
CAPITULO 1. MODELO DE SISTEMAS ELECTRICOS LINEALES E INVARIANTES

OBJETIVOS

1. Utilizar datos, indicios e información para formular las ecuaciones de un sistema (CDIO 2.1.1)
2. Identificar suposiciones y fuentes de error (CDIO 2.1.1)
3. Discutir la generalización de soluciones analíticas (CDIO 2.1.3)
4. Computar las soluciones al problema. (CDIO 2.1.5)
5. Describir las abstracciones necesarias para definir y modelar un sistema. (CDIO 2.3.2)
6. Identificar las interfaces esenciales entre los elementos del sistema (CDIO 2.3.2)
7. Interpretar los factores relevantes del sistema (CDIO 2.3.3)

CONTENIDO

Clase 1

Definir y clasificar sistemas.
Definir las propiedades de linealidad e invariancia.
Definir variables y constantes.
Definir modelos y el procedimiento para obtenerlo

Clase 2

Definir variables de estado.
Plantear ecuaciones de estado de circuitos eléctricos, lineales e invariantes.

Clase 3

Resolver ecuaciones de estado LIT en forma analítica.
Obtener retratos de fase
Resolver empleando MATLAB.
Establecer relaciones entre representación de estado y entrada-salida.

Clase 4

Emplear la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones de estado

Clase 5

Evaluar función de transferencia
Evaluar la respuesta de frecuencia de sistemas lineales e invariantes.
Graficar los diagramas de Bode de magnitud y fase
Emplear MATLAB

Taller 1: VARIABLES DE ESTADO CIRCUITOS ELECTRICOS

Se desarrolla con la asesoría de la monitoria

Experimento 1. RESPUESTA COMPLETA CIRCUITO RLC

Practica en la sesión de laboratorio

SISTEMAS Y MODELOS.

La ingeniería es la aplicación de los principios y leyes establecidas por la ciencia a la solución de problemas: busca el beneficio de la humanidad y generar desarrollo. El ingeniero requiere creatividad, criterio, intuición y habilidad para integrar los conocimientos de diferentes campos para resolver los problemas de la ingeniería actual.

El estudio de los sistemas dinámicos y el diseño de sistemas de control proporcionan al estudiante de ingeniería experiencias útiles para el desarrollo de dichas habilidades.

Concepto de sistema

Sistema es una colección de componentes que tienen dos propiedades fundamentales:

- Las componentes internas o subsistemas interactúan entre sí.
- Las fronteras del sistema separan a las componentes internas del mundo externo.

Las fronteras son arbitrarias y se representan por medio de una caja.

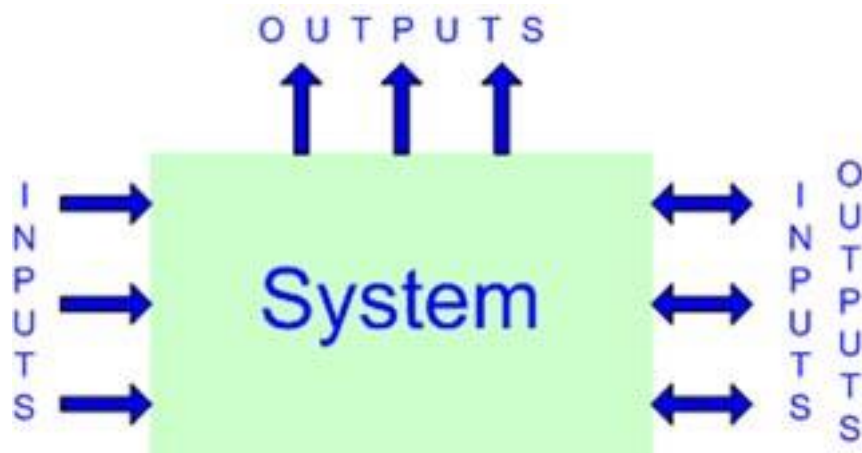


Figura 1

La condición o estado del sistema se describe por medio de variables de estado: estas, junto con las entradas permiten determinar el estado futuro del sistema.

En las aplicaciones de los sistemas dinámicos en ingeniería *se está interesado en controlar los estados y las salidas del sistema*, para ello se debe emplear un controlador, y su diseño en parte del problema del control automático.

Clasificación de sistemas.

En un sistema se establece una relación entre las entradas (causas o excitaciones) y las salidas (efectos o respuestas).

Definición # 1: Causalidad

Un sistema es causal si la salida en $t = t_0$ depende de los valores de la entrada y de la salida para $t \leq t_0$.

Un sistema no causal es anticipatorio: genera una respuesta antes de tener aplicada una entrada.

La respuesta de un sistema para todo $t \geq t_0$ se puede determinar si se conoce la entrada $u(t) \forall t \geq t_0$ y el estado $X(t_0)$ y se puede representar como:

$$\begin{array}{ccc} \{ x(t_0), u[t_0, \infty) \} & \Longrightarrow & \{ x[t_0, \infty), y[t_0, \infty) \} \\ \text{Estado en } t_0 & \Longrightarrow & \text{Estado } x(t) \forall t \geq t_0 \\ \text{y entrada } \forall t \geq t_0 & & \text{Salida } y(t) \forall t \geq t_0 \end{array}$$

Definición # 2: Dinámico y estático

Un sistema dinámico es aquel en el cual las salidas actuales son el resultado de las entradas actuales y la historia pasada.

Un sistema dinámico tiene memoria y se describe por medio de ecuaciones diferenciales o diferencia.

A diferencia de los sistemas dinámicos, en un sistema estático las variables o salidas sólo dependen de las entradas actuales.

Los sistemas instantáneos o estáticos se describen por ecuaciones algebraicas.

Definición # 3. SISO - MIMO

Un sistema se denomina **SISO** (Single Input Single Output) si tiene una sola variable de entrada y una sola variable de salida, de lo contrario es un sistema multivariable denominado **MIMO** (Multiple Input Multiple Output).

En el sistema SISO las variables u y y son escalares, y en el sistema MIMO son vectores

Definición # 4: Concentrado - Distribuido

Un sistema *concentrado* se describe por medio de un conjunto finito de variables de estado, y por ecuaciones diferenciales totales.

Un sistema distribuido requiere un número infinito de variables de estado y ecuaciones diferenciales parciales.

Definición # 5: Continuo - Discreto

Un sistema es continuo en el tiempo si acepta como entradas señales continuas en el tiempo y genera como salidas señales continuas.

$$u(t) \rightarrow y(t) \quad \text{ambas continuas}$$

Un sistema es llamado de tiempo discreto si acepta como entrada señales discretas en el tiempo y genera como salida señales discretas.

$$u(kT) \rightarrow y(kT) \quad \text{ambas discretas}$$

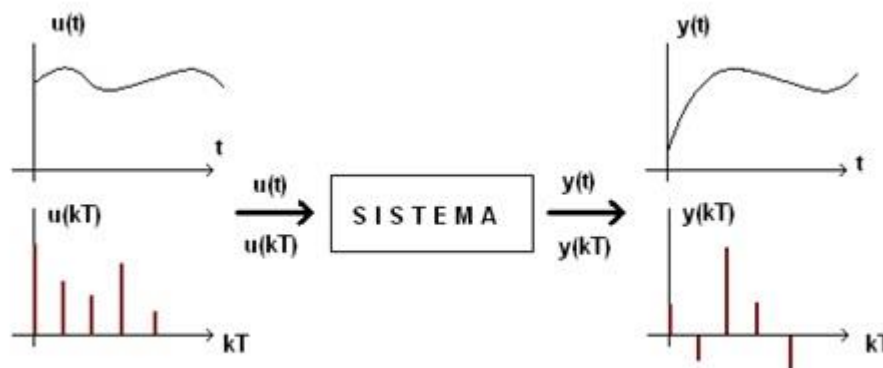


Figura 2

Definición # 6: Linealidad

Un sistema es lineal si para los pares

$$\{ x_1(t_0), u_1[t_0, \infty) \} \quad \Longrightarrow \quad \{ x_1[t_0, \infty), y_1[t_0, \infty) \}$$

y

$$\{ x_2(t_0), u_2[t_0, \infty) \} \quad \Longrightarrow \quad \{ x_2[t_0, \infty), y_2[t_0, \infty) \}$$

y para todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$, las siguientes relaciones son validas:

1. Aditividad

$$\{x_1(t_0) + x_2(t_0), u_1[t_0, \infty) + u_2[t_0, \infty)\} \rightarrow \{x_1[t_0, \infty) + x_2[t_0, \infty), y_1[t_0, \infty) + y_2[t_0, \infty)\}$$

2. Homogeneidad

$$\{\alpha x_1(t_0), \beta u_1[t_0, \infty)\} \quad \text{=====} \rightarrow \quad \{\alpha x_1[t_0, \infty), \beta y_1[t_0, \infty)\}$$

En caso contrario el sistema es no lineal.

La combinación de las dos propiedades se conoce como la propiedad de superposición.

Definición # 7: Descomposición de la respuesta

La respuesta de un sistema lineal se puede descomponer en dos partes:

$$\text{Respuesta a } \{x(t_0), u(t_0)\} = \text{Respuesta a } \{x(t_0), 0\} + \text{Respuesta a } \{0, u(t_0)\}$$

La primera es la respuesta a entrada cero, debido a la energía inicial almacenada y la segunda es la respuesta en estado cero debida únicamente a la entrada externa.

Definición # 8: Invariancia

Un sistema es invariante con el tiempo si dado un estado inicial y una entrada:

$$\{x(t_0), u[t_0, \infty)\} \quad \text{=====} \rightarrow \quad \{x[t_0, \infty), y[t_0, \infty)\}$$

y para cualquier tiempo $T \in \mathfrak{R}$:

$$\{x(t_0 + T), u[t_0 + T, \infty)\} \rightarrow \{x[t_0 + T, \infty), y[t_0 + T, \infty)\}$$

En otros casos el sistema es variante con el tiempo.

En otras palabras, en un sistema invariante si las formas de onda de la excitación son iguales, las formas de onda de la salida serán iguales, no importa el instante en el cual se aplica la excitación. La característica de un sistema invariante no cambia con el tiempo: como la respuesta es independiente del instante inicial se asume $t_0 = 0$ y el intervalo de interés es $[0, \infty)$.

Existen diferentes criterios para clasificar los sistemas, la tabla siguiente resume los diferentes tipos de sistemas, las herramientas matemáticas usadas para el análisis y ejemplos de cada categoría.

CRITERIO	# Entradas / Salidas	Comportamiento en el tiempo	Dimensión	Causalidad	Linealidad	Dependencia del tiempo	Continuidad Variable dependiente	Continuidad Variable tiempo
DESCRIPCION	Entrada Sencilla Salida Sencilla (SISO)	Instantáneo	Concentrado	Salida en $t = t_0$ Depende de la entrada para $t \leq t_0$	Cumplen propiedad de superposición.	Invariante	Análogo	Continuo para todo t
	Entrada Múltiple Salida Múltiple (MIMO)	Con memoria	Distribuido		No lineales	Variante	Cuantizado	Discreto
MATEMATICA	Escalares	Ecuaciones algebraicas	Número finito de variables de estado. Ecuación diferencial total		Funciones y ecuaciones lineales.	Matrices o ecuaciones de coeficientes constantes	Función continua	Ecuación diferencial; transformada de Laplace.
	Matrices Vectores	Ecuaciones diferenciales	Número infinito de variables de estado. Ecuaciones diferenciales parciales.		Funciones y ecuaciones no lineales.	Matrices o ecuaciones de coeficientes variantes	Función Discreta	Ecuación diferencia; transformada z.
EJEMPLO	Amplificador de audio canal sencillo. Amplificador de múltiples canales / mezclador	Arreglos resistivos Tanque de almacenamiento de agua	Amplificador de audio Microondas; líneas de transmisión	Todos los sistemas físicamente realizables. NOTA: Se pueden construir sistemas anticipativos basados en un modelo	Todo sistema construido con elementos lineales y operado dentro de su rango dinámico Rectificadores / válvulas / reacciones químicas.	Sistemas con características independientes de t. Vehículo con masa variable m(t) Reacciones con catalizador	Convertidor Digital/Análogo.	Filtros digitales Control digital

Tabla 1 Clasificación de sistemas

Ejemplo 1. Clasificar el sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

MIMO: tres entradas, dos salidas
Causal y continuo.

Linealidad:

Dado un vector de entradas:

$$\bar{U} = \alpha \begin{pmatrix} u_1^1(t) \\ u_2^1(t) \\ u_3^1(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_1^2(t) \\ u_2^2(t) \\ u_3^2(t) \end{pmatrix}; \alpha \text{ y } \beta \in \Re$$

La salida es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1^*(t) \\ y_2^*(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \left[\alpha \begin{pmatrix} u_1^1(t) \\ u_2^1(t) \\ u_3^1(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} u_1^2(t) \\ u_2^2(t) \\ u_3^2(t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1(t) \\ u_2^1(t) \\ u_3^1(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^2(t) \\ u_2^2(t) \\ u_3^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_2^1(t) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ y_2^2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El sistema es lineal

Invarianza con el tiempo:

Para $t = 0$ la respuesta es:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 3u_1(0) + 4u_2(0) + 2u_3(0) \\ y_2(0) &= -u_1(0) \end{aligned}$$

Si se aplica la excitación t segundos más tarde:

$$y_1(T) = 3u_1(T) + 4u_2(T) + 2u_3(T)$$

$$y_1(T) = y_1(0 + T)$$

Para la otra salida:

$$y_2(T) = -u_1(T) + Tu_2(T)$$

$$\neq y_2(0 + T)$$

El sistema es variante con el tiempo.

PARÁMETROS Y VARIABLES.

Parámetros físicos: el primer grupo de parámetros físicos básicos que se debe identificar son las constantes, que establecen las unidades, dimensiones, rangos y medidas. Muchas veces estas constantes son desconocidas o poco definidas y por lo tanto se deben encontrar por medio de un proceso de identificación de sistemas.

Variables: describen el comportamiento del sistema respecto al tiempo: las excitaciones son externas y conocidas a priori, las salidas y los estados internos se deben determinar.

Las variables se pueden dividir en:

Variables de "esfuerzo": asociadas con la capacidad de desarrollar un trabajo. Se pueden representar en general por la letra e

Variables de "flujo": asociadas con el movimiento de masa y/o energía. Se pueden representar por la letra f .

Para la descripción de los componentes se requieren dos variables una *de esfuerzo* y otra *de flujo*.

Desafortunadamente los símbolos pueden usarse para representar varias variables y es el contexto del sistema que se está analizando el que ayuda a aclarar el significado. La única forma de evitar la confusión de los símbolos sería desarrollando una notación completamente nueva.

SISTEMA	ESFUERZO $e(t)$	FLUJO $f(t)$
Eléctrico	Voltaje $v(t)$ – (V)	Corriente $i(t)$ – (A)
Mecánico Traslación	Fuerza $f(t)$ – (N)	Velocidad $v(t)$ – (m/s)
Mecánico Rotación	Momento o Torque $\tau(t)$ – (N-m)	Velocidad angular – $\omega(t)$ – rad/s
Hidráulico	Presión $p(t)$ – (Pa)	Tasa de flujo, $f(t)$ – (m ³ /s)
Térmico	Temperatura $T(t)$ – (°C)	Flujo de calor $Q(t)$ – (J/s)

Tabla 2 Tipos de variables

La potencia instantánea entregada o disipada por el componente es el producto de la variable “esfuerzo” por la variable “flujo”, excepto en los sistemas térmicos donde el flujo de calor tiene unidades de potencia.

$p(t) = e(t) f(t)$	1
--------------------	---

En el sistema eléctrico

$p(t) = v(t) i(t)$	2
--------------------	---

La energía o trabajo:

$E(t) = \int p(t)dt = \int e(t)f(t)$	3
--------------------------------------	---

Ejemplo 2. Una hidroeléctrica tiene una cabeza efectiva de 324 m y un flujo promedio de 137 m³ /s. La represa cubre un área de 640 km². La eficiencia de las turbinas es el del 92% y la del generador del 95%.

- a) Calcular la potencia hidráulica disponible.
- b) Asumiendo efectos externos despreciables y comportamiento lineal, cuál es la disponibilidad de energía, si el nivel del agua puede bajar 1 m ?
- c)Cuál es el máximo de la potencia y de la energía eléctrica disponible

a) *La presión en el fondo es:*

$$P = \rho gh$$
$$P = 1000 \text{ kg/m}^3 * 9.8 \text{ m/s}^2 * 324 \text{ m} = 3.175 * 10^6 \text{ N/ m}^2$$

La potencia disponible

$$P = p * f = 3.175 * 10^6 \text{ N/ m}^2 * 137 \text{ m}^3 / \text{s}$$
$$= 4.35 * 10^8 \text{ N*m/s}$$
$$= 4.35 * 10^8 \text{ W}$$
$$= 435 \text{ MW potencia hidráulica.}$$

b) 1 metro de altura equivale a

$$V = 640 \text{ km}^2 * 1 \text{ m} = 640 \text{ km}^2 * 10^6 \text{ m}^2 / \text{km}^2 * 1 \text{ m}$$
$$= 6.4 * 10^8 \text{ m}^3$$

Asumiendo un comportamiento aproximadamente lineal, el tiempo necesario para evacuar el volumen anterior es:

$$Q = V/t \rightarrow t = 6.4 * 10^8 \text{ m}^3 / 1.37 * 10^2 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$t = 4.67 * 10^6 \text{ s} = 1297.2 \text{ horas}$$

Cuando h caiga a 323 metros la potencia hidráulica es de 433.7 MW. Haciendo el promedio de las dos potencias disponibles se obtienen 434.4MW

Energía hidráulica disponible:

$$434.4 \text{ MW} * 1.2972 * 10^3 \text{ horas} = 563.4 \text{ GW-hora. (promedio)}$$

c) Potencia Eléctrica

$$P_{\text{TURBINA}} = \eta_T * P_{\text{HIDRAULICA}} = 0.92 * 434.4 \text{ MW}$$
$$= 399.6 \text{ MW}$$

$$P_{\text{GENERADOR}} = \eta_G * 399.6 \text{ MW}$$
$$= 0.95 * 399.6 \text{ MW}$$

$$P_{\text{GENERADOR}} = 379.6 \text{ MW}$$

La energía eléctrica disponible:

$$W = 379.6 \text{ MW} * 1.297 * 10^3 \text{ H}$$

$$W = 492.3 \text{ GW-hora Energía disponible}$$

CONSTRUCCION DE MODELOS

Modelo matemático:

Es un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema y que se obtienen a partir de las leyes de interconexión, las leyes de los elementos y de los principios físicos fundamentales. A partir del modelo se puede analizar la respuesta, evaluar parámetros de funcionamiento y diseñar los sistemas de control requeridos para modificar a voluntad la respuesta dinámica del sistema.

Independientemente de la naturaleza del sistema, se busca llegar a una descripción matemática unificada, de tal forma que se puedan emplear las mismas técnicas de formulación, análisis y evaluación.

Los pasos importantes para la construcción de modelos son:

Definición: trazar las fronteras implica dividir el problema en el sistema de interés y su entorno. Para ello se deben identificar las variables de entrada, las de salida y los disturbios que afectan al sistema. También se debe decidir el objetivo del modelo y el tipo de descripción a emplear.

Formulación: formular un modelo físico consta de dos pasos:

1. **Descomponer** el sistema en subsistemas o componentes básicos. Una descomposición organizada y formal es la parte más importante del análisis de sistemas. Una vez descompuesto el sistema se puede definir o aproximar el comportamiento de los componentes individuales.
2. **Plantear** las ecuaciones que definen a los componentes básicos y subsistemas y las leyes de interconexión que los relacionan. El conjunto de ecuaciones obtenido debe ser linealmente independiente.

Procedimiento para formulación:

- a. Identificar los componentes, numerarlos y plantear los diagramas de cuerpo libre que muestran las entradas, salidas y las interacciones internas y externas.

- b. Identificar todos los parámetros y variables necesarias, sus convenciones y orientaciones.
- c. Escribir las relaciones entrada / salida de los componentes individuales.

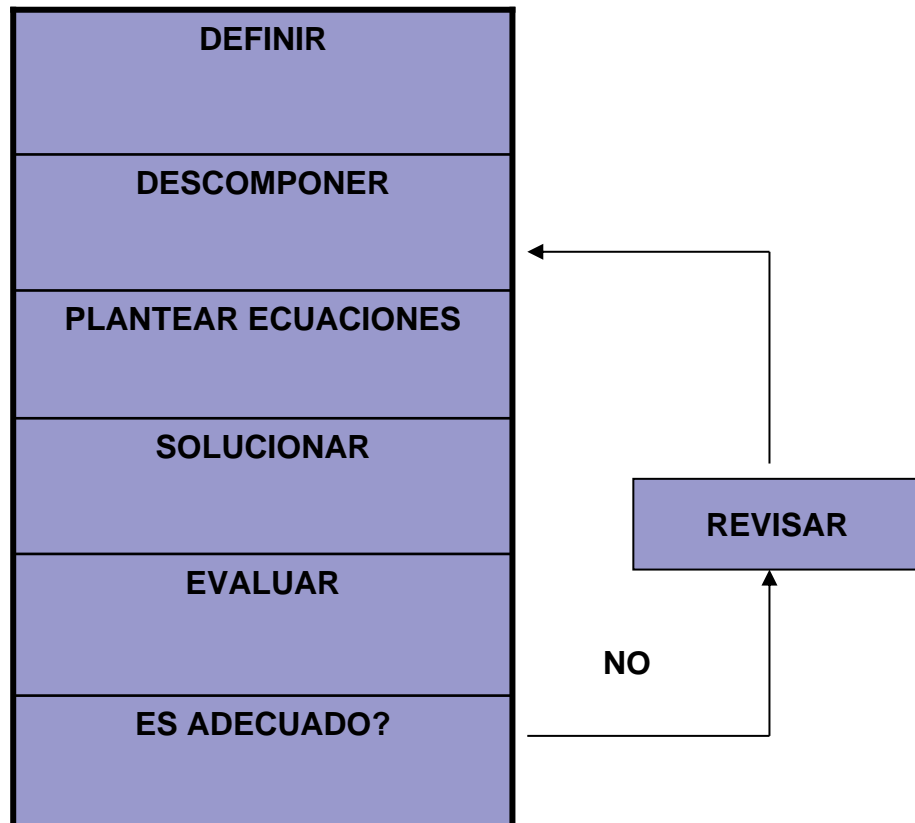


Figura 3

- 3. **Solucionar:** el conjunto de ecuaciones obtenido en el paso anterior se resuelve empleando una de las diferentes técnicas disponibles: solución de ecuaciones diferenciales, métodos por transformadas, evaluación numérica o simulación.
- 4. **Evaluación:** los resultados obtenidos se confrontan con los objetivos propuestos, se calculan en el estado estable y se comparan con los resultados que arrojan las ecuaciones de balance en el punto de operación. El resultado de esta evaluación arrojará la necesidad de reajustar el modelo, revisar la descomposición planteada y verificar el cumplimiento de las suposiciones hechas durante el planteo.

A partir de la obtención del modelo válido, este representa al sistema físico para los procedimientos de diseño y de control que sigan.

DESCRIPCIONES DE SISTEMAS

Una vez que se delimita el sistema físico es necesario plantear el conjunto de ecuaciones que lo describen. Dependiendo de las preguntas a resolver o del objetivo del análisis se puede plantear dos tipos diferentes de descripciones:

- Entrada-Salida.
- Ecuaciones de estado.

Entrada –salida.

Ecuación que describe a la variable de salida de interés (y) en función de las entradas (u). Este fue el procedimiento empleado para modelar circuitos lineales e invariantes en el curso de “Circuitos en frecuencia”

Para sistemas continuos, lineales e invariantes se plantea una ecuación diferencial, lineal de coeficientes constantes y de orden n :

$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$	4
---	---

Para sistemas discretos se planteará una ecuación diferencia, como se estudiará más adelante.

Para los sistemas continuos, lineales e invariantes, la ecuación diferencial se puede transformar al dominio de la frecuencia compleja empleando la transformada de Laplace:

Asumiendo estado cero o relajado del sistema (condiciones iniciales iguales a cero), se emplea la transformada de Laplace y se obtiene la función de sistema:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$	5
--	---

La función de sistema, sus propiedades y aplicaciones ya fueron estudiadas en detalle en el curso anterior.

Se recalca que $H(s)$ sólo describe el comportamiento de sistemas continuos, lineales e invariantes en estado cero.

Descripción en el espacio de estado

Definición # 9¹: Estado

“El estado de un sistema en el tiempo t_0 es la mínima cantidad de información que junto con la entrada $u[t_0, \infty)$ determinan la respuesta del sistema para todo $t \geq t_0$.”

El estado resume la información pasada requerida para determinar el comportamiento futuro del sistema. Se pueden definir variables de estado en sistemas con memoria; no aplica a sistemas instantáneos.

Todo sistema dinámico, lineal, continuo y concentrado se puede describir por un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + \dots + b_{1p}(t)u_p(t) \\ &\vdots \\ \dot{X}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + \dots + b_{np}(t)u_p(t)\end{aligned}$$

y las salidas

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + \dots + d_{1p}(t)u_p(t) \\ &\vdots \\ y_q(t) &= c_{q1}(t)x_1(t) + \dots + c_{qn}(t)x_n(t) + d_{q1}(t)u_1(t) + \dots + d_{qp}(t)u_p(t)\end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones que se representa en notación matricial como:

$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)$ $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t)$	6
---	---

Dónde:

- $\mathbf{X}(t)$ vector de variables de estado del sistema ($n \times 1$)
- $\mathbf{A}(t)$ matriz del sistema ($n \times n$)
- $\mathbf{B}(t)$ matriz de entrada ($n \times p$)
- $\mathbf{U}(t)$ vector de variables de entrada ($p \times 1$)

¹ CHEN Chi-Tsong. *Linear Systems Theory and Design*. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.

- **Y** (t) vector de variables de salida (q x 1)
- **C** (t) matriz de salida (q x n)
- **D** (t) matriz "hacia delante" (q x p)

Los elementos de las matrices A(t), B(t), C(t), D(t) son variables con el tiempo.

La primera ecuación forma un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden. La ecuación de salida es un conjunto de q ecuaciones algebraicas.

Cuando el sistema es lineal invariante con el tiempo (LIT) los elementos de las matrices A(t), B(t), C(t), D(t) son constantes con el tiempo y la notación se simplifica:

$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$ $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t)$	7
---	---

El conjunto de variables de estado **X**(t) debe describir totalmente el efecto de la historia del sistema sobre la repuesta futura. (Ver definición # 2). Como la historia del sistema depende de la energía inicial almacenada, en general se asocia una variable de estado con cada elemento de almacenamiento de energía.

La selección de variables de estado no es única, pero el conjunto debe ser independiente: ninguna variable se debe poder representar por una combinación algebraica de las demás.

En algunos casos, el número de variables de estado es diferente al número de elementos de almacenamiento, ya sea por una interconexión especial entre componentes, o por que se necesitan variables no directamente relacionadas con el almacenamiento de energía; pero se debe verificar que el conjunto de variables de estado sea linealmente independiente.

La descripción de sistemas por variables de estado es muy general: se puede emplear para sistemas lineales, invariantes, variantes, no lineales, discretos, SISO, MIMO como se verá en sesiones posteriores.

Representación en bloques.

Las ecuaciones de estado se pueden representar por medio de diagramas de bloques, empleando integradores y sumadores.

En un integrador la salida en un instante t es función de las variables actuales y de la historia o memoria del sistema representada por la condición inicial, x(0)

$$\dot{x}(t) \rightarrow \boxed{\text{Integrador}} \rightarrow x(t)$$

$$x(t) = \int \dot{x}(t) dt + x(o)$$

Para el modelo matricial:

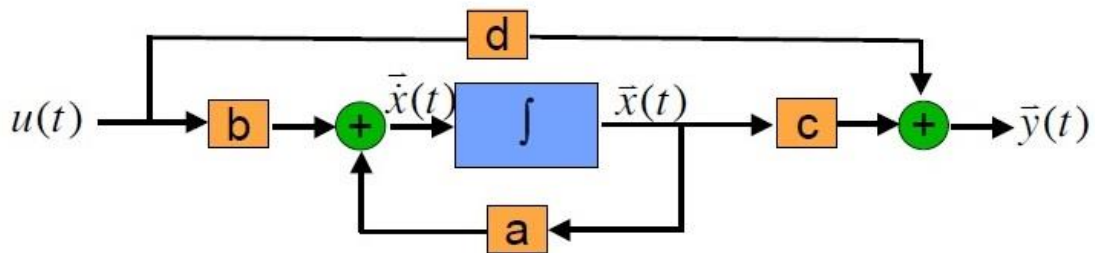


Figura 4

MODELO EN VARIABLES DE ESTADO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS.

El comportamiento dinámico de un circuito eléctrico está determinado por los elementos de almacenamiento de energía L y C . Por lo tanto, la escogencia natural de variable de estado es i_L y v_C . También se pueden emplear las variables de flujo en la inductancia Φ ($v = \frac{d\phi}{dt}$) y la carga eléctrica en un condensador ($i = \frac{dq}{dt}$)

Variables generalizadas	Variable Eléctrica	Unidades SI
Esfuerzo, e	Voltaje, v	$V = N\cdot m/C$
Flujo, f	Corriente, i	$A = C/s$
Momentum, l	Flujo, ϕ	$V\cdot s$
Desplazamiento, δ	Carga, q	$C = A\cdot s$
Potencia, p	$v(t)i(t)$	$W = N\cdot m/s$
Energía, E	$\int v dq, \int i d\phi$	$J = V\cdot A\cdot s = W\cdot s = N\cdot m$

Tabla 3

Para el planteo de las ecuaciones de estado se sigue un procedimiento sencillo:

- Seleccionar las variables de estado: voltaje (v) o carga (q) en los condensadores y corriente (i) o flujo (ϕ) en las inductancias.
- Plantear las leyes de interconexión, que para circuitos eléctricos son "KVL: Ley de Kirchhoff de voltaje" y "KCL: Ley de Kirchhoff de corriente".
- Plantear las ecuaciones terminales de los elementos.
- Escribir las ecuaciones en la forma (12).

En los ejemplos siguientes se analizarán los criterios de escogencia y la relación que existe entre los diferentes modelos obtenidos.

Ejemplo 3. Para el circuito dado plantear el modelo en variables de estado. $C_1 = 1$; $C_2 = C_3 = 2$ y $R = 2$.

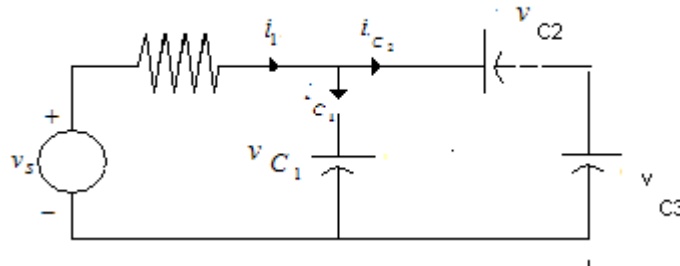


Figura 5

Como existen tres condensadores inicialmente se toman 3 variables de estado:

$$v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}$$

Las ecuaciones de corriente en los condensadores:

$$i_{C_1} = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{v_s - v_{C_1}}{R} - C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}$$

$$i_{C_2} = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}$$

$$i_{C_3} = C_3 \frac{dv_{C_3}}{dt}$$

Reemplazando los valores numéricos:

$$\frac{v_s - v_{c_1}}{2} = \dot{v}_{c_1} + 2\dot{v}_{c_2}$$

$$\dot{v}_{c_2} = \dot{v}_{c_3}$$

Pero:

$$v_{c_1} = v_{c_2} + v_{c_3}$$

$$\dot{v}_{c_2} = \dot{v}_{c_1} - \dot{v}_{c_3}$$

$$\dot{v}_{c_2} = \frac{1}{2}\dot{v}_{c_1} = \dot{v}_{c_3}$$

Sólo se necesita 1 variable de estado:

$$\dot{v}_{c_1} = -\frac{1}{4}v_{c_1} + \frac{1}{4}v_s$$

El ejemplo muestra que el conjunto de variables de estado debe ser linealmente independiente.

Ejemplo 4. Plantear el modelo en variables de estado tomando como variables de estado:

- La carga
- El voltaje
- Encontrar la relación entre los dos modelos.

La variable de salida deseada es la corriente i_2

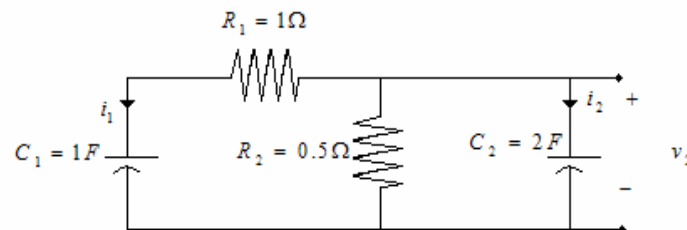


Figura 6

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

$$i_2 = \frac{dq_2}{dt}$$

$$v_{c_1} = \frac{1}{C_1} q_1(t)$$

$$v_{c_2} = \frac{1}{C_2} q_2(t)$$

La ecuación de voltaje de la malla 1:

$$v_{c_2} = i_1(1\Omega) + v_{c_1}$$

$$(1\Omega) \frac{dq_1}{dt} = \frac{1}{C_2} q_2(t) - \frac{1}{C_1} q_1(t)$$

$$\dot{q}_1 = -q_1 + 0.5q_2$$

La ecuación de corriente de nodo para el condensador 2:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} + \frac{1}{R_2} v_{c_2} = 0$$

$$\frac{dq_2}{dt} = -[-q_1 + 0.5q_2] - \frac{1}{R_2} \times \frac{1}{C_2} q_2$$

$$\dot{q}_2 = q_1 - 0.5q_2 - q_2$$

$$\dot{q}_2 = q_1 - 1.5q_2$$

Para la ecuación de salida:

$$i_2 = \dot{q}_2 = q_1 - 1.5q_2$$

El modelo de estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

b. Si se definen como variables de estado v_{c_1} y v_{c_2} :
 KCL para el nodo de C_1

$$i_1 = v_{c_2} - v_{c_1}$$

$$C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} = v_{c_2} - v_{c_1}$$

$$\dot{v}_{c_1} = -v_{c_1} + v_{c_2}$$

KCL para el nodo de C_2

$$i_2 = -i_1 - i_3$$

$$C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} = -\frac{v_{c_2}}{R_2} - (v_{c_2} - v_{c_1})$$

$$= -2v_{c_2} - v_{c_2} + v_{c_1}$$

$$= -3v_{c_2} + v_{c_1}$$

$$\dot{v}_{c_2} = 0.5v_{c_1} - 1.5v_{c_2}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{c_1} \\ \dot{v}_{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{pmatrix}$$

La corriente de salida:

$$y = i_2 = -(v_{c2} - v_{c1}) - \frac{v_{c2}}{0.5} = v_{c1} - 3v_{c2}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{pmatrix}$$

Para encontrar una relación entre los dos modelos:

$$v_{c1} = C_1 q_1 \quad : \quad v_{c1} = q_1$$

$$v_{c2} = 0.5 q_2$$

$$\begin{pmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{0.5} \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Y para la salida:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Los dos conjuntos de ecuaciones de estado que describen al mismo sistema están relacionados por una transformación lineal. (Ver anexo A)

Del ejemplo se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. No hay una descripción de estado única, sin embargo, como el estado es la mínima cantidad de información que, junto con la entrada, permite evaluar el comportamiento dinámico del sistema, el número de variables de estado de un sistema si es único.
2. Las diferentes representaciones de estado que se obtienen de un mismo sistema deben estar relacionadas por transformaciones lineales.

Ejemplo 5. Plantear el conjunto de ecuaciones de estado que describe al sistema. Tomar como salida v_{R2}

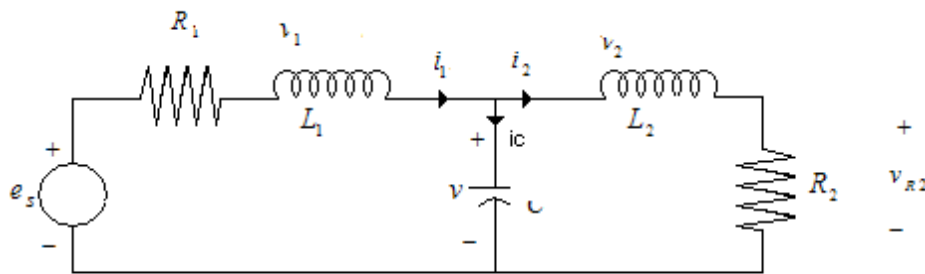


Figura 7

Variables de estado:

Corriente en la inductancia 1: i_1

Corriente en la inductancia 2: i_2

Voltaje en el condensador: v_c

Para los condensadores se plantean las ecuaciones de corriente de nodo (KCL).

KCL para el nodo 1:

$$i_c = i_1 - i_2$$

$$C \frac{dv_c}{dt} = i_1 - i_2$$

$$\dot{v}_c = \frac{1}{C} i_1 - \frac{1}{C} i_2$$

Para las inductancias se plantean las ecuaciones de voltaje de malla (KVL)

KVL para la malla 1:

$$e_s = i_1 R_1 + v_{L1} + v_c$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -i_1 R_1 - v_c + e_s$$

$$\dot{i}_1 = -\frac{R_1}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} v_c + \frac{1}{L_1} e_s$$

KVL para la malla 2:

$$v_c = v_{L2} + i_2 R_2$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -i_2 R_2 + v_c$$

$$\dot{i}_2 = -\frac{R_2}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} v_c$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

$$y = v_{R2} = i_2 R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

b) También se pueden seleccionar como variables de estado el flujo en la inductancia y la carga en los condensadores.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= L_1 i_1(t) \\ \varphi_2 &= L_2 i_2(t) \\ q(t) &= C v_c(t)\end{aligned}$$

La ecuación de corriente en el condensador:

$$\dot{q}(t) = \frac{\varphi_1}{L_1} - \frac{\varphi_2}{L_2}$$

Las ecuaciones de voltaje de malla:

$$\begin{aligned}e_s &= \frac{\varphi_1}{L_1} R_1 + \dot{\varphi}_1 + \frac{q_c(t)}{C} \\ \dot{\varphi}_1 &= e_s - \frac{\varphi_1}{L_1} R_1 - \frac{q_c(t)}{C} \\ y \quad \frac{q(t)}{C} &= \dot{\varphi}_2 + \frac{\varphi_2}{L_2} R_2 \\ \dot{\varphi}_1 &= \frac{1}{C} q(t) - \dot{\varphi}_2 \left(\frac{R_2}{L_2} \right)\end{aligned}$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_c \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

La ecuación de salida:

$$\begin{aligned}v_{R2} &= \frac{R_2 \varphi_2}{L_2} \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Para el sistema MIMO plantear la ecuación de estado. Como vector de salida se requieren las corrientes entregadas por las fuentes de voltaje.

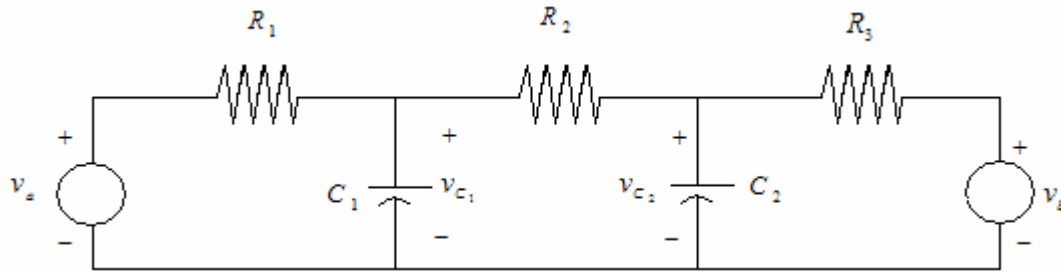


Figura 8a

Las variables de estado son los voltajes v_{c1} y v_{c2} . Empleando el teorema de superposición:

Para $v_b = 0$ el circuito resultante es:

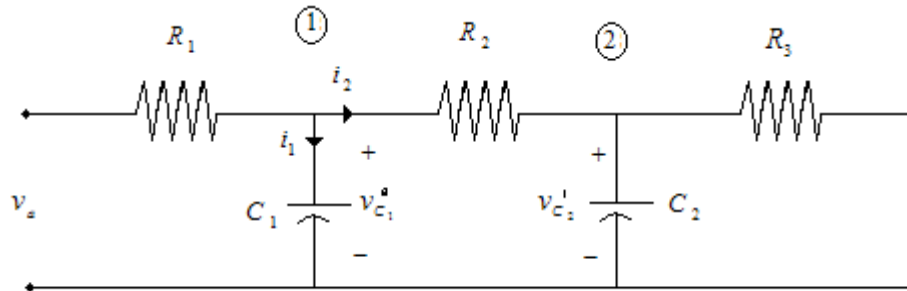


Figura 8b

KCL nodo 1:

$$\frac{v_a - v'_{c1}}{R_1} = i'_1 + i'_2$$

$$i'_2 = \frac{v'_{c1} - v'_{c2}}{R_1}$$

Combinando:

$$i'_1 = \frac{v_a - v'_{c1}}{R_1} - \frac{v'_{c1} - v'_{c2}}{R_1}$$

Reemplazando:

$$i'_1 = C_1 \frac{dv'_{c1}}{dt}$$

La primera ecuación de estado:

$$\frac{dv'_{c_1}}{dt} = \frac{1}{R_1 C_1} (v_a - v'_{c_1}) - \frac{1}{R_2 C_1} (v'_{c_1} - v'_{c_2})$$

KCL nodo 2:

$$\frac{v'_{c_1} - v'_{c_2}}{R_2} = C_2 \frac{dv'_{c_2}}{dt} + \frac{v'_{c_2}}{R_3}$$

$$\frac{dv'_{c_2}}{dt} = \frac{v'_{c_1}}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_2 C_2} v'_{c_2} - \frac{1}{R_3 C_2} v'_{c_2}$$

Para $v_a = 0$ el circuito resultante es:

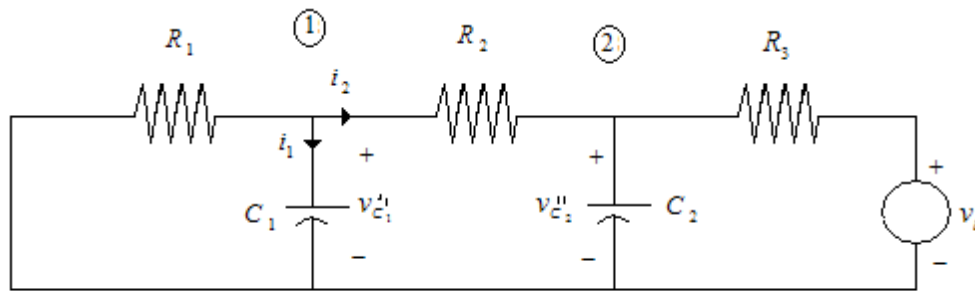


Figura 8c

Es el mismo problema anterior intercambiando los valores de los componentes así:

$$R_1 \rightarrow R_3$$

$$C_1 \rightarrow C_2$$

$$R_2 \rightarrow R_2$$

$$C_2 \rightarrow C_3$$

$$R_3 \rightarrow R_1$$

E intercambiando también las variables.

$$v'_{c_1} \rightarrow v''_{c_2} ; \quad v'_{c_2} \rightarrow v''_{c_1}$$

Las nuevas ecuaciones de nodo:

$$\frac{dv''_{c_2}}{dt} = \frac{1}{R_3 C_2} (v_b - v''_{c_2}) - \frac{1}{R_2 C_2} (v'_{c_2} - v''_{c_1})$$

$$\frac{dv''_{c_1}}{dt} = \frac{dv''_{c_2}}{dt} - \frac{1}{R_2 C_1} (v''_{c_1}) - \frac{1}{R_1 C_1} (v''_{c_1})$$

El voltaje total sobre el condensador v_{c_1} :

$$v_{c_1} = v'_{c_1} + v''_{c_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v'_{c_1} + v''_{c_1})}{dt} &= \frac{1}{R_1 C_1} (v_a) - v'_{c_1} \frac{1}{R_1 C_1} - v'_{c_1} \frac{1}{R_2 C_1} + v'_{c_2} \frac{1}{R_2 C_1} - v''_{c_1} \frac{1}{R_1 C_1} - v''_{c_1} \frac{1}{R_2 C_1} \\ &\quad + v''_{c_2} \frac{1}{R_2 C_1} \end{aligned}$$

$$\dot{v}_{c_1} = -v_{c_1} \frac{1}{R_1 C_1} - v_{c_1} \frac{1}{R_2 C_1} + v_{c_2} \frac{1}{R_2 C_1} + v_a \frac{1}{R_1 C_1}$$

El voltaje total sobre el condensador v_{c_2}

$$v_{c_2} = v'_{c_2} + v''_{c_2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(v'_{c_2} + v''_{c_2})}{dt} &= \frac{v_b}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_2 C_2} v'_{c_1} + \frac{1}{R_2 C_2} v''_{c_1} - \frac{1}{R_2 C_2} v'_{c_2} - \frac{1}{R_2 C_2} v''_{c_2} - \frac{1}{R_3 C_2} v'_{c_2} \\ &\quad - \frac{1}{R_3 C_2} v''_{c_2} \end{aligned}$$

$$\dot{v}_{c_2} = \frac{1}{R_2 C_2} v_{c_1} - \frac{1}{R_2 C_2} v_{c_2} - \frac{1}{R_3 C_2} v_{c_2} + \frac{v_b}{R_3 C_2}$$

La ecuación matricial de estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_{c_1} \\ \dot{v}_{c_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_3 C_2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3 C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

La ecuación de salida:

$$i_a = \frac{v_a - v_{c_1}}{R_1} = -\frac{1}{R_1} v_{c_1} + \frac{1}{R_1} v_a$$

$$i_b = \frac{v_b - v_{c_2}}{R_3} = -\frac{1}{R_3} v_{c_2} + \frac{1}{R_3} v_b$$

En notación matricial:

$$Y = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix}$$

Sistema MIMO y además con matriz D diferente de 0.

El modelo en el espacio de estado también se puede emplear para sistemas lineales, variantes con el tiempo, ver ANEXO B

SOLUCIÓN ECUACIONES DE ESTADO.

Dada la ecuación dinámica de estado de un sistema LIT:

$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}$	8
--	---

La solución se puede obtener directamente en el dominio del tiempo o empleando la transformada de Laplace.

Solución en el dominio del tiempo

La ecuación dinámica se reescribe como:

$\dot{X}(t) - AX(t) = BU(t)$	9
------------------------------	---

Se pre-multiplican ambos lados de la ecuación diferencia por el factor integrante e^{-At} . Para derivar el producto de matrices se emplea la regla de la cadena, teniendo cuidado de preservar el orden de la multiplicación de matrices:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{-At}X(t)) &= \left(\frac{d}{dt}e^{-At}\right)X(t) + e^{-At}\frac{dX(t)}{dt} \\ &= (e^{-At})(-A)X(t) + e^{-At}\dot{X}(t) \\ &= e^{-At}(-AX(t) + \dot{X}(t)) \\ &= e^{-At}BU(t)\end{aligned}$$

Integrando a ambos lados:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{-At'} \mathbf{X}(t')) dt' = e^{-At'} \mathbf{X}(t') \Big|_0^t = \int_0^t e^{-At'} \mathbf{B} \mathbf{U}(t') dt'$$

$$e^{-At} \mathbf{X}(t) - \mathbf{I} \mathbf{X}(0) = \int_0^t e^{-At'} \mathbf{B} \mathbf{U}(t') dt'$$

$\mathbf{X}(t) = \underbrace{e^{At} \mathbf{X}(0)}_{\text{Respuesta a entrada cero}} + \underbrace{e^{At} \int_0^t e^{-At'} \mathbf{B} \mathbf{U}(t') dt'}_{\text{Respuesta en estado cero}}$	10
---	----

El primer término corresponde al efecto del vector de estado en $t = 0$, premultiplicado por la matriz e^{At} .

El segundo término se puede reescribir como:

$$\int_0^t e^{A(t-t')} \mathbf{B} \mathbf{U}(t') dt'$$

y corresponde a la integral de convolución entre la matriz e^{At} y la entrada premultiplicada por el vector \mathbf{B} : $\mathbf{B} \mathbf{U}(t)$,

La matriz e^{At} relaciona el estado en cualquier otro tiempo t con el estado en el instante inicial, y por esto se denomina matriz de transición de estados, notada como $\Phi(t)$.

$e^{At} = \Phi(t)$	11
--------------------	----

Para un sistema invariante, si el instante inicial no es cero sino un t_0 arbitrario la respuesta a entrada cero es:

$\underbrace{\mathbf{X}(t)}_{\text{Entrada cero}} = \Phi(t, t_0) \mathbf{X}(t_0) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{X}(t_0)$	12
--	----

Y la respuesta en estado cero es:

$\mathbf{X}(t) = \underbrace{\int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{U}(\tau) d\tau}_{\text{Respuesta en estado cero}}$	13
--	----

Para evaluar la matriz de transición de estados se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

1. Evaluar los valores propios de \mathbf{A} , encontrar un polinomio $g(\lambda)$ de grado $n-1$ que sea igual a $e^{\lambda t}$ para todos los λ y evaluar $e^{\mathbf{A}t} = g(\mathbf{A})$.
2. Por medio de transformaciones similares: obtener la forma canónica de Jordan de \mathbf{A} , $\hat{\mathbf{A}}$, y la matriz de transformación, \mathbf{P} , y su inversa:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} e^{\hat{\mathbf{A}}t} \mathbf{P}^{-1}$$

3. Por métodos numéricos, por ejemplo, empleando MATLAB²
4. Empleando la transformada de Laplace.

Ejemplo 7. Para la ecuación de estado:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Obtener la solución a entrada cero. Estado inicial: $x(0) = (-1 \quad 4)'$

Por el método 2, como la matriz ya está en forma canónica de Jordan, no es necesario evaluar la matriz \mathbf{P} de transformación:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix}$$

La respuesta debida al estado inicial (o respuesta a entrada cero) es:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

² Ver documentación MATLAB R2015: <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/expm.html>

Los estados están desacoplados:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$$

$$x_2(t) = x_2(0)e^{-4t}$$

Esta es la respuesta modal del sistema: los valores propios de la matriz de sistema, A, son los exponentes de las componentes individuales del vector de estado. Si los valores propios tienen parte real negativa, las exponenciales son decrecientes, si tienen parte real positiva la respuesta es creciente (sistema inestable).

Esta relación se verá claramente en los retratos de fase y se hará explícita durante el estudio de la estabilidad del sistema.

Empleando MATLAB

%Capítulo 1 Ejemplo 7

%Solución ecuación de estado desacoplada

SYS.TimeUnit = 'seconds'

clear all

close all

A = [-1 0; 0 -4];

B = [0 0]';

C = [0 0];

D = 0;

X0 = [-1 4]'

%Solución exponencial

syms t;

phi = expm(t*A)

state = phi*X0

fplot(state(1,1),[0,10]); title 'X1';

figure

fplot(state(2,1),[0,10]); title 'X2'

```
phi =  
[exp(-t), 0]  
[ 0, exp(-4*t)]
```

```
state =  
-exp(-t)
```

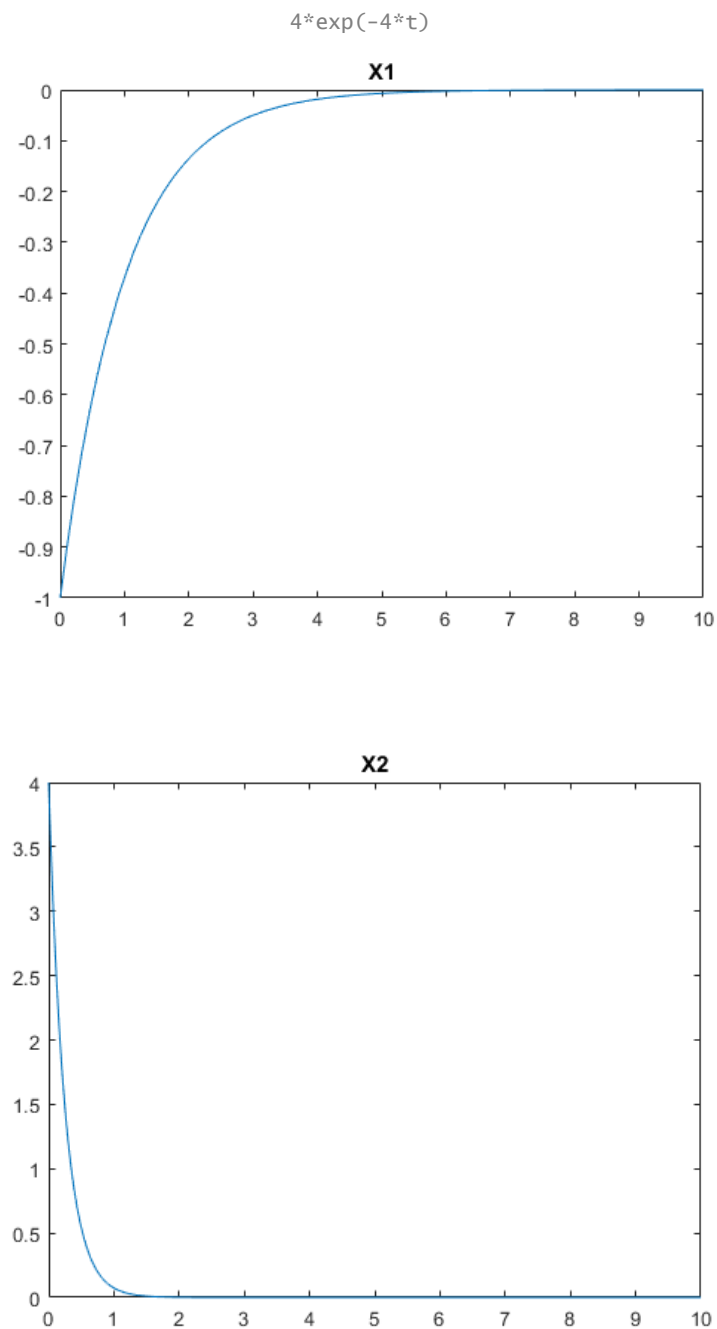



Figura 9a

Empleando el comando ***initial***:

```
%Capítulo 2 Ejemplo 1
%Solución ecuación de estado desacoplada
SYS.TimeUnit = 'seconds'
clear all
A = [-1 0; 0 -4];
B = [0 0]';
C = [0 0];
D = 0;
x0 = [-1 4]'
sys = ss(A,B,C,D)
[vec,val] = eig(A)
[out,t,state]=initial(sys,x0,10);
subplot (2,1,1), plot(t,state(:,1)),title 'x1'
subplot (2,1,2), plot (t,state(:,2)), title 'x2'
```

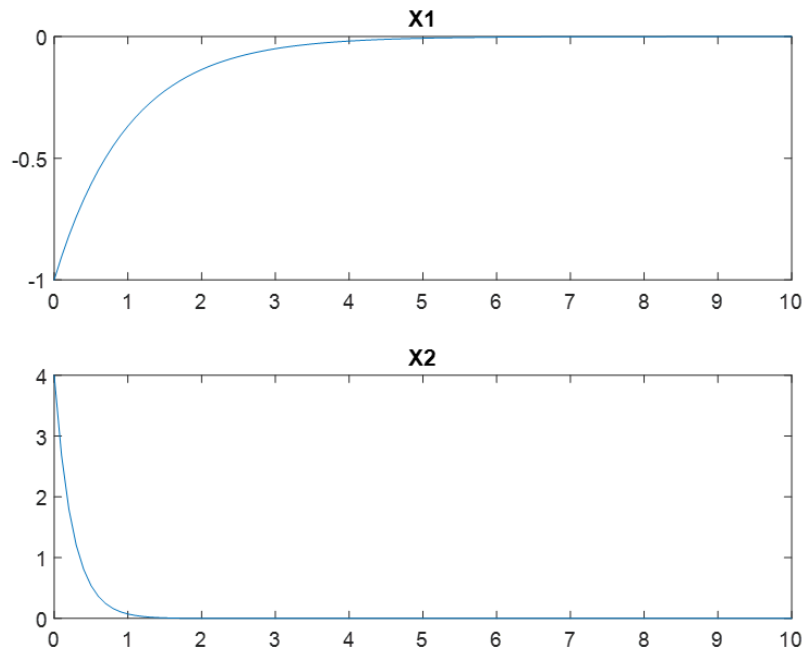


Figura 9b

Posteriormente se usará el comando **lsim**

En forma general para n valores propios, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, asumidos diferentes, la matriz exponencial es de la forma:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Y cada componente del vector de estado se evalúa independiente de las demás:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2(t) = x_2(0)e^{\lambda_2 t}$$

⋮

⋮

$$x_n(t) = x_n(0)e^{\lambda_n t}$$

Dependiendo de la ubicación de los valores propios en el plano complejo, las componentes del vector de estado pueden ser exponenciales decrecientes, exponenciales crecientes, senoidales de amplitud máxima constante, amortiguadas o crecientes.

Retratos de fase^{3 4}

El retrato de fase de un conjunto de ecuaciones diferenciales es una representación gráfica del conjunto de sus soluciones, con la variable t como parámetro. La gráfica se construye en el plano cartesiano y se describe la trayectoria de cada solución homogénea para diferentes conjuntos de condiciones iniciales.

El vector de estado $(x_1(t), x_2(t))'$ describe una trayectoria en el plano $x_1 - x_2$ a medida que el tiempo t varía desde $t = 0$. El plano cartesiano donde se grafica el plano de fase se denomina "Plano de fase" y las curvas paramétricas trazadas por las soluciones se denominan trayectorias.

³ <http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf>

⁴ <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/RepeatedEigenvalues.aspx>

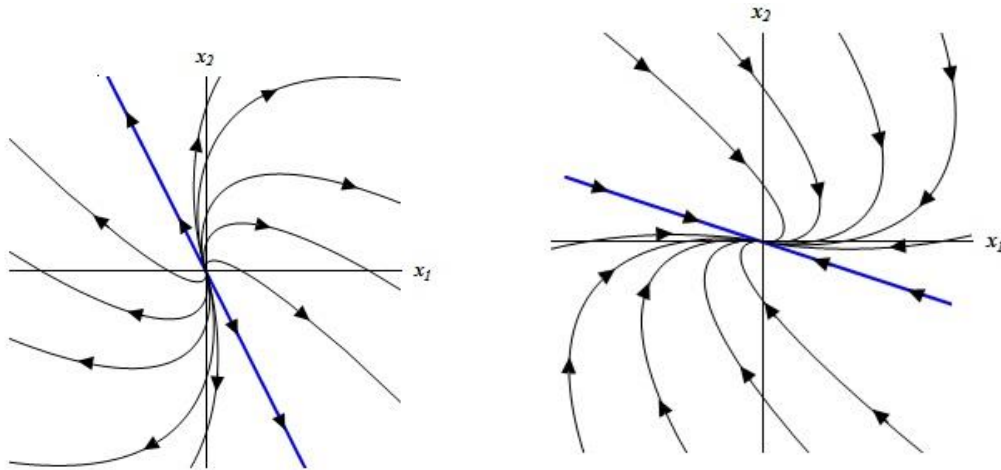


Figura 10 Retratos de fase

Las propiedades geométricas del retrato de fase están directamente relacionadas con las características algebraicas de los valores y vectores propios de la matriz A .

Existen formas y comportamientos diferentes dependiendo de la ubicación de los valores propios en el plano complejo, por ejemplo:

- Para un sistema lineal si $\det(A) \neq 0$, no existen valores propios nulos y sólo existe una solución.
- Si existe por lo menos un valor propio nulo, el $\det(A) = 0$ y existe un número infinito de soluciones.
- Para valores propios con parte real negativa el origen actúa como un sumidero (sink).
- Para valores propios con parte real positiva el origen actúa como una fuente (source).
- Las trayectorias son asintóticas a los vectores propios

Los retratos de fase se emplean para evaluar la estabilidad de un sistema.

Ejemplo 8 Retratos de fase empleando MATLAB

Valores propios reales negativos e iguales

```
A =
      x1  x2
x1  -2  -1
x2  -2  -3
```

Vectores propios:

0.7071	0.4472
-0.7071	0.8944

valores propios:

-1	0
0	-4

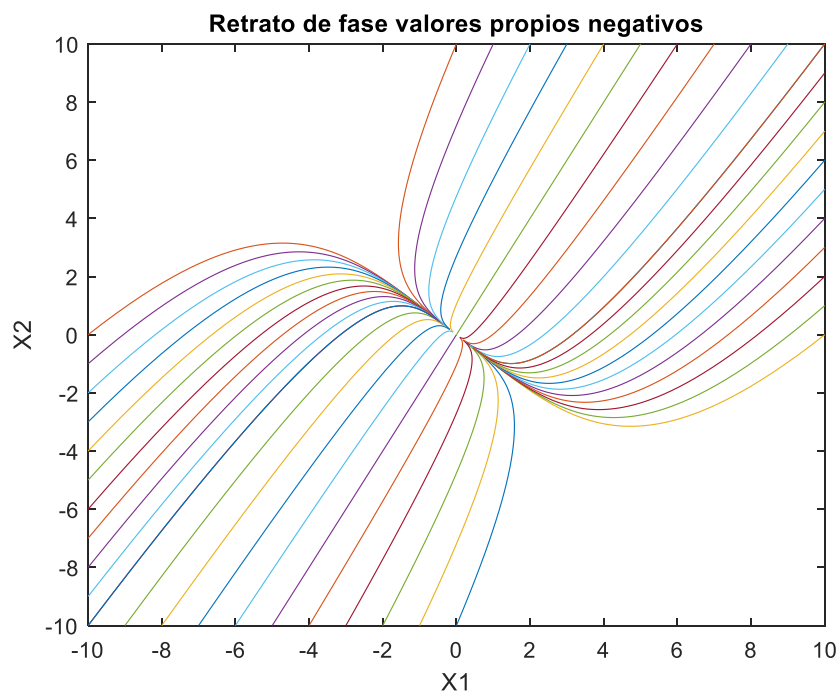


Figura 11a

Independiente de las condiciones iniciales, los estados tienden al origen (0 0).

Las trayectorias son asintóticas a los vectores propios y todos los conjuntos de valores propios que coincidan con los vectores propios siguen esa trayectoria hacia el origen.

```
%Capítulo 1 Ejemplo 8 Caso 1: valores propios reales negativos diferentes
%Retratos de fase
clear all
close all
A = [-2 -1; -2 -3];
```

```
B = [0 0]';
C = [0 0];
D = 0;
sys = ss(A,B,C,D)
[vec,val] = eig(A)
figure
%ensayo
K2 = 10
for i = 1:2;
    for n = 0:10;
        x0=[(-1)^(i)*(n) (-1)^(i)*K2];
        x01=[(-1)^(i)*K2 (-1)^(i)*(n)];
        [out,t,state] = initial(sys,x0,2);
        [out1,t,state1] = initial(sys,x01,t);
        plot(state(:,1),state(:,2));
        hold on;
        plot(state1(:,1),state1(:,2));
    end
    hold on
end
```

Valores propios reales positivos

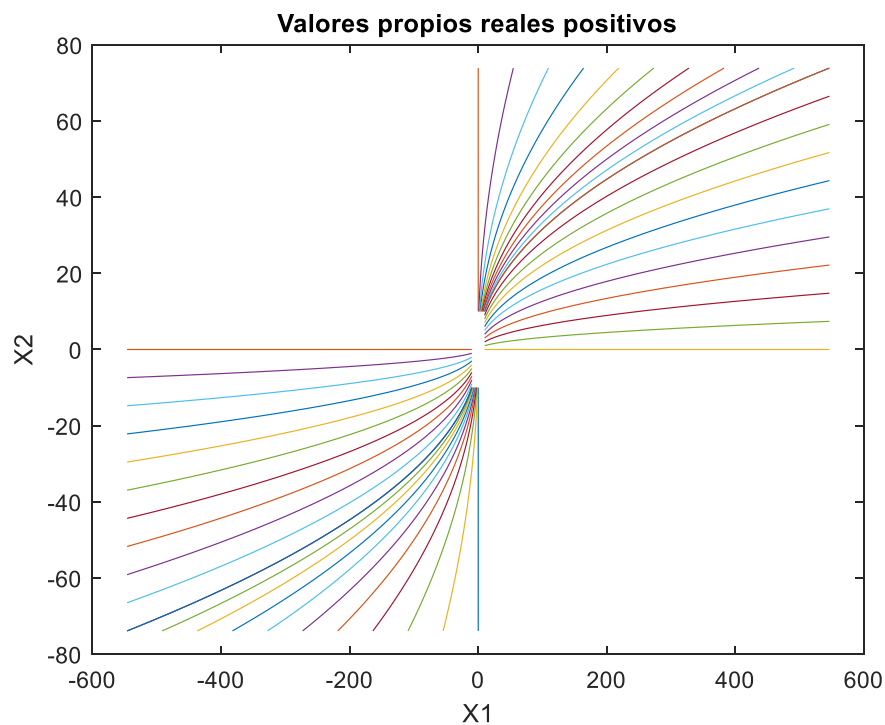


Figura 11b

A =

$$\begin{array}{cc} & x1 & x2 \\ x1 & 2 & 0 \\ x2 & 0 & 1 \end{array}$$

vec =

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

val =

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}$$

Forma compañera ("companion")

La representación en variables de estado se puede obtener a partir de la ecuación diferencial de orden n que describe a la modelo entrada – salida.

Dada una ecuación diferencial de orden n:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

Para el caso cuando no existen derivadas sobre la variable de entrada, se definen las variables tipo "fase", representadas por la letra q (no es carga eléctrica):

Las n-1 primeras derivadas se obtienen:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 ; \\ \dot{q}_2 &= q_3 ; \\ &\dots \\ \dot{q}_{n-1} &= q_n \end{aligned}$$

La derivada de q_n se obtiene a partir de la ecuación diferencial original:

$$\dot{q}_n = \frac{1}{a_n} (-a_{n-1} q_n - \dots - a_0 q_1 + b_0 u)$$

La ecuación de salida:

$$y = q_1$$

La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

La ecuación de salida:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \vec{q}$$

El conjunto de ecuaciones se puede representar por un diagrama de bloques de la forma:

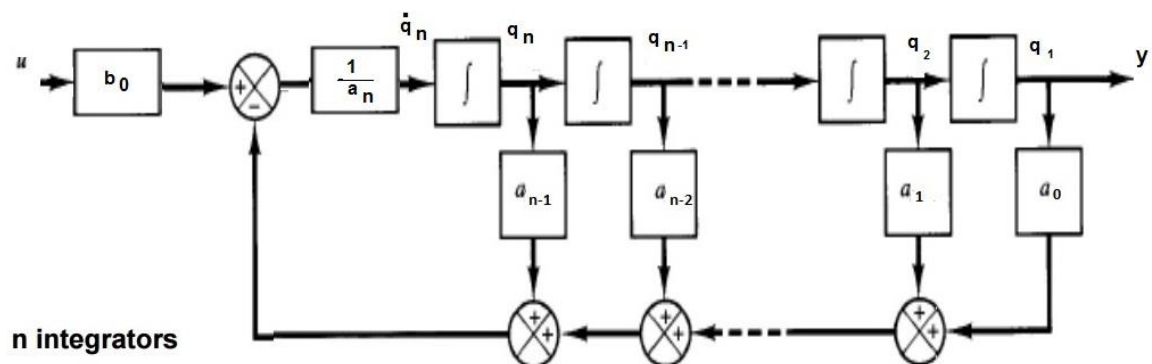


Figura 12⁵

Cuando se presentan derivadas de la variable de entrada se pueden construir representaciones similares.

Ejemplo 9.Cuál es la forma “companion” de la ecuación diferencial:

⁵ CHEN Chi-Tsong, *Linear Systems Theory and Design*. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 4u(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Graficar el diagrama de bloques

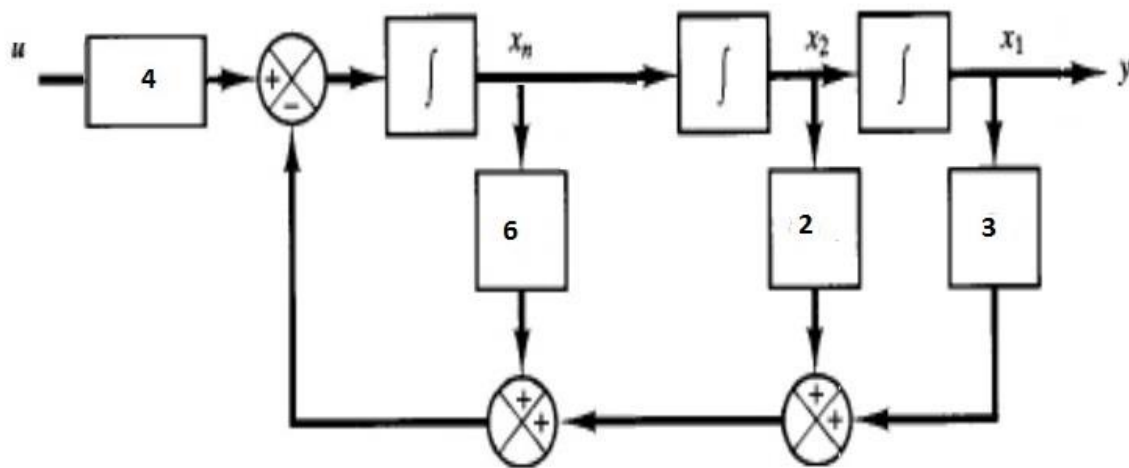


Figura 13

Existen otras estructuras de la forma “companion” para incluir casos cuando existen derivadas de la variable de entrada y acople directo entre entrada y salida (Matriz D diferente de cero)

Transformada de Laplace propiedades

1. Unicidad:

$$F(S) = \mathcal{L} \{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(t)\}$$

2. Linealidad:

Sean f_1 y f_2 dos funciones del tiempo transformables a Laplace; y c_1 y c_2 constantes arbitrarias, entonces:

$$\mathcal{L} \{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 \mathcal{L} \{f_1(t)\} + C_2 \mathcal{L} \{f_2(t)\}$$

3. Diferenciación:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = s \mathcal{L} \{f(t)\} - f(0^-)$$

En general:

$$\mathcal{L} \{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)} \mathcal{L} \{f(t)\} - s^{(n-1)} f(0^-) - \dots - s f^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$$

4. Integración:

Cuando no existen condiciones iniciales:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{f(t)\}$$

Si existen condiciones iniciales:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau + \underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau}_{\text{Constante}} \right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L} \{f(t)\} + \frac{1}{s} \{Constante\}$$

5. Corrimiento en el tiempo:

$$\mathcal{L} \{f(t - \tau)u(t - \tau)\} = e^{-s\tau} F(s)$$

Transformada de Laplace de funciones elementales

$f(t)$	$F(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
$\delta(t)$	1
1(t)	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}} \quad n \geq 1$
e^{-at} (a real o complejo)	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$ (a real o complejo)	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}} \quad n \geq 1$
$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
$\text{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$e^{-at} \text{sen} \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$ke^{-at} \cos \beta t + \frac{(b-ka)}{\beta} e^{-at} \text{sen} \beta t$	$\frac{ks+b}{(s+a)^2 + \beta^2}$
$2 K e^{-at} \cos (\beta t + \angle K)$	$\frac{K}{s+a-j\beta} + \frac{\bar{K}}{s+a+j\beta}$

Solución de la ecuación de estado, sistema lineal e invariante

Para el caso invariante la transformada de Laplace de la ecuación de estado 1 es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{\mathbf{X}}\} &= \mathcal{L}\{\mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} \mathbf{U}(t)\} \\ s \mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{X}(0) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s)\end{aligned}$$

Si la inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ existe se puede premultiplicar por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$:

$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{Respuesta debida al estado inicial}} + \underbrace{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\text{Respuesta debida a la entrada externa}}$	14
--	----

Ecuaciones algebraicas en la variable S . Una vez resueltas para hallar la respuesta en el dominio del tiempo se toma la transformada inversa de Laplace.

Si $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$, la matriz es no singular y la matriz inversa se obtiene como:

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \text{traspuesta de la matriz de cofactores de } (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= [\gamma_{ij}]^T \\ \gamma_{ij} &= (-1)^{i+j} \det M_{ij} \\ \det M_{ij} &\text{ es un escalar llamado el menor} \\ M_{ij} &\text{ se obtiene de la matriz } (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \text{ eliminando la fila } i \text{ y la columna } j\end{aligned}$$

La forma de la respuesta está determinada por las raíces de $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ o raíces de la ecuación característica.

Las dos soluciones, ecuaciones 3 y 7 están relacionadas: tomando la transformada inversa de $\mathbf{X}(s)$, ecuación 7, se obtiene la ecuación 3:

$$\mathbf{X}(t) = \underbrace{\Phi(t)\mathbf{X}(0)}_{\substack{\text{Respuesta no forzada} \\ (\text{Homogenea o natural o a entrada cero})}} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau}_{\text{Respuesta forzada o en estado cero}}$$

Comparando las expresiones para la respuesta a entrada cero en el tiempo y frecuencia se obtiene:

$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = L^{-1}\{\Phi(s)\}$	15
--	----

y la respuesta en estado cero es:

$\Phi(t) * BU(t) = \int_0^t e^{A(t-t')} BU(t') dt' = L^{-1}\{\Phi(s)BU(s)\}$	16
--	----

El producto $\Phi(s) \cdot BU(s)$ corresponde a la convolución de las dos funciones en el tiempo.

Ejemplo 10. Para la matriz A evaluar la matriz de transición de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

Los valores propios son:

$$\begin{aligned} \det |\lambda I - A| = 0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -6 \\ 1 & \lambda + 5 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\ &\Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

La matriz de transición de estados:

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s + 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s + 5 & -1 \\ 6 & s \end{bmatrix}^T = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s + 5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s + 5}{(s + 2)(s + 3)} & \frac{6}{(s + 2)(s + 3)} \\ \frac{-1}{(s + 2)(s + 3)} & \frac{s}{(s + 2)(s + 3)} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow e^{At} &= L^{-1}(sI - A)^{-1} = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{s + 2} - \frac{2}{s + 3} & \frac{6}{s + 2} - \frac{6}{s + 3} \\ -\frac{1}{s + 2} + \frac{1}{s + 3} & -\frac{2}{s + 2} + \frac{3}{s + 3} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow e^{At} &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los dos valores propios generan los dos modos de la respuesta a entrada cero: e^{-2t} y e^{-3t} .

Ejemplo 11. Empleando la transformada de Laplace evaluar la respuesta de:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [1 \quad 1 \quad 0] X$$

Debida al estado inicial $X(0) = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ y a un escalón unitario $1(t)$

La inversa de la matriz $(sI - A)$ es:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 0 & 2 \\ 0 & s - 1 & 0 \\ -1 & 0 & s - 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s-1)(s-3) + 2(s-1)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & 0 & s-1 \\ 0 & s(s-3) + 2 & 0 \\ -2(s-1) & 0 & s(s-1) \end{bmatrix}^T$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s-3) & 0 & -2(s-1) \\ 0 & (s-2)(s-1) & 0 \\ (s-1) & 0 & s(s-1) \end{bmatrix}$$

La inversa es la matriz de transición de estados:

phi =

$$\begin{bmatrix} 2*exp(t) - exp(2*t), & 0, & 2*exp(t) - 2*exp(2*t) \\ 0, & exp(t), & 0 \\ exp(2*t) - exp(t), & 0, & 2*exp(2*t) - exp(t) \end{bmatrix}$$

Respuesta a entrada cero:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ exp(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{CRECIENTE CON EL TIEMPO}$$

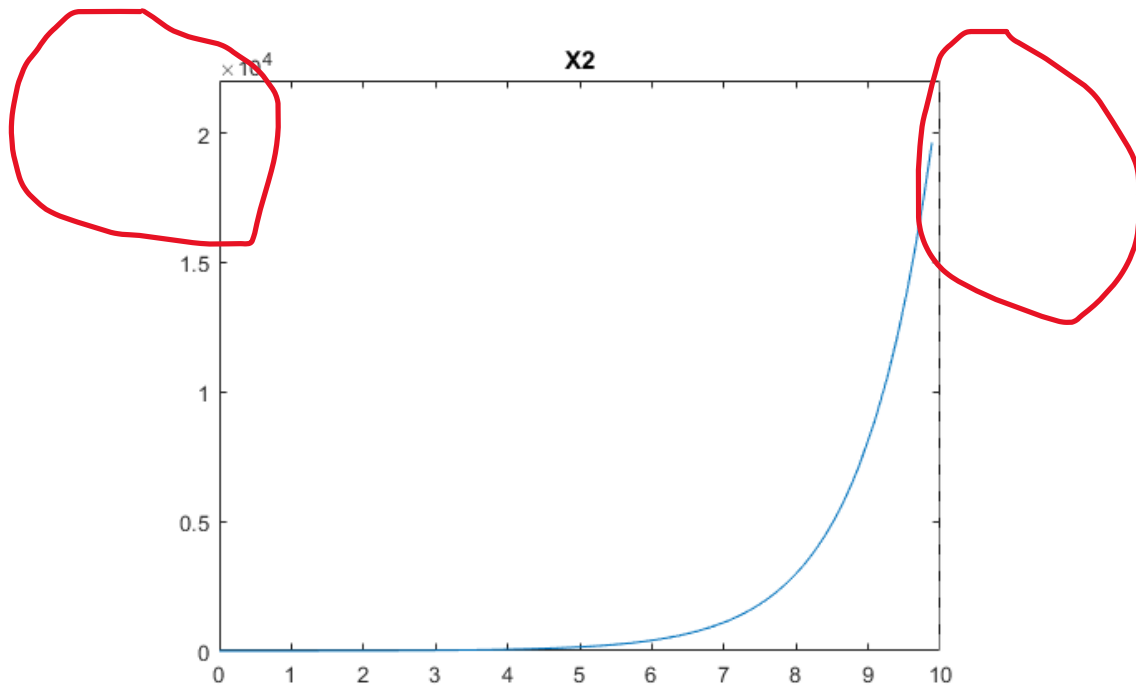


Figura 13a

También se puede obtener empleando initial:

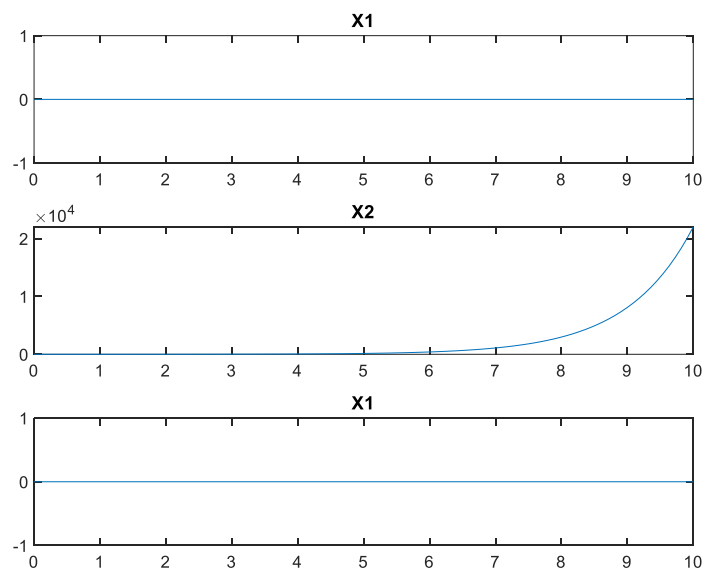


Figura 13b

Respuesta en estado cero, para entrada paso unitaria

Se debe encontrar la integral entre 0 y t de

$$\frac{2 \cdot \exp(t') - 2 \cdot \exp(2 \cdot t')}{0} - \frac{2 \cdot \exp(2 \cdot t') - \exp(t')}{0}$$

Que es:

$$\frac{-\exp(t') \cdot (\exp(t') - 2)}{0} \quad \text{Se debe evaluar entre 0 y t}$$

$$\frac{\exp(t') \cdot (\exp(t') - 1)}{0}$$

Evaluando manualmente la integral:

$$\begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} - 1 \\ 0 \\ e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

La respuesta complete es la suma de las dos componentes:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} - 1 \\ 0 \\ e^{2t} - e^t \end{pmatrix}$$

Sew puede resolver directamente en Laplace:

$$X(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{0}{s-1} \end{bmatrix}}_{\text{Respuesta a entrada cero}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{s(s-1)(s-2)} \\ 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}}_{\text{Respuesta a estado cero}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{s(s-1)(s-2)} \\ \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix}}_{\text{Respuesta Total}}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \\ \frac{1}{s-1} \\ -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \end{bmatrix} \rightarrow X(t) = \begin{bmatrix} -1 + 2e^t - e^{2t} \\ e^t \\ -e^t + e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) = (-1 + 3e^t - e^{2t}) \mathbf{1}(t)$$

Debido a los términos e^t y e^{2t} la respuesta es creciente con el tiempo: el sistema es inestable.

Ejemplo 12. Resolver el modelo de estado del circuito de segundo orden. Los valores son: $R_1 = 2\Omega$; $L_1 = 1H$; $C_1 = 0,5F$

Condición inicial $i_{L1}(0) = 0,5$; $v_{C1}(0) = 1$

- Graficar el voltaje de salida (v_C) para entrada cero.
- Graficar la respuesta en estado cero para entrada paso.
- Graficar la respuesta completa.
- Repetir el análisis si emplean las variables (q, ϕ), la variable de salida es el voltaje sobre el condensador

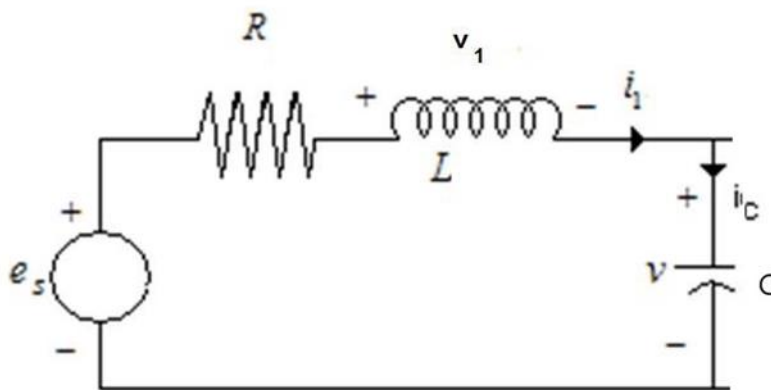


Figura 14a

El modelo de estado es:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} e_s$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} v_c \\ i_L \end{pmatrix}$$

definición de las matrices de sistema y estado inicial:

Continuous-time state-space model.

sys =

A =

	x1	x2
x1	0	2
x2	-1	-1

B =

	u1
x1	0
x2	1

C =

	x1	x2
y1	1	0

D =

	u1
y1	0

x0 =

	1.0000
	0.5000

Evaluación respuesta a entrada cero, empleando *initial*:

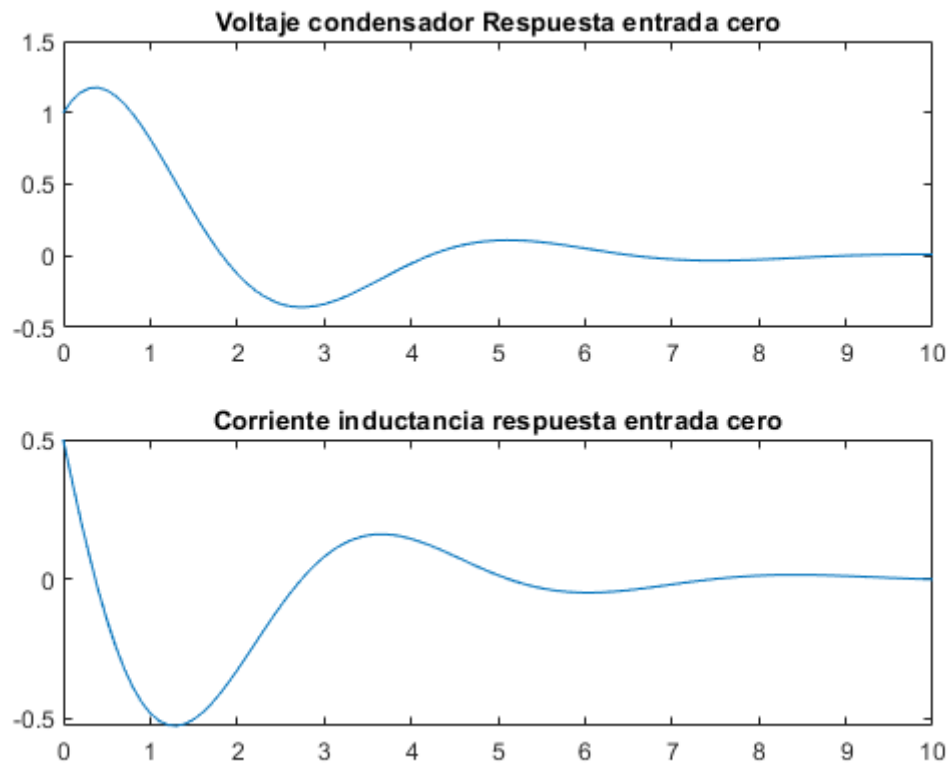


Figura 14b

No es necesario graficar la salida y , porque es igual al voltaje en el condensador.

Evaluación de la respuesta en estado cero, para entrada paso; empleando *step*

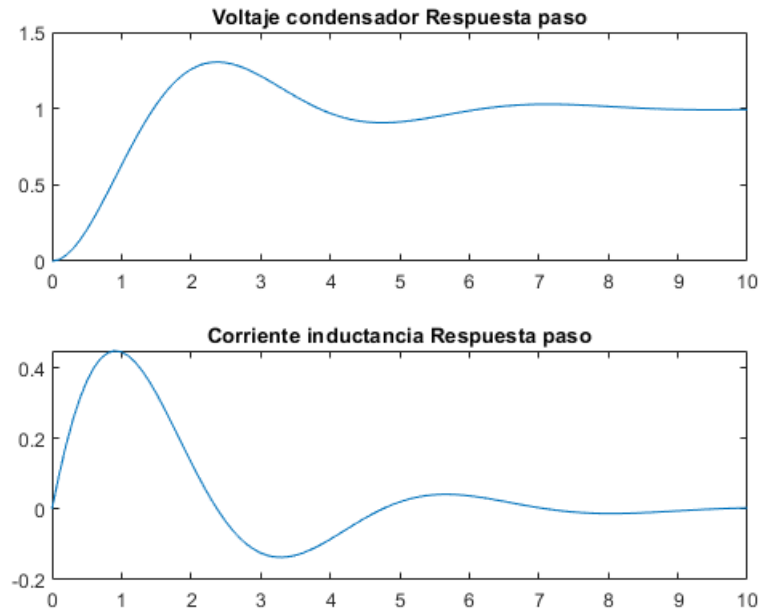


Figura 14c

Respuesta completa sumando las dos respuestas entrada cero + estado cero:

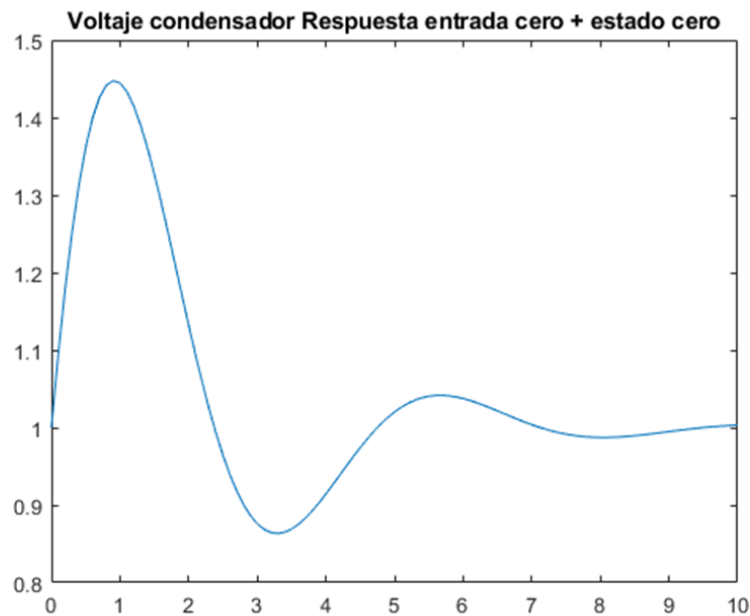


Figura 14d

Evaluación de la respuesta completa, empleando *lsim*

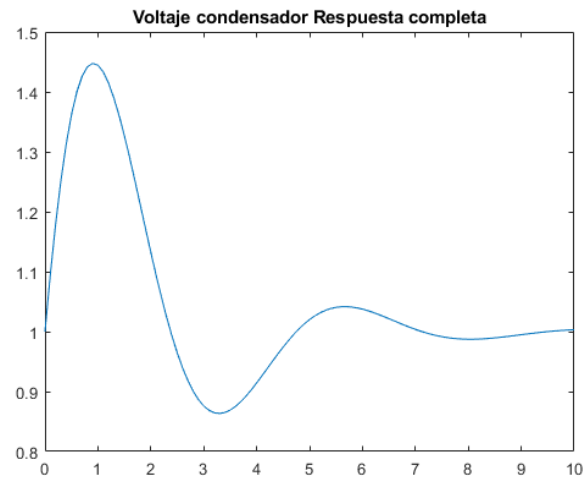


Figura 14e

%Sistemas Dinamicos- Capitulo 1 Ejemplo 12

```
clear all
close all
C=0.5; L=1;R=1;
A = [0 1/C ; -1/L -R/L];
B = [0 1/L]';
C = [1 0 ];
D = 0;
x0 = [1 0.5]'
sys = ss(A,B,C,D)
%Solucion a entrada cero Solucion initial
[out,t,state]=initial(sys,x0,10);
subplot (2,1,1), plot(t,state(:,1)),title 'Voltaje condensador Respuesta entrada cero'
subplot (2,1,2), plot (t,state(:,2)), title 'Corriente inductancia respuesta entrada cero'
%Solucion entrada paso
[out1,t,state1]=step(sys,10);
figure
subplot (2,1,1), plot(t,state1(:,1)),title 'Voltaje condensador Respuesta paso'
subplot (2,1,2), plot (t,state1(:,2)), title 'Corriente inductancia Respuesta paso'
%respuesta completa
figure
plot(t,out+out1),title 'Voltaje condensador Respuesta entrada cero + estado cero'
%respuesta completa usando lsim
unistep =ones(size(t));
[out2,t,state2]=lsim(sys,unistep,t,x0);figure
plot(t,out2),title 'Voltaje condensador Respuesta completa'
```

TEOREMA DE CONVOLUCION

Por la propiedad de descomposición, se sabe que la respuesta total del sistema es debida al estado inicial en $t_0 = 0$ y a la entrada $u[0, \infty)$. La respuesta en estado cero de un sistema lineal se puede obtener a partir de la descripción Entrada-Salida.

En un sistema lineal, causal y relajado en t_0 la respuesta $y(t)$ para cualquier señal de excitación se puede encontrar empleando la integral de convolución:

$y(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) u(\tau) d\tau$	17
--	----

$h(T)$ es la respuesta impulso del sistema, en estado cero.

Si el sistema es invariante con el tiempo la entrada u aplicada en el instante $(t_0 + T)$ segundos genera la salida y desplazada $(t_0 + T)$ segundos. El mismo argumento aplica para la respuesta a entrada cero respecto al corrimiento del instante inicial.

En otras palabras, si la entrada y el estado inicial conservan su forma de onda, no importa en qué tiempo se apliquen, la forma de onda de la salida y será igual, y

$$h(t, \tau) = h(t+T, \tau+T) = h(t-\tau, \tau-\tau) = h(t-\tau)$$

aunque las funciones son diferentes, se usa el mismo símbolo.

Como el sistema esta relajado en t_0 se puede elegir $t_0 = 0$

$\int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) u(t - \tau) d\tau$	18
---	----

Si el sistema es variante con el tiempo h es función de 2 variables: el tiempo de aplicación de la excitación τ y el tiempo de observación de la respuesta t . En el sistema invariante solo es función de $(t-\tau)$ el tiempo transcurrido desde la aplicación de la excitación.

La integral de convolución es conmutable:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t u(t - \tau)h(\tau)d\tau =$$

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

La respuesta es el área bajo la curva producto entre la entrada y la respuesta impulso desplazada

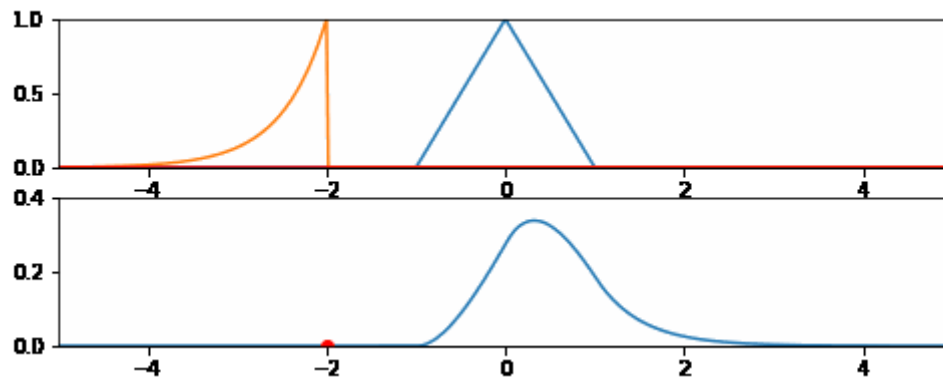


Figura 15: Animación convolución⁶

Si el sistema es multivariable con (p) entradas y (q) salidas la integral de convolución se extiende a:

$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau$	19a
--	-----

$H(t - \tau) = \begin{pmatrix} h_{11}(t - \tau) & h_{12}(t - \tau) & \dots & h_{1p}(t - \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{q1}(t - \tau) & \vdots & \vdots & h_{qp}(t - \tau) \end{pmatrix}$	19b
--	-----

donde $h_{ij}(t, \tau)$ es la respuesta impulso en el tiempo t medida en el terminal de salida i debido a un impulso aplicado en el instante τ en la entrada j , con todas las demás entradas en cero.

⁶ Tomado de: <https://stackoverflow.com/questions/70761535/convolution-integral-export-as-animation-in-jupyter>

Convolución en el plano s

Para el caso SISO al aplicar la definición de transformada de Laplace a la ecuación de convolución, ecuación 18, se obtiene:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \right] e^{-st} dt$$

Como el sistema es causal $h(t-\tau) \equiv 0 \quad \forall t < \tau$: se puede cambiar el límite superior de la integral interna a ∞ . Intercambiando el orden de integración:

$$Y(s) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} h(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right] u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Haciendo un cambio de variable $\lambda = t - \tau$

$$Y(s) = \int_0^{\infty} \left[\int_{-\tau}^{\infty} h(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right] u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Como el sistema es causal para $\lambda < 0$ ($t < \tau$) la respuesta impulso $h(\lambda) = 0$ y el límite inferior de la integral interna se puede cambiar por 0.

$$Y(s) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} h(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right] u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Como la integral interna es función únicamente de λ y la externa de τ :

$$Y(s) = \left[\int_0^{\infty} h(\lambda) e^{-\lambda s} d\lambda \right] \left[\int_0^{\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right]$$

Que por la definición de la transformada de Laplace corresponde a:

$Y(s) _{\substack{\text{estado} \\ \text{cero}}} = H(s)U(s)$	20
--	----

Hacer la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar las transformadas de las funciones en el dominio s.

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA

Todo sistema lineal e invariante con el tiempo y en estado cero se puede describir por su función de transferencia.

La ecuación integro diferencial entrada – salida con condiciones iniciales nulas se puede transformar a Laplace:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s^1 + b_0)U(s)$$

$H(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} \Big _{\text{estado cero}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$	21
---	----

Cuando $U(s) = 1$, transformada de la función impulso, $H(s) = Y(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta impulso:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

Definición 1.

Una función **racional** de s es el cociente de dos polinomios de s con coeficientes reales.

$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$	22
--	----

Definición 2.

Una función racional es **propia** si el grado del polinomio del numerador (m) es igual o menor que el grado del denominador (n): $m \leq n$.

Definición 3.

Una función racional es **estrictamente propia** si el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador: $m < n$.

Definición 4⁷:

⁷ Definiciones tomadas de referencia 1

Una función racional es irreducible si y solo si no hay términos comunes entre los polinomios del numerador y denominador, excepto una constante.

Por medio de la factorización toda función racional se puede llevar a su forma irreducible. El grado de una función irreducible es el grado del denominador

Definición 5

Polos: valores de s para los cuales la función $F(s)$ es indeterminada, raíces de $D(s)=0$

Ceros: valores de s para los cuales la función $F(s)$ es nula. Raíces de $N(s) = 0$

Los polos y ceros pueden estar ubicados en cualquier parte del plano complejo, incluyendo el origen y en el infinito.

MATLAB:

Comando **tf** : Create tf objects representing continuous-time or discrete-time transfer functions in polynomial form.

Comando **zpk**: Create zpk objects representing continuous-time or discrete-time transfer functions in zero-pole-gain (factorized) form.

Ejemplo 13. Obtener el diagrama de polos y ceros de la función:

$$F(s) = K \frac{(s + 1)(s + 2)}{[(s + 1)^2 + 1](s + 3)}$$

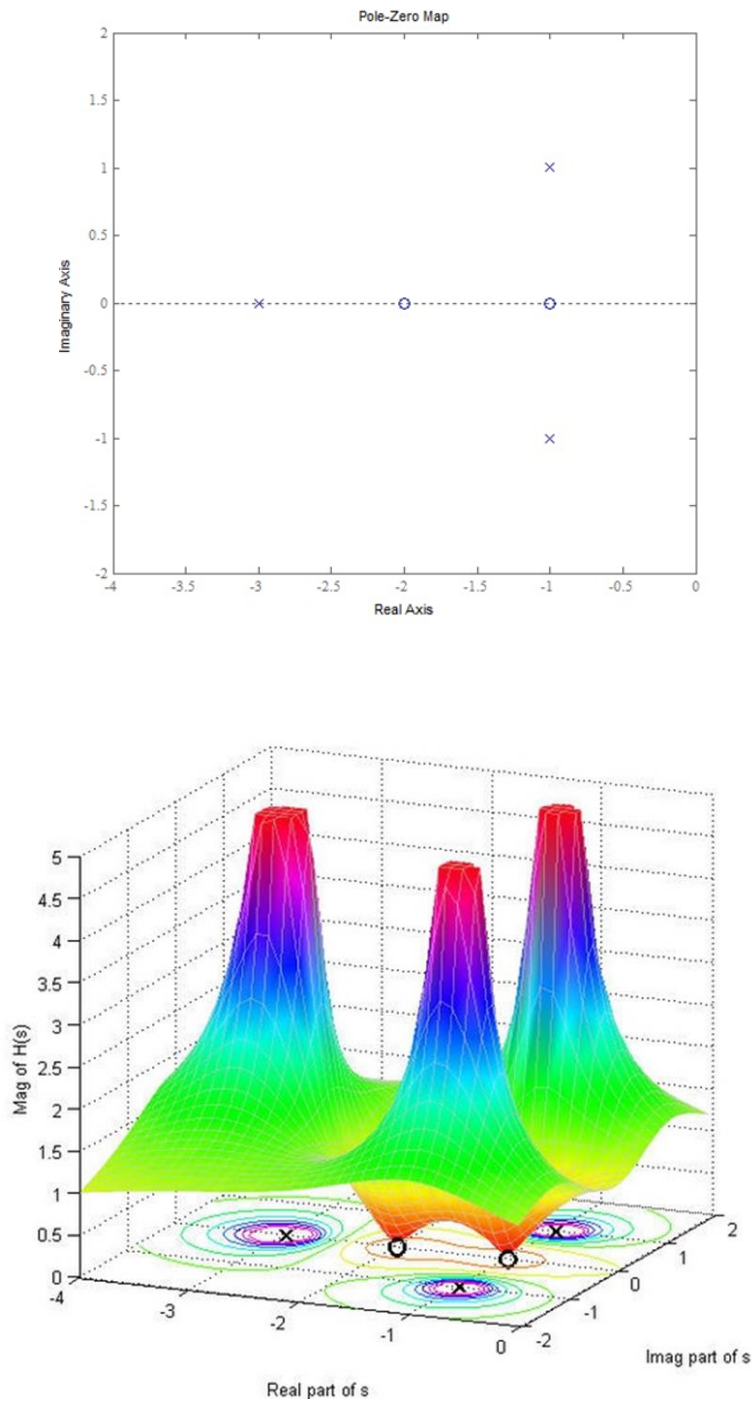


Figura 16 Diagramas de polos y ceros

Función de transferencia y respuesta en estado cero

A partir de la función de transferencia y con la transformada de Laplace de la señal de excitación se puede evaluar la respuesta del sistema, en estado cero, ecuación 20

$$Y_{\text{estado}}(s) = H(s)U(s)$$

cero

Gráficamente se puede resumir la relación entre los polos de $Y(s)$ y la forma de la respuesta $y(t)$ en el dominio del tiempo: (todos los polos de $Y(s)$ se asumen sencillos)

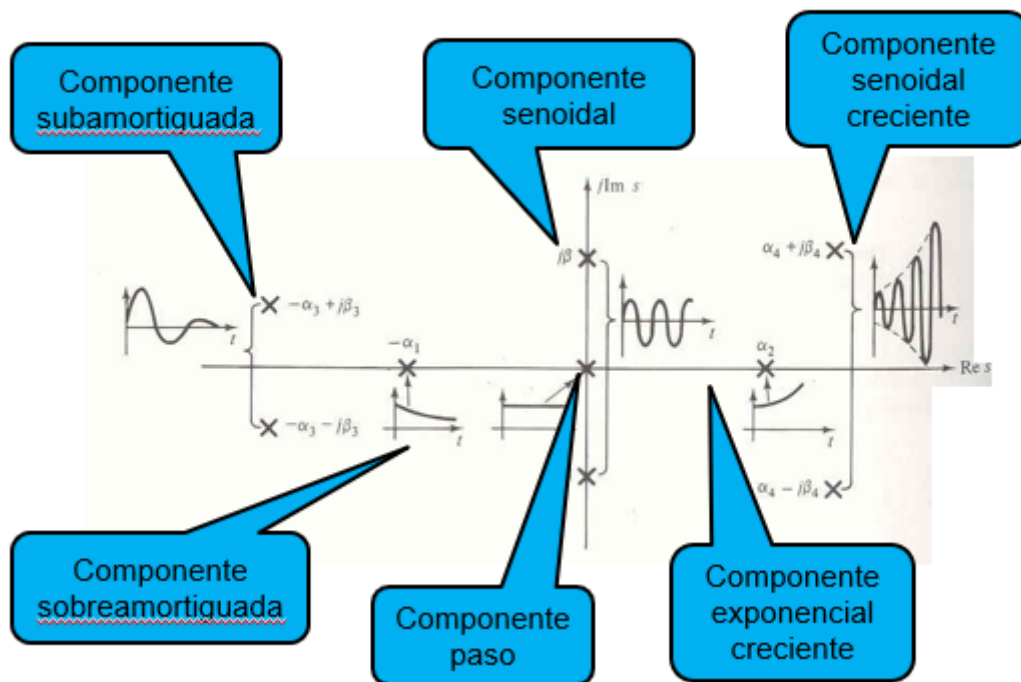


Figura 17 Relación polos y componentes en el tiempo

La función de transferencia NO permite evaluar la respuesta para entrada cero: para evaluar $H(s)$ todas las condiciones iniciales se asumieron nulas.

Para evaluar $y(t)$ es necesario emplear la transformada inversa de Laplace y la expansión en fracciones parciales de Heaviside.

$$y(t)|_{\text{estado}} = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

cero

Cuando hay polos repetidos o coincidencia entre frecuencias críticas de la función de sistema $H(s)$ y de la excitación $Y(s)$ se producen grandes modificaciones en la respuesta en el dominio del tiempo $y(t)$. Su análisis esta más allá de los objetivos del curso.

De Estado a Función de transferencia

La función de transferencia en el plano s también se puede obtener a partir de las matrices **A**, **B**, **C**, y **D**:

De la ecuación 7 la respuesta para estado cero, $\mathbf{X}(0) = 0$, es:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$	23
---	----

Para el caso SISO:

$H(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$	24
---	----

Para sistemas multivariable con (p) entradas y (q) salidas se debe evaluar una matriz de funciones de transferencia **H(s)** de orden $q \times p$:

$H(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]$	25
---	----

Para sistemas SISO causales se obtiene una función propia. Para sistemas MIMO con p entradas y q salidas, se obtiene una matriz de funciones de transferencia de orden $(q \times p)$ y cada uno de los elementos de la matriz es una función propia.

Definición 6:

Un sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia propia e irreducible $G(s)$, si el grado de esta es igual al número de variables de estado del sistema.

Como la función de transferencia del sistema está dada por:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

y si el sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia, la ecuación $\det(sI - A) = 0$ determina los polos de la función de transferencia.

La solución de $|\lambda I - A| = 0$ es igual a la solución de $|sI - A| = 0$: cuando el sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia todos los valores propios de la matriz A son polos de G(s).

Ejemplo 14. Para las dos descripciones de estado del Ejemplo 5 (página 23) evaluar las funciones de transferencia y comparar.

Como las dos descripciones corresponden al mismo sistema, la descripción de Entrada – Salida debe ser la misma. Evaluando la función de transferencia en cada caso:

$$H(s) = \frac{V_{R_2}(s)}{E_s(s)} = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

Para el primer modelo, con variables de estado corrientes y voltaje:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

$$y = v_{R_2} = i_2 R_2 = (0 \ 0 \ R_2) \begin{pmatrix} v_c \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & s + \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & 0 & s + \frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s \left[\left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) \right] + \frac{1}{L_1 C} \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_2 C} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right)} \times$$

$$\begin{pmatrix} \left(s + \frac{R_1}{L_1}\right)\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) & -\frac{1}{L_1}\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) & \frac{1}{L_2}\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) \\ \frac{1}{C}\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) & s\left(s + \frac{R_2}{L_2}\right) + \frac{1}{L_2 C} & \frac{1}{L_2 C} \\ -\frac{1}{C}\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) & \frac{1}{L_1 C} & s\left(s + \frac{R_1}{L_1}\right) + \frac{1}{L_1 C} \end{pmatrix}^T$$

$$H(s) = (0 \ 0 \ R_2)(sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{\frac{R_2}{L_1 L_2 C}}{s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right) + s \left(\frac{R_1 R_2}{L_1 C} + \frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{L_2 C}\right) + \frac{R_1 + R_2}{L_2 L_1 C}}$$

A partir del segundo conjunto de ecuaciones de estado se obtiene la misma función de transferencia:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_c \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{1}{C} & 0 & s + \frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{s \left[\left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) \right] + \frac{1}{L_1 C} \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_2 C} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right)}$$

$$\times \begin{pmatrix} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) & -\frac{1}{C} \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) & \frac{1}{C} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) \\ \frac{1}{L_1} \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) & s \left(s + \frac{R_2}{L_2} \right) + \frac{1}{L_2 C} & \frac{1}{L_1 C} \\ -\frac{1}{L_2} \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) & \frac{1}{L_2 C} & s \left(s + \frac{R_1}{L_1} \right) + \frac{1}{L_1 C} \end{pmatrix}^T$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{R_2}{L_2} \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{\frac{R_2}{L_1 L_2 C}}{s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) + s \left(\frac{R_1 R_2}{L_1 C} + \frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{L_2 C} \right) + \frac{R_1 + R_2}{L_2 L_1 C}}$$

Obviamente se llega a la misma $G(s)$ empleando análisis directo en el plano s .
Función de transferencia racional y estrictamente propia.

Empleando MATLAB

Variables de estado iniciales (corriente, voltaje)

Matriz A

$$\begin{bmatrix} 0, & 1/C, & -1/C \\ -1/L1, & -R1/L1, & 0 \\ 1/L2, & 0, & -R2/L2 \end{bmatrix}$$

B

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/L1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

Cm

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & R2 \end{bmatrix} =$$

$(sI-A)=$

$$\begin{bmatrix} s, & -1/C, & 1/C \\ 1/L1, & s + R1/L1, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/L_2, & 0, & s & + & R_2/L_2 \end{bmatrix}$$

Función de transferencia:

$$R_2/(R_1 + R_2 + L_1*s + L_2*s + C*L_1*L_2*s^3 + C*L_1*R_2*s^2 + C*L_2*R_1*s^2 + C*R_1*R_2*s)$$

Representación de estado respecto a las variables (flujo, carga)

$$\begin{matrix} A_{new} \\ [0, & & 1/L_1, & & -1/L_2] \\ [-1/C, & & -R_1/L_1, & & 0] \\ [& 1/C, & & & 0, & -R_2/L_2] \\ B_{new} & & & & & = \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{new} =$$

$$[0, & & 0, & & R_2/L_2]$$

Nueva (sI-A)=

$$\begin{bmatrix} s, & & -1/L_1, & & 1/L_2 \\ 1/C, & s & + & R_1/L_1, & 0 \\ -1/C, & & 0, & s & + & R_2/L_2 \end{bmatrix}$$

Nueva función de transferencia:

$$R_2/(R_1 + R_2 + L_1*s + L_2*s + C*L_1*L_2*s^3 + C*L_1*R_2*s^2 + C*L_2*R_1*s^2 + C*R_1*R_2*s)$$

Sólo existe una representación entrada – salida: la respuesta impulso y la función de transferencia son únicas.

%Sistemas Dinamicos- Capitulo 1 Ejemplo 14

```
clear all
syms t s C L1 L2 R1 R2
A = [0 1/C -1/C ; -1/L1 -R1/L1 0; 1/L2 0 -R2/L2]
B = [0; 1/L1; 0]
```

```

Cm = [0 0 R2 ]
umat = eye(3)
nmat =[s*umat-A]
nmatinv=inv(nmat);
gs =Cm*nmatinv*B
% Nueva representación
Anew = [0 1/L1 -1/L2 ; -1/C -R1/L1 0 ; 1/C 0 -R2/L2]
Bnew = [0; 1; 0]
Cnew = [0 0 R2/L2 ]
nmat1 =[s*umat-Anew]
nmatinv1=inv(nmat1);
gs1 =Cnew*nmatinv1*Bnew

```

Cuando el sistema no está completamente caracterizado hay valores propios que no son polos de $G(s)$: hay cancelación polo –cero, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 15. (Opcional). Para el circuito puente de la Figura 15 plantear el modelo en variables de estado, la variable de salida es V_{C2}

- Evaluar la función de transferencia $G(s)$.
- ¿Qué pasa cuando los dos condensadores son iguales?
- Repetir los pasos anteriores si la variable de salida es el voltaje entre los puntos (1) y (2).

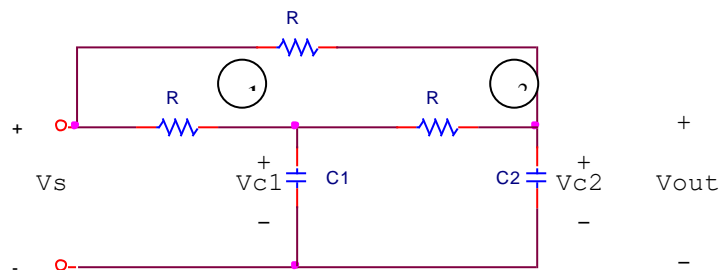


Figura 18

Variables de estado: V_{C1} y V_{C2}

a. KCL para el nodo 1:

$$\frac{V_S - V_{C1}}{R} = I_{C1} + \frac{V_{C1} - V_{C2}}{R}$$

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V_S}{R} - \frac{V_{C1}}{R} - \frac{V_{C1}}{R} + \frac{V_{C2}}{R}$$

$$\dot{V}_{C1} = -\frac{2}{RC_1}V_{C1} + \frac{1}{RC_1}V_{C2} + \frac{1}{RC_1}V_S$$

KCL para el nodo 2:

$$\frac{V_S - V_{C2}}{R} + \frac{V_{C1} - V_{C2}}{R} = I_{C2}$$

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{V_S}{R} + \frac{V_{C1}}{R} - \frac{2V_{C2}}{R}$$

$$\dot{V}_{C2} = \frac{1}{RC_2}V_{C1} - \frac{2}{RC_2}V_{C2} + \frac{1}{RC_2}V_S$$

Salida: $V_{OUTA} = V_{C2}$

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{C1} \\ \dot{V}_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} & \frac{-2}{RC_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{pmatrix} V_S$$

$$y = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \frac{(0 \quad 1)}{s^2 + \left(\frac{2}{RC_1} - \frac{2}{RC_2}\right)s + \frac{3}{(RC_1)(RC_2)}} \begin{pmatrix} s + \frac{2}{RC_2} & \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} & s + \frac{2}{RC_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{pmatrix}$$

$$G(s) = \frac{\frac{s}{RC_2} + \frac{3}{(RC_1)(RC_2)}}{s^2 + \left(\frac{2}{RC_1} - \frac{2}{RC_2}\right)s + \frac{3}{(RC_1)(RC_2)}}$$

b. Si $C_1 = C_2 = C$

$$G(s) = \frac{\frac{s}{RC} + \frac{3}{(RC)^2}}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{3}{(RC)^2}} = \frac{1}{RC} \frac{\left[s + \frac{3}{RC}\right]}{\left(s + \frac{3}{RC}\right)\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Hay cancelación polo- cero: la función de transferencia solo incluye un polo en $s = \frac{-1}{RC}$, se comporta como un circuito de primer orden.

c. Cuando la salida es el voltaje V_{12} la ecuación de salida es:

$$\begin{aligned} v_{OUTB} &= v_{C1} - v_{C2} \\ y &= (1 \quad -1) \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es nulo para $C_1 = C_2$ y $0 < R < \infty$.

La nueva función de transferencia es

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{(1 \quad -1)}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{3}{(RC)^2}} \begin{pmatrix} s + \frac{2}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & s + \frac{2}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} \\ G(s) &= \frac{1}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{3}{(RC)^2}} \left(s + \frac{1}{RC} \quad -s - \frac{1}{RC} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Obviamente no es necesario encontrar la función de transferencia: cuando $C_1 = C_2$ y $0 < R < \infty$ el circuito puente esta balanceado y $v_{OUTB} = 0$.

Respuesta en frecuencia

La respuesta de un sistema lineal e invariante con el tiempo, con estado inicial cero, a una señal senoidal de amplitud fija y frecuencia angular ω se denomina "Respuesta en frecuencia"; la cual:

- Contiene toda la información para calcular la respuesta en estado cero para cualquier señal seno de entrada.
- Se puede obtener en el laboratorio.
- Básica para el diseño de circuitos electrónicos y control.

La función de sistema en el plano s es la relación entre la transformada de Laplace de la respuesta en estado cero y la transformada de la señal de entrada

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{ \text{Respuesta en estado cero} \}}{\mathcal{L}\{ \text{Entrada} \}} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Funcional racional de s , propia. Se asumen polinomios coprimos.

Se asume lo siguiente:

- El sistema es Lineal Invariante con el Tiempo.
- Todos los polos de $H(s)$ están en la parte izquierda del plano complejo (parte real negativa)
- No hay energía inicial almacenada.
- Los polos del sistema NO coinciden con polos de la excitación.
- La excitación es una señal seno de amplitud constante y frecuencia angular ω .
- Se espera hasta que cualquier termino asociado con la parte real de los polos, de la forma $\beta e^{\sigma t}$ desaparezca. Este es el estado estable de la respuesta.

En este caso la respuesta $y(t)$, una vez que se alcanza el estado estable final es una señal seno de diferente amplitud y fase, pero de la misma frecuencia:

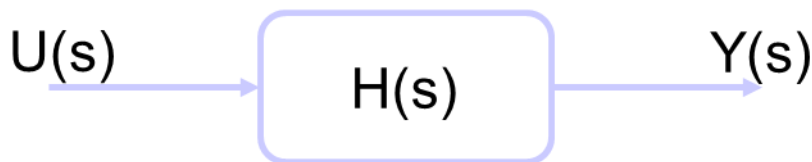


Figura 19

La señal de entrada:

$$U(s) = \mathcal{L}\{A_0 \sin(\omega t + 0)\} = \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

La señal de salida, una vez se alcanza el estado estable los términos asociados con $e^{\sigma t}$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{A_{01}\text{sen}(\omega t + \varphi)\}$$

Para analizar sistemas LIT en estado cero bajo excitación senoidal la variable $s = \sigma + j\omega$ se reemplaza por $s = j\omega$,

Bajo estas condiciones la función de sistema se obtiene a partir de $H(s)$ como:

$$H(s)|_{s=j\omega}$$

Por lo tanto, $H(s)$ es un complejo escrito en representación rectangular como:

$H(s) _{s=j\omega} = \text{Re}[H(j\omega)] + j\text{Im}[H(j\omega)]$	24
--	----

También se puede escribir en notación polar como:

$H(j\omega) = H(j\omega) e^{j\angle H(j\omega)}$	25
---	----

La respuesta en frecuencia es graficar como va cambiando la función compleja $H(j\omega)$ cuando la frecuencia angular se varia en un rango muy grande, por ejemplo, de $(0 \text{ a } \infty)$

Cuando se grafican las componentes Real e Imaginaria vs frecuencia, equivalente a graficar el vector $H(j\omega)$, magnitud y ángulo, se obtiene el diagrama de Nyquist.

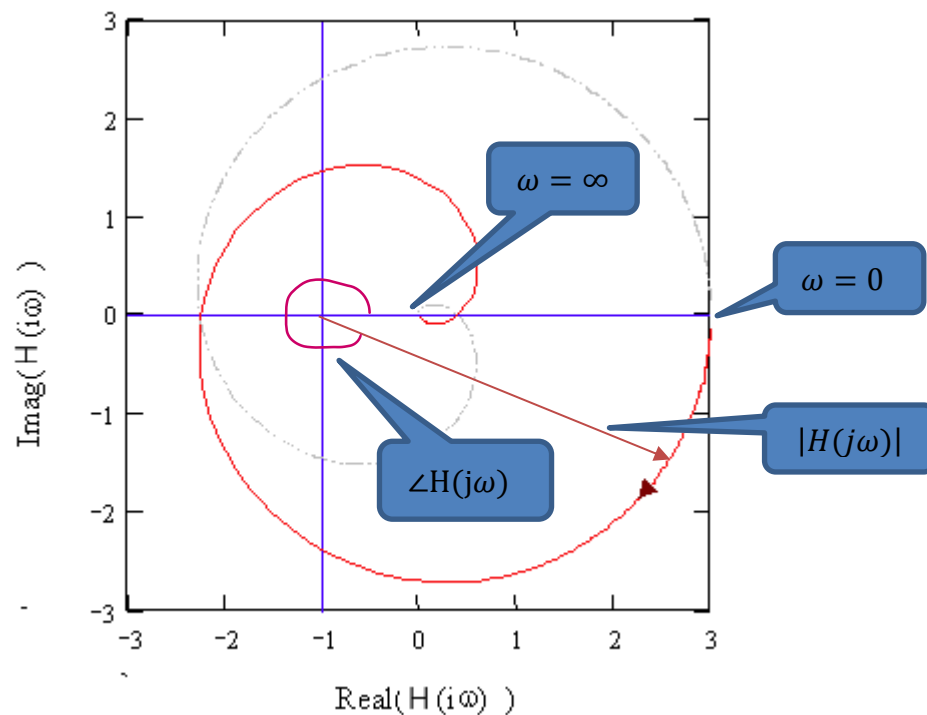


Figura 20 Diagrama de Nyquist

También se puede graficar por separado magnitud vs frecuencia y fase vs frecuencia:

$ H(j\omega) = \sqrt{[Re[H(j\omega)]]^2 + [Im[H(j\omega)]]^2} \text{ vs } \omega$	26
--	----

La gráfica de fase:

$\angle H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]} \right) \text{ vs } \omega$	27
---	----

Se puede ver el comportamiento del sistema para cualquier frecuencia, excitación senoidal.

Ejemplo 16. La Función $H(s)$ con un solo polo real negativo se puede escribir de la forma:

$$H(s) = \frac{\omega_p}{s + \omega_p}$$

El polo es el inverso de la constante de tiempo:

$$\omega_p = \frac{1}{\tau}$$

En el estado estable:

$$H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\omega_p}{j\omega + \omega_p} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}$$

La magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Los valores extremos:

$$|H(j0)| = 1$$

$$|H(j\infty)| = 0$$

Función monótona decreciente con ω :

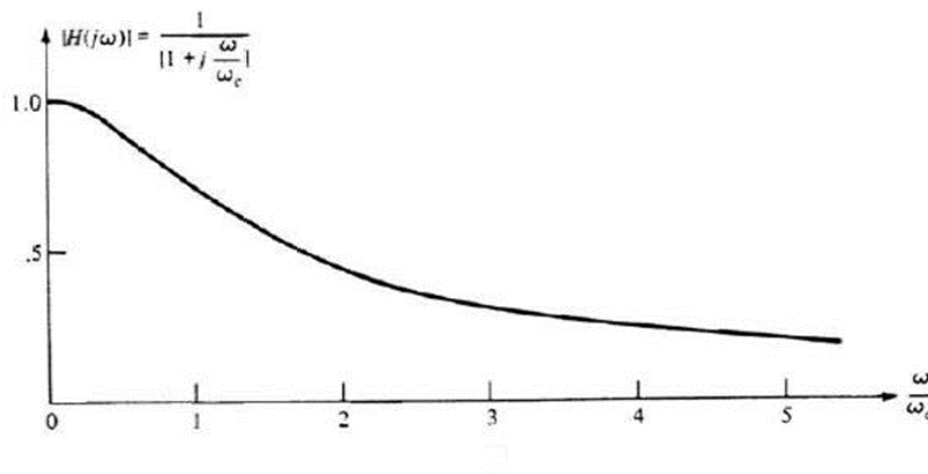


Figura 21 Grafica directa de magnitud vs frecuencia

La fase:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_p}$$

Los valores extremos:

$$\angle H(j0) = 0$$

$$\angle H(j\infty) = -90^\circ$$

Función monótona decreciente con ω

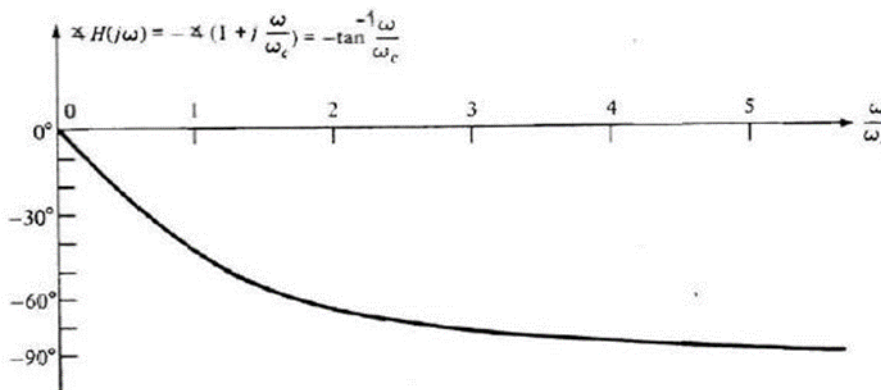


Figura 22. Grafica directa de fase vs frecuencia

El tipo de grafica que se escoge depende del análisis que se esté haciendo: para estabilidad es común usar los diagramas de Nyquist (junto con el Teorema de estabilidad de Nyquist) y, para análisis del comportamiento del sistema respecto a la frecuencia se usan las gráficas directas, o los diagramas de Bode.

Ejemplo 17. Obtener las gráficas directas de magnitud y fase de la función de transferencia de voltaje

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

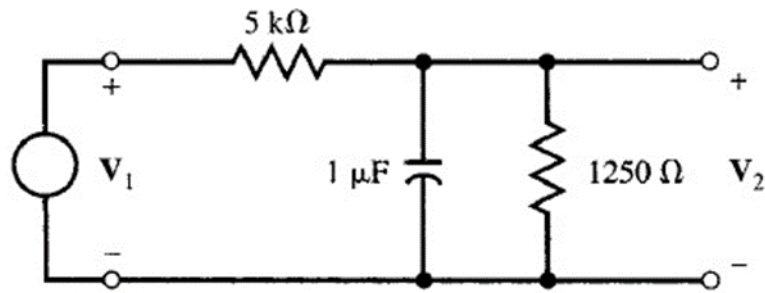


Figura 23a

Solo se requiere una ecuación de estado: $v_c = v_2$

$$\frac{v_1 - v_2}{R_1} = i_c + \frac{v_2}{R_2}$$

En términos de la derivada del voltaje:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{v_1 - v_2}{R_1 C} - \frac{v_2}{R_2 C}$$

Para la función de transferencia la energía inicial es cero y transformando a Laplace:

$$sV_2 + V_2 \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right) = \frac{V_1}{R_1 C}$$

De donde:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s + \left(\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} \right)}$$

Empleando MATLAB

```
Num:[200]
den:[1,1000]
hdes
```

```
200
-----
s+1000
```

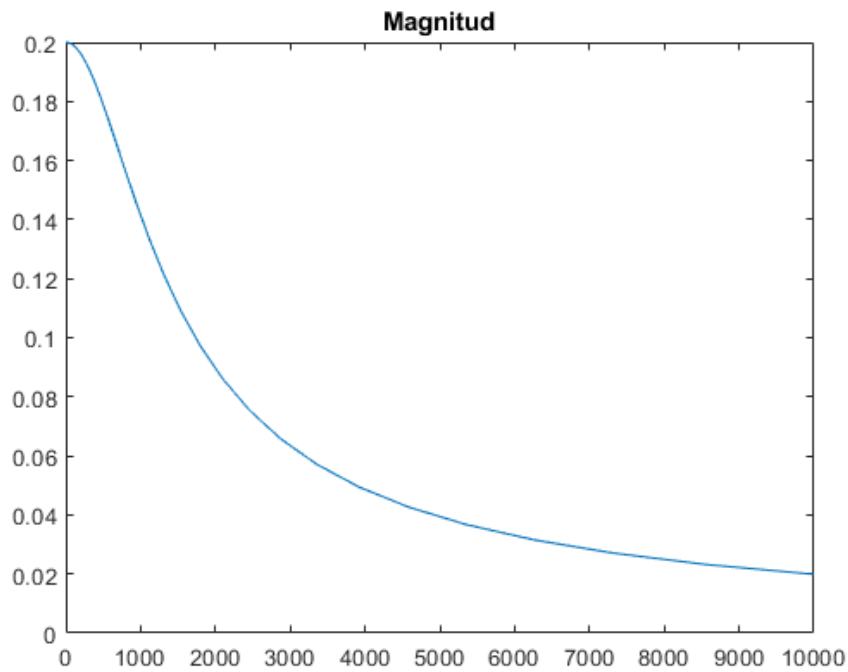


Figura 23b. Grafica directa de magnitud vs frecuencia (rad/s)

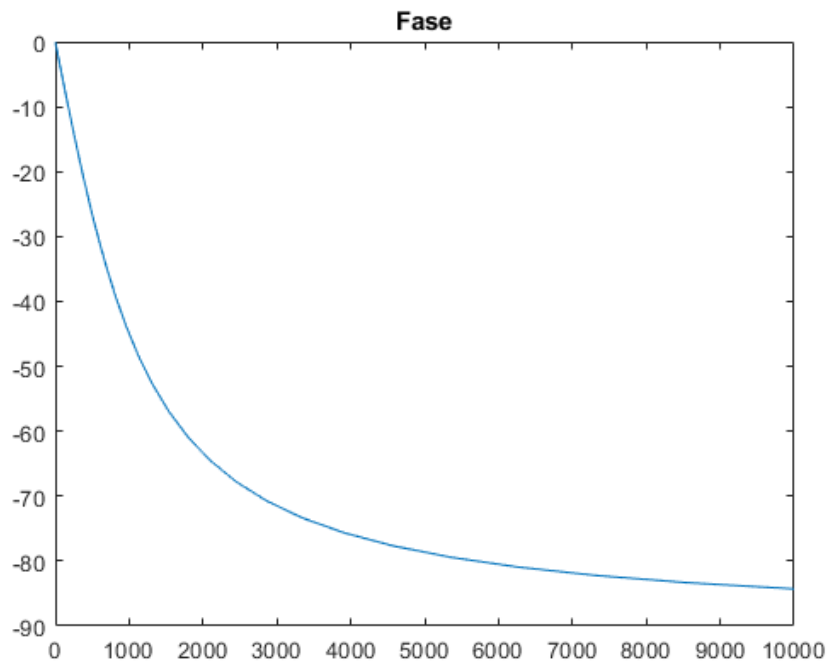


Figura 23c. Grafica directa de fase vs frecuencia (rad/s)

```
%Capitulo 1 Ejemplo 17 Respuesta frecuencia
%valores componentes
clear all,close all;
R1 = 5000; R2 = 1250; C = 1e-6;
num = [1/(R1*C)]
den = [1 (1/C)*(1/R1 + 1/R2)]
hdes = tf(num,den)
[mag,fase,freq]=bode(hdes,{1,10000});
plot(freq,mag(:,:)),title 'Magnitud'
figure
plot(freq,fase(:,:)),title 'Fase'
```

Diagramas de Bode

Normalmente el rango de variación de la frecuencia de interés es grande y la variación de la ganancia también puede ser significativa. En estos casos las gráficas directas no son fáciles de visualizar.

El uso de escalas logarítmicas permite representar en una sola gráfica rangos dinámicos grandes.

Para el eje de frecuencia se emplea una escala logarítmica: $\log \omega$

Para la escala de magnitud se define el Decibel, notado dB

Se define el dB, en términos de potencia y definidas sobre la misma resistencia:

$dB = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$	28
---------------------------------------	----

$$dB = 10 \log \frac{V_{out}^2 / R_{out}}{V_{in}^2 / R_{in}}$$

Si las resistencias sobre las cuales se disipan las potencias son iguales:

$dB = 20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}}$	29
---------------------------------------	----

Es común usar esta definición independientemente de los valores de las resistencias; en este caso las dos definiciones no están relacionadas.

Se extiende a magnitudes de funciones de transferencia:

$dB = 20\log H(j\omega) $	30
---------------------------	----

Diagramas de Bode básicos⁸

Sistema de ganancia constante:

$$H(s) = \pm K$$

$$|H(j\omega)| = K$$

En dB: $20\log K$ es una línea recta constante.

La fase si la ganancia es positiva la fase es cero para toda frecuencia (El amplificador NO invierte fase).

Si $K < 0$, el ángulo de fase es -180° : el amplificador invierte fase

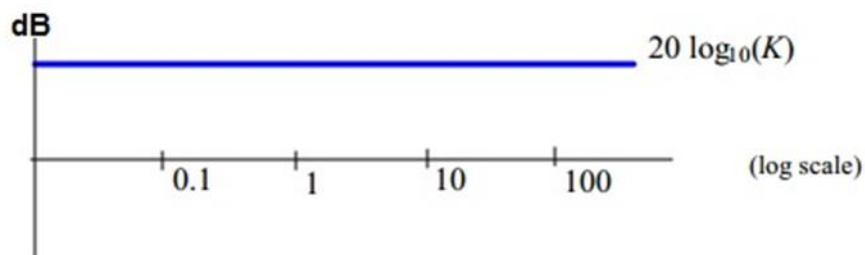


Figura 24 función constante

Función con cero en el origen:

$$H(s) = s$$

$$H(s)|_{s=j\omega} = j\omega$$

$$|H(j\omega)| = \omega$$

⁸ Tomado de R.C.Dorf and R.H. Bishop. Modern Control Systems. 10th Edition. Upper saddle River. NJ. Prentice Hall. 2005.

$$dB = 20 \log \omega$$

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) \rightarrow 90^\circ$$

La magnitud es una línea recta de pendiente +20 dB/dec y que pasa por el punto ($\omega = 1; 0 \text{ dB}$).

El corrimiento de fase es constante de + 90. En el dominio del tiempo esta función corresponde a un derivador ideal.

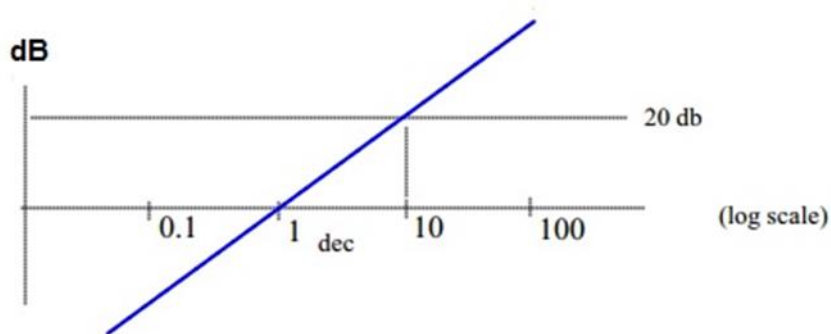


Figura 25 función derivador

Función con polo en el origen:

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s)|_{s=j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$dB = -20 \log \omega$$

$$\angle H(j\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{-j/\omega}{0} \right) \rightarrow -90^\circ$$

Un polo sencillo en el origen introduce una línea recta de pendiente -20 dB/dec y que pasa por el punto ($\omega = 1; 0 \text{ dB}$). Década es un rango de frecuencia entre ω_1 y $10\omega_1$

El corrimiento de fase es constante de -90° . En el dominio del tiempo esta función corresponde a un integrador ideal.

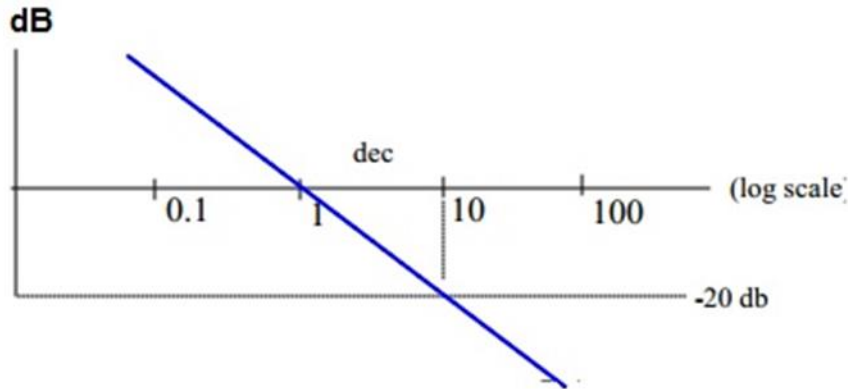


Figura 26. función integrador

Integradores y derivadores (no ideales) se emplean en los controladores tipo PID.

Función de primer orden, un polo real negativo.

Como ya se vio en las gráficas directas:

La magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

En dB:

$$dB = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right]$$

Comportamiento asintótico para $\omega \gg \omega_p$

$$-10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right] \approx -10 \log \left[\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right] = \underbrace{-20}_{m} \underbrace{\log \omega}_x + \underbrace{20 \log \omega_p}_b$$

Ecuación de una línea recta en el plano dB vs $\log \omega$, con una pendiente $m = -20$ dB/década o de aproximadamente -6 dB/Octava. Octava: rango de frecuencia entre ω_1 y $2\omega_1$

Para baja frecuencia:

$$\omega \ll \omega_p$$

$$dB = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right] \approx -10 \log(1) \rightarrow 0$$

Para baja frecuencia la magnitud en dB tiende a cero

Estas dos líneas rectas o asíntotas se encuentran en:

$$\omega = \omega_p$$

$$dB = -10 \log 2 \approx -3dB$$

En la frecuencia de corte la corrección es de -3 dB

¿Qué significa -3 dB?

$$\begin{aligned} 20 \log |H(j\omega)| &= 20 \log \frac{|V_o(j\omega)|}{|V_i(j\omega)|} = 10 \log \frac{|V_o(j\omega)|^2}{|V_i(j\omega)|^2} = 10 \log \frac{\frac{|V_o(j\omega)|^2}{R}}{\frac{|V_i(j\omega)|^2}{R}} \\ &= 10 \log \frac{P_o}{P_{in}} - 3dB = 10 \log \frac{P_o}{P_{in}} \Rightarrow \frac{P_o}{P_{in}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En la frecuencia de corte la potencia promedio disponible ha caído a la mitad respecto a baja frecuencia.

La fase:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{\omega_p}$$

Asíntotas:

$$\begin{aligned} \omega < 0.1\omega_p: \angle H(j0) &= 0 \\ \omega = \omega_p: \angle H(j\omega_p) &= -45^\circ \\ \omega > 10\omega_p: \angle H(j\infty) &= -90^\circ \end{aligned}$$

Línea recta de pendiente $m = -45^\circ/\text{década}$.

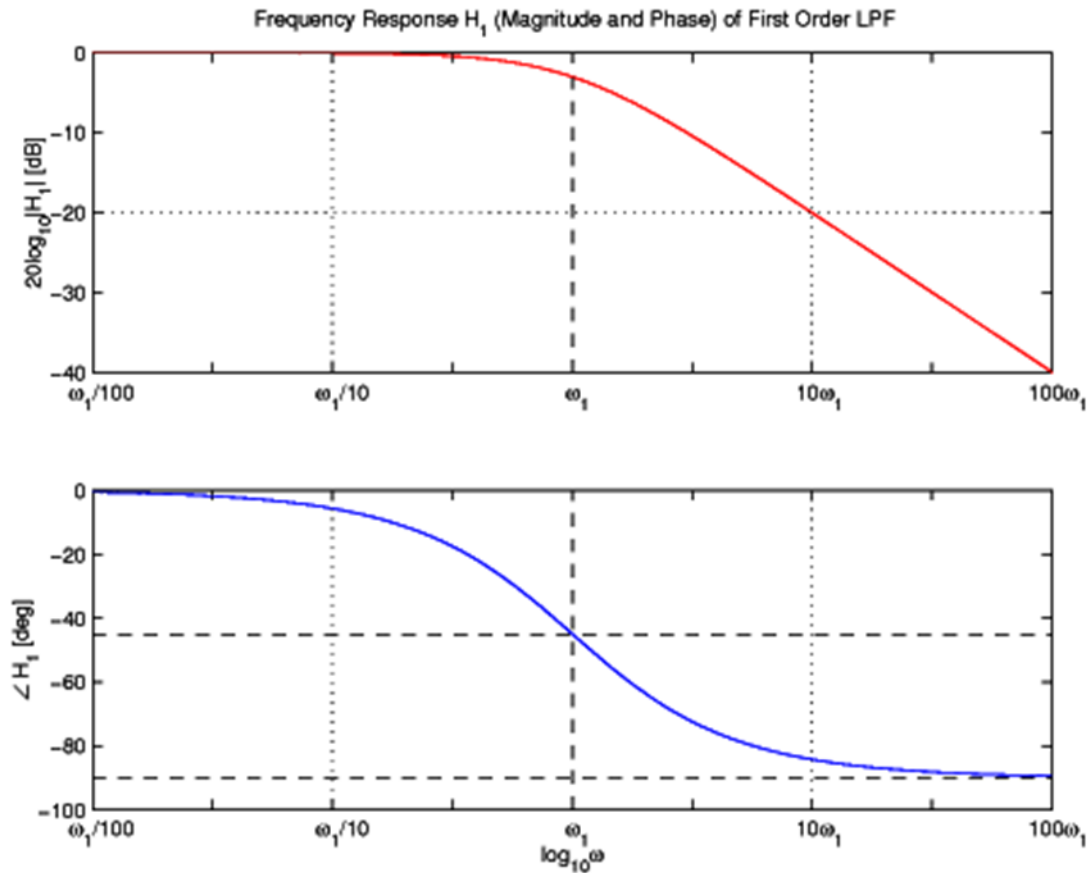


Figura 27 BODE 1er orden corregido

Ejemplo 18. Trazar el diagrama de Bode aproximado:

$$H(s) = \frac{200(s + 20)}{s(2s + 1)(s + 40)}$$

$$= (100) \left(\frac{1}{s} \right) \left(\frac{s + 20}{20} \right) \left(\frac{40}{s + 40} \right) \left(\frac{1/2}{s + 1/2} \right)$$

Como dB es una variable logarítmica, se pueden graficar por separado los efectos de cada término y después sumarlos:

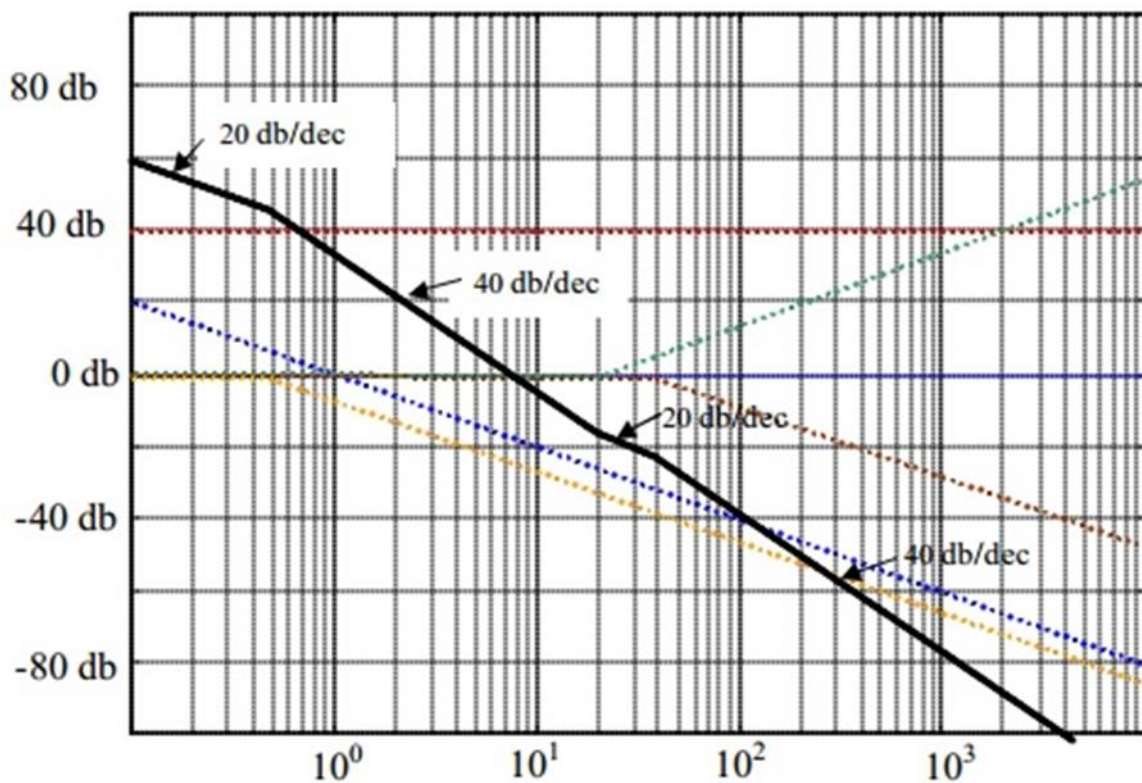
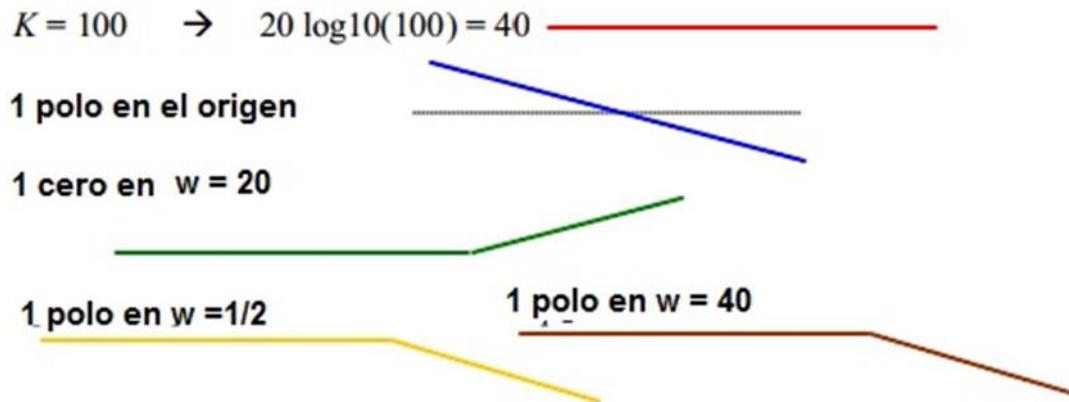


Figura 28 Bode Aproximado

Sistema con polos de 2do orden

Se considera el caso de un par de polos complejos conjugados.

ζ es la relación de amortiguamiento:

$0 < \zeta < 1$ polos complejos conjugados, parte real negativa

$\zeta = 1$ polos reales negativos e iguales

$\zeta > 1$ polos reales negativos y diferentes

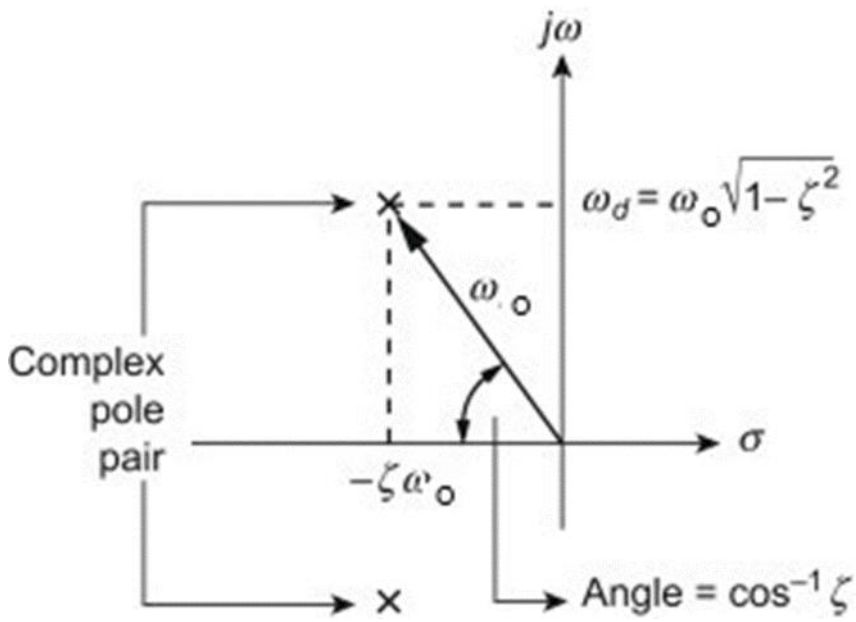


Figura 29 Polos complejos conjugados

$$H(s) = \frac{(\omega_0^2)}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\zeta, \omega_0 > 0 \text{ y } \in \mathfrak{R}$$

Polos en:

$$s = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$s = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\alpha = \zeta\omega_0; \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

La magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left| \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right) + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_o} \right|}$$
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_o} \right)^2}}$$

Los valores extremos

$$|H(j0)| = 1 \quad y \quad |H(j\infty)| = 0$$

Para la frecuencia ω_0 :

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{2\zeta}$$

Existe una frecuencia para la cual la magnitud es máxima:

$$\frac{d}{d\omega} |H(j\omega)| = 0$$
$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \zeta < 0.707$$

$$|H(j\omega_{res})| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Cuando

$$\zeta \rightarrow 0$$

$$\omega_{res} = \omega_0 \quad y \quad M_{res} \rightarrow \infty$$

Para el circuito ideal sin perdidas (No hay resistencia) la frecuencia de resonancia (para la cual la magnitud es máxima) y la frecuencia natural de oscilación son iguales.

En todos los demás casos $\zeta > 0$, existe resistencia y hay pérdidas de energía en ella, la frecuencia de resonancia es menor que la frecuencia natural de oscilación.

La fase:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega / \omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Valores:

$$\begin{aligned}\angle H(j0) &= 0 \\ \angle H(j\omega_0) &= -90^\circ \\ \angle H(j\infty) &= -180^\circ\end{aligned}$$

Función monótona decreciente con ω .

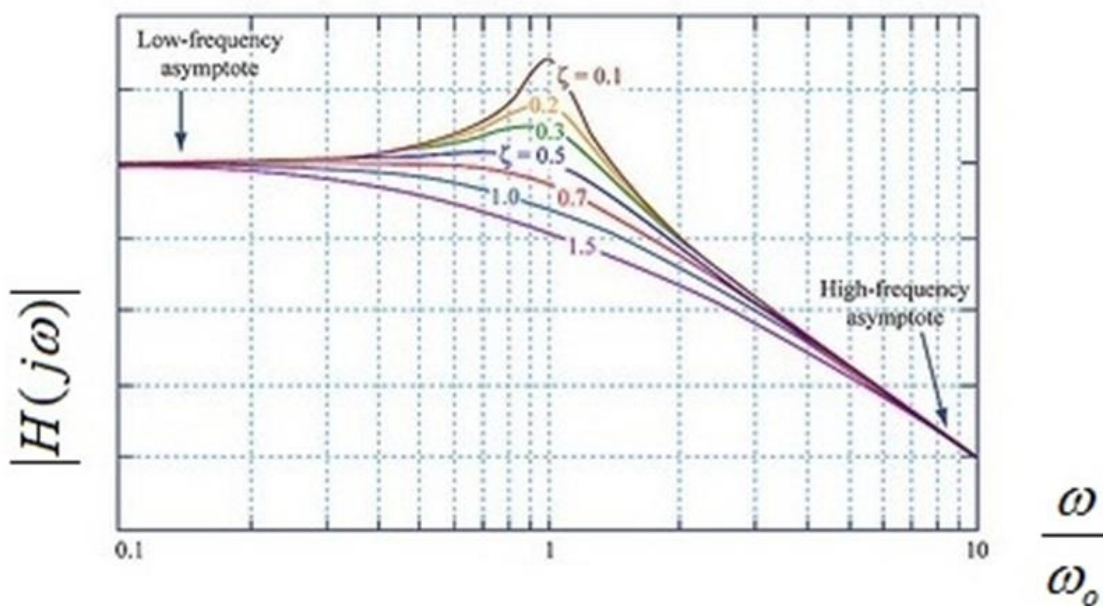


Figura 29 Magnitud función de segundo orden

BODE 2do orden ($0 \leq \zeta \leq 1$)

La magnitud:

$$20 \log |H(j\omega)| = -10 \log \left\{ \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\}$$

Comportamiento asintótico

$$\omega \gg \omega_0:$$

$$-10 \log \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 + (2\zeta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = \underbrace{-40}_{m} \underbrace{\log \omega}_x + \underbrace{40 \log \omega_0}_b$$

La pendiente es de -40 dB/ década o de -12 dB/Octava.

Para:

$$\begin{aligned} \omega &\ll \omega_0 \\ -10 \log(1) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para baja frecuencia dB tiende a cero

Punto de corte de las asíntotas:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \\ -10 \log(2\zeta) \end{aligned}$$

En la frecuencia de corte la corrección depende de la relación de amortiguamiento ζ

La fase:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \omega / \omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Valores:

$$\begin{aligned} \omega < 0.1\omega_0 : \angle H(j0) &= 0 \\ \omega = \omega_0 : \angle H(j\omega_0) &= -90^\circ \\ \omega > 10\omega_0 : \angle H(j\infty) &= -180^\circ \end{aligned}$$

Función monótona decreciente con pendiente -90° / década

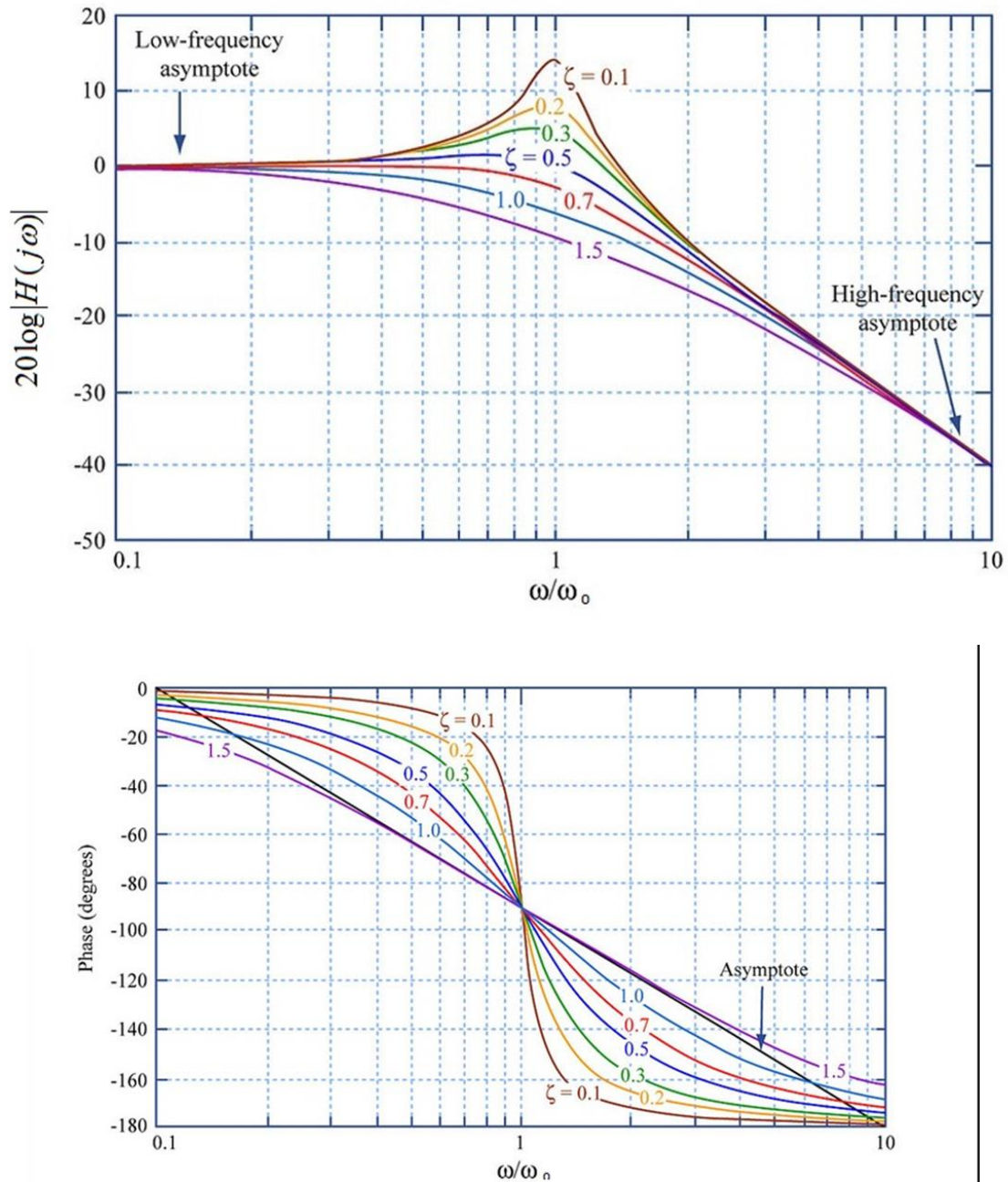


Figura 30. Diagramas de Bode función de segundo orden

Bode y Matlab

Bode

Compute the Bode frequency response of LTI models

Syntax

bode(sys)

bode(sys,w)

bode(sys1,sys2,...,sysN)

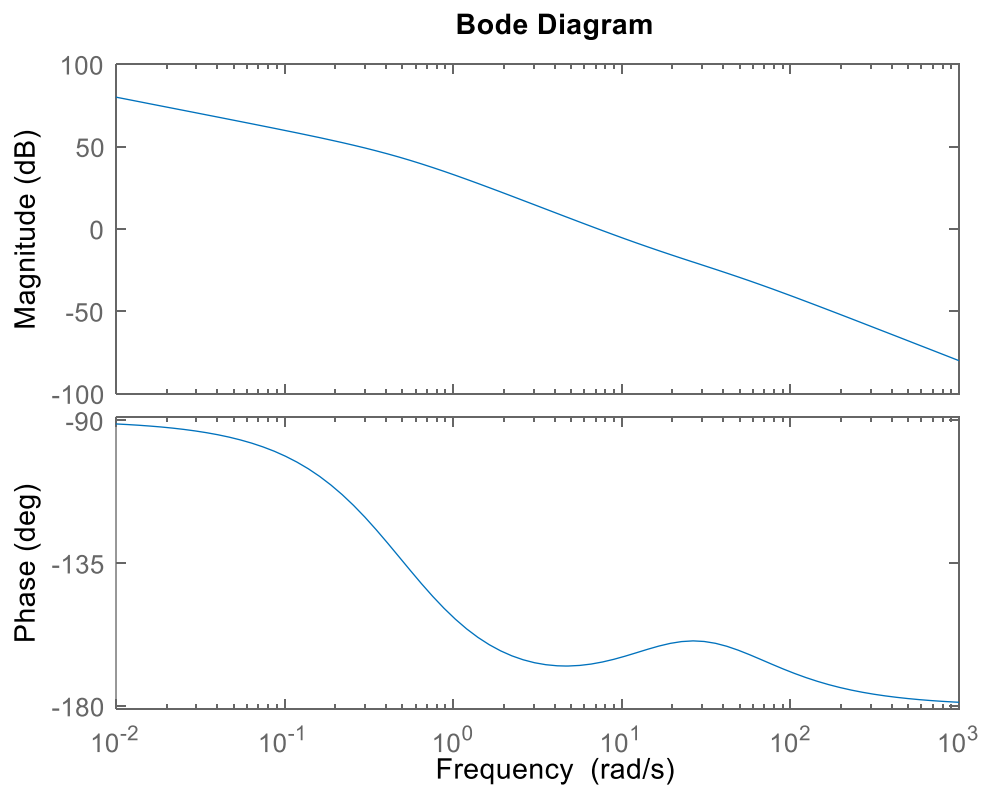
bode(sys1,sys2,...,sysN,w)

bode(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')

[mag,phase,w] = bode(sys)

Ejemplo 19. Empleando Matlab obtener el diagrama de bode de magnitud y fase de:

$$H(s) = \frac{200(s + 20)}{s(2s + 1)(s + 40)}$$



```
num = 1x2
      100      2000
```

```
den = 1x4
      1.0000   40.5000   20.0000      0
```

hdese =

$$\frac{100 s + 2000}{s^3 + 40.5 s^2 + 20 s}$$

Continuous-time transfer function.

%Capitulo 1 Ejemplo 19 Diagrama de Bode

```
K = 100;
ceros = [-20];
polos = [0 -0.5 -40];
num = K*poly(ceros)
den = poly(polos)
hdese=tf(num,den)
bode(hdese)
```

REFERENCIAS

1. CHEN Chi-Tsong. Linear Systems Theory and Design. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.
2. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
3. Karnopp D.C.; Margolis D.L. and Rosenberg R.C. System Dynamics. 4th Edition. John Wiley and Sons. 2006.
4. L.CHUA , C. DESOER, E. KUH. Linear and Nonlinear Circuits. New York. McGraw-Hill. International Edition 2000.
5. Eytan Modiano State Variable Description of LTI systems: http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/signalssystems/Lecture11_12.pdf
6. Carl H. Durney STATE-SPACE METHOD CIRCUITS Matlab® TUTORIAL: <http://www.ece.utah.edu/eceCTools/StateSpace/Circuits/Matlab/StateSpaceCircTutorial.pdf>
7. <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction§ion=SystemModeling>
8. <https://stackoverflow.com/questions/70761535/convolution-integral-export-as-animation-in-jupyter>
9. U of M. & CMU. Frequency Response Analysis and Design Tutorial. 1996 <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/freq/freq.html>.
10. Mathworks. Control System Toolbox™ 9 Getting Started Guide. © COPYRIGHT 2000–2010 by The MathWorks, Inc.
11. R.C.Dorf and R.H. Bishop. Modern Control Systems. 10th Edition. Upper saddle River. NJ. Prentice Hall. 2005.
12. Sedra & Smith. Microelectronic Circuits. 4th Edition. New York: Oxford University Press. 1998.

ANEXO A Transformación Similar

Sea: $\mathbf{X} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{X}}$, donde $\hat{\mathbf{X}}$ es el nuevo vector de estado y \mathbf{P} es la representación matricial de la transformación lineal que relaciona a los dos conjuntos de variables de estado.

La descripción original:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X}\end{aligned}$$

La descripción usando el nuevo vector de estado es:

$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{X}}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{X}}\end{aligned}$	A1
---	----

Reemplazando en el conjunto original:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{X}}} \\ \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{X}}} &= \mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{U}\end{aligned}$$

Premultiplicando por \mathbf{P}^{-1}

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}$$

Que debe ser igual a

$$\dot{\hat{\mathbf{X}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}$$

De donde se obtienen las transformaciones similares:

$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$	A2
--	----

Para la ecuación de salida:

$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{X}}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$	A3
--	----

Las matrices están relacionadas por una transformación similar

Cuando se evalúa la función de transferencia a partir del modelo de estado se puede demostrar que la función de transferencia es invariante:

Reemplazando en la ecuación 24 las ecuaciones de la transformación similar, ecuaciones A2 y A3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + D \\ \hat{H}(s) &= CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}(P^{-1}B) + D\end{aligned}$$

Tomando la inversa:

$$\begin{aligned}\hat{H}(s) &= CP[s^{-1}I - (P^{-1}AP)^{-1}](P^{-1}B) + D \\ &= CP[s^{-1}P^{-1}P - P^{-1}A^{-1}P](P^{-1}B) + D \\ &= CPP^{-1}[s^{-1}I - A^{-1}]PP^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D\end{aligned}$$

La función de transferencia es invariante bajo transformaciones similares.

ANEXO B Sistema lineal variante con el tiempo

En un sistema en el cual los parámetros del sistema son función del tiempo, una o varias de las matrices que describen al sistema, A,B,C,D tienen elementos que son variantes con el tiempo. Un solo elemento variable hace que el sistema total sea variante.

$$\left. \begin{aligned}\dot{X}(t) &= A(t)X(t) + B(t)U(t) \\ Y(t) &= C(t)X(t) + D(t)U(t)\end{aligned} \right\} \text{Ecuación dinámica de estado, sistema LVT}$$

$X(t)$: vector de variables de estado del sistema ($n \times 1$)

$A(t)$: matriz del sistema ($n \times n$)

$B(t)$: matriz de entrada ($n \times p$)

$U(t)$: vector de variables de entrada ($p \times 1$)

$Y(t)$: vector de variables de salida ($q \times 1$)

$C(t)$: matriz de salida ($q \times n$)

$D(t)$: matriz "hacia delante" ($q \times p$)

El modelo de estado se puede plantear, pero hay que hacer una escogencia adecuada de las variables de estado, como se muestra en el ejemplo siguiente

Ejemplo B1. Plantear las ecuaciones de estado para un sistema Lineal Variante con el tiempo. Asumir que $L_1(t)$, $L_2(t)$, y $C(t)$ son diferentes de cero para todo t y derivables una vez.

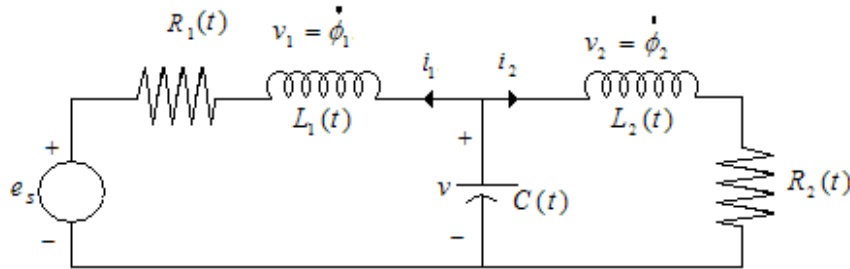


Figura B1

Las ecuaciones de los componentes:

$$\begin{aligned}v_{R_1}(t) &= R_1(t)i_{R_1}(t) \\ \phi_1(t) &= L_1(t)i_1(t) \\ q(t) &= C(t)v(t) \\ \phi_2(t) &= L_2(t)i_2(t) \\ v_{R_2}(t) &= R_2(t)i_{R_2}(t)\end{aligned}$$

Tomando como variables de estado:

$$\phi_1 \text{ en } L_1, \phi_2 \text{ en } L_2 \text{ y } q_2 \text{ en } C$$

La ecuación de corriente de nodo (KCL):

$$\begin{aligned}\dot{q} + i_1 + i_2 &= 0 \quad (1) \\ \dot{q} &= -i_1 - i_2 \\ \dot{q} &= -\frac{\phi_1(t)}{L_1(t)} - \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}\end{aligned}$$

La ecuación de voltaje de malla 1 (KVL):

$$v_C = v_1 + i_{R_1} R_1(t) + e_s \quad (2)$$

Como:

$$i_{R_1} = i_1 = \frac{\phi_1(t)}{L_1(t)}$$

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{C(t)} q(t) - \frac{R_1(t)}{L_1(t)} \phi_1(t) - e_s$$

La ecuación de voltaje de malla 2 (KVL)

$$v_C = v_2 + i_{R_2} R_2(t) \quad (3)$$

Como:

$$i_{R_2} = i_2 = \frac{\phi_2(t)}{L_2(t)}$$

$$\dot{\phi}_2 = \frac{1}{C(t)} q(t) - \frac{R_2(t)}{L_2(t)} \phi_2(t)$$

En notación matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1(t)} & -\frac{1}{L_1(t)} \\ \frac{1}{C(t)} & -\frac{R_1(t)}{L_1(t)} & 0 \\ \frac{1}{C(t)} & 0 & -\frac{R_2(t)}{L_2(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

b). Plantear el caso anterior empleando v e i como variables de estado.

De la ecuación 1:

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)v(t)}{dt} &= -i_1 - i_2 \\ &= C(t)\dot{v}(t) + \dot{C}(t)v(t) = -i_1 - i_2 \\ \dot{v}(t) &= -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}v(t) - \frac{1}{C(t)}i_1 - \frac{1}{C(t)}i_2 \end{aligned}$$

De la ecuación 2:

$$\frac{dL_1(t)i_1(t)}{dt} = v_c - i_1 R_1(t) - e_s$$

$$L_1(t)\dot{i}_1(t) + i_1(t)\frac{dL_1}{dt} = v_c - i_1 R_1(t) - e_s$$

$$\dot{i}_1(t) = -\frac{\dot{L}_1(t)}{L_1(t)}i_1(t) - \frac{R_1(t)}{L_1(t)}i_1(t) + \frac{1}{L_1(t)}v_c - \frac{1}{L_1(t)}e_s$$

De la ecuación 3:

$$\frac{dL_2(t)i_2(t)}{dt} = v_c - i_2 R_2(t)$$

$$L_2(t)\dot{i}_2(t) + i_2(t)\frac{dL_2}{dt} = v_c - i_2 R_2(t)$$

$$\dot{i}_2(t) = -\frac{\dot{L}_2(t)}{L_2(t)}i_2(t) - \frac{R_2(t)}{L_2(t)}i_2(t) + \frac{1}{L_2(t)}v_c$$

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} & -\frac{1}{C(t)} & -\frac{1}{C(t)} \\ \frac{1}{L_1(t)} & -\left(\frac{\dot{L}_1(t) + R_1(t)}{L_1(t)}\right) & 0 \\ \frac{1}{L_2(t)} & 0 & -\left(\frac{\dot{L}_2(t) + R_2(t)}{L_2(t)}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1(t)} \\ 0 \end{pmatrix} e_s$$

En cualquier caso, las matrices del sistema son variantes en el tiempo, y es más sencilla la formulación empleando $(q \ \phi_1 \ \phi_2)^T$ como vector de estado: No aparecen las derivadas de los elementos en la matriz $A(t)$.

La solución del sistema variante con el tiempo requiere la evaluación de la matriz fundamental del sistema y está fuera del alcance del curso.

PROBLEMAS

1. Clasificación de sistemas

Determinar si los modelos dados son: lineales o no lineales, variantes o invariantes, causales o no causales, dinámicos o sin memoria.

a. $y(t) = \int_0^t (t - \tau)^3 u(\tau) d\tau$

b. $y(t) = 1 + \int_0^t (t - \tau)^3 u(\tau) d\tau$

c. $y(t) = u(t)^3$

2. Para el circuito de la Figura P2 los componentes tienen los siguientes valores:

L_1	L_2	L_3	C_4	C_5	R_6	R_7
1 H	2 H	5H	1 F	3 F	2 Ω	3 Ω

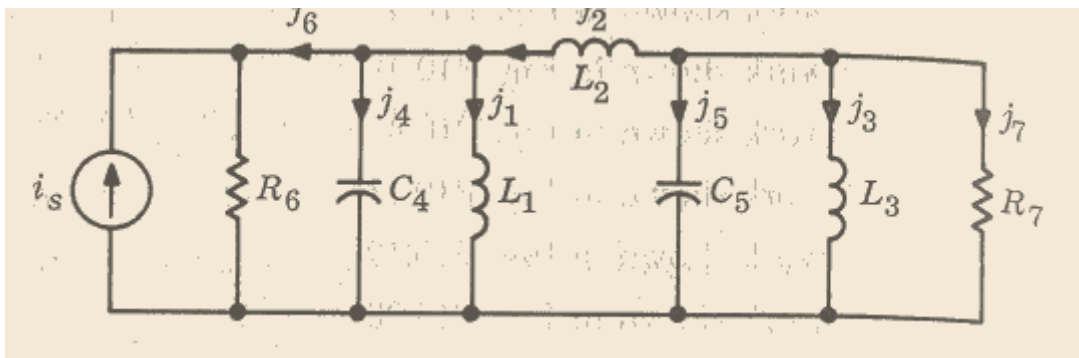


Figura P1⁹

- Plantear la ecuación dinámica de estado. Tomar como variables de estado los voltajes sobre los condensadores y las corrientes a través de las inductancias. La variable de salida de interés es el voltaje sobre la resistencia R_7 .
- Evaluar el vector de estado y la salida analíticamente. Las condiciones iniciales son:

$$i_1(0) = 2A; i_2(0) = 0; i_3(0) = 0; v_4(0) = 4V; v_5(0) = 6V$$

⁹ Tomado referencia 3

La fuente externa es:

$$i_s = 5 \cos t \text{ A}$$

- c. Resolver el paso anterior empleando MATLAB. Graficar las variables de estado y la respuesta
3. Para el circuito de la Figura P2 todos los elementos son lineales e invariantes
Plantear la ecuación dinámica de estado y la ecuación de salida para la corriente i a través de R_2 . La entrada es el generador de voltaje v_s

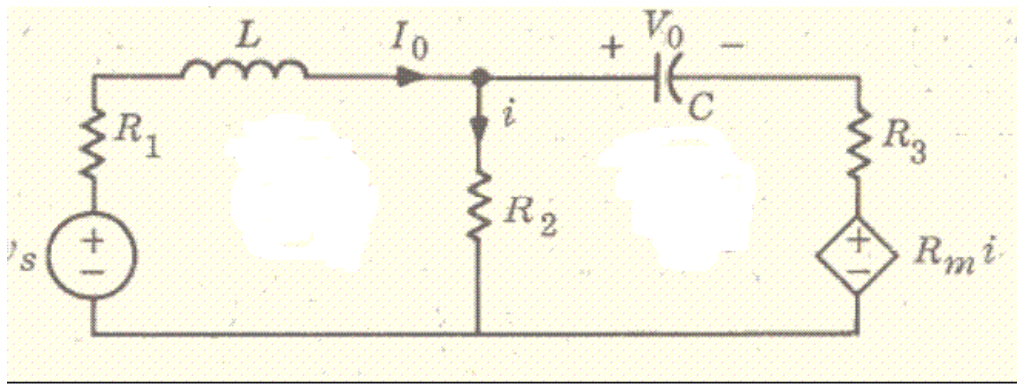


Figura P2¹⁰

4. Para el circuito de la Figura P3

Plantear las ecuaciones de estado. La entrada $u(t)$ es una fuente de corriente y la salida y es el voltaje sobre el condensador.

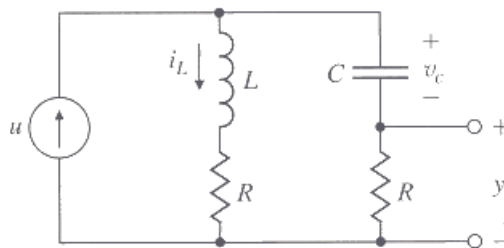


Figura P3¹¹

¹⁰ Tomado referencia 3

¹¹ Tomado de la referencia 4

5. Para el circuito de la Figura P4:

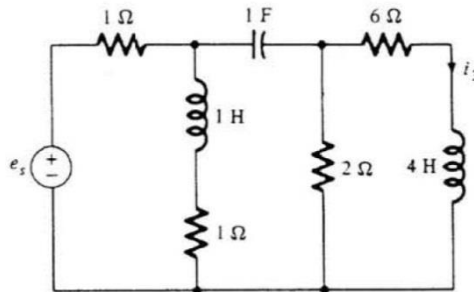


Figura P4¹²

- Plantear el modelo de estado. La variable de salida de interés es la corriente i_3
 Emplear como variables de estado $[v, i]$.
- Encontrar los valores y vectores propios de la matriz **A**.
- Plantear el conjunto de ecuaciones de estado empleando $[\Phi, q]$
- Encontrar los valores y vectores propios de la nueva matriz **A**.
- ¿Qué relación existe entre los valores y vectores propios de los pasos b y d?
- Calcular la matriz de transición de estados en forma analítica.
 Emplear MATLAB®.
- Emplear initial y step para obtener y graficar los estados y la respuesta completa para entrada paso. El estado inicial es:

$$i_{L1}(0) = 1 \text{ A}; \quad v_c(0) = -2V; \quad i_3(0) = 0.5 \text{ A}$$

- Repetir el paso anterior empleando "lsim".
- Repetir para el modelo que se obtiene empleando $[\Phi, q]$ como variables de estado.

6. Para el diagrama de flujo de la figura P5:

- Obtener el modelo en variables de estado.
- Encontrar los valores y vectores propios.

¹² Tomado referencia 3

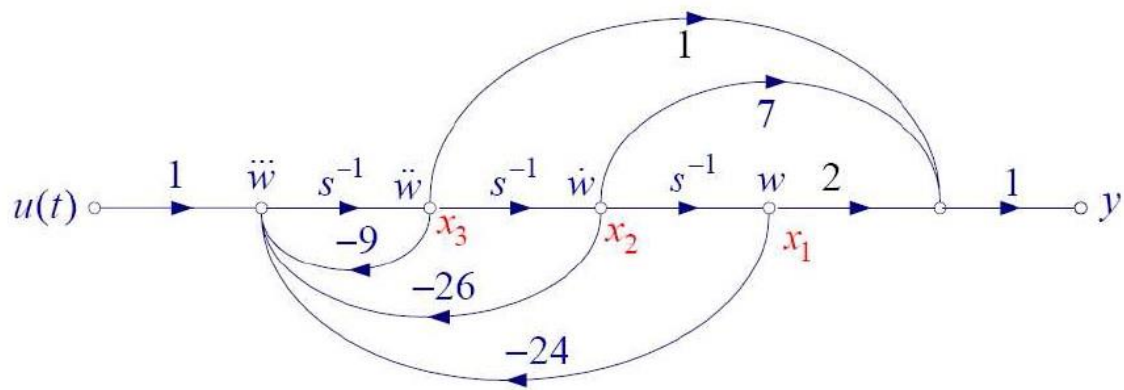


Figura P5