ecuación que describe las relaciones terminales entre las variables de un elemento no cumple con la definición de linealidad, Capítulo 1 Definición #6, ya sea la aditividad y/o la homogeneidad, dicho elemento es no lineal. En estas ecuaciones las variables de esfuerzo o de flujo pueden aparecer elevadas a potencias diferentes de uno, multiplicadas entre sí, en términos exponenciales o logarítmicos etc.

Algunas ecuaciones no lineales comunes en el análisis de sistemas dinámicos son:

Corriente en un diodo semiconductor

$$i_d = I_0(e^{\frac{V_d}{\eta V_t}} - 1) \quad (\text{en el primer cuadrante})$$

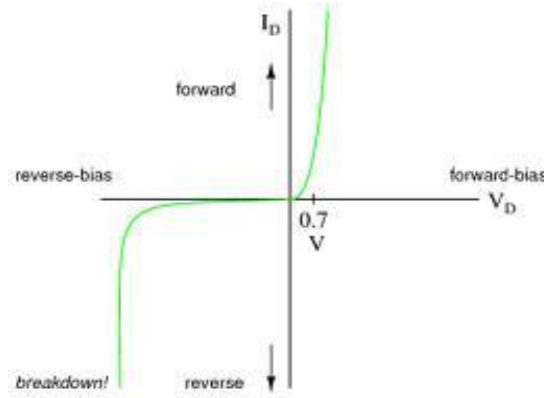


Figura 1

Flujo de calor radiado en función de la temperatura:

$$Q(T) = \varepsilon \sigma A T^4(t)$$

Tasa de reacción en función de la temperatura y la concentración:

$$r(T(t), c_A(t), c_B(t)) = K \cdot T_a(t) \cdot c_A(t) \cdot c_B(t)$$

Flujo de un fluido a través de una restricción:

$$q(\Delta p) = k \sqrt{\Delta p(t)}$$

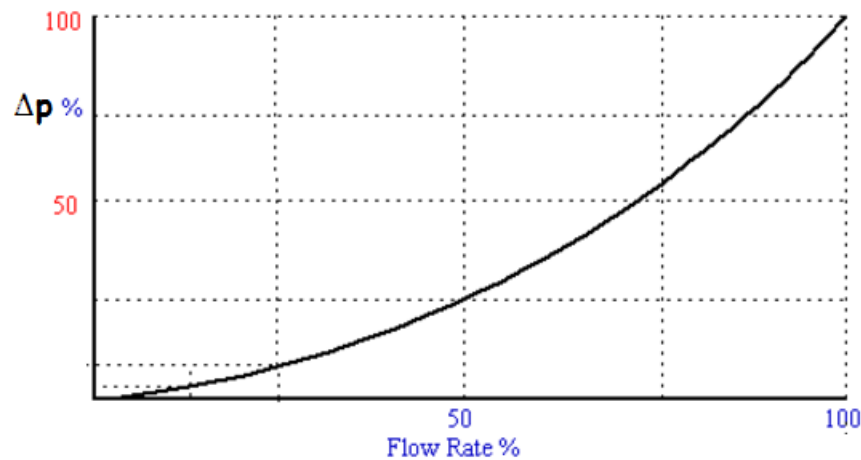


Figura 2

Donde se observa funciones no lineales de una y más variables.

El procedimiento para plantear las ecuaciones que describen un sistema no lineal es similar al empleado para el planteo de ecuaciones de un sistema lineal:

- Seleccionar las variables de estado
- Emplear las leyes de interconexión
- Emplear las ecuaciones de los elementos individuales
- Plantear el conjunto de ecuaciones.
- No se puede llegar a un modelo como el descrito en el capítulo 1ro. Este modelo matricial aplica solo para sistemas lineales.

Ejemplo 1¹ En el circuito el condensador $C_1 = 1$ F, y la inductancia es no lineal descrita por la ecuación:

$$i_L = \phi + \phi^3$$

Φ es el flujo.

¹ Tomado de Chua Leon, Desoer Charles & Kuh Ernest. *Linear and nonlinear circuits*. McGraw-Hill Book Co. New York. 1987

Plantear las ecuaciones que describen el sistema. La variable de salida es el voltaje sobre el condensador C_1

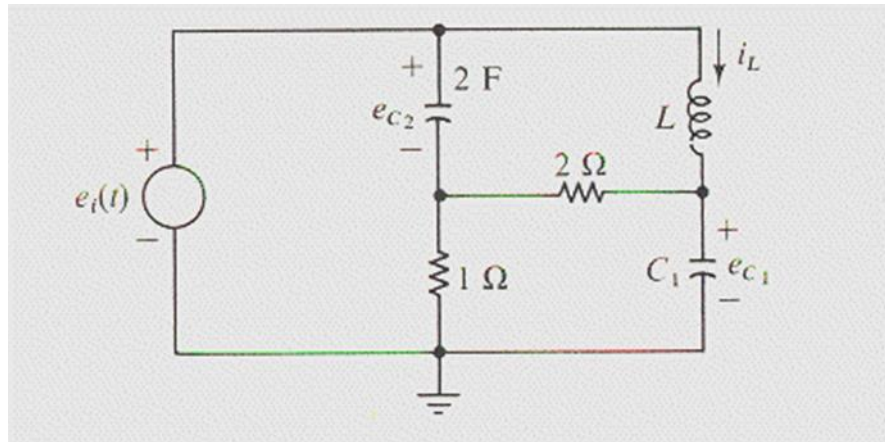


Figura 3

Variables de estado: v_{C1}, v_{C2}, φ

Condensador C_2 : KCL $i_{C2} + \frac{(v_{C1} - (e_i - v_{C2}))}{2} = \frac{(e_i - v_{C2})}{1}$

Condensador C_1 : KCL $i_L = \frac{(v_{C1} - (e_i - v_{C2}))}{2} + i_{C1}$

Inductancia KVL: $e_i = v_L + v_{C1}$

Las ecuaciones de estado:

$$\dot{v}_{C2} = -\frac{1}{4}v_{C1} - \frac{3}{4}v_{C2} + \frac{3}{4}e_i$$

$$\dot{v}_{C1} = -\frac{1}{2}v_{C1} - \frac{1}{2}v_{C2} + (\varphi + \varphi^3) + \frac{1}{2}e_i$$

$$\dot{\varphi} = -v_{C1} + e_i$$

Ecuación de salida: $y = v_{C1}$

Ejemplo 2. Plantear la ecuación dinámica de estado. La salida es el voltaje sobre el condensador C_5 . R_1 y C_2 son NO LINEALES

$$\begin{aligned}i_1 &= \tanh(2v_1) \\v_2 &= 2(q_2 - 0.1q_2^3) \\R_3 &= 2\Omega; L_4 = 1H; \\C_5 &= 2F\end{aligned}$$

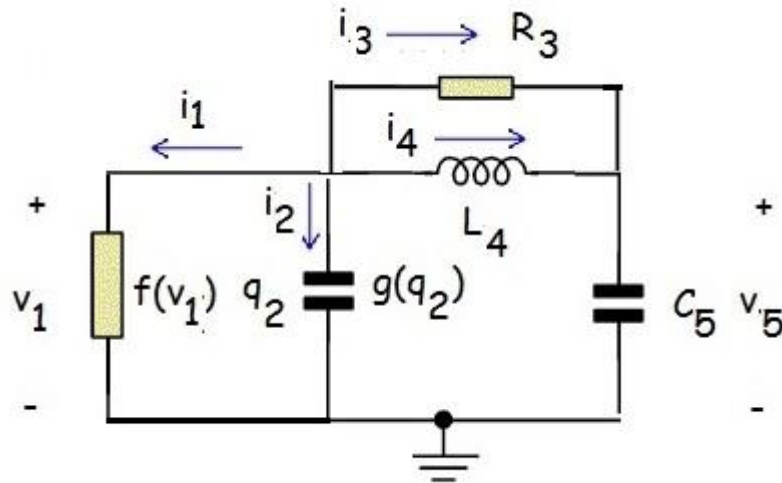


Figura 4

Variables de estado: $(q_2; i_4; q_5)$

Condensador C_2 : KCL $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$

$$\frac{dq_2}{dt} = -\tanh[4(q_2 - 0.1q_2^3)] - (q_2 - 0.1q_2^3) + \frac{1}{4}q_5 - i_4$$

Condensador C_5 KCL: $i_5 = i_3 + i_4$

$$\frac{dq_5}{dt} = +(q_2 - 0.1q_2^3) - \frac{1}{4}q_5 + i_4$$

Inductancia L_4 KVL: $v_2 = v_4 + v_5$

$$\frac{di_4}{dt} = 2(q_2 - 0.1q_2^3) - \frac{1}{2}q_5$$

La ecuación de salida: $y = \frac{1}{2} q_5$

Ejemplo 3. En el circuito U_1 y U_2 son fuentes de voltaje y corriente y R_1 y R_2 son resistencias no lineales definidas por:

$$R_1: \quad i_1 = G(v_1) = v_1^3$$

$$R_2: \quad v_2 = \gamma(i_2) \quad \text{con } \gamma \text{ dado en la Figura 5}$$

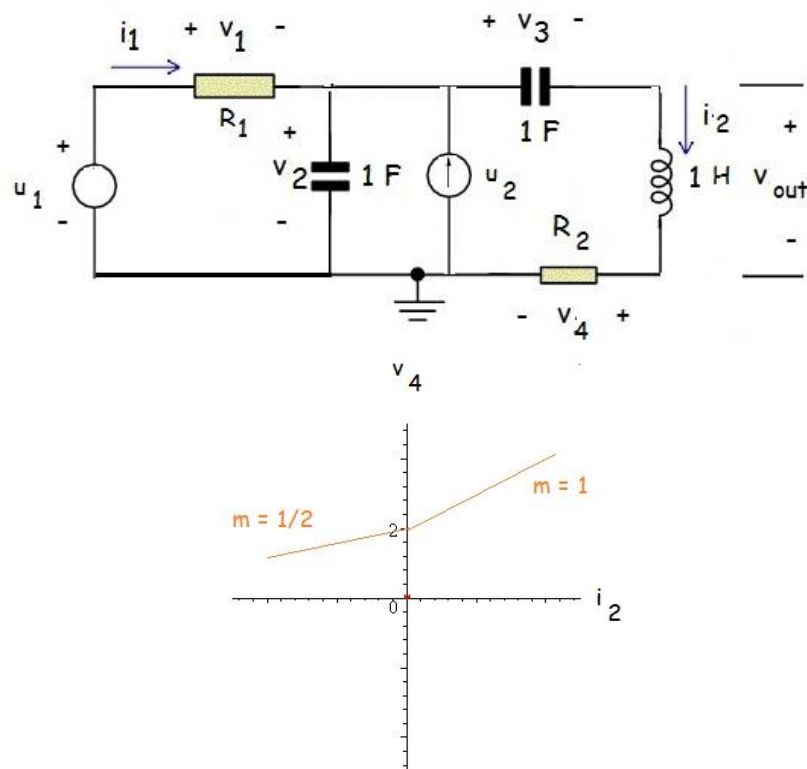


Figura 5

Plantear las ecuaciones de estado. La salida es el voltaje en la inductancia.

Las variables de estado son:

$$\begin{aligned} v_{c1} &= x_1 \\ v_{c2} &= x_2 \\ i_L &= x_3 \end{aligned}$$

KVL en la malla de entrada:

$$v_1 = U_1 - v_{c1}; i_1 = G(v_1) = v_1^3 = (U_1 - v_{c1})^3$$

KCL para el condensador C_1 , nodo 1,

$$U_2 + i_1 = i_{c1} + i_2$$

$$\frac{dv_{c1}}{dt} = U_2 + G(v_1) - i_2$$

$$\dot{x}_1 = -x_3 + (U_1 - x_1)^3 + U_2 \quad (1)$$

KCL para el condensador C_2

$$i_2 = i_{c2} = C_2 \frac{dv_{c2}}{dt}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2)$$

KVL para la malla de L.

$$v_{c1} = v_{c2} + v_L + v_2$$

$$v_{c1} = v_{c2} + L \frac{di_L}{dt} + v_2$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - \gamma(x_3) \quad (3)$$

Debido a la relación no lineal planteada en la ecuación 1, las ecuaciones de estado no se pueden representar en forma matricial.

De KVL el voltaje sobre la inductancia es:

$$v_L = v_{c1} - v_{c2} - v_2$$

La ecuación de salida:

$$y = x_1 - x_2 - \gamma(x_3)$$

Ejemplo 4. Plantear la ecuación de movimiento que describe a un péndulo sencillo. Péndulo de masa M y longitud L, fijo al pivote P.

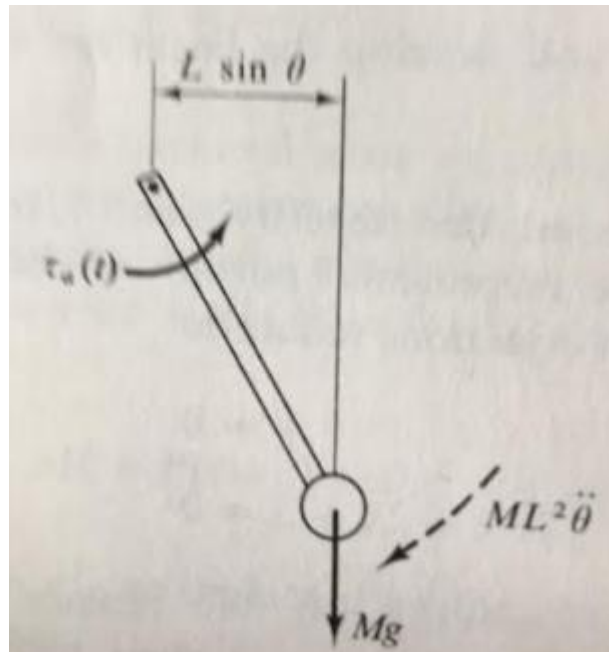
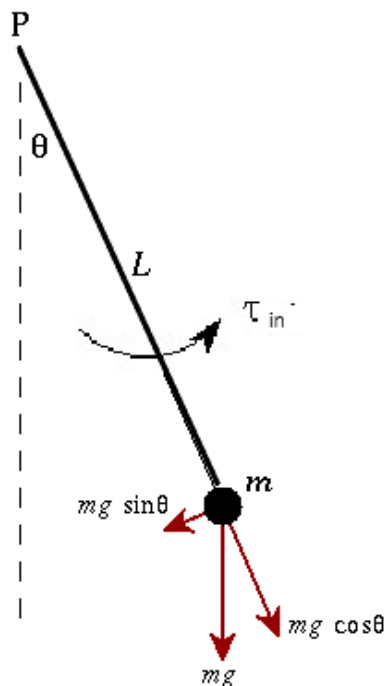


Figura 6

Fuerza del pivote y fuerza producida por la aceleración centrípeta son radiales y no producen torque respecto a P.

El momento de inercia producido por una masa puntual a una distancia L del pivote es:

$$J_p = mL^2$$

Sumatoria de torques respecto al pivote P:

$$mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = \tau_a(t)$$

No lineal debido a la presencia de la función $\sin\theta$.

Para ninguno de estos conjuntos de ecuaciones se puede plantear el modelo matricial.

LINEALIZACIÓN

En las ecuaciones que describen un sistema no lineal es común encontrar términos en los cuales las variables pueden aparecer elevadas a potencias diferentes de uno, multiplicadas entre sí, en términos exponenciales o logarítmicos etc.

Las técnicas de solución analítica vistas y la transformada de Laplace solamente se pueden aplicar a sistemas lineales e invariantes con el tiempo y por lo tanto no es posible obtener funciones de transferencia ni representación matricial para las ecuaciones de estado.

Una de las técnicas que se emplea es la linealización con la cual se puede desarrollar un modelo lineal válido en una región dinámica alrededor de un punto de operación o de equilibrio y definir las variables incrementales alrededor de este punto.

Linealización de funciones de una variable

Dada una función de una variable:

$$y = f(x(t)), \quad f: R \rightarrow R$$

$f: R \rightarrow R$, no lineal y continuamente diferenciable.

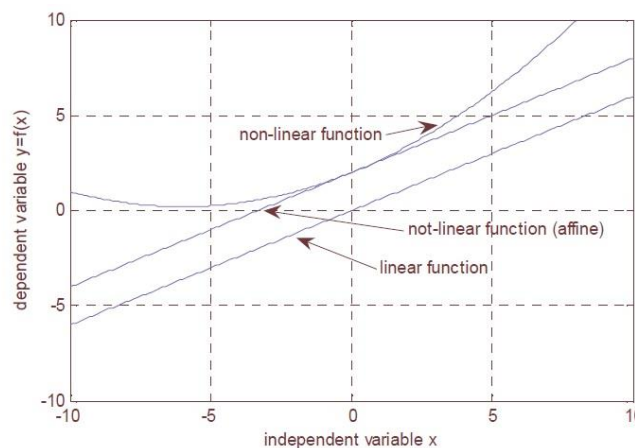


Figura 7²

Esta función se puede expandir en serie de Taylor alrededor del punto de operación.

² N.S. Nise. *Control Systems Engineering*,

$f[x(t)] = f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right _{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}] + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right _{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]^2 + \dots$	1
---	---

\bar{x} es el valor en el punto de operación, alrededor del cual se expandirá la función.

Linealizar una función es aproximarla con los dos primeros términos de la serie:

$f[x(t)] \cong f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx} \right _{\bar{x}} [x(t) - \bar{x}]$	2
--	---

Como \bar{x} es constante la ecuación es lineal de la forma:

$f[x(t)] = f(\bar{x}) + m\hat{x}$	3
-----------------------------------	---

con $m = \left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}}$ y $\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x}$, variable incremental respecto al punto de operación.

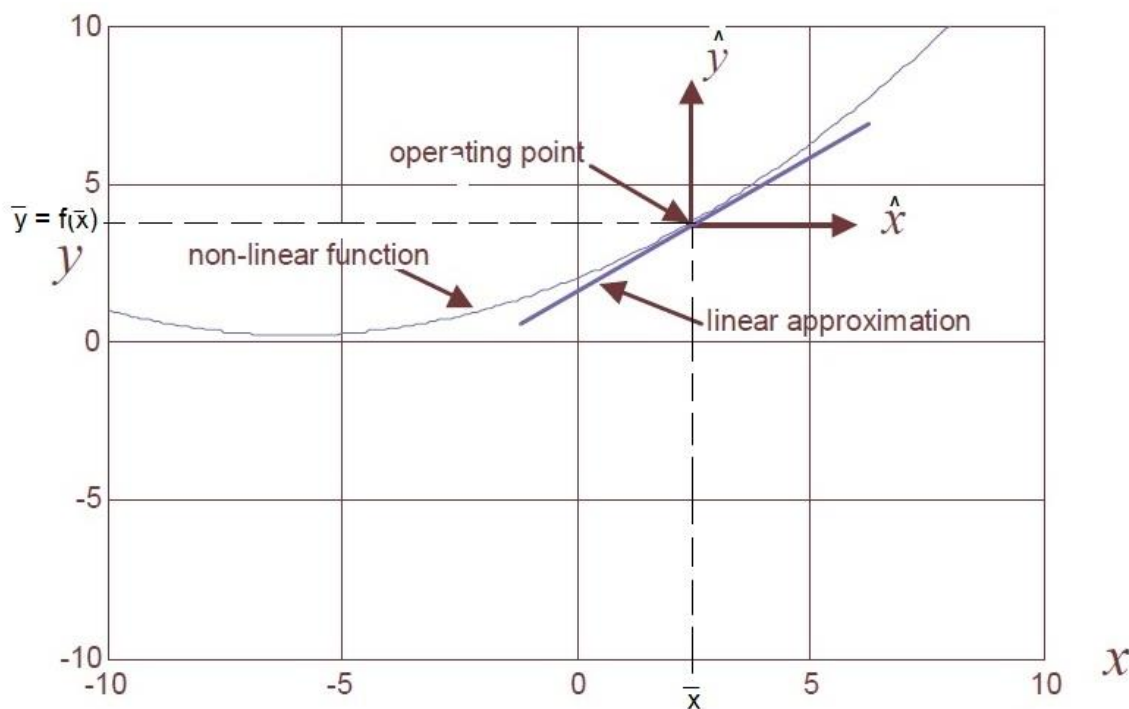


Figura 8

La aproximación de primer orden es una línea recta que pasa por el punto $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ y tiene una pendiente $\left. \frac{df}{dx} \right|_{\bar{x}}$. La nueva función es lineal, definida respecto a las nuevas variables incrementales \hat{x}, \hat{y}

El error entre $f(x)$ y el modelo linealizado es pequeño alrededor al punto de operación $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ pero crece a medida que x se aleja, en cualquier sentido, de \bar{x} .

$e = \frac{f(x) - [f(\bar{x}) + m\hat{x}]}{f(x)} \%$	4
--	---

El rango en el cual la aproximación lineal es aceptable depende del tipo de función.

Este procedimiento se debe usar cautelosamente para evitar errores significativos cuando el sistema se usa en condiciones reales.

Ejemplo 5. Linealizar la ecuación del fluido a través de un orificio:

$$q(\Delta p) = k\sqrt{\Delta p(t)}$$

La pendiente en el punto de operación $\Delta\bar{p}, \bar{q}$ es:

$$\left. \frac{dq}{d\Delta p} \right|_{\Delta\bar{p}} = \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{\Delta\bar{p}}} \Big|_{\Delta\bar{p}} = \frac{k}{2\sqrt{\Delta\bar{p}}}$$

$$\bar{q} = k\sqrt{\Delta\bar{p}(t)}$$

El modelo linealizado:

$$q(\Delta p) = \bar{q} + \frac{k}{2\sqrt{\Delta\bar{p}}} (\Delta p - \Delta\bar{p})$$

En variables incrementales, o de perturbación, alrededor del punto de operación:

$$\hat{q}(\Delta\hat{p}) = \frac{k}{2\sqrt{\Delta\bar{p}}} \Delta\hat{p}$$

Válida para pequeños cambios alrededor del punto $[\Delta\bar{p}, \bar{q}]$.

El error en la aproximación, en función de la variable incremental se obtiene empleando la ecuación 9:

$$e = \frac{K\sqrt{\Delta p} - [K\sqrt{\Delta \bar{p}} + \frac{K}{2\sqrt{\Delta \bar{p}}} \Delta \hat{p}]}{K\sqrt{\Delta p}} \times 100\%$$

Pero de la definición de la variable incremental:

$$\Delta p = \Delta \hat{p} + \Delta \bar{p}$$

La variación de la variable incremental respecto al valor en el punto de operación se puede escribir como:

$$\Delta \hat{p} = \alpha \Delta \bar{p}$$

El error en función del parámetro α :

$$e = \frac{2\sqrt{1+\alpha} - 2 - \alpha}{2\sqrt{1+\alpha}} \times 100\%$$

Asumir que la platina ha sido calculada para que 40 unidades de flujo produzcan una caída de 100 unidades. El punto de operación es (36 flujo, 81 presión)

Modelo no lineal: $q = 4\sqrt{\Delta p}$

Modelo incremental:

$$(q - 36) = \left(\frac{2}{9}\right)(\Delta p - \overline{\Delta p})$$

$$q = \left(\frac{2}{9}\right)\Delta p + 18$$

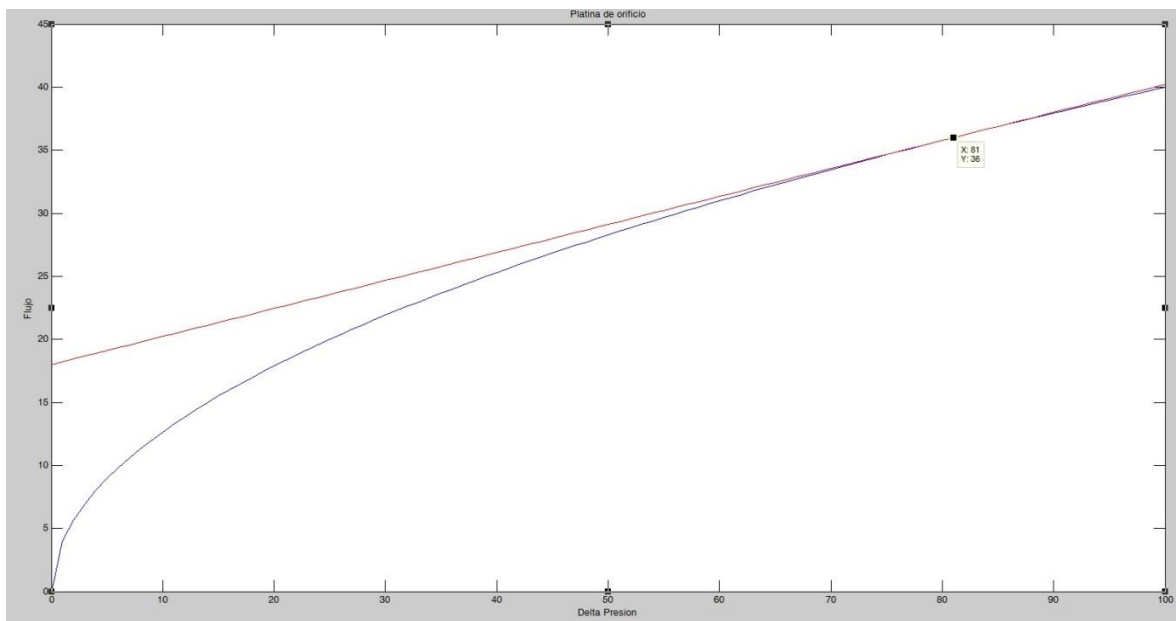


Figura 9 a Comparación modelos

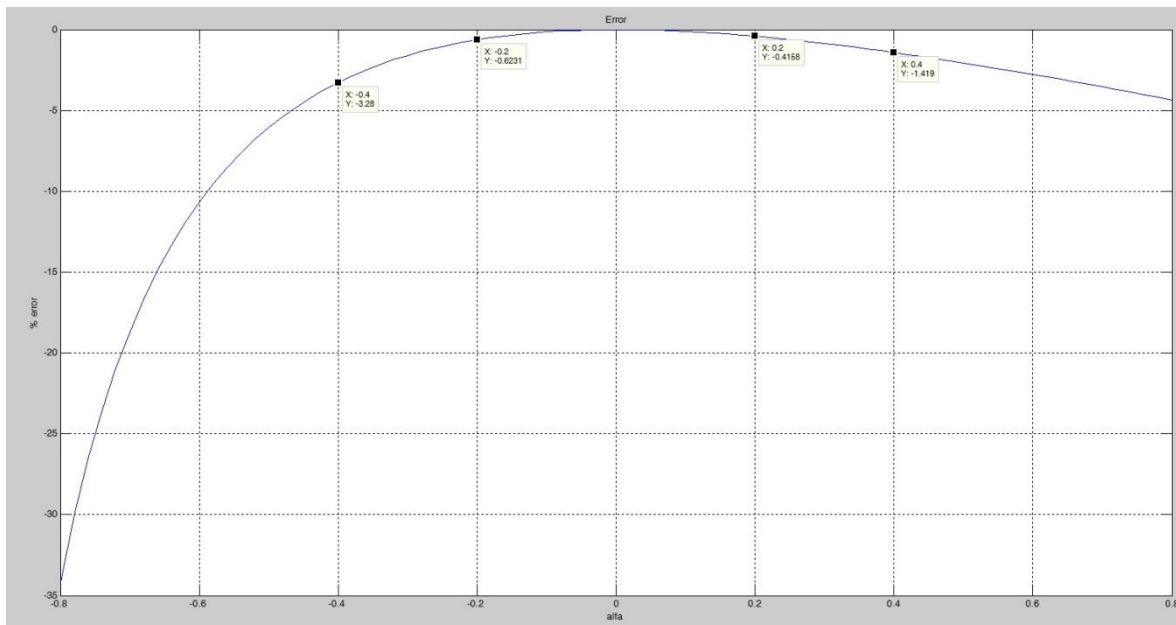


Figura 9 b Error

Las variaciones de la variable incremental respecto al punto de operación deben estar confinadas a un rango de $\pm 20\%$, para que el error sea menor a -1% . Un rango mayor de variación representa un error no despreciable en la aproximación.

Si se cambia el punto de operación es necesario recalcular el modelo; si el nuevo punto es (32 flujo, 64 presión), el nuevo modelo linealizado es:

$$(q - 32) = \left(\frac{1}{4}\right)(\Delta p - \overline{\Delta p})$$

$$q = \left(\frac{1}{4}\right)\Delta p + 16$$

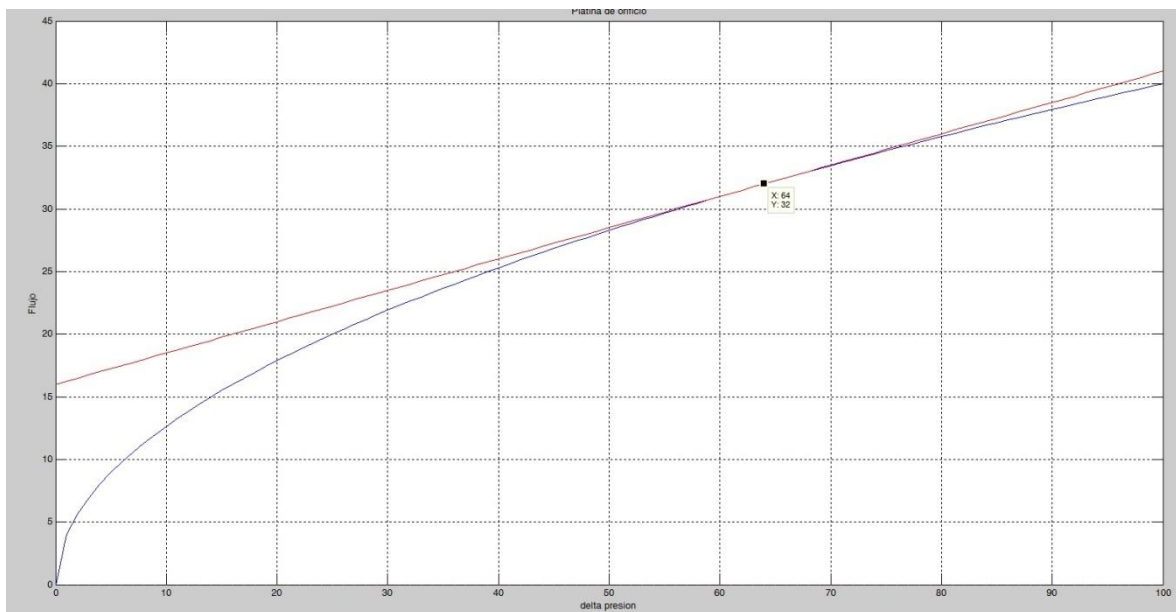


Figura 9 c Nuevo modelo

```
% Capitulo 3 Ejemplo 5. Platina de orificio
% Cálculo del error.
clear all
dp = 0:1:100;
q = 4*sqrt(dp);
plot(dp,q), title 'Platina de orificio'
% q1 = (2/9)*dp + 18;
q12 = (1/4)*dp + 16;
hold on
plot(dp,q12,'r')
% Analisis de error
% alfa = [-0.8:0.02:0.8]
% beta = 2.*((1 + alfa).^(0.5))
% error = 100*((beta - (2+ alfa))./beta);
% figure
```

```
% plot(alfa,error);title 'Error'
% xlabel('alfa'); ylabel('% error');
```

Linealización de funciones de varias variables

Para una función de varias variables:

$y = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad f: R^n \rightarrow R$	5
---	---

Con punto de operación dado por:

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$$

La expansión en serie de Taylor resultante, mostrando los términos de primer orden únicamente:

$y = f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ $\approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right _{\bar{x}} [x_1(t) - \bar{x}_1]$ $+ \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right _{\bar{x}} [x_2(t) - \bar{x}_2] + \dots$	6
--	---

Se puede representar en forma general como:

$y \approx f(\bar{x}) + [\nabla f(\bar{x})]^T [x - \bar{x}]$	7
--	---

Dónde:

$[\nabla f(\bar{x})]^T = \left[\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right _{\bar{x}} \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right _{\bar{x}} \dots \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right _{\bar{x}} \right]$	8
---	---

La linealización de f alrededor del punto de operación \bar{x} es equivalente a colocar un plano tangente a la superficie en el punto \bar{x} .

Ejemplo 6. La densidad de un gas es una función de la presión y la temperatura:

$$\rho[p(t), T(t)] = \frac{M}{R} \frac{p(t)}{T(t)}$$

Dónde:

Densidad ρ : $\frac{kg}{m^3}$

Peso molecular M: $\frac{kg}{kmol}$

Presión absoluta p: kPa

Temperatura absoluta T : °K

R es la constante ideal de los gases.

Obtener una aproximación lineal y evaluarla para aire:

$$M = 29 \frac{kg}{kmole},$$

$$R = 8,314 \frac{kPa-m^3}{kmole-K}.$$

Punto de operación: T = 300 K, p = 100 kPa

Rango de operación: T: 270 K a 420 K y P: 50 a 200 kPa

La ecuación linealizada es:

$$\rho[p(t), T(t)] = \rho|_{\bar{x}} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{\bar{x}} (p(t) - \bar{p}) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{x}} (T(t) - \bar{T})$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{\bar{x}} = \left. \frac{M}{RT(t)} \right|_{\bar{x}} = \frac{M}{R\bar{T}}$$

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{\bar{x}} = - \left. \frac{M}{R} \frac{P(t)}{T^2(t)} \right|_{\bar{x}} = - \frac{M}{R} \frac{\bar{P}}{\bar{T}^2}$$

$$\rho|_{\bar{x}} = \left. \frac{M}{R} \frac{P(t)}{T(t)} \right|_{\bar{x}} = \frac{M}{R} \frac{\bar{P}}{\bar{T}}$$

$$\rho[p(t), T(t)] = \frac{M\bar{P}}{R\bar{T}} + \frac{M}{R\bar{T}} (p(t) - \bar{p}) - \frac{M\bar{P}}{R\bar{T}^2} (T(t) - \bar{T})$$

Remplazando por los valores:

$$\rho[p(t), T(t)] = 1.163 + 0.0116(p(t) - \bar{p}) - 0.0039(T(t) - \bar{T})$$

Todos los coeficientes se evalúan en el punto de operación y cambian con este punto.

El error de la aproximación de Taylor:

$$e(t) = \frac{f(x) - [f(\bar{x}) + m\hat{x}]}{f(x)} * 100\%$$

$$e(t) = \frac{\frac{M}{R} \frac{P(t)}{T(t)} - \frac{M}{R} \frac{\bar{P}}{\bar{T}} - \frac{M}{R} \frac{1}{\bar{T}} \hat{P} + \frac{M}{R} \frac{\bar{P}}{\bar{T}^2} \hat{T}}{\frac{M}{R} \frac{P(t)}{T(t)}} * 100\%$$

$$e(t) = \frac{\frac{P(t)}{T(t)} - \frac{101}{300} - \frac{1}{300} \hat{P} + \frac{101}{(300)^2} \hat{T}}{\frac{P(t)}{T(t)}} * 100\%$$

Las gráficas anexas muestran la función exacta, la aproximada y el error

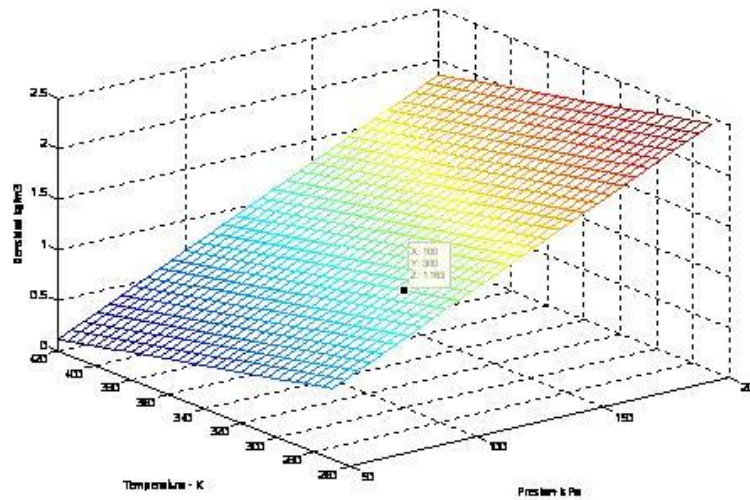


Figura 10a. Grafica exacta de la densidad

$$\text{den} = 1.1627 + 0.0116 \cdot (P - 100) - 0.0039 \cdot (T - 300)$$

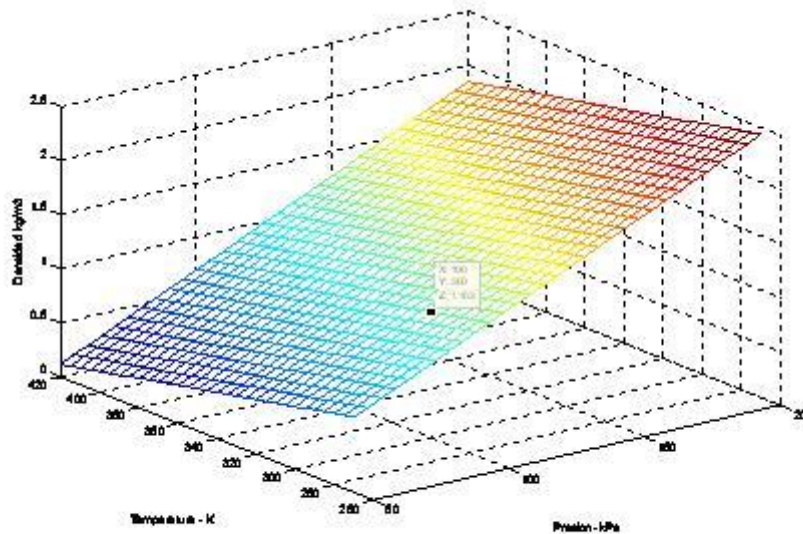


Figura 10 b. Función linealizada punto: P = 100 kpa, T = 300 K

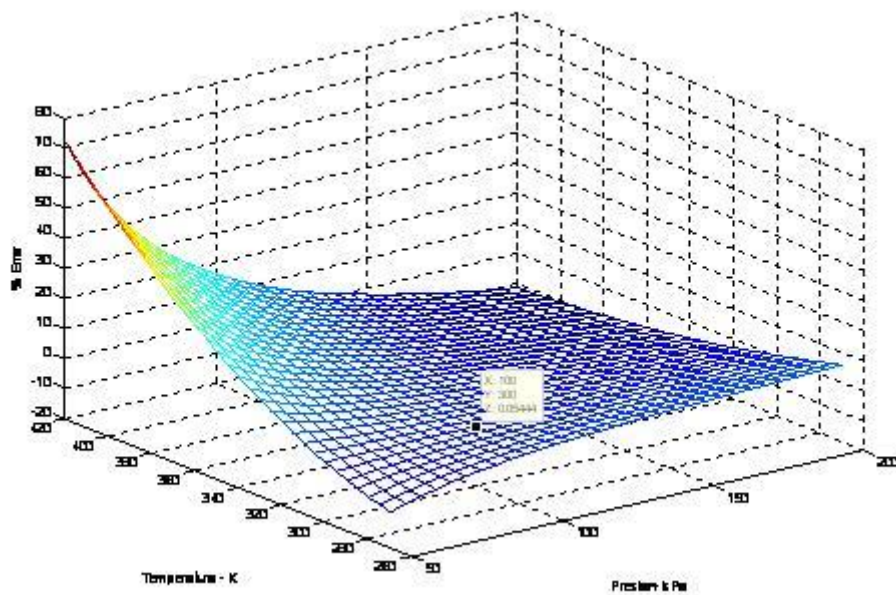


Figura 10 c Error

%Capítulo 3 Ejemplo 6 Compensación flujo

clear all

p = 50.0:5.0:200.0;

t = 270.0:5.0:420.0;

[P,T] = meshgrid(p,t);

dene = 3.49*P./T;

mesh(P,T,dene); xlabel ('Presion- kPa'),ylabel('Temperatura - K'),zlabel('Densidad kg/m3')

%Función linealizada

p = 50.0:5.0:200.0;

t = 270.0:5.0:420.0;

[P,T] = meshgrid(p,t);

dena= 1.1627 + 0.0116*(P-100) - 0.0039*(T-300)

mesh(P,T,dena); xlabel ('Presion- kPa'),ylabel('Temperatura - K'),zlabel('Densidad kg/m3')

error = 100*(dene - dena)./dene

mesh(P,T,error); xlabel ('Presion- kPa'),ylabel('Temperatura - K'),zlabel('% Error')

Linealización de una ecuación diferencial de primer orden.

Como las ecuaciones de estado son todas ecuaciones diferenciales de primer orden, se estudiará el procedimiento para linealizar este tipo de ecuaciones.

Se asume como punto de operación alrededor del cual se hará la expansión en serie de Taylor el punto de equilibrio o estado estable. El procedimiento se puede extender a n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Dada la ecuación de primer orden:

$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t), u(t)] + b$	9
--	---

Donde $f[x(t), u(t)]$ es una función no lineal de la variable de entrada $u(t)$ y de $x(t)$ y b es una constante.

Se asume como punto de operación el estado estable del sistema:

$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0 = f[\bar{x}, \bar{u}] + b$	10
---	----

Donde \bar{x} y \bar{u} son los valores de la variable x y de la entrada en el punto de operación.

La aproximación lineal para una función de dos variables:

$\frac{dx(t)}{dt} \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} (u(t) - \bar{u}) + b$	11
--	----

Restando la ecuación 15 de la 16 se obtiene:

$\frac{dx(t - \bar{x})}{dt} \approx \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} (u(t) - \bar{u})$	12
--	----

Empleando las variables incrementales, o de desviación respecto al punto de operación:

$\hat{x}(t) = x(t) - \bar{x} \quad \hat{u}(t) = u(t) - \bar{u}$	13
---	----

La ecuación diferencial de primer orden linealizada, en función de las variables incrementales es:

$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} \hat{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right _{[\bar{x}, \bar{u}]} \hat{u}(t)$	14
--	----

En la ecuación en términos de variable incrementales no aparecen términos independientes constantes, se eliminan cuando se resta la ecuación en estado estable o de equilibrio; además los nuevos coeficientes de la ecuación diferencial son constantes.

Ejemplo 7. La tasa de variación de la temperatura de un cuerpo de masa m sometido a radiación de calor en un horno es:

$$mc_v \frac{dT(t)}{dt} = \varepsilon \sigma A [T_s^4(t) - T^4(t)]$$

Donde

m: masa del cuerpo en libras

c_v : calor específico en BTU/lb·°R

T(t): temperatura del cuerpo en °R

σ : Constante de Stephan Boltzman: $0,1714 \times 10^{-8} \frac{BTU}{ft^2 \cdot R^4}$

ε : Emisividad del cuerpo. Adimensional

A: área del cuerpo en ft²

$T_s(t)$: Temperatura en el horno ($^{\circ}\text{R}$)

Obtener la ecuación diferencial linealizada, transformar al dominio de la frecuencia y hallar $G(s)$.

La condición de equilibrio:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = 0 = \frac{\varepsilon\sigma A}{mc_v} [\bar{T}_s^4 - \bar{T}^4]$$

En el estado estable $\bar{T}_s = \bar{T}$ la temperatura del cuerpo es igual a la temperatura del horno.

Restando la ecuación original y el punto de equilibrio:

$$\frac{d(T(t) - \bar{T})}{dt} = \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [T_s^4(t) - T^4(t)] - \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [\bar{T}_s^4 - \bar{T}^4]$$

Linealizando los términos:

$$T_s^4(t) \approx \bar{T}_s^4 + 4\bar{T}_s^3 [T_s(t) - \bar{T}_s]$$

$$T^4(t) \approx \bar{T}^4 + 4\bar{T}^3 [T(t) - \bar{T}]$$

$$\begin{aligned} \frac{d(T(t) - \bar{T})}{dt} &\approx \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [\bar{T}_s^4 - \bar{T}^4] + \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [4\bar{T}_s^3 (T_s(t) - \bar{T}_s) - 4\bar{T}^3 (T(t) - \bar{T})] \\ &\quad - \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [\bar{T}_s^4 - \bar{T}^4] \\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} [4\bar{T}_s^3 \hat{T}_s(t) - 4\bar{T}^3 \hat{T}(t)] \end{aligned}$$

Como la ecuación ya es lineal e invariante se puede transformar a Laplace:

$$\begin{aligned} s\hat{T}(s) + \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} 4\bar{T}^3 \hat{T}(s) &= \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} 4\bar{T}_s^3 \hat{T}_s(s) \\ G(s) = \frac{\hat{T}(s)}{\hat{T}_s(s)} &= \frac{\frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} 4\bar{T}_s^3}{s + \frac{\varepsilon\sigma A}{MC_v} 4\bar{T}^3} = \frac{\left(\frac{\bar{T}_s^3}{\bar{T}^3}\right)}{\left(\frac{MC_v}{\varepsilon\sigma A 4\bar{T}^3}\right)s + 1} \end{aligned}$$

$$\tau = \left(\frac{MC_v}{\varepsilon \sigma A 4 \bar{T}^3} \right)$$

$$K = \left(\frac{\bar{T}_s^3}{\bar{T}^3} \right) = 1$$

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

El numerador es $K = 1$ porque en estado estable o equilibrio, la temperatura que alcanza el cuerpo es igual a la temperatura del horno.

Si se aumenta la temperatura que debe alcanzar el cuerpo un 10% la nueva constante de tiempo del proceso es aproximadamente $\frac{\tau_0}{1,33} \approx 0,75\tau_0$ disminuye la constante de tiempo.

Para procesos no lineales, los parámetros del modelo dependen del punto de operación.

Linealización de ecuaciones de estado

La forma general de las ecuaciones de estado es:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1[t, x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2[t, x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n[t, x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$$

Empleando notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{u} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^q$$

Las funciones f_i son no lineales, continuamente derivables y pueden ser funciones explícitas del tiempo.

Si el sistema es no lineal e **INVARIANTE CON EL TIEMPO**:

$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X, U), \quad X(t_0) = X_0 \\ Y &= H(X, U) \\ F: \mathcal{R}^n \cdot \mathcal{R}^p &\rightarrow \mathcal{R}^n \\ H: \mathcal{R}^n \cdot \mathcal{R}^p &\rightarrow \mathcal{R}^q\end{aligned}$	15
--	----

X es el vector de estado, U el vector de entradas y Y el vector de salidas:

$$\mathbf{X} \in \mathcal{R}^n, \mathbf{U} \in \mathcal{R}^p, \mathbf{Y} \in \mathcal{R}^q$$

Se asume que existe un vector de entrada \bar{U} tal que lleva al sistema a la condición de equilibrio \bar{X} . El punto de equilibrio (o punto estacionario) es una solución constante del sistema.

$\dot{X} = F(\bar{X}, \bar{U}) = 0$	16
-------------------------------------	----

Se perturba esta posición de equilibrio por medio de las variables incrementales \hat{x} y \hat{u} :

$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{U}}$	17
--	----

La expansión en serie de Taylor lleva a:

$$\frac{dx}{dt} = F(\bar{X} + \hat{X}, \bar{U} + \hat{U})$$

$\dot{X} \approx F(\bar{X}, \bar{U}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right _{\bar{X}, \bar{U}} \hat{X} + \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right _{\bar{X}, \bar{U}} \hat{U} + \dots$	18
---	----

Dónde:

$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right _{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \cdots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \cdots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix} \bigg _{\bar{X}, \bar{U}}$	19a
$\left. \frac{\partial F}{\partial u} \right _{\bar{X}, \bar{U}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du_1} & \cdots & \frac{df_1}{du_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{du_1} & \cdots & \frac{df_n}{du_p} \end{pmatrix} \bigg _{\bar{X}, \bar{U}}$	19b

son los jacobianos de \mathbf{F} con respecto a \mathbf{X} y \mathbf{U} , evaluados en el punto de operación, $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{U}})$

Empleando la ecuación 62 y la definición de variables incrementales se obtiene:

$$\frac{d(\hat{\mathbf{X}})}{dt} = \frac{d(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})}{dt} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{U}}$$

$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}$	20a
$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}$	20b

La ecuación de salida (61) es:

$y_1 = h_1[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$ $y_q = h_q[x_1(t), \dots, x_n(t); u_1(t), \dots, u_p(t)]$	21
--	----

En forma vectorial:

$\mathbf{Y} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$	22
---	----

Si $\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}}$ la expansión en serie de Taylor:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}}$$

Tendrá las siguientes matrices \mathbf{C} y \mathbf{D} :

$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} \right _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}_e} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{dh_1}{dx_1} & \dots & \frac{dh_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dh_q}{dx_1} & \dots & \frac{dh_q}{dx_n} \end{array} \right) \bigg _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}$	23a
$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{dh_1}{du_1} & \dots & \frac{dh_1}{du_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dh_q}{du_1} & \dots & \frac{dh_q}{du_p} \end{array} \right) \bigg _{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}$	23b

Ejemplo 8. Para el circuito del ejemplo 3 – página 7 se encontraron las ecuaciones de estado, no lineales:

I. Plantear las ecuaciones (Ejemplo 3)

Variables: $v_{c1} = x_1$; $v_{c2} = x_2$; $i_L = x_3$

Ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = -x_3 + (U_1 - x_1)^3 + U_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_2 - \gamma(x_3) \quad (3)$$

La ecuación de salida:

$$y = x_1 - x_2 - \gamma(x_3)$$

II. Paso 2: Encontrar los puntos de equilibrio.

Para las entradas dadas ($U_1=1V$ y $U_2=27A$) encontrar el punto de equilibrio

$$\bar{X} = (\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2 \quad \bar{X}_3)^T \text{ tal que } \bar{X}_1' = 0; \bar{X}_2' = 0; \bar{X}_3' = 0$$

En el punto de equilibrio las variables no cambian:

$$\dot{\bar{x}}_1 = 0 \Rightarrow -\bar{x}_3 + (U_1 - \bar{x}_1)^3 + U_2 = 0$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_3 = 0$$

$$\dot{\bar{x}}_3 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \gamma(\bar{x}_3) = 0$$

Como $\bar{x}_3 = \bar{i}_2 = 0$ de la característica de $v_2 - i_2$ se encuentra que:

$$\bar{v}_2 = \gamma(\bar{x}_3) = 2$$

En el punto de operación la ecuación para v_2 es

$$\bar{v}_2 = \gamma(\bar{i}_2) = \bar{i}_2 + 2$$

$$= \bar{x}_3 + 2$$

Y la ecuación para v_2 es:

$$v_2 = 2 + i_2$$

Válida para $-1 \leq i_2$

Reemplazando en las ecuaciones 1 y 3 evaluadas en el punto de equilibrio:

$$\begin{aligned}(\bar{U}_1 - \bar{x}_1)^3 + \bar{U}_2 &= 0 \\(\bar{U}_1 - \bar{x}_1)^3 &= -\bar{U}_2 \\(\bar{U}_1 - \bar{x}_1)^3 &= -27 \\\bar{U}_1 - \bar{x}_1 &= \sqrt[3]{-27}\end{aligned}$$

La ecuación anterior tiene tres raíces dadas por:

$$\begin{aligned}s_k &= -3e^{j\frac{2\pi k}{3}} \quad k = 0,1,2 \\ \bar{U}_1 - \bar{x}_1 &= \sqrt[3]{-27} = -3 \\ \bar{U}_1 - \bar{x}_1 &= -3 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \bar{U}_1 - \bar{x}_1 &= -3 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

Sólo tiene significado físico la raíz real:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 4 \\\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} - \bar{x}_2 - 2 &= 0 \\\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} &= 2\end{aligned}$$

El punto de equilibrio es:

$$\bar{X} = (4 \quad 2 \quad 0)^T$$

Para las entradas

$$\bar{U} = (1 \quad 27)^T$$

En un sistema no lineal pueden existir varias soluciones de la ecuación en condiciones de equilibrio

Las ecuaciones de estado son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_3 + u_1^3 - 3u_1^2 x_1 + 3u_1 x_1^2 - x_1^3 + u_2 \\\dot{x}_2 &= x_3 \\\dot{x}_3 &= x_1 - x_2 - (x_3 + 2) \\y &= x_1 - x_2 - (x_3 + 2)\end{aligned}$$

III. Evaluar los jacobianos en el punto de equilibrio

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dx_3} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dx_3} \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} ; B = \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{du_1} & \frac{df_1}{du_2} \\ \frac{df_2}{du_1} & \frac{df_2}{du_2} \\ \frac{df_3}{du_1} & \frac{df_3}{du_2} \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} -3u_1^2 + 6u_1x_1 - 3x_1^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} 3u_1^2 - 6u_1x_1 + 3x_1^2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

Para la ecuación de salida:

$$C = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{pmatrix} \frac{dh_1}{dx_1} & \frac{dh_1}{dx_2} & \frac{dh_1}{dx_3} \end{pmatrix} \Big|_{\bar{x}, \bar{u}}$$

$$C = (1 \quad -1 \quad -1) \Big|_{\bar{x}, \bar{u}_e}$$

Como y no depende de $u \Rightarrow D = 0$

El modelo linealizado alrededor del punto de operación es:

$$\dot{\hat{X}} = \begin{pmatrix} -27 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \hat{X} + \begin{pmatrix} 27 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{U}$$

$$\hat{Y} = (1 \quad -1 \quad -1) \hat{X}$$

%Capitulo 3 Ejemplo 8 Circuito eléctrico no lineal
%Linealización & jacobiano

clear all

syms x1 x2 x3 u1 u2

F1 = -x3 + (u1)^3 - 3*((u1)^2)*(x1) + 3*(u1)*(x1)^2 - (x1)^3 + u2

F2 = x3

F3 = x1-x2-x3-2

Y = x1-x2-x3-2

V1 = [x1 x2 x3]

V2 = [u1 u2]

```

As = jacobian([F1;F2;F3],V1)
Bs = jacobian([F1;F2;F3],V2)
Cs = jacobian(Y,V1)
Alin = subs(As,[V1,V2],[4 2 0, 1 27]);
Blin = subs(Bs,[V1,V2],[4 2 0, 1 27]);
Clin = subs(Cs,[V1,V2],[4 2 0, 1 27]);
%Modelo linealizado
Amn = double(Alin)
Bmn = double(Blin)
Cmn= double(Clin)
eig(Amn)
CirLin = ss(Amn,Bmn,Cmn,0)

F1 = u1^3 - 3*u1^2*x1 + 3*u1*x1^2 - x1^3 + u2 - x3

F2 = x3

F3 = x1 - x2 - x3 - 2

Y = x1 - x2 - x3 - 2

V1 = [x1, x2, x3]

V2 = [u1, u2]

As =

[- 3*u1^2 + 6*u1*x1 - 3*x1^2, 0, -1]
[ 0, 0, 1]
[ 1, -1, -1]

Bs =

[3*u1^2 - 6*u1*x1 + 3*x1^2, 1]
[ 0, 0]
[ 0, 0]

Cs =

[1, -1, -1]

Alin =

[-27, 0, -1]
[ 0, 0, 1]
[ 1, -1, -1]

Blin =
    
```

```
[27, 1]  
[ 0, 0]  
[ 0, 0]  
  
clin =  
  
[1, -1, -1]
```

[Published with MATLAB® R2021b](#)

Una comparación entre las dos soluciones se puede hacer en Simulink:

Azul: variable de salida sistema linealizado

Amarillo respuesta modelo no lineal simulado

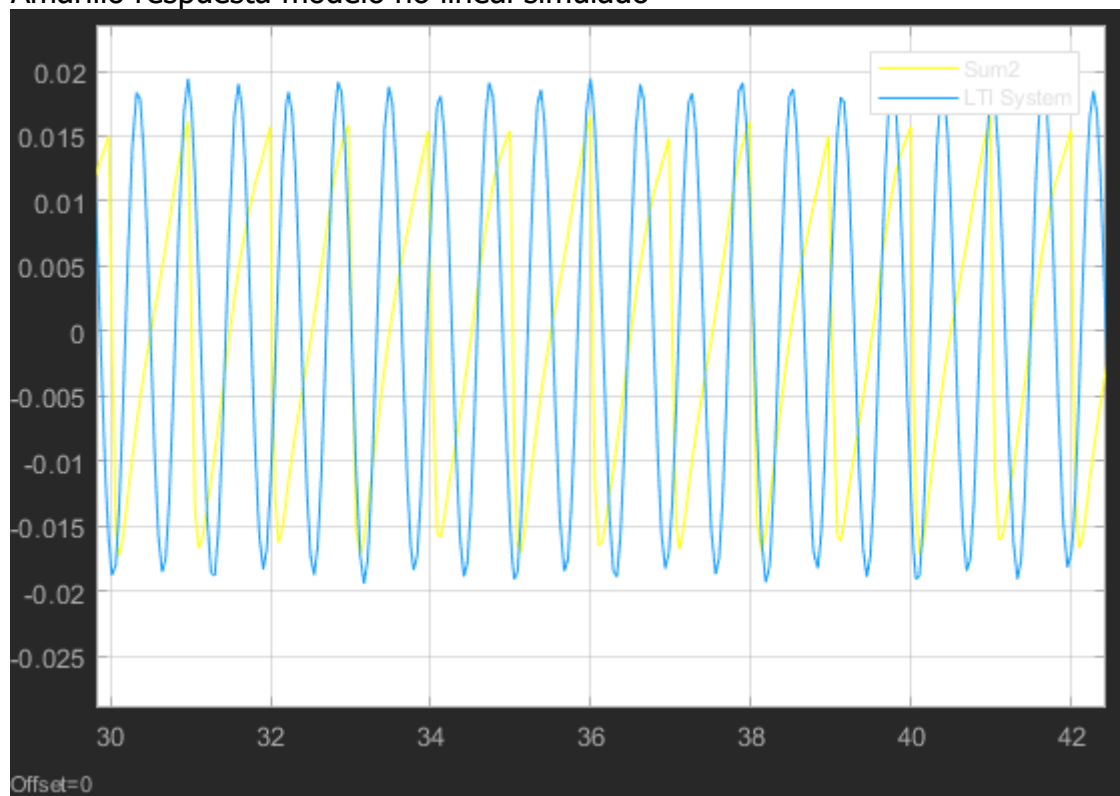


Figura 11a

Las señales de entrada incrementales son:

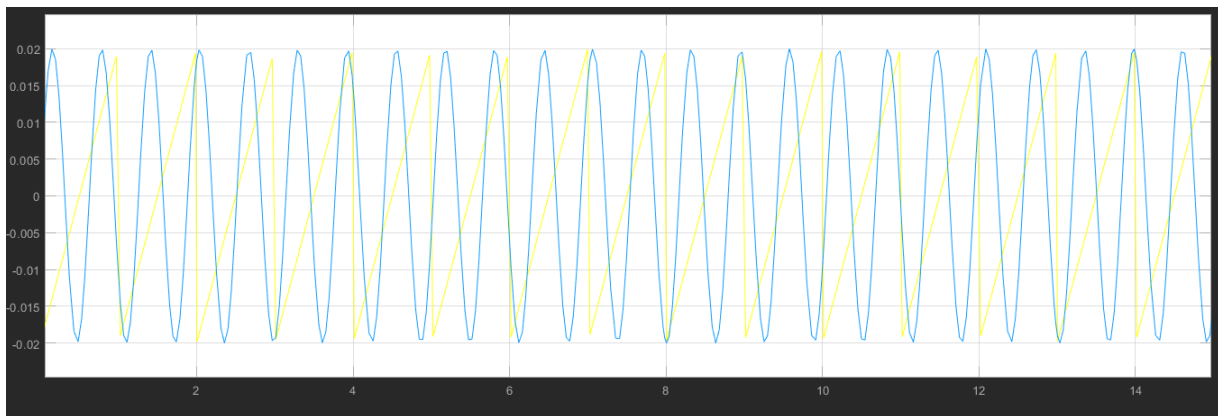


Figura 12b

Las amplitudes son muy bajas las dos señales están en el rango -0.02 y $+0.002$

Cuando se aumenta la amplitud se observa la diferencia entre las dos respuestas:

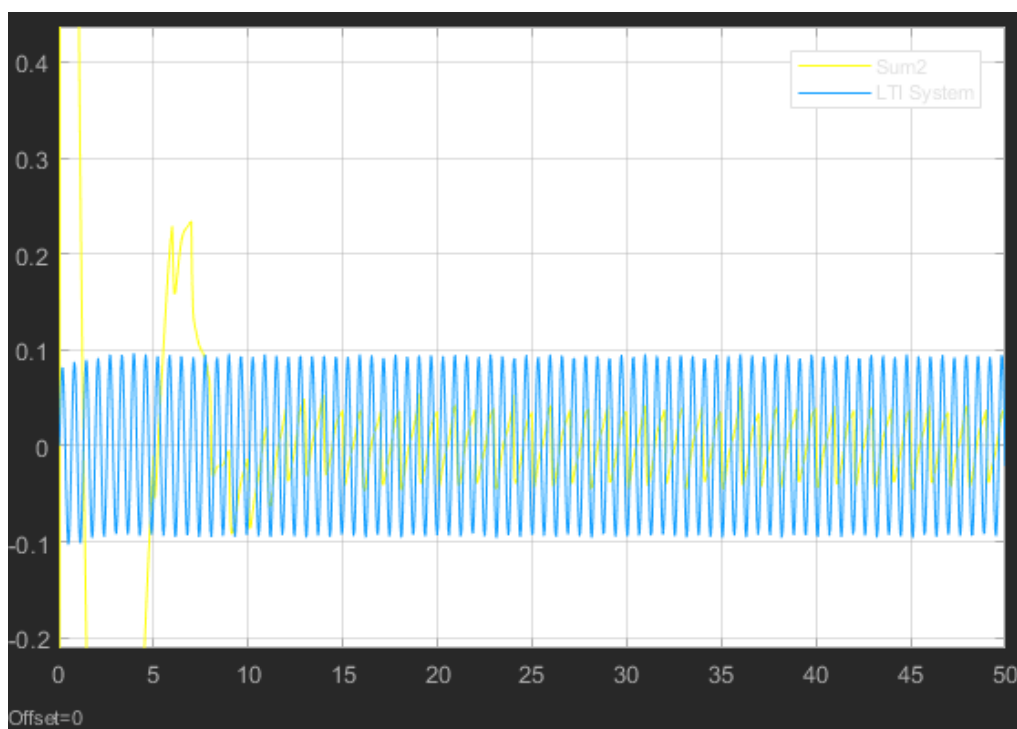


Figura 12c

Cuando la amplitud de las entradas se aumentan mas, en el rango de las unidades:

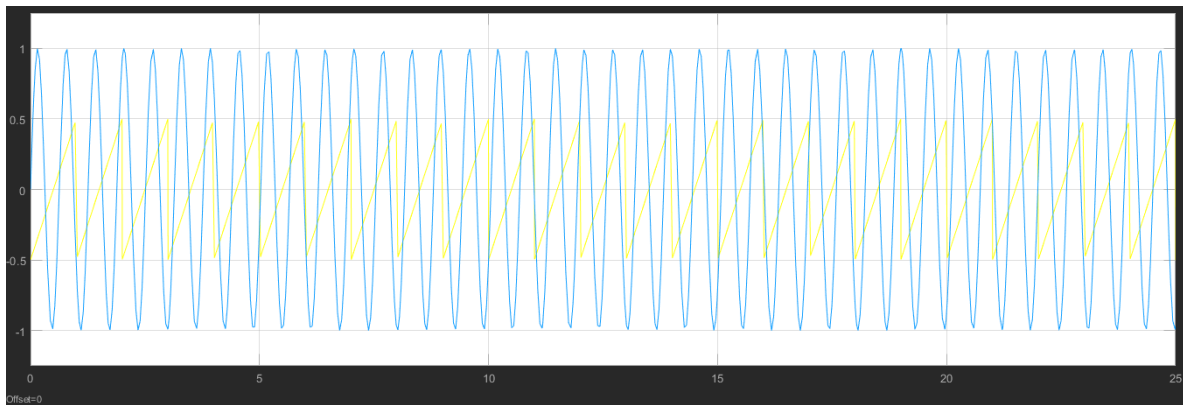


Figura 12d

Las respuestas son completamente diferentes

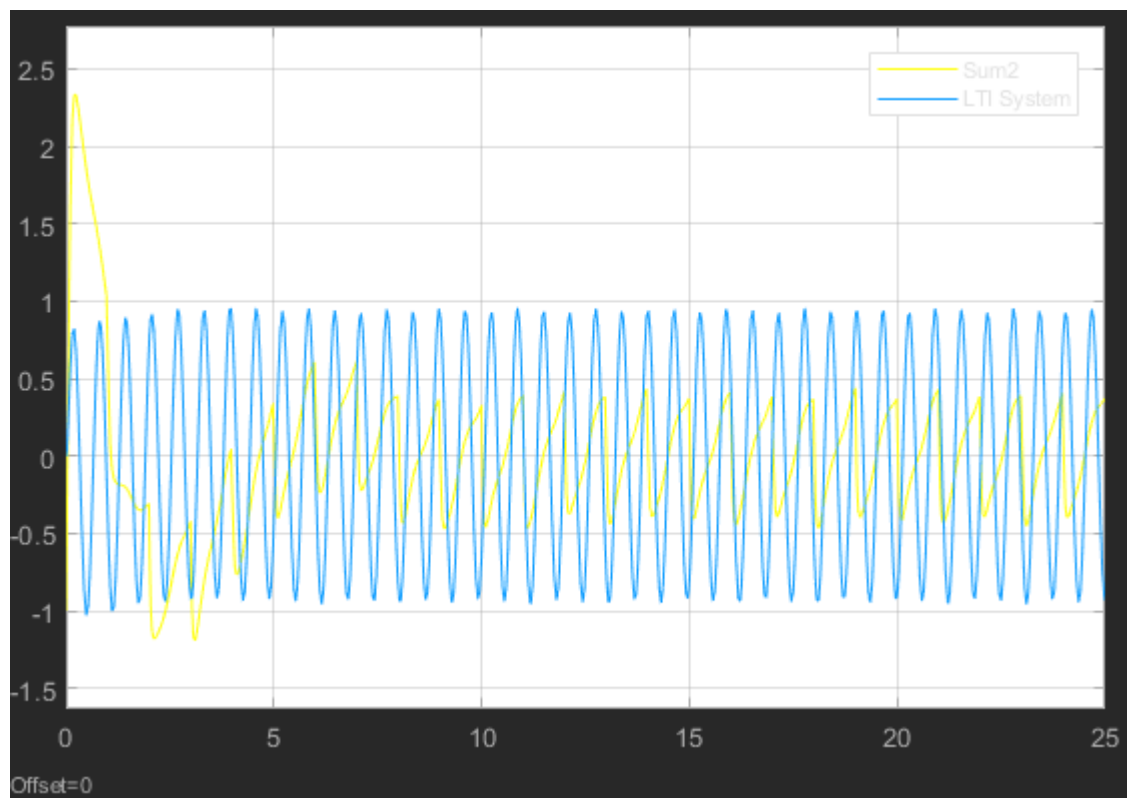


Figura 12e

Conclusión: respetar la restricción sobre el rango de validez del modelo

Ejemplo 9. Plantear las ecuaciones que describen al péndulo invertido^{3,4}. Es un sistema no lineal e inestable: el péndulo caerá si la base no se mantiene en movimiento. Linealizar el modelo del péndulo invertido alrededor del punto de operación

El movimiento se restringe al plano vertical, la entrada externa es la fuerza F que produce el desplazamiento horizontal del carro. Las variables de salida son el ángulo θ y la posición del carro x .

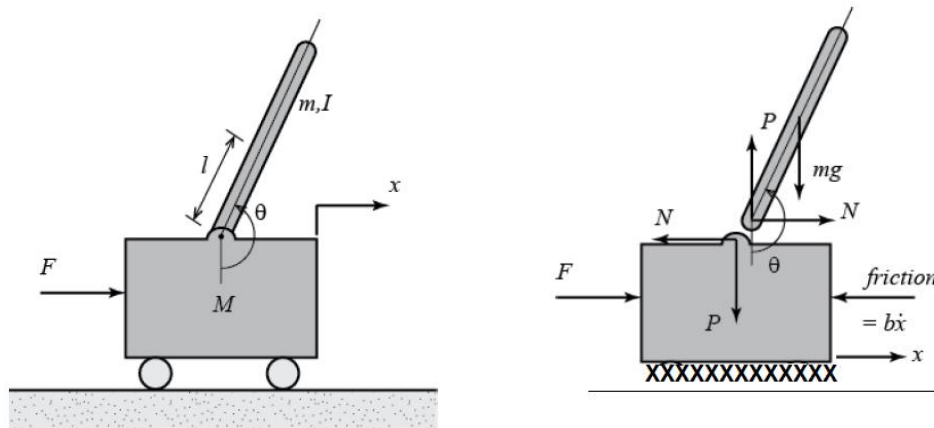


Figura 13a

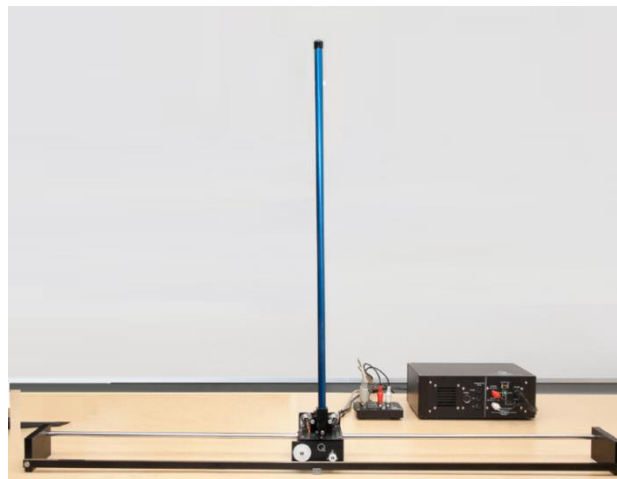


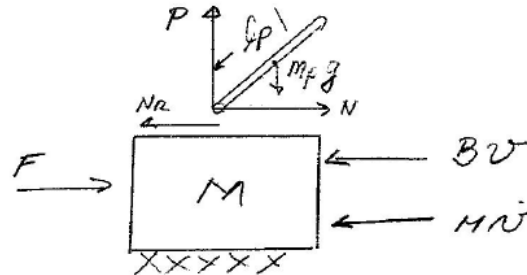
Figura 13

³ Quanser. Single Inverted pendulum. Student Handout. Document 512. © 2012 Quanser Inc.

⁴ U. Michigan. Control Tutorials for MATLAB and Simulink - Inverted Pendulum_ System Modeling

b

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE CARRO



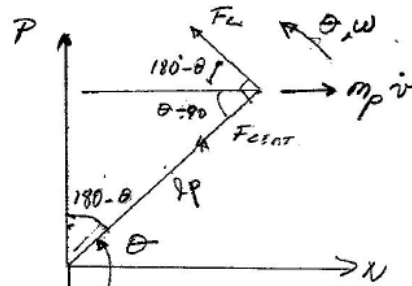
l_p : distancia
al centro
de masa

m_p masa
pendulo

$$F = M\ddot{v} + B\dot{v} + N_R$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE EN EL PENDULO:

LA POSICION DE REPOS DEL PENDULO ES
VERTICAL, HACIA ABAJO



$$F_{cent} = (m_p l_p) \omega^2$$

$$N_c = \omega l_p$$

$$F_c = (m_p l_p) \ddot{\omega}$$

COMPONENTE $F_{LN} \Rightarrow \cos(180 - \theta) = \frac{F_{LN}}{F_L}$

$$F_{LN} = F_L \cos(180 - \theta)$$

$$F_{LN} = (m_p l_p) \dot{\omega} [\cos 180^\circ \cos \theta + \sin 180^\circ \sin \theta]$$

$$F_{LN} = -(m_p l_p) \dot{\omega} \cos \theta$$

COMPONENTE $F_{CENTN} \Rightarrow \cos(\theta - 90) = \frac{F_{CENTN}}{F_{CENT}}$

$$\begin{aligned} F_{CENTN} &= (m_p l_p) \omega^2 \cos(\theta - 90) \\ &= (m_p l_p) \omega^2 [\cos \theta \cos 90 + \sin \theta \sin 90] \\ &= (m_p l_p) \omega^2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$N_* = -m_p \ddot{r} + (m_p l_p) \omega^2 \sin \theta - (m_p l_p) \dot{\omega} \cos \theta$$

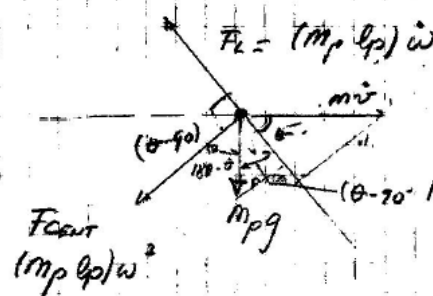
LA FUERZA DE REACCION N_A ES CONTRARIA

A N:

$$N_A = m_p \ddot{r} - (m_p l_p) \omega^2 \sin \theta + (m_p l_p) \dot{\omega} \cos \theta$$

$$F = (M + m_p) \ddot{r} + B \dot{r} - (m_p l_p) \omega^2 \sin \theta + (m_p l_p) \dot{\omega} \cos \theta$$

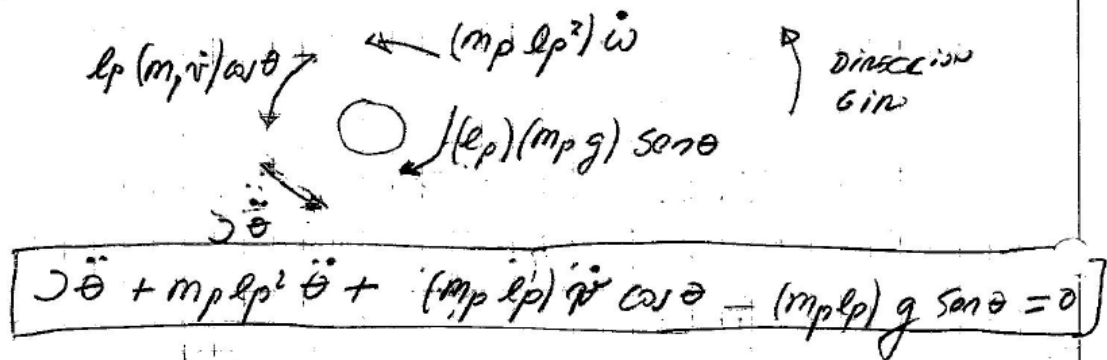
PARA EL PENDULO, FUERZAS NORMALES



COMPONENTE NORMAL
DE $m \ddot{r}$
 $= m \ddot{r} \cos \theta$

COMPONENTE NORMAL DEL PESO

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \frac{P_N}{m_p g} = m_p g \cos(\theta - 90^\circ) = (m_p g) \sin \theta$$



$$\ddot{\theta} + m_p l_p^2 \ddot{\theta} + (m_p l_p) \dot{\omega} \cos \theta - (m_p l_p) g \sin \theta = 0$$

Ecuaciones no lineales

SISTEMAS CON RETARDO DE TRANSPORTE

Cuando en un proceso cualquiera es necesario transportar energía o materia prima de un punto a otro se presenta un retardo de transporte o tiempo muerto. El tiempo muerto es una característica inherente del proceso y su magnitud está asociada a la velocidad de propagación de las variables físicas del proceso:

- Variables eléctricas $v = c = 3 * 10^8 \frac{m}{s}$ el retardo es despreciable en sistemas eléctricos concentrados.
- Fluidos, líquidos y presiones viajan aproximadamente a la velocidad del sonido $3,4 * 10^2 \frac{m}{s}$.
- Temperatura, composición y otras propiedades de los fluidos se desplazan a la velocidad del fluido: hasta $5m/s$ para líquidos y hasta $60m/s$ para gases.
- Sólidos: Se propagan a la velocidad del medio de transporte: bandas transportadoras, motor en una enrolladora, caída por gravedad etc.⁵

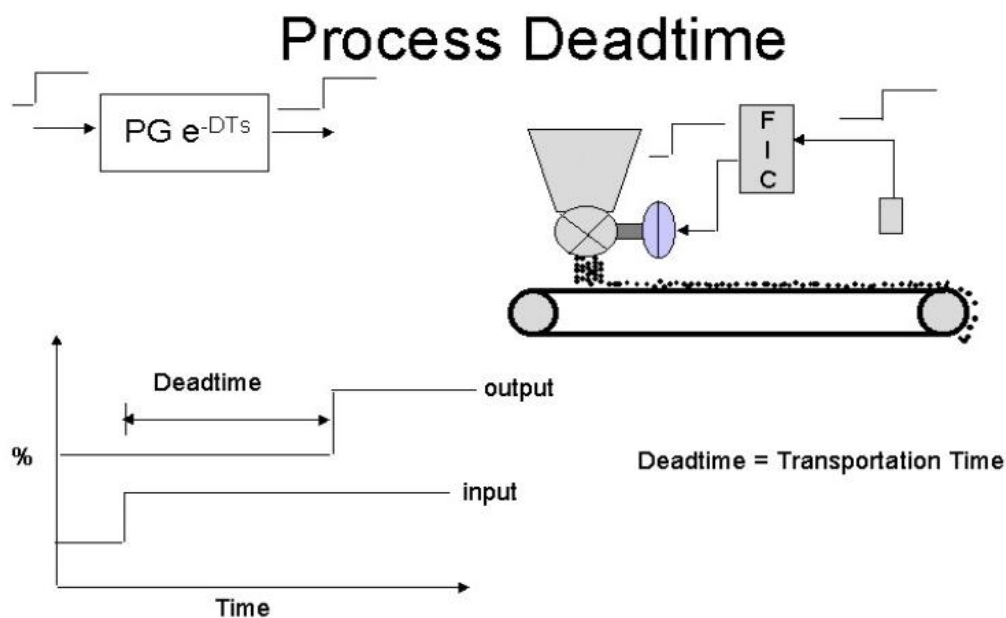


Figura 14

⁵ Michael Brown Control Engineering CC. Practical Process Control Training & Loop Optimisation

La relación entrada – salida de un sistema con retardo de transporte está dada por:

$Y(t) = U(t - T_o)$	24
---------------------	----

Donde T_o es el tiempo muerto o tiempo de retardo.

Para el sistema de retardo unitario está definido por

$$y(t) = u(t-1)$$

Para determinar la respuesta $\{y(t), t \geq t_o\}$ a partir de la entrada $\{u(t), t \geq t_o\}$, es necesario conocer la información $\{u(t), t_o-1 \leq t < t_o\}$

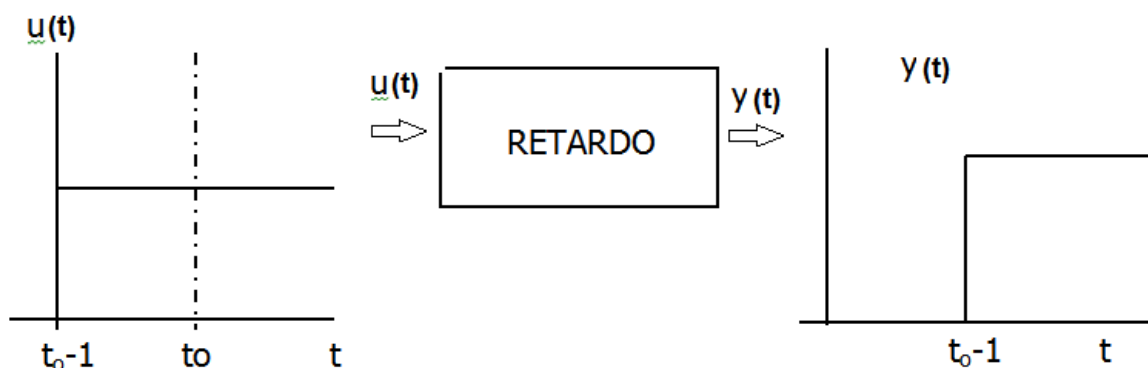


Figura 15

El estado inicial del sistema está dado por $\{u(t), t_o-1 \leq t < t_o\}$ y existen infinitos puntos entre $t_o-1 \leq t < t_o$: como el número de variables de estado es infinito el sistema es distribuido y no se puede modelar empleando variables de estado.

Para determinar la respuesta impulso

$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = \delta(t-1)$$

Entonces la respuesta impulso es $g(t) = \delta(t-1)$ y se puede emplear el teorema de convolución para evaluar la respuesta en estado cero.

El sistema se puede modelar en el dominio de la frecuencia empleando la transformada de Laplace:

$$L[f(t - T_0)] = \int_0^{\infty} f(t - T_0)e^{-st} dt \quad f(t) = 0 \text{ para todo } t < T_0$$

Sea $\tau = t - T_0$

$$L[f(t - T_0)] = \int_{-T_0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(T_0+\tau)} d\tau = \int_{-T_0}^0 f(\tau)e^{-s(T_0+\tau)} d\tau + \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s(T_0+\tau)} d\tau$$

Como no hay cambio para $t < \text{tiempo muerto}$ $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, y:

$$\int_{-T_0}^0 f(\tau)e^{-s(T_0+\tau)} d\tau = 0$$

$L[f(t - T_0)] = e^{-sT_0} \int_0^{\infty} f(\tau) * e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT_0} * F(s)$	25
---	-----------

El teorema de corrimiento en el tiempo establece que retardar en el tiempo T_0 segundos es equivalente a multiplicar por e^{-sT_0} en la frecuencia. Como T_0 es parte integral de la respuesta del proceso se debe incluir en la función de transferencia empleando el teorema del corrimiento.

Si $G(s)$ es la función de transferencia sin retardo de transporte, la función de transferencia del sistema con tiempo muerto será:

$G(s) = G(s) * e^{-sT_0}$	26
---------------------------	-----------

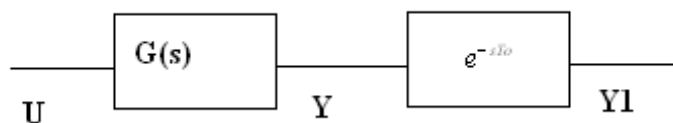


Figura 16

Ejemplo 11. La línea de agua caliente entre el calentador y la ducha tiene $\varphi = 1/2''$ y una longitud de 30ft. Cuando se abre completamente la válvula se tiene un flujo de 4gpm.

a. ¿Cuál es el tiempo muerto?

- b. Calcular la función de transferencia T_s/T_h donde T_s es la temperatura de la ducha y T_h la temperatura a la salida del calentador.
- c. ¿Cuál es la función de transferencia cuando la válvula está cerrada? ¿Se obtiene de la función anterior?

El material de la tubería es cobre y el área de la sección interna es 0.00101 ft^2 .

$$q = v * A$$

$$v = \frac{2 \text{ gpm}}{0.00101 \text{ ft}^2} = \frac{2 \text{ gal} * \frac{0.13368 \text{ ft}^3}{\text{gal}}}{0.00101 \text{ ft}^2 * m}$$

$$v = 264,71 \frac{\text{ft}}{\text{min}}$$

$$v = 264,71 \frac{\text{ft}}{\text{min}}$$

$$T_o = \frac{L}{v} = \frac{30 \text{ ft}}{264.71 \text{ ft/m}} = 0.11 \text{ min}$$

$$T_o = 6.8 \text{ s.}$$

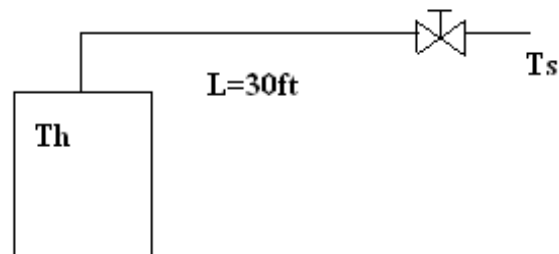


Figura 17a

Asumiendo que la tubería está perfectamente aislada, y que el flujo a través de ella es continuo:

$$\frac{T_s}{T_h} = e^{-sT_o} = e^{-0.11s}$$

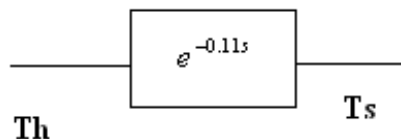


Figura 17b

Cuando la válvula está cerrada:

$$q = 0$$

$$T_0 = \frac{L * A}{q} \rightarrow \infty$$

$$\frac{Ts}{T_h} \rightarrow 0$$

Este resultado no se puede obtener de la función de transferencia. El tiempo muerto es función de la posición de la válvula equivalente a la tasa de flujo a través de la tubería.

Una forma aproximada de modelar los sistemas con retardo de tiempo es emplear la expansión de Padé:

$e^{-sT_0} = \frac{1 - \frac{T_0}{2}s + \frac{(T_0s)^2}{8} - \frac{(T_0s)^3}{48} + \dots}{1 + \frac{T_0}{2}s + \frac{(T_0s)^2}{8} + \frac{(T_0s)^3}{48} + \dots}$	27a
---	-----

Tomando los términos de primer orden:

$e^{-sT_0} = \frac{1 - \frac{T_0}{2}s}{1 + \frac{T_0}{2}s}$	27b
---	-----

El tiempo muerto se puede aproximar por medio de un polo real negativo y un cero real positiva, (función de fase no mínima). Esta aproximación permite emplear técnicas analíticas para el análisis y diseño de sistemas de control.

Ejemplo 12. Para un sistema de primer orden con constante de tiempo τ y tiempo muerto T_0 la función de transferencia es:

$$G(s) = \left(\frac{k}{\tau s + 1} \right) * e^{-sT_0}$$

Ganancia = 3; constante de tiempo = 2 s y tiempo muerto 4 s. Obtener la respuesta para entrada paso

La gráfica de la respuesta paso sin tiempo muerto, es:

$$H_s = \frac{3}{2s + 1}$$

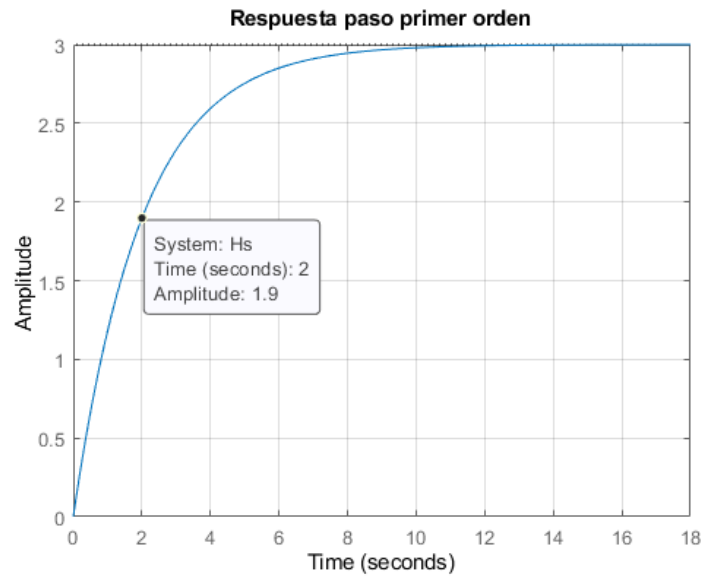


Figura 18a Respuesta paso SIN tiempo muerto

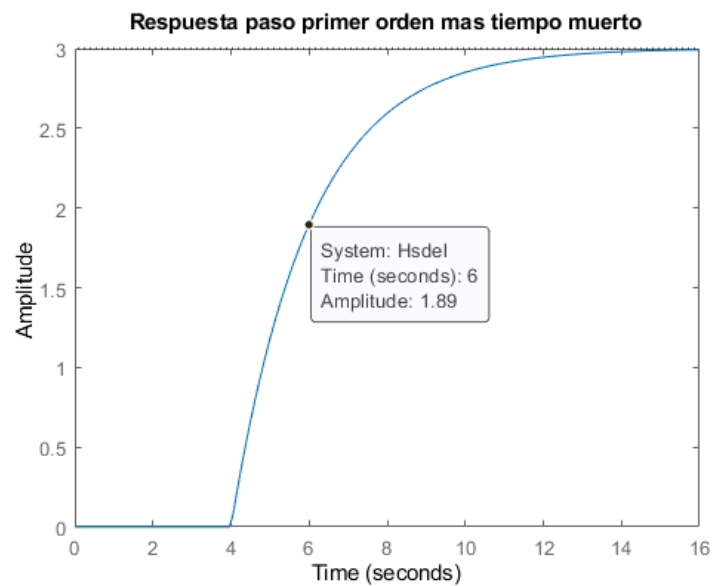


Figura 18b Respuesta paso CON tiempo muerto

$$H_{sdel} = \frac{3}{\exp(-4s) * 2s + 1}$$

La aproximación de Pade de primer orden:

$$e^{-sT_o} = \frac{1 - \frac{T_o}{2}s}{1 + \frac{T_o}{2}s} = \frac{1 - 2s}{1 + 2s}$$

$$\text{funaprox} = \frac{-6s + 3}{4s^2 + 4s + 1}$$

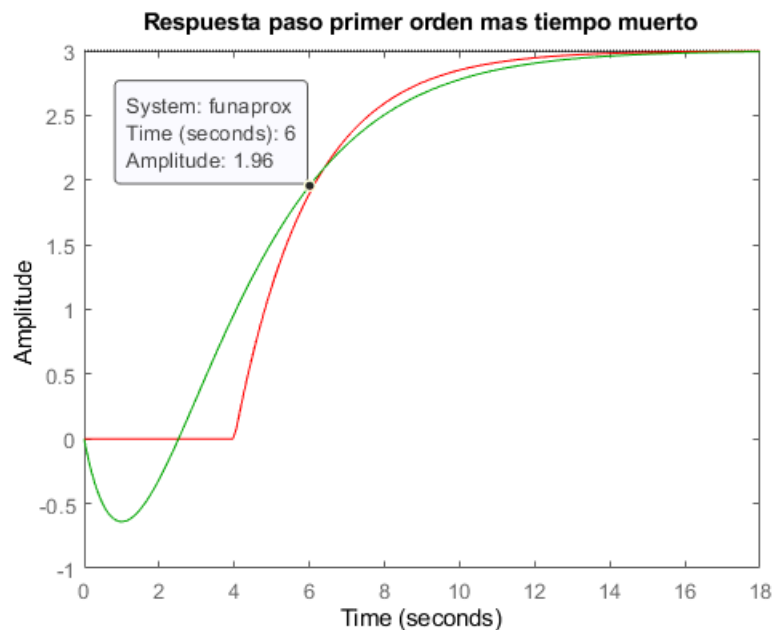


Figura 18c Respuesta paso, aproximación Padé (verde)

Script de Matlab®:

```
%Capitulo 3 Ejemplo 12 Sistema primer orden con retardo
clear all
num = [3];
den = [2 1];
```

```
Hs = tf(num,den)
step(Hs), title 'Respuesta paso primer orden'
grid on
%Con tiempo muerto
Hsdel = tf(num,den);
Hsdel.InputDelay = 4
figure
step(Hsdel,'r'), title 'Respuesta paso primer orden mas tiempo muerto'
%Aproximación de Pade
numpade = [-2 1];
denpade = [2 1];
funpade = tf(numpade,denpade);
funaprox = Hs*funpade
hold on
step(funaprox,'g')
```

Para $t < T_o$, **NO** hay cambio en la respuesta del sistema.

Como se estudiará posteriormente el tiempo muerto afecta severamente la respuesta en el tiempo, la estabilidad del sistema y la sintonización y ajuste de los controladores.

Respuesta de frecuencia diagrama de Bode

$$G(s) = e^{-sT_o}$$
$$s = j\omega$$
$$G(j\omega) = e^{-j(\omega T_o)}$$

La magnitud es constante, independiente de la frecuencia:

$$|G(j\omega)| = 1$$

La fase es funcion lineal de de la frecuencia, cpendiente dada por el tiempo muerto:

$$\theta = -\omega T_o$$

Ejemplo 17. Un sistema de doble capacidad con tiempo muerto tiene la función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{0,8e^{-4s}}{(10s + 1)(3s + 1)}$$

Graficar diagramas de Bode de magnitud y fase, sistema con y sin tiempo muerto.

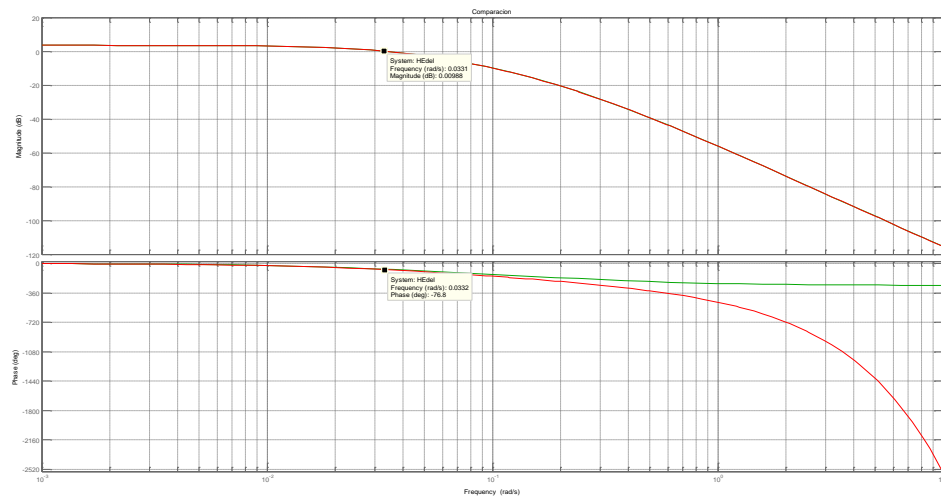


Figura 22a

El impacto directo del tiempo muerto es sobre la curva de fase: curva verde corresponde a la fase del sistema sin tiempo muerto.

Como se verá en el estudio de estabilidad, el tiempo muerto decrece los márgenes de estabilidad.

```
%Capitulo 1 Ejemplo 18 Sistemas con retardo
clear all
num = [1.5];
den = [900 420 43 1];
GH = tf(num,den)
% bode(GH,'g'),title 'HE sin tiempo muerto'
%margin(GH)
%Con tiempo muerto
HEdel = tf(num,den);
HEdel.InputDelay = 4
grid on
bode(GH,'g',HEdel,'r'), title 'Comparacion'
```

TECNICAS DE SOLUCION NUMERICAS⁷

Las ecuaciones de estado obtenidas son de la forma general:

$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \text{con } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$	28
--	----

Donde la función \mathbf{f} puede ser lineal o no lineal, invariante o variante con el tiempo. En general $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}; \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ es derivable respecto a $(n+p+1)$ variables en algún espacio \mathbf{D} de dimensión $(n+p+1)$.

En esta sección se estudiarán técnicas de solución numéricas y el empleo de MATLAB® para la solución de ecuaciones diferenciales.

Serie de Taylor

La expansión en serie de Taylor se puede emplear para encontrar la solución numérica de una ecuación diferencial.

Si se asume que $\mathbf{x}(t)$ es solución de (34), con $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t_0))$ en \mathbf{D} , $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ se puede expandir en una serie de Taylor como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}(t_0)(t-t_0) + \ddot{\mathbf{x}}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \ddot{\mathbf{x}}(t_0)\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \dots \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))(t-t_0) + \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \frac{dx_1}{dt} \right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \dots + \left[\frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \frac{dx_n}{dt} \right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \dots + \frac{\partial}{\partial u_p} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right]_{t=t_0} (t-t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Reagrupando:

⁷ Referencia 2

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0))(t - t_0) \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \dot{x}_i \right]_{t=t_0} (t - t_0) \\ & + \left[\sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial u_j} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \dot{u}_j \right]_{t=t_0} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Solución válida para pequeños cambios alrededor de t_0 . Si $\Delta t = t - t_0$ es un pequeño intervalo tal que la serie de Taylor converge para $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$

$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_0 + \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right]_{t=t_0} \frac{(t - t_0)^2}{2} + \dots$	29
--	----

Se evalúa $x(t_1)$ que es la nueva condición inicial para $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ y así sucesivamente. El método no es eficiente desde el punto de vista numérico y se prefieren otros procedimientos, basados en esta expansión.

Métodos de Euler

Para la ecuación diferencial 34 se debe obtener la solución en el intervalo $[t_0, t_f]$, con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ y la entrada $u(t)$.

Para una solución numérica se divide el intervalo $[t_0, t_f]$ en N subintervalos iguales de ancho:

$$T = \frac{t_f - t_0}{N} \quad T: \text{Ancho del intervalo}$$

En el método de Euler "*hacia adelante*" la derivada se aproxima según su definición como:

$\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]_{t=t_k} \cong \frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{T} ; t_k = t_0 + kT$	30
--	----

Con lo cual se puede escribir la ecuación diferencial original como:

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{T} = f(t_k, x(t_k), u(t_k))$$

La forma recurrente es.

$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T f(t_k, x(t_k), u(t_k))$ $k = 1, 2, 3, \dots, N$	31
--	----

Cuando T es muy pequeño se puede determinar aproximadamente el estado en $t_1 = t_0 + T$ a partir de la condición inicial x_0 como:

$x(t_1) = x(t_0) + T f(t_0, x(t_0), u(t_0))$	32
--	----

y después para $t_2 = t_1 + T$ y así sucesivamente.

En el segundo método de Euler o "*hacia atrás*", se define la derivada como:

$\left. \frac{dx}{dt} \right _{t=t_k} \cong \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{T}$	33
--	----

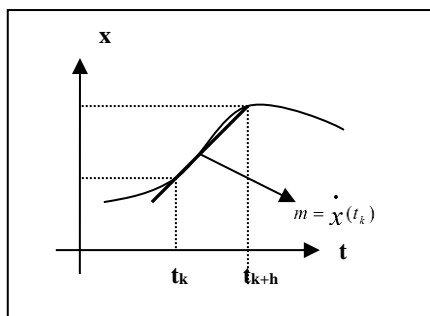


Figura 19

La aproximación es:

$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T f(t_{k+1}, x(t_{k+1}), u(t_{k+1}))$	34
--	----

$x(t_{k+1})$ es función de si misma y se conoce como un algoritmo de integración implícito que requiere un cálculo adicional para resolver $x(t_{k+1})$.

Ejemplo 13. Empleado la aproximación de Euler “hacia adelante” con $T = 2$ segundos obtener los primeros 5 puntos de la solución numérica de:

$$\dot{x} + 0,2x = u(t)$$

Con $x(0) = 1$ y $u(t) = 1, \forall t \geq 0$. Calcular la solución exacta y comparar el error.

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t))$$

La iteración hacia delante produce:

$$x(k+1)T = x(kT) + Tf(kT, x(kT), u(kT))$$

$$x(k+1) = x(k) + 2[-0,2x(k) + u(k)]$$

K	(K+1)T	X(0)=1
0	2s	$X(1)=X(0)+2[-0.2X(0)+u(0)]$ $=1+2[-0.2+1]=2.6$
1	4s	$X(2)=X(1)+2[-0.2X(1)+u(1)]$ $=2.6+2[-0.2*2.6+1]=3.56$
2	6s	$X(3)=X(2)+2[-0.2X(2)+u(2)]$ $=3.56+2[-0.2*3.56+1]=4.136$
3	8s	$X(4)=4.136+2[-0.2*4.136+1]$ $=4.4816$
4	10s	$X(5)=4.4816+2[-0.2*4.4816+1]$ $=4.6890$

Tabla 1

La solución exacta es:

$$x = 5 - 4e^{-t/5}$$

El error porcentual se calcula como:

$$e = \frac{x_{exacta} - \hat{x}}{x_{exacta}} \times 100\%$$

t	k	$\hat{x}(kT)$	Exacta	Error
0		1	1	0
2	0	2.6	2.3187	-12.13%
4	1	3.56	3.2027	-11.16%
6	2	4.136	3.7952	-8.98%
8	3	4.4816	4.1924	-6.90%
10	4	4.6890	4.4587	-5.17%

Tabla 2

Este método presenta un error considerablemente alto y por lo tanto se requieren técnicas más refinadas.

En MATLAB:

```
solución exacta:
```

```
5 - 4*exp(-t/5)
```

```
normaerror =
```

```
1.1684
```

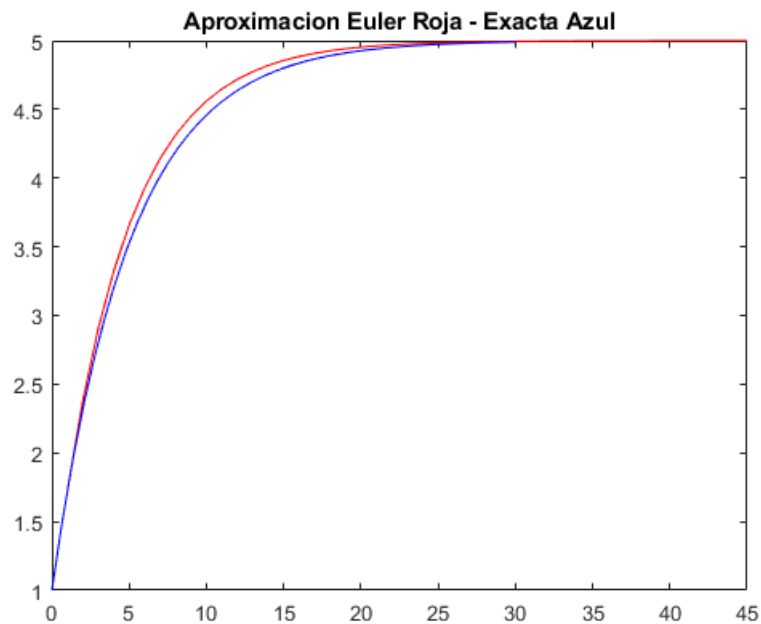


Figura 20a

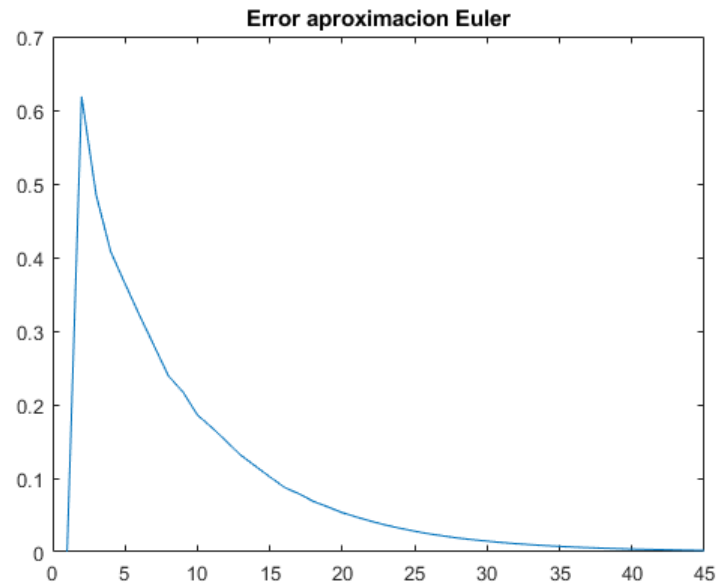


Figura 20b

Método Predicción – Corrección.

Los métodos de Euler son basados en la aproximación rectangular de la integración. El método de Predicción-Corrección (P-C) se basa en la aproximación trapezoidal.

El área bajo la curva de la función $f(t)$ en el intervalo $t = t_k$ y $t = t_k + T$ es aproximadamente igual al área del trapecio:

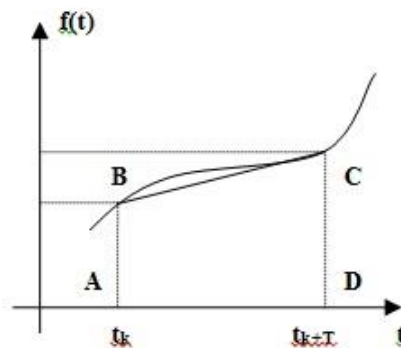


Figura 21

$\int_{t_k}^{t_{k+T}} f(t)dt \cong T \frac{f(t_k) + f(t_k + \hat{h})}{2}$	35
---	----

Si se desea evaluar $x(t) \quad \forall t \geq t_0 \Rightarrow$

$x(t_1) = x(t_0) + \frac{T}{2} [f(t_0, x_0, u(t_0)) + f(t_1, x(t_1), u(t_1))]$	36
--	----

Se necesita $x(t_1)$ para evaluar $x(t_1)$.

Cuando la función **f** es no lineal no se puede evaluar $x(t_1)$ exactamente y para llegar a una ecuación iterativa se define:

$$T = t_{k+1} - t_k$$

Empleando Euler se hace una predicción del valor en t_1 :

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t_0))$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_0 + T\mathbf{m}_0$$

Además, se define

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{f}(t_1, \tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}(t_1))$$

La corrección:

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0 + \frac{T}{2} (\mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1)$$

Se puede demostrar que la solución empleando predicción- corrección coincide con la expansión en serie de Taylor de la solución hasta el término de segundo orden.

Ejemplo 14 Resolver empleando el método de corrección- predicción

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t))$$

Con $x(0) = 1, u(t) = 1, \forall t \geq 0$

Primer paso: $k= 1, T = 2$

$$m_0 = -0,2x(0) + u(0) = -0,2 * 1 + 1 = 0,8$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= 1 + 2 * 0,8 = 2,6 \\ m_1 &= -0,2(2,6) + 1 = 0,48 \\ x(2) &= 1 + \frac{2}{2}(0,8 + 0,48) = 2,28\end{aligned}$$

Segundo paso: $k=2, T=4$

$$\begin{aligned}m_0 &= -0,2x(1) + u(1) = -0,2 * 2.28 + 1 = 0,544 \\ \tilde{x}_1 &= 2,28 + 2 * 0,544 = 3,368 \\ m_1 &= -0,2(3,368) + 1 = 0,3264 \\ x(4) &= 2.28 + \frac{2}{2}(0,544 + 0,3264) = 3,1504\end{aligned}$$

Tercer paso: $k=3, T=6$

$$\begin{aligned}m_0 &= -0,2 * 3,1504 + 1 = 0,36992 \\ \tilde{x}_1 &= 3,1504 + 2 * 0,36992 = 3,8902 \\ m_1 &= -0,2(3,8902) + 1 = 0,2220 \\ x(6) &= 3,1504 + (0,3699 + 0,2220) = 3,7423\end{aligned}$$

Cuarto paso: $k=4, T=8$

$$\begin{aligned}m_0 &= -0,2 * 3,7423 + 1 = 0,2515 \\ \tilde{x}_1 &= 3,7423 + 2 * 0,2515 = 4,2454 \\ m_1 &= -0,2(4,2454) + 1 = 0,1509 \\ x(8) &= 3,7423 + (0,2515 + 0,1509) = 4,1447\end{aligned}$$

Quinto paso: $k=5, T=10$

$$\begin{aligned}m_0 &= -0,2 * 4,1447 + 1 = 0,1711 \\ \tilde{x}_1 &= 4,1447 + 2 * 0,1711 = 0,4869 \\ m_1 &= -0,2 * 0,4869 + 1 = 0,1026 \\ x(10) &= 4,1447 + (0,1711 + 0,1026) = 4,4184\end{aligned}$$

t	k	$\hat{x}(kT)$	Exacta	Error
0		1	1	0
2	0	2,28	2,3187	1.67%
4	1	3,1504	3,2027	1.63%
6	2	3,7423	3,7952	1.39%
8	3	4,1449	4,1924	1.13%
10	4	4,4184	4,4587	0.90%

Tabla 3

Comparado con el método de Euler, tabla 2, se obtiene una mejora significativa en el error: el porcentaje de error se reduce por un factor de 10.

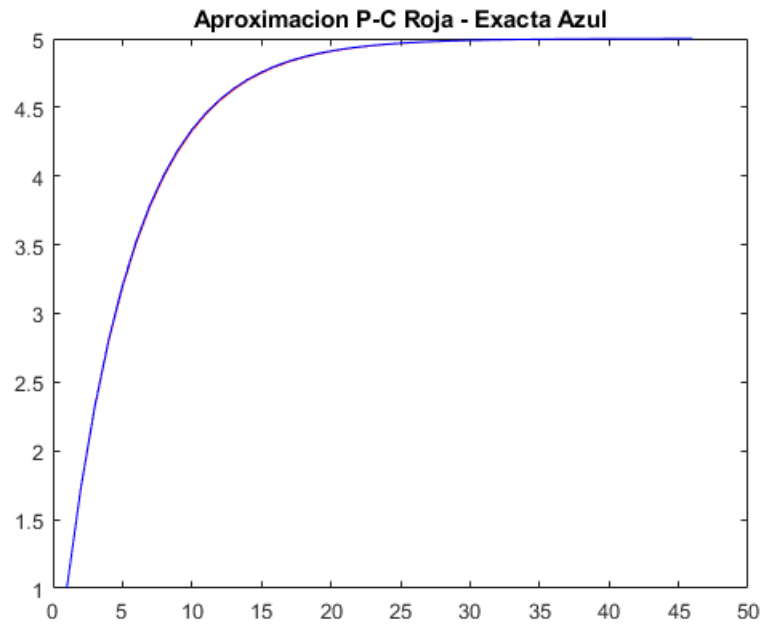


Figura 22a

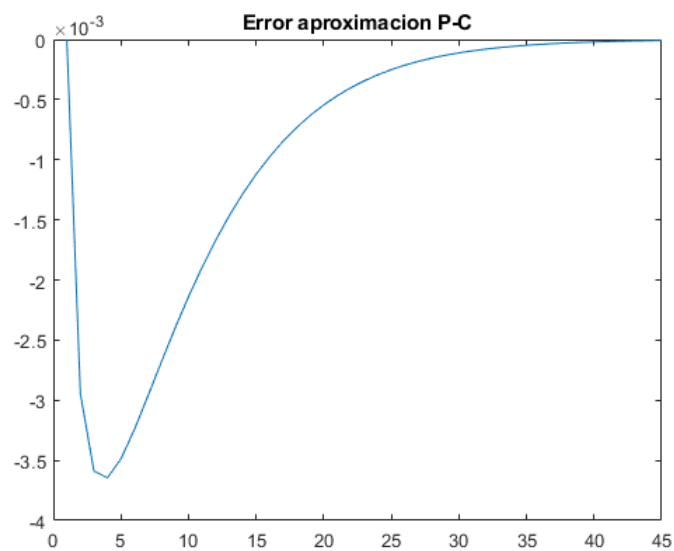


Figura 22b Error método predicción – corrección

normaerror = 0.0099. (Euler 1.1684)

```
%Capitulo 2 Ejemplo 12 Predicción_Corrección
clear all;close all
%Solución exacta
% [sol] = dsolve('Dx = 1-0.2*x', 'x(0) = 1')
% [Ti val] =fplot(sol,[0 30]);
%plot(Ti,val,'b');
%Solucion aproximada
T = 1;U = 1;
X(1) = 1; Exac(1) = 1;
for K = 1:45
    mo(K)=-0.2*X(K)+U;
    xpred(K)= X(K)+T*mo(K);
    m1(K)=-0.2*xpred(K)+U;
    X(K+1) = X(K)+ (T/2)*(mo(K)+m1(K));
    Exac(K+1) = 5 - 4*exp(-0.2*K*T);
    error(K) = [X(K)-Exac(K)]/Exac(K);
end
plot(X,'r');
hold on;
plot(Exac,'b'); title 'Aproximacion P-C Roja - Exacta Azul'
figure
plot(error); title 'Error aproximacion P-C'
normaerror = norm(error,2)
```

Método de Runge

La regla de integración de Simpson establece que el área bajo la curva de $x=g(t)$ entre t_0 y t_0+h se puede aproximar por:

$\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)dt \approx \frac{T}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)$	35
---	----

Con:

$x_0 = g(t_0) \quad x_1 = g(t_0+T/2) \quad \text{y} \quad x_2 = g(t_0+T)$	36
---	----

La aproximación de Simpson se obtiene trazando una parábola a través de 3 puntos (t_0, x_0) , $(t_0 + T/2, x_1)$ y $(t_0 + T, x_2)$ y asumiendo que el área bajo la curva dada es aproximadamente igual al área bajo la parábola.

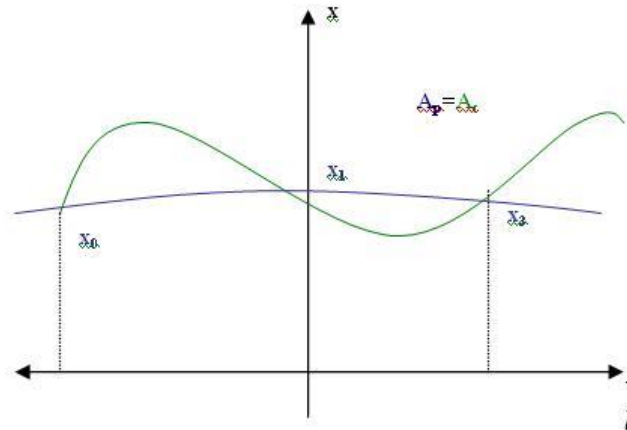


Figura 22

Empleando como coordenadas

$$\hat{t} = t - \frac{T}{2} - t_0$$

$$\hat{x} = x$$

La forma general de la ecuación de la parábola es:

$$(t - t_0)^2 = -4a(x - x_0)$$

Empleando las nuevas coordenadas, la ecuación es:

$$\hat{x} = a(\hat{t})^2 + b(\hat{t}) + c$$

Cuando:

$$\hat{t} = -T/2 \Rightarrow \hat{x}_0 = a\left(-\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{T}{2}\right) + c = x_0$$

$$\hat{t} = 0 \Rightarrow \hat{x}_1 = c = x_1$$

$$\hat{t} = T/2 \Rightarrow \hat{x}_2 = a\left(\frac{T}{2}\right)^2 + b\left(\frac{T}{2}\right) + c = x_2$$

Los parámetros de la parábola son:

$c = x_1$	36a
-----------	-----

$b = \frac{x_2 - x_0}{T}$	36b
$a = \frac{2}{T^2}(x_0 - 2x_1 + x_2)$	36c

El área bajo la parábola es:

$\int_{-T/2}^{T/2} [a(\hat{t})^2 + b(\hat{t}) + c] d\hat{t} = \frac{T}{6}(x_0 + 4x_1 + x_2)$	37
--	----

El método de Runge coincide con los términos de la expansión de Taylor hasta tercer orden.

Dada la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x) ; \quad x(t_0) = x_0$$

Al integrar se obtiene:

$$x(t_1) = x(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} f(t', x(t')) dt'}_{\Delta x}$$

Se aproxima la integral por el área bajo la parábola dada por:

$$\cong \frac{T}{6}(m_0 + 4m_1 + m_2)$$

Donde

$$\begin{aligned} m_0 &= f(t_0, x_0) \\ m_1 &= f(t_0 + T/2, x_0 + \frac{T}{2}m_0) \\ m_2 &= f(t_0 + T, x_0 + Tm_0) \\ m_3 &= f(t_0 + T, x_0 + Tm_2) \\ m &= \frac{1}{6}(m_0 + 4m_1 + m_3) \text{ y } \Delta x = mT \\ &\Rightarrow x(t_1) = x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

Ejemplo 15. Resolver empleando el método Runge

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{Con } x(0) = 1, \quad u(t) = 1, \forall t \geq 0 \quad T=2$$

Primer paso: $k = 1 \quad T = 2, \quad x(0) = 1$

$$m_0 = -0.2 \cdot 1 + 1 = 0.8$$

$$m_1 = f\left(1, 1 + \frac{2}{2} \cdot 0.8\right) = f(1, 1.8) = -0.2 \cdot 1.8 + 1 = 0.64$$

$$m_2 = f(2, 1 + 2 \cdot 0.8) = f(2, 2.6) = -0.2 \cdot 2.6 + 1 = 0.48$$

$$m_3 = f(2, 1 + 2 \cdot 0.48) = f(2, 1.96) = -0.2 \cdot 1.96 + 1 = 0.608$$

$$m = \frac{1}{6}(0.8 + 4 \cdot 0.64 + 0.608) = 0.6613$$

$$\Delta x = 2 \cdot 0.6613 = 1.3226$$

$$x(2) = 1 + 1.3226 = 2.3226$$

$$e = \frac{2.3187 - 2.3226}{2.3187} \cdot 100\% = -0.17\%$$

Segundo paso: $k=2 \quad T = 4, \quad x(2) = 2.3226$

$$m_0 = f(2, 2.3226) - 0.2 \cdot 2.3226 + 1 = 0.5353$$

$$m_1 = f\left(3, 2.36 + \frac{2}{2} \cdot 0.5353\right) = f(3, 2.8579) = -0.2 \cdot 2.8579 + 1 = 0.4284$$

$$m_2 = f(4, 2.3226 + 2 \cdot 0.5353) = f(4, 3.3932) = -0.2 \cdot 3.3932 + 1 = 0.3214$$

$$m_3 = f(4, 2.3226 + 2 \cdot 0.3214) = f(4, 2.9654) = -0.2 \cdot 2.9654 + 1 = 0.4069$$

$$m = \frac{1}{6}(0.5353 + 4 \cdot 0.4284 + 0.3214) = 0.4426$$

$$\Delta x = 2 \cdot 0.4426 = 0.8852$$

$$x(4) = 2.3226 + 0.8852 = 3.2078$$

$$e = \frac{3.2027 - 3.2078}{3.2027} \cdot 100\% = -0.16\%$$

Tercer paso: $k=3 \quad T = 6, \quad x(4) = 3.2078$

$$m_0 = f(4, 3.2078) = -0,2 * 3.2078 + 1 = 0,3584$$

$$m_1 = f(5, 3.2078 + \frac{2}{2} \bullet 0,3584) = f(5, 3.5662) = -0,2 \bullet 3.5662 + 1 = 0,2868$$

$$m_2 = f(6, 3.2078 + 2 \bullet 0,3584) = f(6, 3.9246) = -0,2 * 3.9246 + 1 = 0,2151$$

$$m_3 = f(6, 3.2078 + 2 * 0,2151) = f(6, 3.638) = -0,2 * 3.638 + 1 = 0,2724$$

$$m = \frac{1}{6}(0,3584 + 4 * 0,2868 + 0,2724) = 0,2963$$

$$\Delta x = 2 * 0,2963 = 0,5926$$

$$x(6) = x(4) + 0.5926 = 3.2078 + 0.5926 = 3,800$$

$$e = \frac{3.7952 - 3.800}{3.7952} \times 100\% = -0.13\%$$

Cuarto paso: $k=4$ $T = 8$, $x(6) = 3.800$

$$m_0 = f(6, 3.8) = -0,2 * 3.8 + 1 = 0,24$$

$$m_1 = f(7, 3.8 + \frac{2}{2} \bullet 0,24) = f(7, 4.04) = -0,2 \bullet 4.04 + 1 = 0,192$$

$$m_2 = f(8, 3.8 + 2 \bullet 0,24) = f(8, 4.28) = -0,2 \bullet 4.28 + 1 = 0,144$$

$$m_3 = f(8, 3.8 + 2 \bullet 0,144) = f(8, 4.088) = -0,2 \bullet 4.088 + 1 = 0,1824$$

$$m = \frac{1}{6}(0,24 + 4 \bullet 0,192 + 0,1824) = 0,1984$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,1984 = 0,3968$$

$$x(8) = x(6) + 0.3968 = 3.800 + 0.3968 = 4.1968$$

$$e = \frac{4.1924 - 4.1968}{4.1924} \times 100\% = -0.10\%$$

Quinto paso: $k=5$ $T = 10$, $x(8) = 4.1986$

$$m_0 = f(8, 4.1968) = -0,2 \bullet 4.1968 + 1 = 0,1606$$

$$m_1 = f(9, 4.1968 + \frac{2}{2} \bullet 0.1606) = f(9, 4.3574) = -0,2 \bullet 4.3574 + 1 = 0.1285$$

$$m_2 = f(10, 4.1968 + 2 \bullet 0.1606) = f(10, 4.518) = -0,2 \bullet 4.518 + 1 = 0,0964$$

$$m_3 = f(10, 4.1968 + 2 \bullet 0,0964) = f(10, 4.3896) = -0,2 \bullet 4.3896 + 1 = 0,1221$$

$$m = \frac{1}{6}(0,1606 + 4 \bullet 0,1285 + 0,1221) = 0,1328$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,1328 = 0,2656$$

$$x(10) = x(8) + 0.2656 = 4.1968 + 0.2656 = 4.4624$$

$$e = \frac{4.4587 - 4.4624}{4.4587} \times 100\% = -0.08\%$$

t	k	$\hat{x}(kT)$	Exacta	Error
0	0	1	1	0
2	1	2.3226	2.3187	-0.17%
4	2	3.2078	3.2027	-0.16%
6	3	3.800	3.7952	-0.13%
8	4	4.1968	4.1924	-0.1%
10	5	4.4624	4.4587	-0.08%

Tabla 4

Comparado con el método “Predicción – Corrección” el error se reduce por un factor de 10.

La solución aproximada por el método de Runge coincide con las **DOS** primeras cifras significativas de la solución exacta.

Método de Runge- Kutta.

Es una mejora sobre el método anterior: coincide con la expansión de Taylor hasta el término de orden cuarto:

$x(t_1) = x(t_0) + \frac{T}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)$	38
--	----

Donde

$$\begin{aligned}m_0 &= f(t_0, x_0) \\m_1 &= f\left(t_0 + \frac{T}{2}, x_0 + m_0 \frac{T}{2}\right) \\m_2 &= f\left(t_0 + \frac{T}{2}, x_0 + m_1 \frac{T}{2}\right) \\m_3 &= f(t_0 + T, x_0 + Tm_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{T}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) \\x(t_1) &= x(t_0) + \Delta x\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Resolver empleando el método de **Runge - Kutta**

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{Con } x(0) = 1, \quad u(t) = 1, \forall t \geq 0 \quad T=2$$

Primer paso: $k = 1 \quad T = 2, x(0) = 1$

$$\begin{aligned}m_0 &= -0,2 \bullet 1 + 1 = 0,8 \\m_1 &= f\left(1, 1 + \frac{2}{2} \bullet 0,8\right) = f(1, 1.8) = -0,2 \bullet 1,8 + 1 = 0,64 \\m_2 &= f\left(1, 1 + 1 \bullet 0,64\right) = f(1, 1.64) = -0,2 \bullet 1.64 + 1 = 0.672 \\m_3 &= f\left(2, 1 + 2 \bullet 0.672\right) = f(2, 2.344) = -0,2 \bullet 2.344 + 1 = 0.5312 \\m &= \frac{1}{6}(0,8 + 2 \bullet 0,64 + 2 \bullet 0.676 + 0.5312) = 0.6592 \\\Delta x &= 2 \bullet 0,6592 = 1.3184 \\x(2) &= 1 + 1.3184 = 2.3184 \\e &= \frac{2.3187 - 2.3184}{2.3187} \times 100\% = +0.013\%\end{aligned}$$

Segundo paso: $k = 2 \quad T = 4, x(2) = 2.3184$

$$m_0 = -0,2 \bullet 2.3184 + 1 = 0.5363$$

$$m_1 = f(3, 2.3184 + \frac{2}{2} \bullet 0.5363) = f(3, 2.8547) = -0,2 \bullet 2.8547 + 1 = 0.4291$$

$$m_2 = f(3, 2.3184 + 1 \bullet 0.4291) = f(3, 2.7475) = -0,2 \bullet 2.7475 + 1 = 0.4505$$

$$m_3 = f(4, 2.3184 + 2 \bullet 0.4505) = f(4, 3.2194) = -0,2 \bullet 3.2194 + 1 = 0.3561$$

$$m = \frac{1}{6}(0.5363 + 2 \bullet 0.4291 + 2 \bullet 0.4505 + 0.3561) = 0.4419$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,4419 = 0.8838$$

$$x(4) = 2.3184 + 0.8838 = 3.2022$$

$$e = \frac{3.2027 - 3.2022}{3.2027} \times 100\% = +0.016\%$$

Tercer paso: $k = 3$ $T = 6$, $x(4) = 3.2022$

$$m_0 = -0,2 \bullet 3.2022 + 1 = 0.3596$$

$$m_1 = f(5, 3.2022 + \frac{2}{2} \bullet 0.3596) = f(5, 3.5618) = -0,2 \bullet 3.5618 + 1 = 0.2876$$

$$m_2 = f(5, 3.2022 + 1 \bullet 0.2876) = f(5, 3.4898) = -0,2 \bullet 3.4898 + 1 = 0.3020$$

$$m_3 = f(6, 3.2022 + 2 \bullet 0.3020) = f(6, 3.8062) = -0,2 \bullet 3.8062 + 1 = 0.2388$$

$$m = \frac{1}{6}(0.3596 + 2 \bullet 0.2876 + 2 \bullet 0.3020 + 0.2388) = 0.2963$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,2963 = 0.5926$$

$$x(6) = 3.2022 + 0.5926 = 3.7948$$

$$e = \frac{3.7952 - 3.7948}{3.7952} \times 100\% = +0.011\%$$

Cuarto paso: $k = 4$ $T = 8$, $x(6) = 3.7948$

$$m_0 = -0,2 \bullet 3.7948 + 1 = 0.2410$$

$$m_1 = f(7, 3.7948 + \frac{2}{2} \bullet 0.241) = f(7, 4.0358) = -0,2 \bullet 4.0358 + 1 = 0.1928$$

$$m_2 = f(7, 3.7948 + 1 \bullet 0.1928) = f(7, 3.9876) = -0,2 \bullet 3.9876 + 1 = 0.2025$$

$$m_3 = f(8, 3.7948 + 2 \bullet 0.2025) = f(8, 4.1998) = -0,2 \bullet 4.1998 + 1 = 0.1600$$

$$m = \frac{1}{6}(0.2410 + 2 \bullet 0.1928 + 2 \bullet 0.2025 + 0.1600) = 0.1986$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,1986 = 0.3972$$

$$x(8) = 3.7948 + 0.3972 = 4.1920$$

$$e = \frac{4.1924 - 4.1920}{4.1924} \times 100\% = +0.0095\%$$

Quinto paso: $k = 5$ $T = 10$, $x(8) = 4.1920$

$$m_0 = -0,2 \bullet 4.192 + 1 = 0.1616$$

$$m_1 = f(9, 4.192 + \frac{2}{2} \bullet 0.1616) = f(9, 4.3536) = -0,2 \bullet 4.3536 + 1 = 0.1293$$

$$m_2 = f(9, 4.192 + 1 \bullet 0.1293) = f(9, 4.3213) = -0,2 \bullet 4.3213 + 1 = 0.1357$$

$$m_3 = f(10, 4.192 + 2 \bullet 0.1857) = f(10, 4.4634) = -0,2 \bullet 4.4634 + 1 = 0.1073$$

$$m = \frac{1}{6}(0.1616 + 2 \bullet 0.1293 + 2 \bullet 0.1357 + 0.1073) = 0.1332$$

$$\Delta x = 2 \bullet 0,1332 = 0.2664$$

$$x(8) = 4.192 + 0.2664 = 4.4584$$

$$e = \frac{4.4587 - 4.4584}{4.4587} \times 100\% = +0.0067\%$$

t	k	$\hat{x}(kT)$	Exacta	Error
0	0	1	1	0
2	1	2.3184	2.3187	+0.013%
4	2	3.2022	3.2027	+0.016%
6	3	3.7948	3.7952	+0.011%
8	4	4.192	4.1924	+0.0095%
10	5	4.4584	4.4587	+0.0067%

Tabla 5

Definición de funciones en Matlab.⁸

Cuando en Matlab se usan expresiones como “sin” o “log” o “exp”, se están usando “archivos .m tipo función” (function m-file)”. Estos archivos se diferencian de los “script m-files” porque tienen entradas y salidas.

Para especificar cuáles variables en el archivo .m son entradas y cuáles son salidas, la primera línea del archivo debe ser de la forma:

function [Out_1,Out_2,...,Out_n] = function_name(In_1,In_2,...,In_m)

Donde Out_1, Out_2,..., Out_n son las n variables de salida, y In_1, In_2,..., In_m son las m variables de entrada.

Después de la primera línea se incluyen los comandos de MATLAB, uno por línea. Esta secuencia de comandos efectuará los cálculos requeridos, usando las variables de entrada y las variables que se creen internamente. Así mismo se van generando las variables de salida definidas.

Ejemplo 17. Resolver empleando el método de Runge – Kutta:

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t))$$

Con $x(0) = 1$, $u(t) = 1, \forall t \geq 0$. Emplear funciones de MATLAB.

Se puede emplear una función definida por terceros⁹

```
function [T,Y]=runge_kutta(fun,y0,Tsim,h)
nmax=ceil(Tsim/h);
Y(:,1)=y0(:)
T(1)=0;
for i=2:nmax
    T(i)=h*(i-1);
    f=feval(fun,Y(:,i-1),T(i-1));
```

⁸ <http://www.mathworks.com/help/matlab/function-basics.html>

⁹ Tomada de: Anexo 5 Método de Runge Kutta para ecuaciones diferenciales
[//repositorio.bib.upct.es](http://repositorio.bib.upct.es)


```
f1=feval(fun,Y(:,i-1),T(i-1));  
f2=feval(fun,Y(:,i-1)+h*f1(:)/2,T(i-1)+h/2);  
f3=feval(fun,Y(:,i-1)+h*f2(:)/2,T(i-1)+h/2);  
f4=feval(fun,Y(:,i-1)+h*f3(:),T(i-1)+h);  
Y(:,i)=Y(:,i-1)+h*(f1(:)+2*f2(:)+2*f3(:)+f4(:))/6;  
end
```

La ecuación diferencial para resolver también se puede definir empleando otra función, de tal forma que la función `runge_kutta` se puede emplear para diferentes problemas:

```
function l = eje(y,t)  
l = -0.2*y + 1.0
```

```
%Función RK  
[T,Y]=runge_kutta('eje',[1 0],30,0.6);  
plot(T,Y(1,:), 'r')  
title('Resultado de la integración por el método de Runge-Kutta');  
xlabel('tiempo')  
ylabel('Y')  
for k = 1:50  
Exac(k) = 5-4*exp(-0.2*T(k));  
error(k) = 100*[Y(1,k)-Exac(k)]/Exac(k);  
end  
hold on  
plot(T,Exac, '--')  
figure  
plot(T,error), title 'Error'  
normaerror = norm(error,2)
```

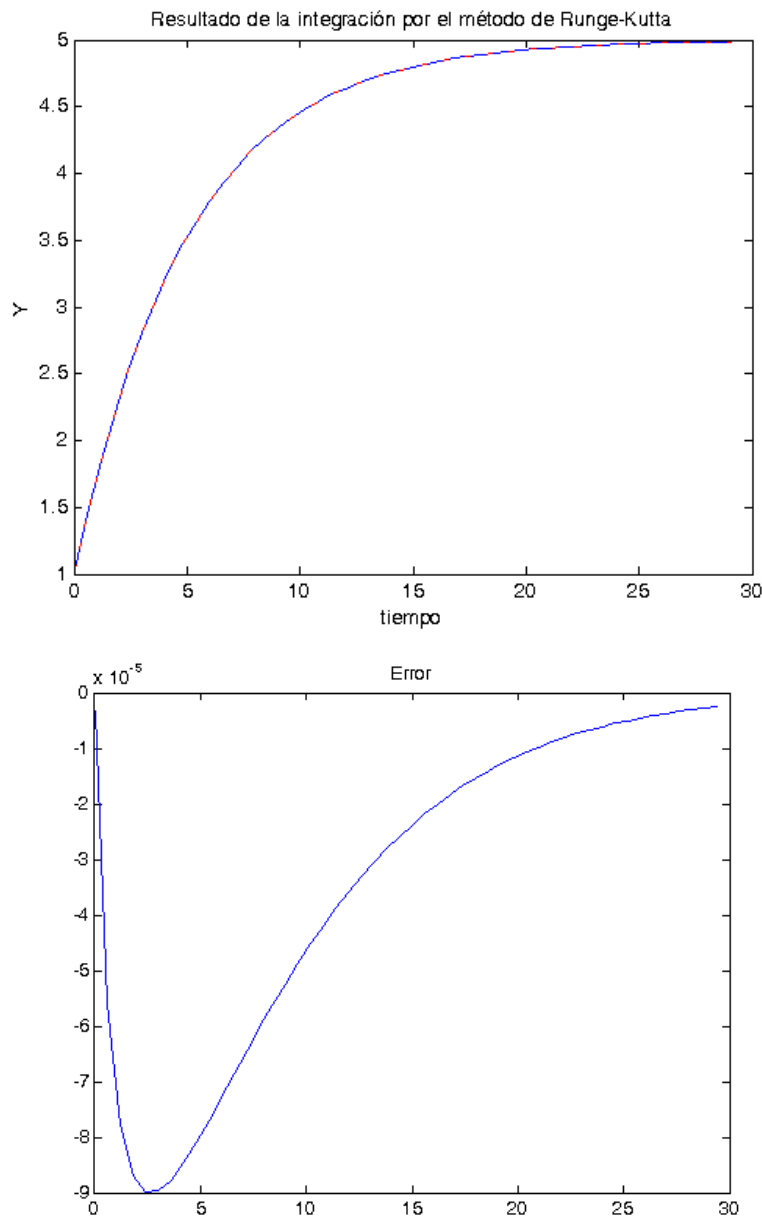


Figura 23 Método de Runge - Kutta

norma error = 3.1581e-04.

Comparado con el método de Runge, el error se reduce por un factor de 10. La solución aproximada por el método de Runge – Kutta coincide con las **TRES** primeras cifras significativas de la solución exacta.

Soluciones numéricas empleando las funciones ODE (Ordinary differential equations).¹⁰

Empleando MATLAB[®] se puede obtener una solución analítica, por medio del “Toolbox” de matemática simbólica, o soluciones numéricas empleando las funciones ODE (Ordinary differential equations).

Una ecuación diferencial ordinaria (ODE) es una ecuación que contiene una variable independiente, *una variable dependiente, y derivadas de la variable dependiente.*

Matlab tiene varios “Solver” o funciones desarrolladas para resolver ODE numéricamente.

Sintaxis:

[outputs] = function_handle(inputs)

[t,state] = solver(@dstate,tspan,ICs,options)

State: un arreglo que contiene los valores de la variable o estado para cada t

Solver: es el algoritmo de Matlab que se está usando: i.e. name, ode45 o ode23.

@dstate: “handle” de la función que define las derivadas de la variable dependiente y’, en función de la variable independiente, típicamente x o t.

tspan: es un vector que especifica el intervalo de la solución: [t0,tf].

ICs: vector de condiciones iniciales.

Options: parámetros opcionales que cambian las propiedades establecidas inicialmente para la integración.

Estas propiedades iniciales (default) se seleccionan para resolver los problemas más comunes. En algunos casos se puede mejorar el rendimiento del “solver” cambiando estos valores iniciales.

Una comparación de las características de los algoritmos se muestra en la tabla 5.

¹⁰ <http://www.mathworks.com/help/matlab/math/ordinary-differential-equations.html#f1-37884>

Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode23	Nonstiff	Low	For problems with crude error tolerances or for solving moderately stiff problems.
ode113	Nonstiff	Low to high	For problems with stringent error tolerances or for solving computationally intensive problems.
ode15s	Stiff	Low to medium	If ode45 is slow because the problem is stiff.
ode23s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode23t	Moderately Stiff	Low	For moderately stiff problems if you need a solution without numerical damping.
ode23tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

Tabla 6

Ejemplo 18. Resolver empleando funciones de MATLAB:

$$\dot{x} = -0.2x + u(t) = f(t, x(t), u(t))$$

Con $x(0) = 1$, $u(t) = 1, \forall t \geq 0$

$$\frac{dx}{dt} + 0.2x = 1 ; x(0) = 1$$

Comparar con la solución exacta.

a. Solución analítica empleando el “Toolbox” de matemática simbólica

%Ejemplo 6 continuación

%Solución exacta

[x] = dsolve('Dx = 1 - 0.2*x','x(0) = 1')

ezplot(x,[0 30])

Solución exacta:

$$x = 5 - 4 \exp(-t/5)$$

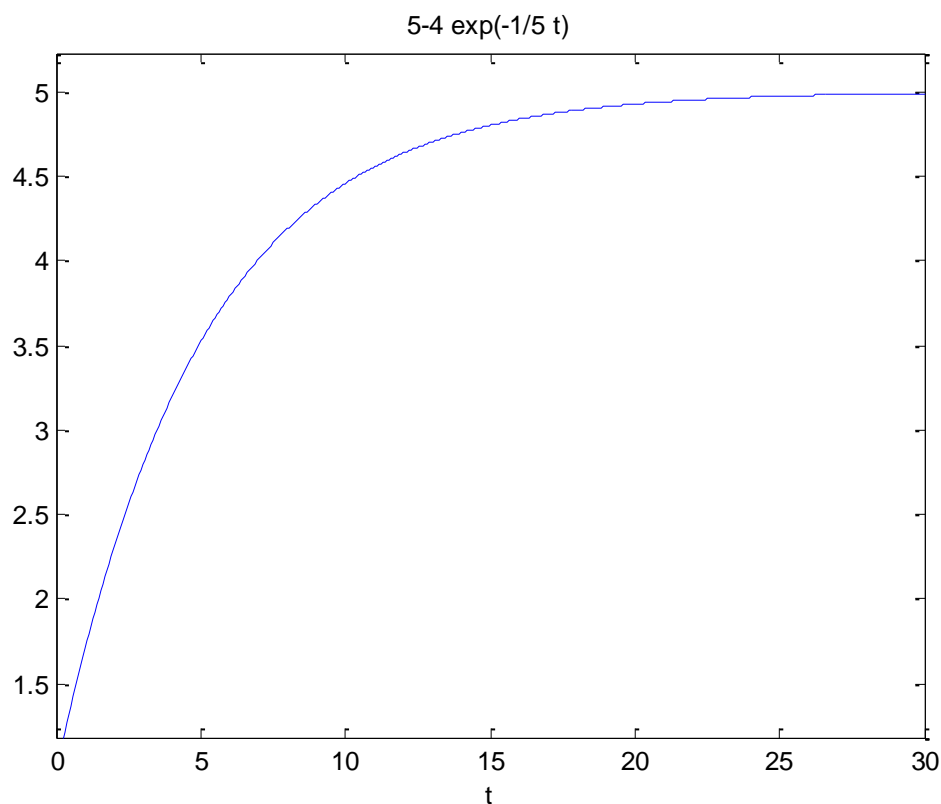


Figura 24a

b. Solución empleando las funciones ode (ordinary differential equation) de Matlab.

```
options=odeset('relTol',1e-05)
[t,x] = ode45(@ejemplo1,[0 30],[1],options)
% [t1,x1] = ode15s(@euler1,[0 30],[1])
```

```
sol = dsolve('Dx = 1-0.2*x', 'x(0) = 1')  
vec = 5-4*exp(-0.2*t);  
plot(t,x,'r+'); title 'Soluciones Numéricas ODE45'  
hold on  
plot(t,vec,'b'); title 'Soluciones Numéricas ODE45'  
error = vec-x;  
figure  
plot(t,error); title 'Error'  
normerror = norm(error,2)
```

```
function l = ejemplo1(t,x)  
l = -0.2*x + 1.0;
```

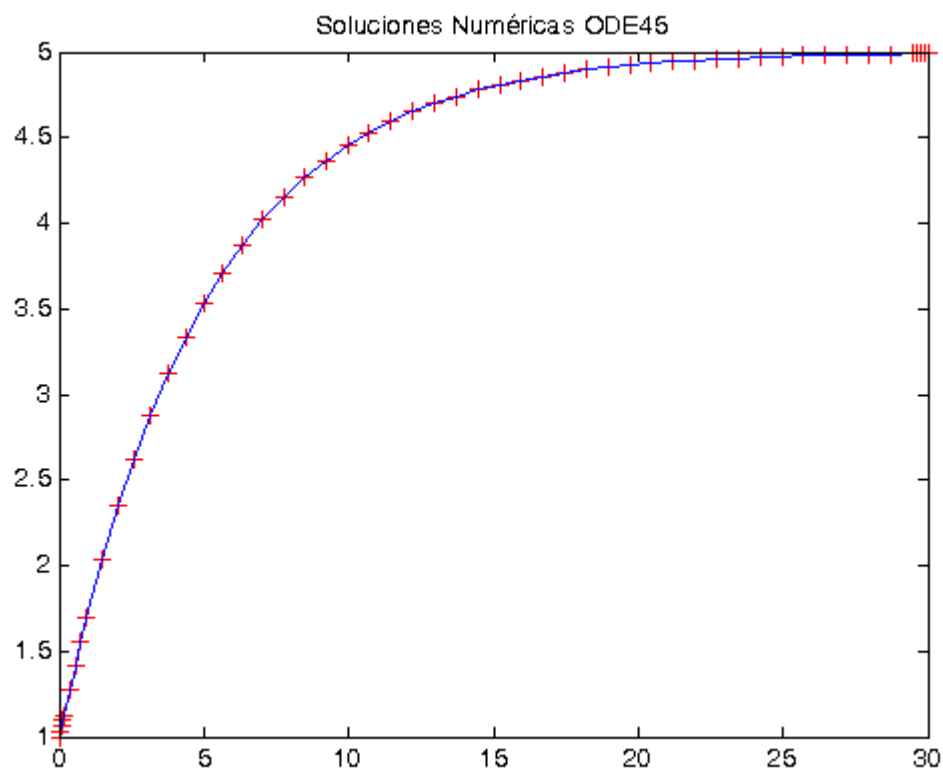


Figura 24b

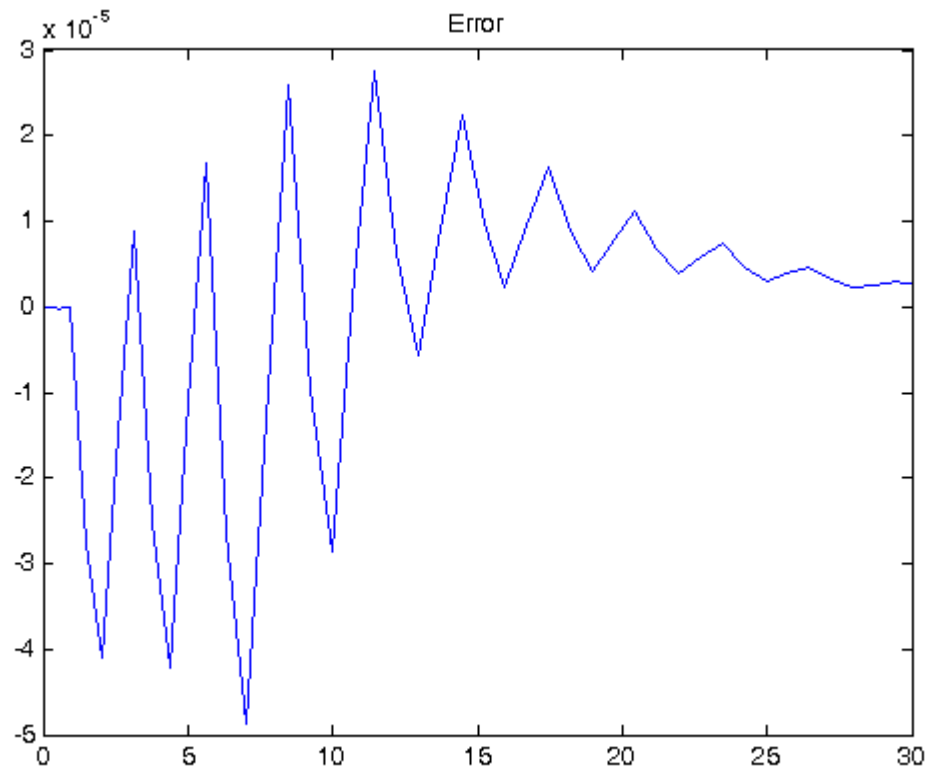


Figura 24c

Norma error = $1.1288e-04$

Se puede reducir el error con la opción relTol:

```
options=odeset('relTol',1e-05)
```

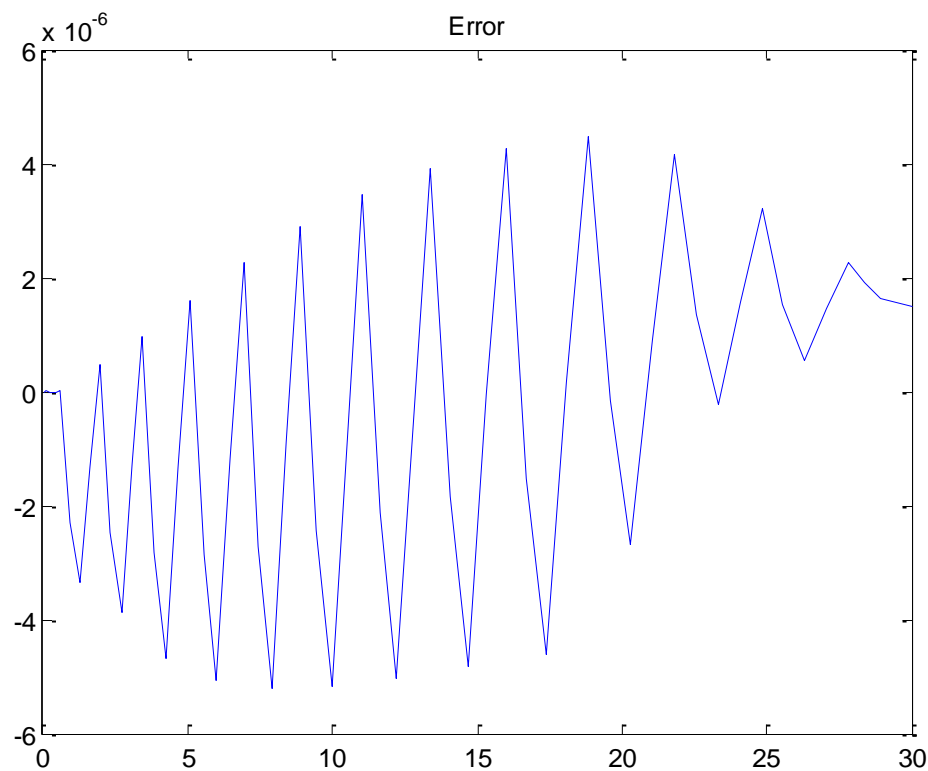


Figura 24d

Norma error = 2.0001e-05

Ejemplo 19 Solución y simulación ecuaciones no lineales¹¹ . La ecuación de *Van Der Pol* se emplea para el diseño de osciladores de relajación:

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

x es la variable dinámica y $\epsilon > 0$ es el parámetro del oscilador.

¹¹ Guo-Qun Zhong. Implementation of Chua's Circuit with a Cubic Nonlinearity. IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-I: FUNDAMENTAL THEORIES AND APPLICATIONS, VOL. 41, NO. 12, DECEMBER 1994.

Tlelo-Cuautle, M. A. Duarte-Villasenor, J. M. Garcia-Ortega. Modeling and Simulation of a Chaotic Oscillator by MATLAB. Proceedings of the Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference (CERMA'06)

Una realización propuesta por Chua:

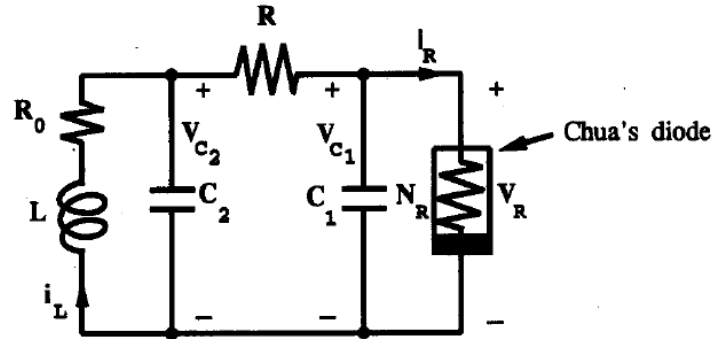


Figura 15¹²

La resistencia no lineal está descrita por la ecuación:

$$i_R = g(v_R) = av_R + cv_R^3$$

$$a < 0 \text{ y } c > 0$$

1. Plantear la ecuación dinámica de estado. La variable de salida es v_R

Tres variables de estado: $x_1 = v_{C1}$; $x_2 = v_{C2}$; $x_3 = i_L$

KCL para $x_1 = v_{C1}$:

$$\frac{v_{C2} - v_{C1}}{R} = i_{C1} + i_R$$

Reemplazando la corriente i_R por $g(v_R)$:

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{v_{C2}}{R} - \frac{v_{C1}}{R} - [av_{C1} + cv_{C1}^3]$$

Usando la nomenclatura para las variables de estado:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2}{RC_1} - \frac{x_1}{RC_1} - \frac{1}{C_1} [ax_1 + cx_1^3]$$

KCL para $x_2 = v_{C2}$ (teniendo en cuenta la dirección establecida):

¹² CHUA Leon, DESOER Charles & KUH Ernest. Linear and nonlinear circuits. McGraw-Hill Book Co. New York. 1987

$$i_L = i_{C2} + \frac{v_{C2} - v_{C1}}{R}$$

$$C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_L - \frac{v_{C2}}{R} + \frac{v_{C1}}{R}$$

Usando la nomenclatura para las variables de estado:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_3}{C_2} - \frac{x_2}{RC_2} + \frac{x_1}{RC_2}$$

KVL para $x_3 = i_L$

$$v_{C2} = -i_L R_0 - v_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_{C2} - i_L R_0$$

Usando la nomenclatura para las variables de estado:

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-x_2}{L} - \frac{R_0}{L} x_3$$

La ecuación de salida:

$$y = v_R = v_{C1} = x_1$$

2. Graficar el comportamiento del circuito de Chua. Usar el siguiente conjunto de valores:

$$R_0 = 14,99 \, \Omega;$$

$$L = 18,91 \, mH;$$

$$C_1 = 7 \, nF;$$

$$C_2 = 78 \, nF;$$

$$a = -0,59 \, mS;$$

$$c = 0,02 \, mS/V^2$$

El tipo de oscilación, la forma de onda y el retrato de fase entre las variables v_{C1} vs v_{C2} depende del parámetro R

Graficar $v_R(x_1)$ vs t y v_{C1} vs v_{C2} (x_1 vs x_2) para los siguientes casos.

- i. $R = 2200 \, \Omega$ (Caso 1 ciclo límite)
- ii. $R = 2140 \, \Omega$ (Caso 2 ciclos límite)
- iii. $R = 2083 \, \Omega$ (Caso Chua's attractor)
- iv. $R = 1964 \, \Omega$ (Caso Double scroll Chua's attractor)

(Los nombres van a ser claros cuando se vea el retrato de fase)

La simulación es muy sensible a las condiciones iniciales. Trate inicialmente con valores pequeños. (0.2 0 0)

Caso R = 1964 Doble attractor

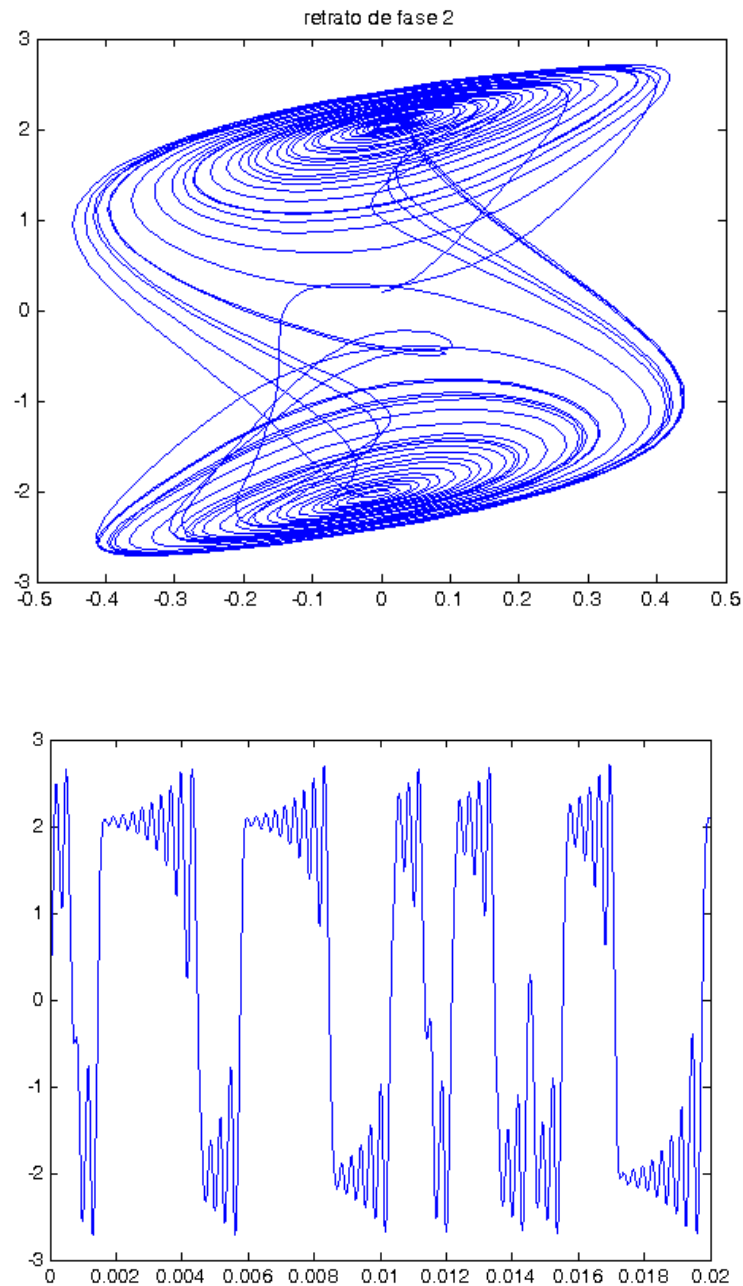


Figura 15b

Caso con $R = 2083$ Single attractor

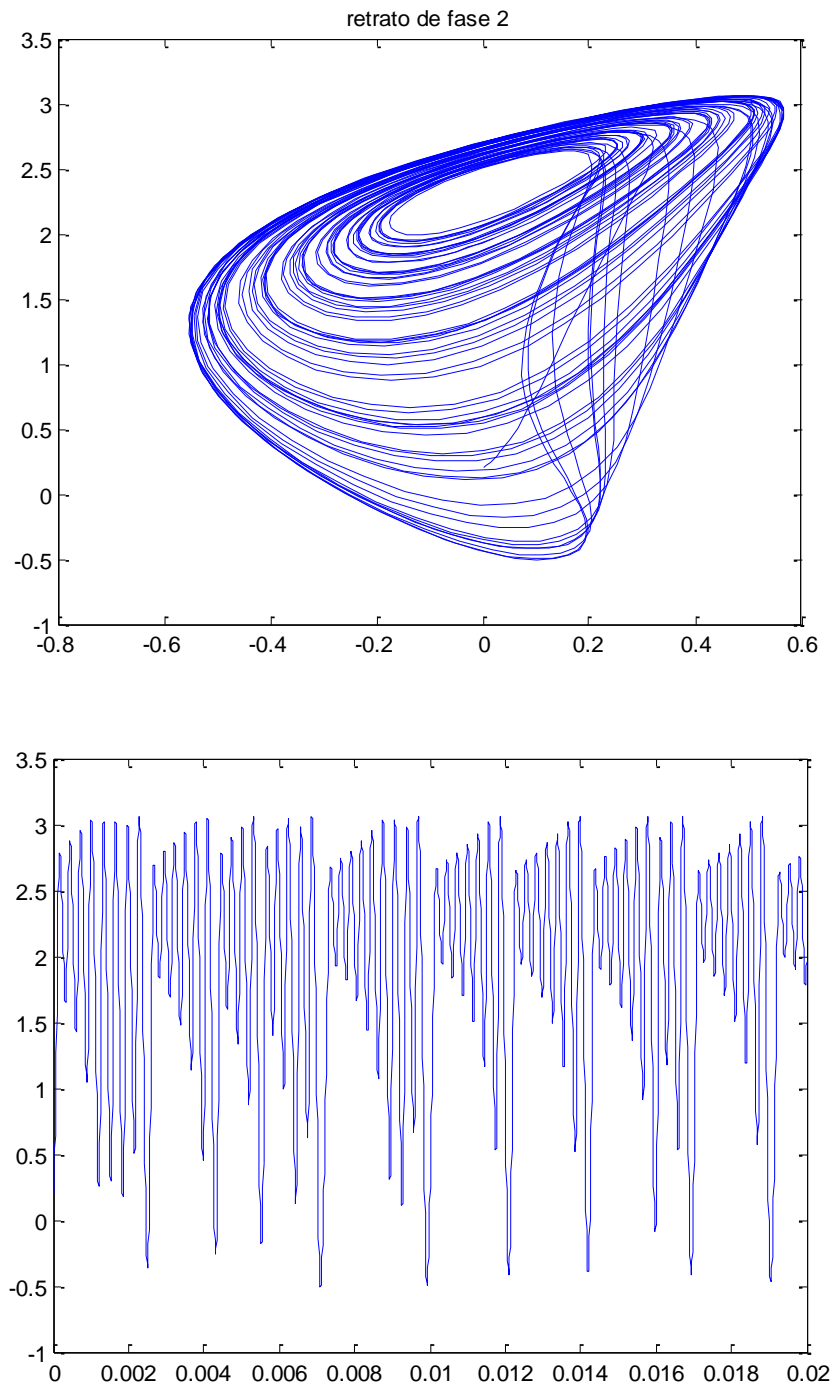


Figura 15c

Caso $R = 2200$ 1 ciclo límite

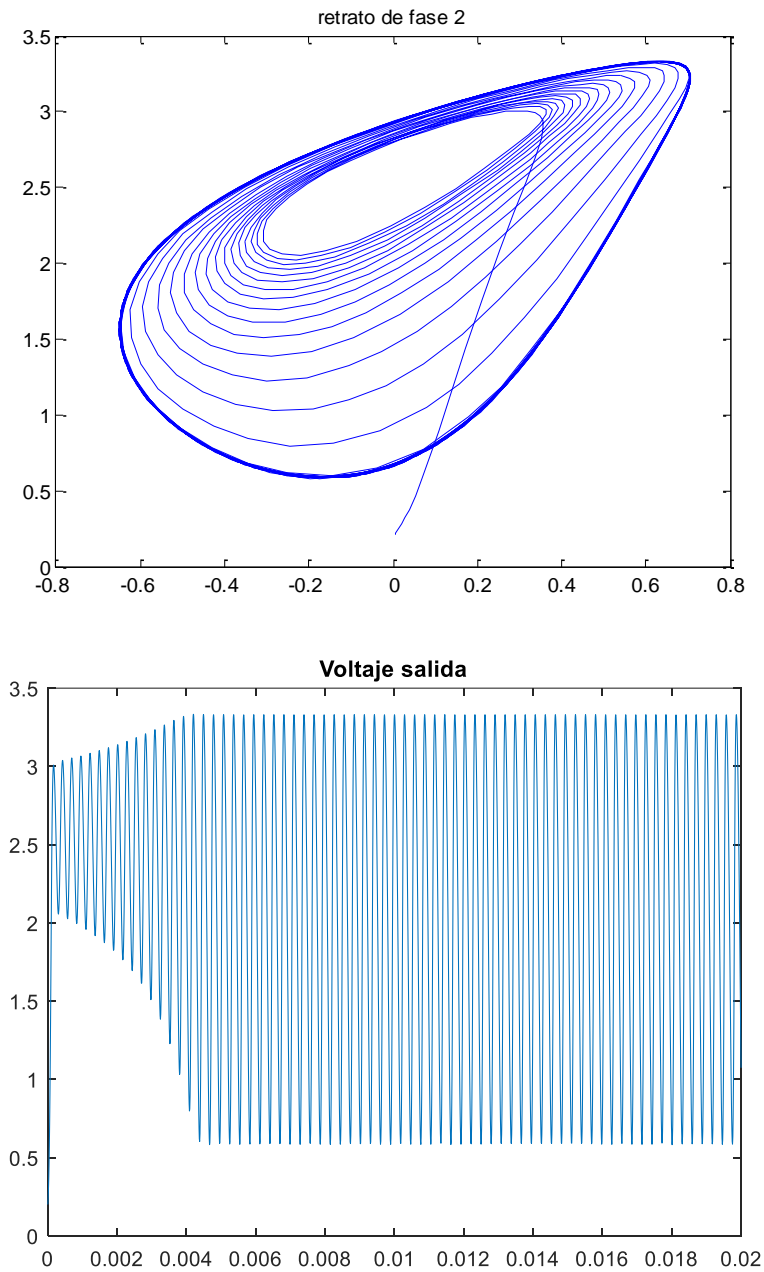


Figura 15d

$R = 2140$ (Doble ciclo límite)

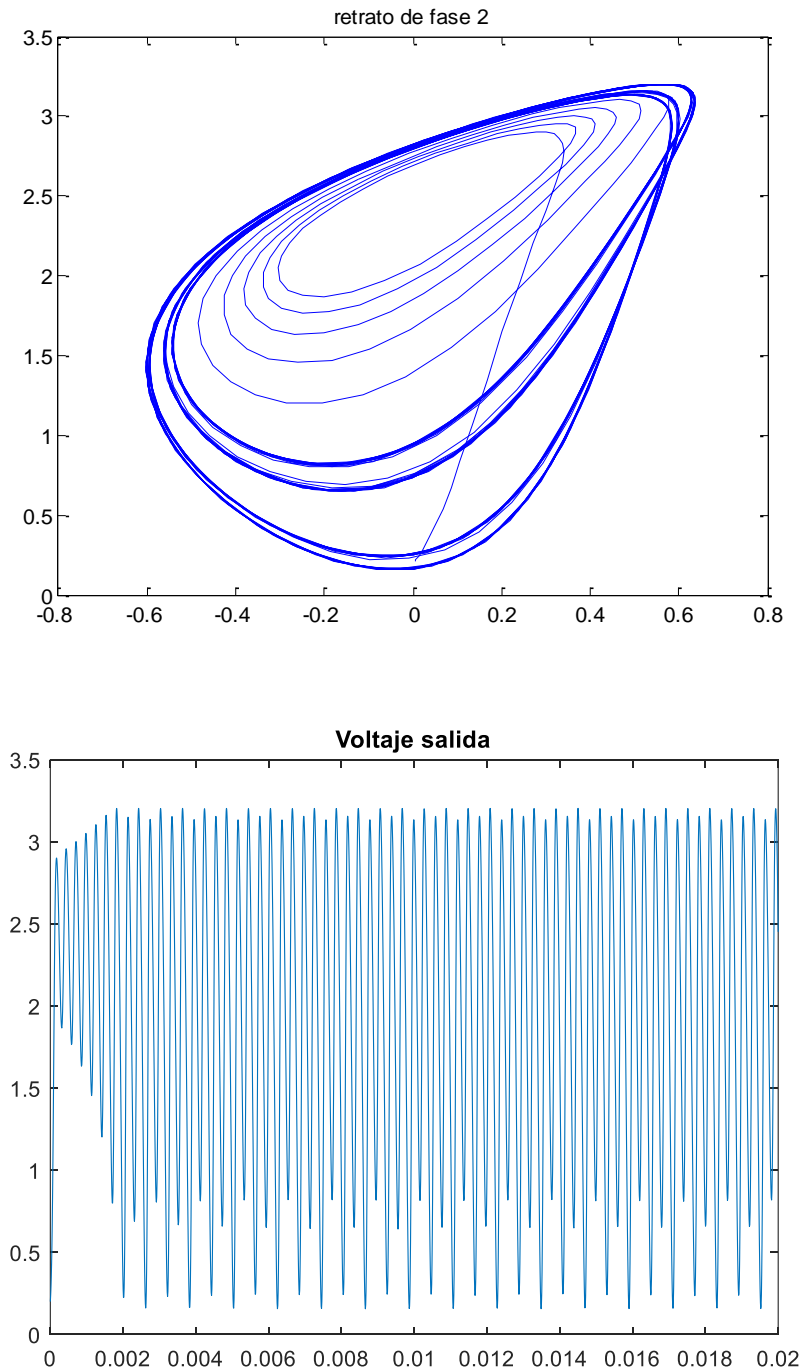


Figura 15e

Es muy sensible a las condiciones iniciales; el mismo caso inicial (Doble attractor)
con:

```
[t,x] = ode45(@chuaosc2,[0 0.02],[0.2 1 0]);
```

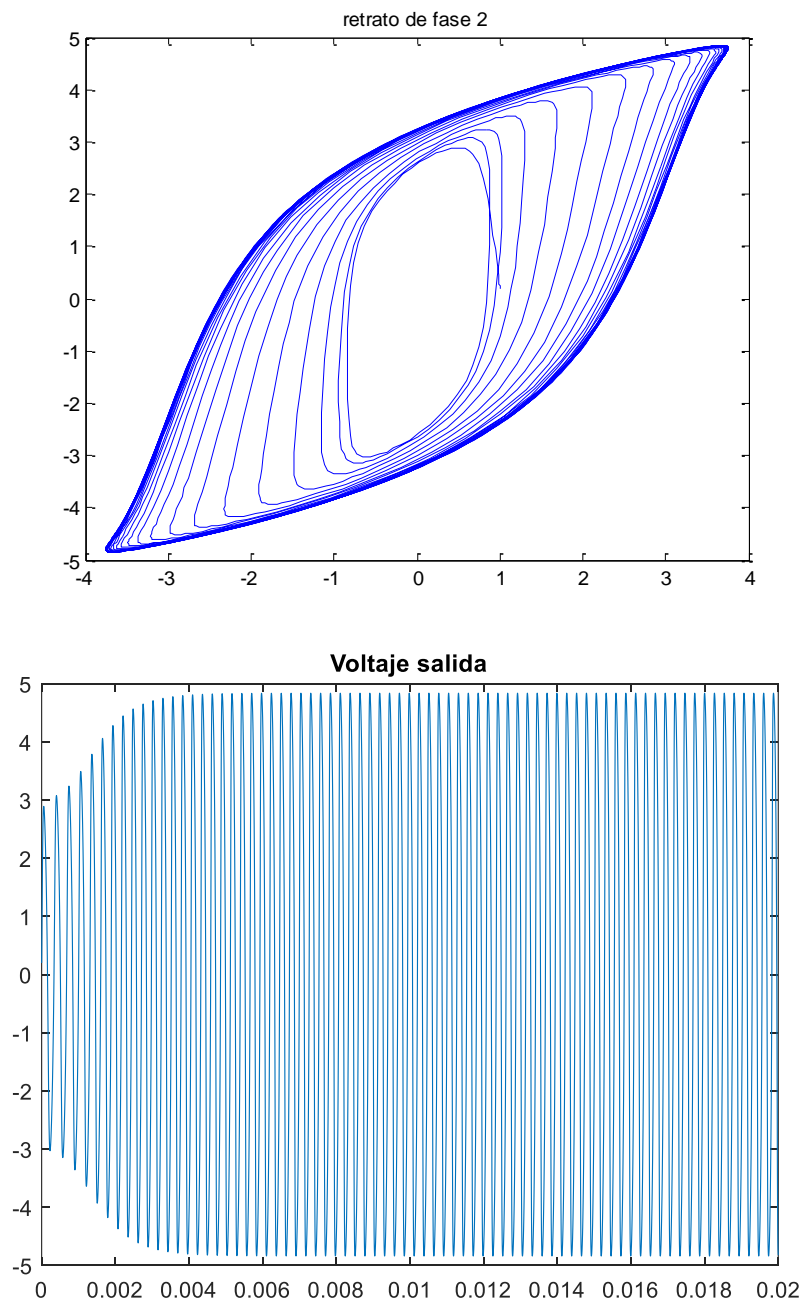
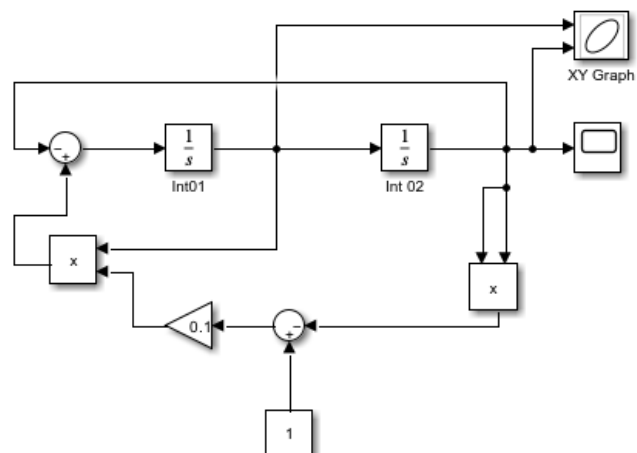


Figura 15f

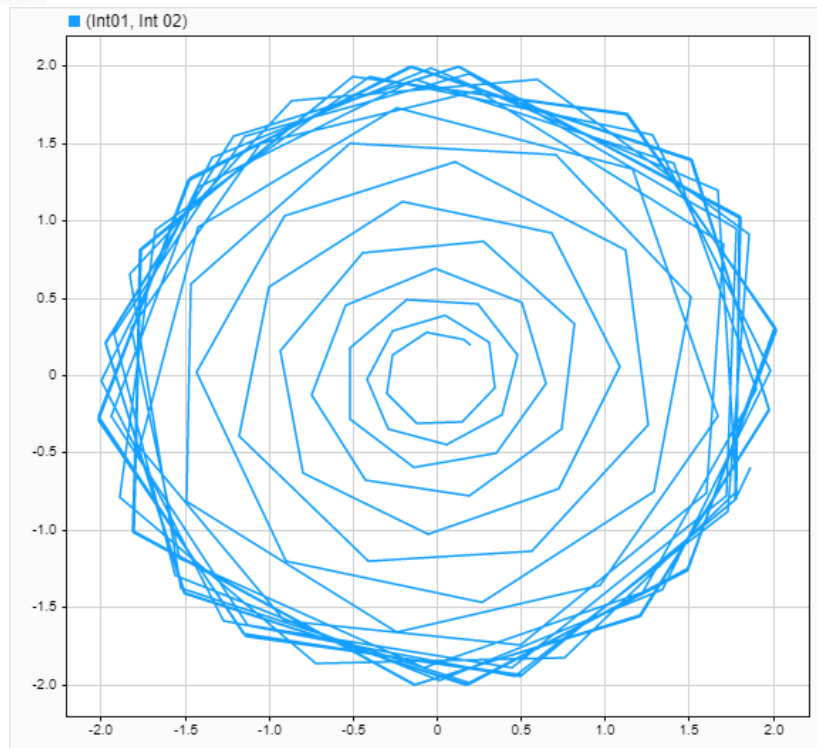
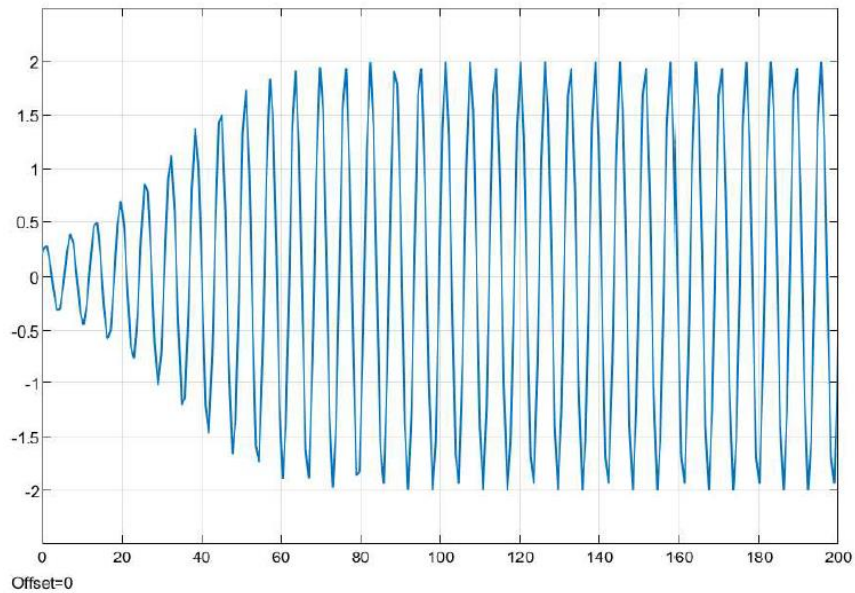
```
%Capitulo 3 Ejemplo 13 Van der pool
% Simulacion no lineal
close all
clc
clear all
[t,x] = ode45(@chuaosc2,[0 0.02],[0.2 0 0]);
figure
plot (x(:,2),x(:,1)),title('retrato de fase 2')
figure
plot(t,x(:,1)), title ('Voltaje salida')

function dx=chuaosc2(t,x)
R = 1.964e03;
Ro = 1.499e01;
L = 1.891e-02;
C1 = 7e-9;
C2 = 7.8e-8;
b = 1/(R*C1);d = 1/(R*C2);
f = 1/C1; g = 1/C2; k = 1/L;
a = -5.9e-04;
c = 2e-05;
dx=zeros(3,1);
dx(1)=b*(x(2)-x(1))-f*(a*x(1)+c*(x(1)^3));
dx(2)=d*(x(1)-x(2))+ g*x(3);
dx(3)=k*(-x(2)-Ro*x(3));
end
```

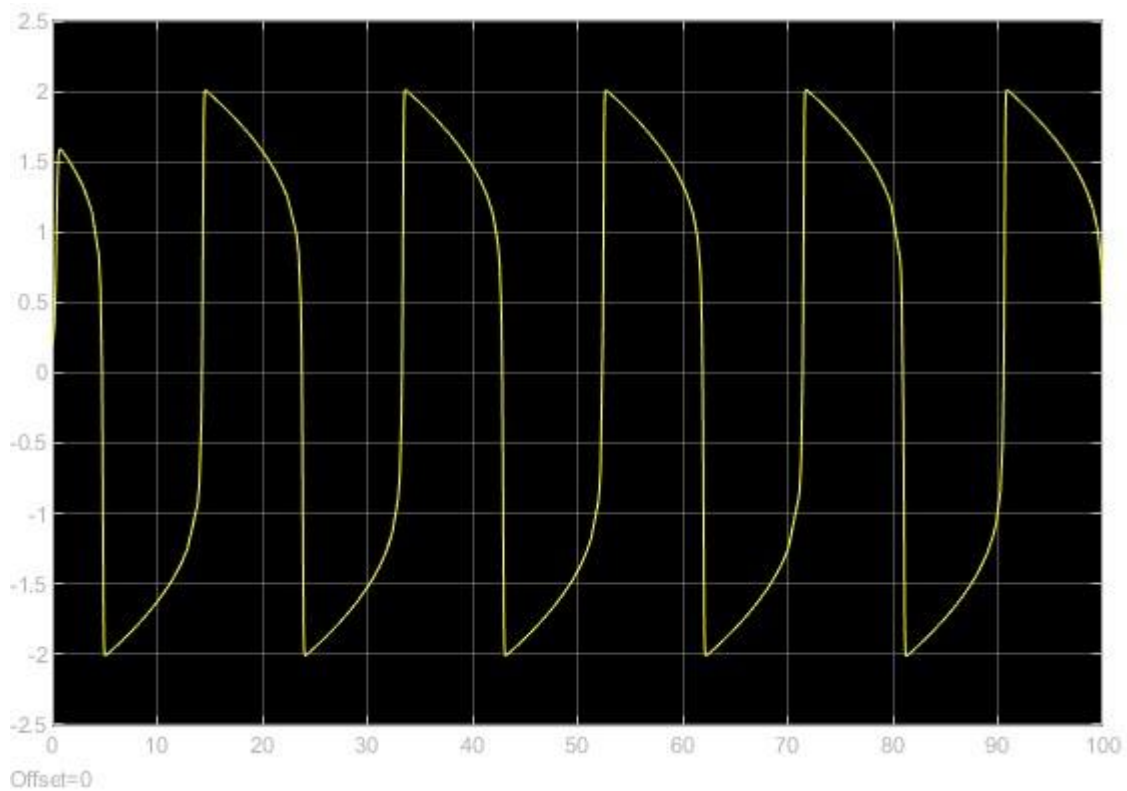
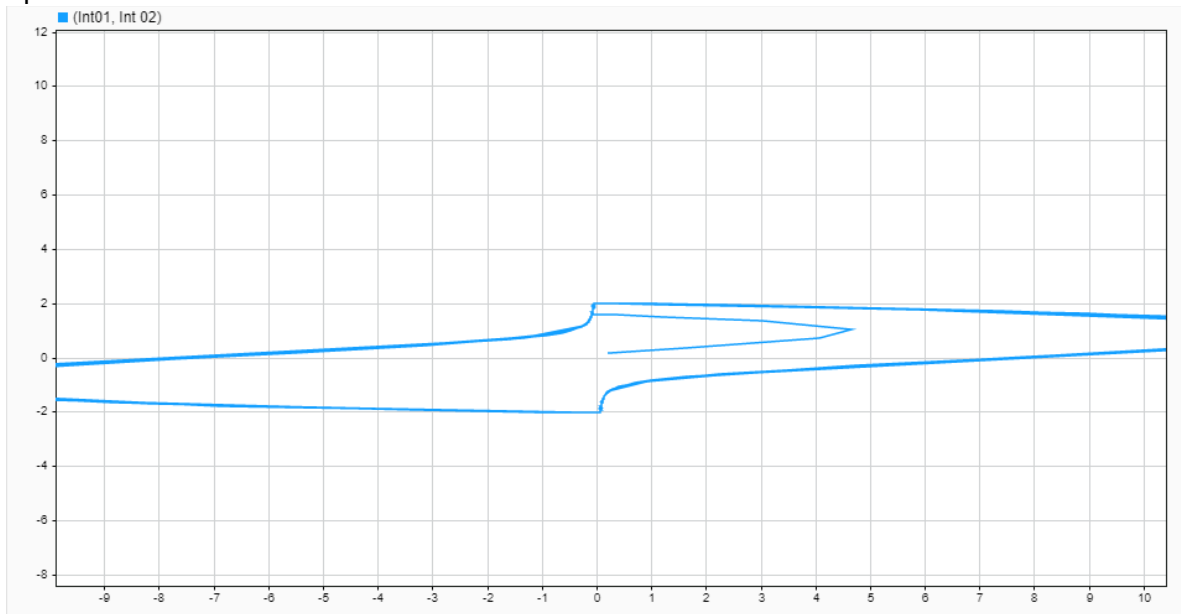
Simulacion Empleando SIMULINK:



Condiciones iniciales Int 1:0.2; Int 1: 0.2. Epsilon: 0.1



Epsilon 10



Es posible desarrollar un modelo linealizado útil? Por ejemplo para el caso $R = 1964$, “Doble attractor”.

Puntos de equilibrio son soluciones de las tres ecuaciones:

$$0 = \frac{x_2}{RC_1} - \frac{x_1}{RC_1} - \frac{1}{C_1} [ax_1 + cx_1^3]$$

$$0 = \frac{x_3}{C_2} - \frac{x_2}{RC_2} + \frac{x_1}{RC_2}$$

$$0 = \frac{-x_2}{L} - \frac{R_0}{L} x_3$$

Se obtienen tres puntos de equilibrio, todas soluciones reales:

$$Xeq1 = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad Xeq2 = [2.0578 \quad 0.0156 \quad -0.0010] \text{ y}$$

$$Xeq3 = [-2.0578 \quad -0.0156 \quad 0.0010]$$

Por lo tanto se pueden desarrollar tres modelos de estado:

Punto 1:

Amod =

$$\begin{bmatrix} 11550.0, & 72740.0, & 0 \\ 6528.0, & -6528.0, & 1.282e+7 \\ 0, & -52.88, & -792.7 \end{bmatrix}$$

Con valores propios:

$$1.0e+04 *$$

$$\begin{aligned} &1.9540 + 0.0000i \\ &-0.7656 + 1.9089i \\ &-0.7656 - 1.9089i \end{aligned}$$

Uno con parte real positiva: sistema inestable.

Lo mismo sucede con las matrices evaluadas en los otros puntos de equilibrio. El modelo linealizado NO describe el comportamiento del oscilador de Chua.

La linealización se realizó con esta función

```
function [Amod Cmod] =linchua(x)
syms y w z
% clc
Vect = [y w z];
R = 1.964e03;
Ro = 1.499e01;
L = 1.891e-02;
C1 = 7e-9;
C2 = 7.8e-8;
b = 1/(R*C1);d = 1/(R*C2);
f = 1/C1; g = 1/C2; k = 1/L;
a = -5.9e-04;
c = 2e-05;
eq1 = b*(w-y)-f*(a*y + c*y^3);
eq2 = d*(y-w)+ g*z;
eq3 = k*(-w-Ro*z);
eqy = y;
Xbar =vpasolve(eq1 == 0,eq2 == 0,eq3 == 0);
x1e = eval(Xbar.y);
x2e = eval(Xbar.w);
x3e = eval(Xbar.z);
Xeq1 =[x1e(1) x2e(1) x3e(1)]
Xeq2 =[x1e(2) x2e(2) x3e(2)]
Xeq3 =[x1e(3) x2e(3) x3e(3)]
As = jacobian([eq1;eq2;eq3],Vect);
Cs = jacobian(eqy,Vect);
Aclin = subs(As,Vect,Xeq1);
Cclin = subs(Cs,Vect,Xeq1);
Amod = vpa(Aclin,4)
Cmod = vpa(Cclin,4)
```

REFERENCIAS

1. CHEN Chi-Tsong. Linear Systems Theory and Design. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.
2. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
3. Zachary S Tseng. The phase plane.
4. <http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf>
5. BAY John S. Fundamentals of Linear State Space Systems. New York: McGraw Hill International 1999.
6. GABEL Robert A. and ROBERTS Richard A. Signals and Linear Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 1987.
7. NEKOOGAR Farzad and MORIARTY Gene. Digital Control using DSP. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall PTR. 1999.
8. ZAK. S. Systems and Control. New York. Oxford University Press. 2003.
9. Anexo 5 Método de Runge Kutta para ecuaciones diferenciales [//repositorio.bib.upct.es](http://repositorio.bib.upct.es).
10. MathWorks Inc. MATLAB Function reference manual.
11. Mark L. Fowler. MATLAB Functions. 2001
12. David Houcque. Applications of MATLAB: Ordinary Differential Equations (ODE). Northwestern University
13. Cleve's Corner. Stiff Differential Equations. MATLAB News & Notes - May 2003.
14. DeVries University. Using Simulink Tutorial.
15. ...\\matlab_Doc\\Simulink\\Using_Matlab_Simulink.pdf.
16. U. Michigan. Simulink Basics Tutorial:
17. ...\\matlab_Doc\\Simulink\\UMICH_Simulink_Tutorial.pdf
18. <http://www.ece.rutgers.edu/~gajic/psfiles/linearization.pdf>
19. CHUA Leon, DESOER Charles & KUH Ernest. *Linear and nonlinear circuits*. McGraw-Hill Book Co. New York. 1987
20. <http://www.ece.rutgers.edu/~gajic/psfiles/linearization.pdf>
21. Guo-Qun Zhong. Implementation of Chua's Circuit with a Cubic Nonlinearity. IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-I: FUNDAMENTAL THEORIES AND APPLICATIONS, VOL. 41, NO. 12, DECEMBER 1994.
22. E. Tlelo-Cuautle, M. A. Duarte-Villasenor, J. M. Garcia-Ortega. Modeling and Simulation of a Chaotic Oscillator by MATLAB. Proceedings of the Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference (CERMA'06)

PROBLEMAS

1. Para el circuito de la Figura P1 la resistencia no lineal está descrita por la ecuación:

$$i_0 = |e_0|e_0$$

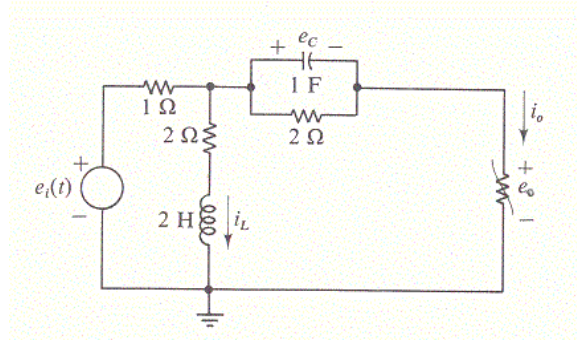


Figura P1

- Plantear las ecuaciones de estado. La respuesta es el voltaje sobre la resistencia no lineal. No hay energía inicial almacenada.
- Si el generador de voltaje es:
$$e_i(t) = 5 + \text{Sen}(2t)$$

Obtener el punto de operación
- Desarrollar el modelo linealizado alrededor del punto de operación y graficar los estados y la salida
- Simular el modelo NO linealizado en SIMULINK® y comparar los estados y la salida con la obtenida en c. ¿Qué se puede concluir?

2. Un sistema no lineal está descrito por la ecuación:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + f(x) = A + B\text{sen}3t$$

Dónde:

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x} & \forall x \geq 0 \\ -4\sqrt{|x|} & \forall x < 0 \end{cases}$$

- Obtener el punto de operación para $A = 4$ y $A = -4$.
- Linealizar alrededor de los dos puntos de operación

c. Resolver para $A = 4$ y unas condiciones iniciales:

$$x(0) = 1.5$$

$$\dot{x}(0) = 0.5$$

d. Resolver la ecuación original empleando MATLAB/SIMULINK® empleando los valores dados en el punto anterior y comparar los resultados.

3. Un sistema no lineal esta descrito por la ecuación de estado:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -|x|x - 2x - 2y^3 + (-3 + 0.2 \cos t)$$

- Obtener el modelo linealizado empleando MATLAB.
- Simular las ecuaciones no lineales empleando Simulink.
- Pasar los resultados de la simulación al "workspace" de Matlab y comparar a vs b.

4. El balance de masa en el tanque de aire comprimido está dado por la ecuación:

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = \omega_i(t) - A_0 \sqrt{2\rho(t)[2p(t) - p_0]}$$

$$\rho(t) = \frac{M}{RT} p(t)$$

Las variables, unidades y punto de operación son:

$$\rho(t) \left[\frac{kg}{m^3} \right] : \text{densidad}$$

$$\omega_i(t) \left[\frac{kg}{s} \right] : \text{flujo de aire de entrada}$$

$$V [m^3] = 1.5 [m^3] : \text{volumen del tanque}$$

$$A_0 [m^2] = 0.785 cm^2 : \text{Area de la perforación}$$

$$M \left[\frac{kg}{kmol} \right] = 29$$

$$R \left[\frac{kPa \cdot m^3}{kmol \cdot K} \right] = 8.314 \text{ constante gas ideal}$$

$$P_0 [kPa] = 101.3 \text{ Presión manométrica externa}$$

$$T [K] = 70^\circ C \text{ Temperatura aire}$$

$$\bar{P} [kPa] = 500 kPa. \text{ Presión manométrica de operación}$$

- Obtener un modelo linealizado de la ecuación
- Graficar el error.
- Obtener la función de transferencia, indicar la ganancia y la constante de tiempo.
- Comparar la respuesta paso exacta y la del modelo linealizado. Graficar el error.

5. "Stiff – Nonstiff" ¹³

It depends on the differential equation, the initial conditions, and the numerical method. Dictionary definitions of the word "stiff" involve terms like "not easily bent," "rigid," and "stubborn." We are concerned with a computational version of these properties.

An ordinary differential equation problem is stiff if the solution being sought is varying slowly, but there are nearby solutions that vary rapidly, so the numerical method must take small steps to obtain satisfactory results.

Stiffness is an efficiency issue. If we weren't concerned with how much time a computation takes, we wouldn't be concerned about stiffness.

¹³ Cleve's Corner. Stiff Differential Equations. MATLAB News & Notes - May 2003

Nonstiff methods can solve stiff problems; they just take a long time to do it.

A model of flame propagation provides an example.

When you light a match, the ball of flame grows rapidly until it reaches a critical size. Then it remains at that size because the amount of oxygen being consumed by the combustion in the interior of the ball balances the amount available through the surface.

The simple model is:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - y^3 ; y(0) = \delta$$

The scalar variable $y(t)$ represents the radius of the ball. The y^2 and y^3 terms come from the surface area and the volume. The critical parameter is the initial radius, δ , which is "small." We seek the solution over a length of time that is inversely proportional to δ .

$$0 < t < \frac{2}{\delta}$$

- a. Start with ode45. If δ is not very small, the problem is not very stiff. Try $\delta = .01$ and request a relative error of 10^{-4}

Plot the solution.

- b. Now let's see stiffness in action. Decrease δ by a couple of orders of magnitude (i.e 0.0001).

Plot the solution. Turn on zoom and use the mouse to explore the solution near where it first reaches steady state.

You should get a plot like figure P2

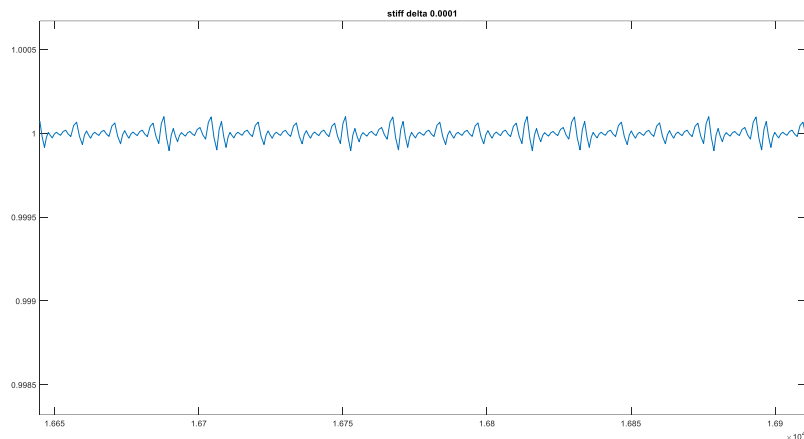


Figure P2

This problem is not stiff initially. It only becomes stiff as the solution approaches steady state. This is because the steady-state solution is so "rigid." Any solution near $y(t) = 1$ increases or decreases rapidly toward that solution. We should point out that "rapidly" here is with respect to an unusually long time scale.

- c. Now use ode23s with the same delta 0,0001 and plot the steady state response. Compare with figure P2