# Análisis de Sistemas Dinámicos.
# Capitulo 7
# Modelo de Sistemas Biológicos

Ing. Carlos E. Cotrino B. M Sc.

1

## Modelos de sistemas físicos

1. Preparar y ejecutar el plan de acción para formular y resolver un modelo. (CDIO 2.1.1.4)
2. Obtener modelos conceptuales y cualitativos de diversos sistemas físicos. (CDIO 2.1.2.2)
3. Establecer las conexiones entre los fenómenos físicos y el modelo. (CDIO 2.1.2.3)
4. Usar modelos cuantitativos y soluciones. (CDIO 2.1.2.4)

## Modelos de sistemas físicos

5. Generalizar suposiciones para simplificar ambientes y sistemas complejos (CDIO 2.1.2.1)
6. Discutir una aproximación desde varias disciplinas para asegurar que el sistema se entienda desde todas las perspectivas relevantes. (CDIO 2.3.1.2)
7. Establecer prioridades dentro de las metas generales (CDIO 2.1.1.3)



## Clase 1

**Contenido**

- Definir sistemas discretos.
- Plantear modelos de sistemas discretos.
- Obtener representaciones de estado de sistemas discretos

**Temas para repasar**

- Transformada de Laplace.

**Temas futuros**

- Transformada Z

# Modelo de sistemas discretos

Sistemas Continuos en el tiempo

$u(t)$ → Sistema $x(t)$ → $y(t) = L\{x(t), u(t)\}$

Las variables de entrada, salida y de estado están definidas para todo tiempo en el intervalo (-∞, ∞).

$t \in \mathbb{R}$

Sistemas Discretos en el tiempo

$u[k]$ → Sistema $x[k]$ → $y[k] = L\{x[k], u[k]\}$

Las variables de entrada, salida y de estado están definidas en instantes discretos o determinados del tiempo.

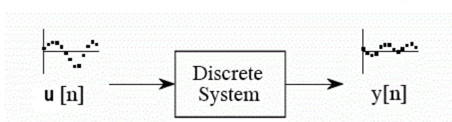
Están espaciados uniformemente y se denotan por un conjunto de enteros en el rango (-∞, ∞).

$k \in \mathbb{Z}$



# Modelo de sistemas discretos

- k: es un entero; T: intervalo de tiempo




- La señal discreta: $u(k) = \begin{cases} (1/2)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$
- También se puede expresar como:
$$u(k) = \{1, 1/2, 1/4, \ldots (1/2)^i \ldots.\}$$
- Suma de secuencias: $\{c_k\} = \{a_k\} + \{b_k\}$
- Producto de secuencias: $\{c_k\} = \{a_k\}\{b_k\}; c_k = a_k b_k$

# Modelos de sistemas discretos

- Los sistemas discretos se presentan en diferentes áreas de la ingeniería, economía, biología, etc.
- Sistemas discretos se pueden describir por:
  - Ecuación diferencia
  - Diagrama de bloques
  - Algoritmo
  - Variables de estado



# Ecuación diferencia

- Descripción entrada – salida por medio de ecuación diferencia:

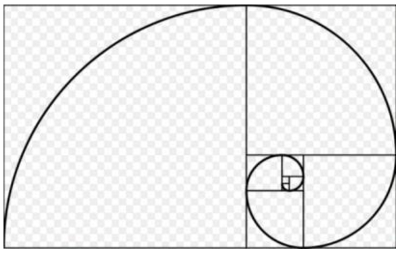
$$y(k) = f[u_0 \ldots . u_k, y_0 \ldots .. y_{k-1}]$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots \ldots + a_n y(k-n)$$
$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) +$$
$$\ldots \ldots + b_m u(k-m)$$

- Ejemplo:Los números de Fibonacci se representan por la secuencia:

{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,….}

# Ecuación diferencia



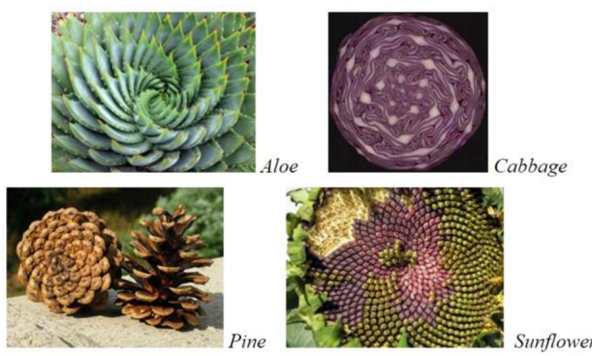
Cuadrado dorado y espiral logarítmica

- La fórmula de recurrencia de Kepler:
- $y(k) = y(k-1) + y(k-2); y(0) = 0;\ y(1) = 1$
- La relación entre dos elementos sucesivos es tal que:
- $\lim_{k\to\infty} \frac{y(k+1)}{y(k)} \to 1{,}61803 \ldots.$ , la media dorada.
- Esta media también corresponde a la relación entre el lado mayor y el menor del rectángulo dorado



# Filotaxis: arreglo regular de hojas

Nautilus shell




Spiral Phyllotaxis

# Ejemplo 1

- Una cuenta de ahorros gana intereses del i % por año, compuesto mensualmente. El interés se calcula sobre el balance del mes anterior y el dueño puede hacer cualquier número de depósitos y retiros durante el mes.

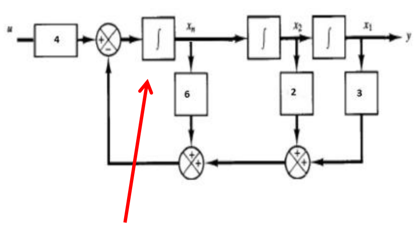
$$\underbrace{y(k)}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{mes } k}} = \underbrace{y(k-1)}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{mes } k-1}} + \underbrace{y(k-1)\frac{i}{12}}_{\substack{\text{Interes sobre}\\ \text{saldo mes k}-1}} + \underbrace{u(k)}_{\substack{\text{Movimiento}\\ \text{neto mes k}}}$$





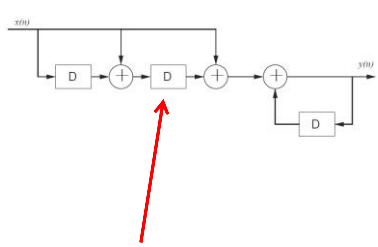
# Diagrama de bloques

**Sistema continuo**




Operador integral

**Sistema discreto**




D: Operador retardo (delay)

# Ejemplo 2

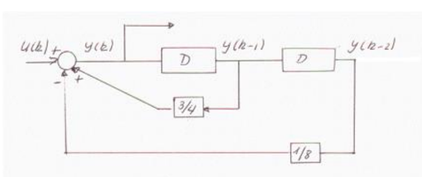
- Representar la ecuación diferencia

$$y(k) = u(k) + \frac{3}{4} y(k-1) - \frac{1}{8} y(k-2)$$

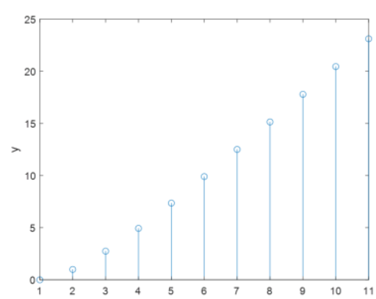
- Por medio de un diagrama de bloques
- Por medio de un algoritmo



# Ejemplo 2




Para la salida en el instante kT se debe tomar la entrada en kT, sumar 0.75 veces la salida en el paso (k-1)T y restar 0.125 veces la salida en el paso (k-2)T.



## Espacio de estado sistema discreto

- Para discreto:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k) \;\; x(k_0) = x_0$$
$$y(k) = h(k, x(k), u(k))$$

- Sistema discreto, lineal e invariante:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{U}(k)$$
$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}_d\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}_d\mathbf{U}(k)$$

- Cuando el sistema es variante con el tiempo, las matrices $A_d, B_d, C_d, D_d$ son función de k.



## Descripción por variables de estado

- A partir de ecuación entrada – salida:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + .... + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$$

- Variables tipo fase:

$$\begin{aligned}
&x_1[k] = y[k] && \Rightarrow x_1[k+1] = y[k+1] \\
&x_2[k] = y[k+1] && \Rightarrow x_1[k+1] = x_2[k] \\
&x_3[k] = y[k+2] && \Rightarrow x_2[k+1] = x_3[k] \\
&\vdots && \\
&x_n[k] = y[k+n-1] && \Rightarrow x_{n-1}[k+1] = x_n[k]
\end{aligned}$$

$$x_n[k+1] = y[k+n] = b_0 u[k] - a_{n-1}x_n[k] - \cdots - a_1 x_2[k] - a_0 x_1[k]$$

# Descripción por variables de estado

- Forma "companion":

$$
\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u[k]
$$

$$
y[k] = [1 \quad 0\ldots. \quad 0 \quad 0]\, x[k]
$$

- Notación matricial:

$$
\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{X}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{U}(k)
$$

$$
\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{X}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{U}(k)
$$



# Forma "companion" general

- $y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots. + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_n u(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$

- $$
\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u[k]
$$

- $$
y[k] = [(b_0 - a_0 b_n) \quad (b_1 - a_1 b_n) \quad \ldots \quad (b_{n-1} - a_{n-1} b_n]\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + b_n u(k)
$$

# Ejemplo 3

- Plantear el modelo variables de estado tipo fase:

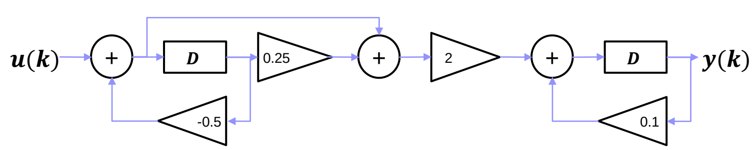
$$y[k+3]+2y[k+2]+4y[k+1]+y[k]=u[k]$$

- Representar el conjunto de ecuaciones por un diagrama de bloques.



# Ejemplo 4

Plantear la ecuación de estado.



# Solución ecuación de estado discreta

- Solución ecuación de estado, caso LIT:

$$\mathbf{X}(k+1)=\mathbf{A}_d\mathbf{X}(k)+\mathbf{B}_d\mathbf{U}(k)$$
$$\mathbf{Y}(k)=\mathbf{C}_d\mathbf{X}(k)+\mathbf{D}_d\mathbf{U}(k)$$

- La solución homogénea de:

$$\mathbf{X}(k+1)=\mathbf{A}_d\cdot\mathbf{X}(k)$$

- Con condiciones iniciales:X(k=0)=X(0)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X}(1)=\mathbf{A}_d\cdot\mathbf{X}(0)\\
&\mathbf{X}(2)=\mathbf{A}_d\cdot\mathbf{X}(1)=\mathbf{A}_d^2\cdot\mathbf{X}(0)\\
&\vdots\\
&\mathbf{X}(k)=\mathbf{A}_d^k\cdot\mathbf{X}(0)
\end{aligned}$$



# Ejemplo 5 Solución homogénea

- Evaluar la solución homogénea de:

$$\begin{aligned}
x_1(k+1)&=\frac{1}{2}x_1(k)-\frac{1}{2}x_2(k)+x_3(k)\\
x_2(k+1)&=\frac{1}{2}x_2(k)+2x_3(k)\\
x_3(k+1)&=\frac{1}{2}x_3(k)
\end{aligned}$$

$$X(0)=[2\quad 4\quad 6]^T$$

## Solución ecuación de estado discreta

- Dada una secuencia de vectores de entrada y un conjunto de C.I, la solución es:

$$X(1) = A_d X(0) + B_d U(0)$$
$$X(2) = A_d X(1) + B_d U(1) = A_d{}^2 \cdot X(0) + A_d \cdot B_d \cdot U(0) + B_d \cdot U(1)$$
$$X(3) = A_d X(2) + B_d U(2) = A_d{}^3 \cdot X(0) + A_d{}^2 \cdot B_d \cdot U(0) + A_d \cdot B_d \cdot U(1) + B_d \cdot U(2)$$

- En $t_k$

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{A}_d^k \mathbf{X}[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-j} \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}[j]$$



## Solución ecuación de estado discreta

- Matriz de transición de estados continua:

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$$

- Matriz discreta:

$$\mathbf{\Phi}[(k,j)] = \mathbf{A}_d{}^{k-j}$$

- Solución discreta:

$$\mathbf{X}[k] = \mathbf{\Phi}[k]\mathbf{X}[0] + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{\Phi}[k,j] \cdot \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}[j-1]$$

# Solución ecuación de estado discreta

- Cambio de variable

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{A}_d^k \mathbf{X}[0] + \sum_{j=1}^{k} \mathbf{A}_d^{k-j} \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}[j-1]$$

- Comparando con solución continua:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(\tau) \cdot d\tau$$



# Ejemplo 6

- Para el sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix}$$

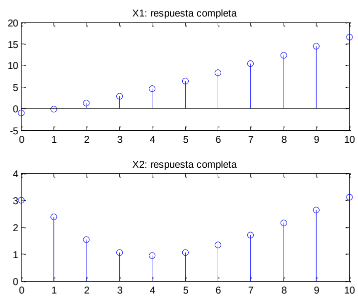
$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

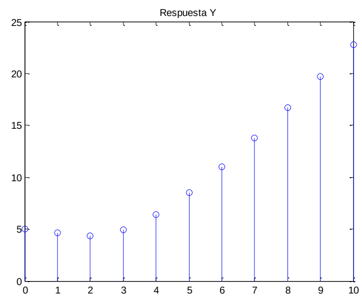
- Encontrar y(k) cuando:

$$x[0] = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$u_1[k] = k \;\; y \;\; u_2[k] = e^{-k} \quad \text{para k } = 0,1,\ldots\text{ y 0 para k} < 0$$

# Ejemplo 6






# Ejemplo 7 Fibonacci

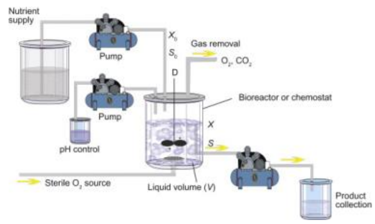
- Para la ecuación diferenciade Fibonacci:
- Obtener modelo en variables de estado.
- Resolver para las condiciones iniciales (1 1)
- Graficar respuesta
- Obtener respuesta analítica
- Discutir estabilidad

# Clase 2 Modelos continuos de crecimiento[2]

## Contenido

1. Plantear el modelo de crecimiento de bacterias
2. Generar un modelo escalizado, lineal y evaluar estabilidad
3. Obtener y analizar los retratos de fase de un sistema no lineal.
4. Plantear dos casos similares.
5. Definir análisis por compartimientos

- Temas repasar:
  - Solución sistemas no lineales.
  - Retratos de fase

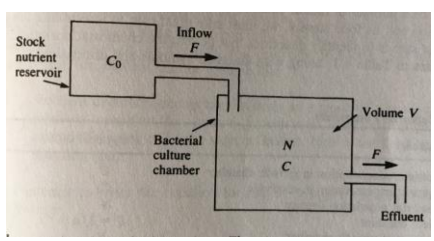



https://www.sciencedirect.com/topics/earth-and-planetary-sciences/chemostat#:~:text=From%3A,Edition)%2C%202019



# Crecimiento de bacterias[2]

- En una cámara de cultivo (chemostat) se mantienen células en crecimiento, que se pueden cosechar en cualquier momento.
- Nutrientes con concentración Co fluyen hacia la cámara a una tasa F (Vol/t). Tasa de salida es igual a la entrada.
- V volumen se mantiene constante.



## Crecimiento de bacterias[2]

- Consideraciones:
- La tasa de flujo F es limitada de tal forma que el cultivo no es extraído totalmente (washed out).
- Los nutrientes se reponen lo suficientemente rápido para que el cultivo siga creciendo normalmente.
- Se deben encontrar las expresiones para F, C y V

| Cantidad | Símbolo | Dimensiones |
|---|---|---|
| Concentración nutrientes en camara | C | Masa/Volumen |
| Concentración de nutrientes en depósito | Co | Masa/Volumen |
| Densidad población bacterias | N | Numero/Volumen |
| Constante de rendimiento | $Y=1/\alpha$ | Masa nutriente/Numero bacterias |
| Volumen cámara crecimiento | V | Volumen |
| Tasa flujo entrante/saliente | F | Volumen/tiempo |



## Crecimiento de bacterias[2]

- Suposiciones:

1. La cámara de cultivo se mantiene agitada para que no haya variación espacial de la concentración (Ecuación diferencial total)
2. La tasa de reproducción de las bacterias es K. Inicialmente se asume constante.
3. Después se asume que la tasa de reproducción es función de la disponibilidad de nutrientes K(C).
4. La reproducción de las bacterias va agotando a los nutrientes en la cámara de cultivo.

## Primeras ecuaciones

### Aproximación inicial

Tasa de cambio población bacterias

Reproducción

Flujo saliente

$$\frac{dN}{dt} = KN - FN$$

### K función de C, nutrientes: K(C)

Agotamiento por flujo de salida

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - FC + FC_0$$

Agotamiento durante fase de crecimiento

**Errores de dimensiones**

Reemplazo desde el deposito



## Conjuntos correctos dimensionalmente

- Ley de conservación de masa:

$$\frac{dN}{dt} = K(C)N - F\frac{N}{V}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - F\frac{C}{V} + F\frac{C_0}{V}$$

- Para balance de masa N y C total:

#total bacterias en V

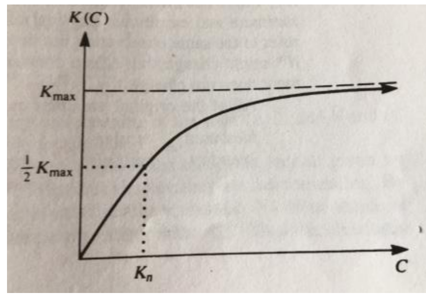
$$\frac{d(NV)}{dt} = K(C)NV - FN$$

Masa total de nutrientes en V

$$\frac{d(CV)}{dt} = -\alpha K(C)NV - FC + FC_0$$

# Ecuación para el nutriente K(C)

- Cinética molecular de Michaelis – Menten, un crecimiento exponencial acotado de la forma
- $K(C) = \frac{K_{MAX}C}{K_n + C}$






# Ecuaciones y nutriente

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{K_{MAX}C}{K_n + C}\right)N - \frac{FN}{V}$$
$$\frac{dC}{dt} = -\alpha\left(\frac{K_{MAX}C}{K_n + C}\right)N - \frac{FC}{V} + \frac{FC_0}{V}$$

- Dos variables: N (población bacterias) y C (masa nutriente)
- 3 parámetros de diseño del sistema: ($F, V, C_0$), uno de las bacterias ($\alpha$) y dos del nutriente ($K_n$ y $K_{max}$)
- Pero no hay seis grados de libertad (ya se demostrará)

# Ecuaciones adimensionales

- Se plantea un conjunto de ecuaciones en función de variables sin dimensiones.

$$\left\{\begin{matrix} Variable \\ adimensional \end{matrix}\right\} = \frac{\{Variable\ medida\}}{\{Unidad\ con\ dimensiones\}}$$

- Para las tres variables del modelo:

| Medida | Adimensional | | Unitaria Dimensiones |
|---|---|---|---|
| N= | N* | x | $\hat{N}$ |
| C= | C* | x | $\hat{C}$ |
| t= | t* | x | $\tau$ |



# Ecuaciones adimensionales

- Reemplazando las variables originales por las adimensionales:

$$\frac{dN^*}{dt^*} = \tau K_{MAX}\left(\frac{C^*}{K_n/_{\hat{C}} + C^*}\right)N^* - \frac{\tau F N^*}{V}$$

$$\frac{dC^*}{dt} = -\frac{\alpha\tau K_{MAX}\hat{N}}{\hat{C}}\left(\frac{C^*}{K_n/_{\hat{C}} + C^*}\right)N^* - \frac{\tau F C^*}{V} + \frac{\tau F C_0}{V\hat{C}}$$

- Ecuaciones especificas para cada sistema
- El objetivo es reducir el numero de parámetros

## Reducción de parámetros

- La constante para el tiempo:
- $\tau = \frac{V}{F}$ : definición de Vol = Flujo x tiempo
- $\hat{C} = K_n$ :constante que depende del cultivo (Ver lamina 35).
- $\widehat{N} = \frac{K_n}{\alpha \tau K_{max}}$: constante que depende del cultivo
- Parámetros adimensionales e independientes entre si:
- $\alpha_1 = \tau K_{MAX} = \frac{V}{F} K_{MAX}$
- $\alpha_2 = \frac{\tau F C_0}{V \hat{C}} = \frac{C_0}{K_n}$



## Ecuaciones adimensionales

$$\frac{dN^*}{dt^*} = \alpha_1 \left( \frac{C^*}{1 + C^*} \right) N^* - N^*$$
$$\frac{dC^*}{dt} = -\left( \frac{C^*}{1 + C^*} \right) N^* - C^* + \alpha_2$$

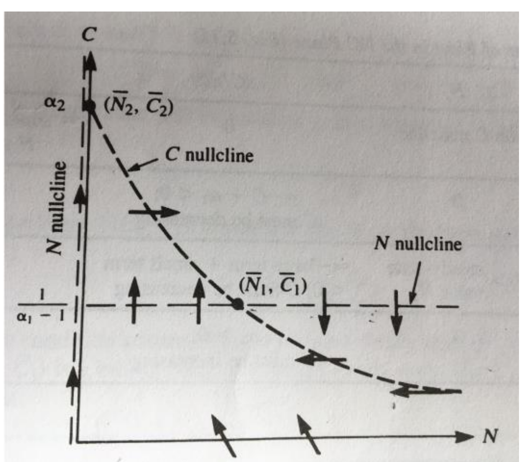
- Como las ecuaciones son adimensionales se puede remover el * de todas las variables.
- Solo quedan dos grados de libertad para la cámara
- Ecuaciones no lineales

En construcción:

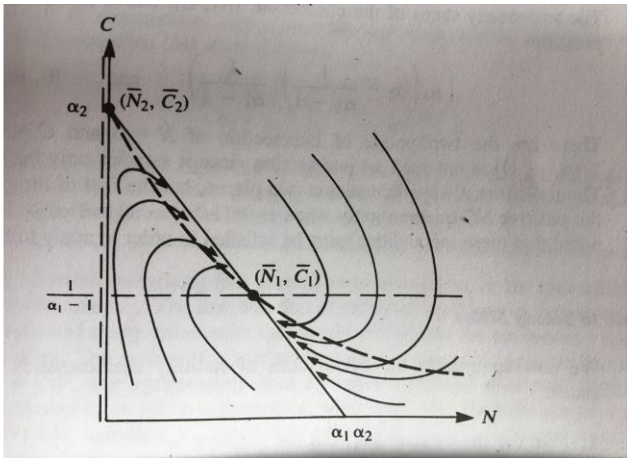
- Solución en estado estable
- Análisis de los puntos de equilibrio
- Jacobianos
- Estabilidad
- Cálculo Nullclines
- Regiones del retrato
- Condiciones de arranque
- (Ver documento escrito, sin publicar)



# Retratos de Fase



## Retratos de Fase





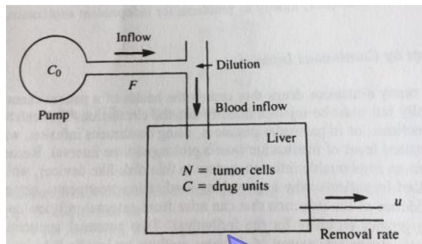

## Problema relacionado: inyección continua de medicamentos

- Infusión continua de un medicamento a una tasa constante durante un tiempo determinado.
- Usado en quimioterapia y control de diabetes.
- Entrega directa de la droga permite mayores concentraciones aplicadas localmente, con menos efectos laterales

# Modelo simple: inyección continua

- Extrer las características mas generales del problema.
- Plantear un modelo que permita empezar a estudiar el problema.
- Usar un mímico del modelo del crecimiento bacterial

Suposición: Bomba, Arteria hepática e hígado forman un sistema interconectado




Tumor: colección de N células
Medicamento C unidades



# Suposiciones y variables[2]

- Consideraciones:
- Las células cancerosas están concentradas en el hígado y existe N células por volumen unitario de sangre
- Todas las células están igualmente expuestas al medicamento.
- La sangre y el medicamento están perfectamente mezclado
- Existen C unidades de medicamento circulando por volumen unitario de sangre

| Cantidad | Símbolo | Dimensiones |
|---|---|---|
| Unidades de droga por volumen unitario | C | Masa/Volumen |
| Concentración de droga en la cámara de la bomba. | Co | Masa/Volumen |
| Densidad de células tumor por unidad de sangre | N | Numero/Volumen |
| Tasa de reproducción de las células cancerosas | α | 1/tiempo |
| Volumen de sangre en contacto con el tumor | V | Volumen |
| Tasa flujo droga entrante<br>Tasa remoción de sangre del tumor | F<br>u | Volumen/tiempo |

## Ecuaciones

- Primera aproximación:
- $\frac{dN}{dt} = \begin{Bmatrix} Tasa\ crecimiento \\ celulas\ cancerosas \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Tasa\ de\ muerte\ de\ celulas \\ inducida\ por\ la\ droga \end{Bmatrix}$
- $\frac{dC}{dt} = \begin{Bmatrix} tasa\ de\ droga \\ inyectada \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Tasa\ de\ droga\ absorbida \\ por\ las\ celulas \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Tasa\ de\ droga\ removida \\ flujo\ saliente \end{Bmatrix}$
- Es una replica del modelo del crecimiento bacterial en la cámara de crecimiento..
- No todas las células son iguales, el efecto de la droga es diferente sobre cada grupo de células.



## Análisis por compartimientos

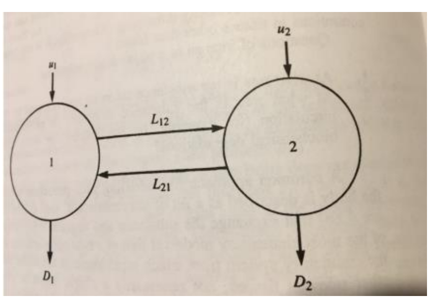
- Como se distribuyen sustancias biológicas en el cuerpo humano?
- Como determinar la dosis óptima d ellos medicamentos.
- Seguimiento de trazadores radioactivos.
- A que tasa una sustancia es adquirida o liberada por los tejidos?
- A que tasa la sustancia se degrada o es eliminada?

## Análisis por compartimientos

- El cuerpo se modela por medio de un conjunto de compartimientos interconectados, donde las sustancias están bien mezcladas (concentración uniforme).
- El intercambio y degradación de las sustancias es por cinética lineal.
- Cinética lineal: la tasa de cambio de la concentración de una sustancia depende únicamente de la concentración.



## Análisis por compartimientos




- Compartimento 1, por ejemplo el sistema circulatorio.
- Compartimento 2, tejidos u órganos interconectados con 1.
- Se desea plantear ecuaciones para descrbir los intercambios L $_{12}$ y L $_{21}$ y las degradaciones en cada uno de los compartimentos: D $_1$ y D $_2$

# Parámetros

| Parámetro | Significado |
|---|---|
| $m_1$ | Masa comp. 1 |
| $m_2$ | Masa comp 2 |
| $V_1$ | Volumen comp. 1 |
| $V_2$ | Volumen comp. 2 |
| $X_1$ | Mas/unidad vol 1 |
| $X_2$ | Mas/unidad vol 2 |
| $L_{ij}$ (1/t) | Intercambio i > j |
| $D_j$ (1/t) | Degradación del comprar 1 |
| $U_j$ (masa/tiempo) | Inyección sustancia comp. j |

- Se plantean ecuaciones de balance de masa:

$$\begin{Bmatrix} Tasa\ acumulacion \\ masa\ comp\ j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Tasa\ masa \\ entrante\ comp\ j \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Tasa\ masa \\ saliente\ comp\ j \end{Bmatrix}$$



# Ecuaciones

$$\frac{dm_1}{dt} = -L_{12}m_1 - D_1\ m_1 + L_{21}m_2 + u_1$$
$$\frac{dm_2}{dt} = L_{12}m_1 - D_2\ m_2 - L_{21}m_2 + u_2$$

Como $m_i = x_i V_i$ las ecuaciones se pueden escribir como:

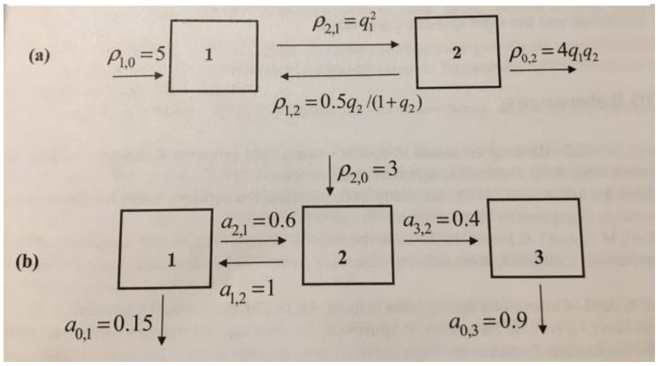
$$\frac{dx_1}{dt} = -K_1 x_1 + K_{21}x_2 + w_1$$
$$\frac{dx_2}{dt} = K_{12}x_1 - K_2\ x_2 + w_2$$

Los nuevos parámetros:

$$K_1 = L_{12} + D_1\ ;\ K_2 = L_{21} + D_2\ ;\ K_{21} = \frac{L_{21}V_2}{V_1}\ ;\ K_{12} = \frac{L_{12}V_1}{V_2}$$
$$w_1 = \frac{u_1}{V_1}\ ;\ w_2 = \frac{u_2}{V_2}$$

## Ejemplo 8 Compartimientos[5]

- Plantear las ecuaciones diferenciales para los compartimentos mostrados. (ver nota sobre las convenciones)



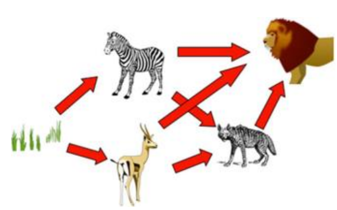



## Clase 3

### Contenido

1. Plantear modelos triviales de población
2. Plantear modelo "Malthus"
3. Plantear modelos con capacidad de carga finita
4. Simular sistemas descritos por Lotka Volterra

- **Temas repasar:**
  - Solución sistemas no lineales.
  - Retratos de fase
- **Temas Futuros**
  - Sistemas con retardo



# Modelos triviales de población[5]

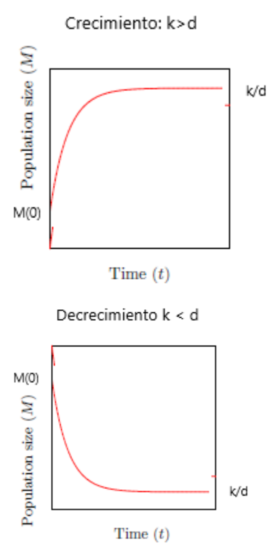
- Crecimiento con tasa constante:
$$\frac{dN}{dt} = k$$
- Solución:
$$N(t) = N(0) + kt$$
- Solo existe crecimiento. Irreal

- Se puede tener en cuenta la diferencia entre nacimientos (k) y fallecimientos (s):
$$\frac{dN}{dt} = k - s$$
- Solución:
- $N(t) = N(0) + (k - s)t$
- Si s >k la población desaparece para:
$$t = \frac{N(0)}{s - k}$$



# Modelo menos trivial

- El numero de fallecimientos es proporcional a la población, d es la tasa de fallecimientos por periodo de tiempo:
$$\frac{dN}{dt} = k - dN$$
- Solución:
$$N(t) = \frac{k}{d}\left(1 - e^{-dt}\right) + N(0)e^{-dt}$$
- Solución estado estable o equilibrio:
$$\bar{N} = \frac{k}{d}$$



## Modelo "Malthus"

- La tasa de cambio de la población debe ser la diferencia entre nacimientos (b) y muertes (d):
$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N = rN$$
- Solución:
$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

- Vida media: para decrecimiento r < 0 y el tiempo para que la población caiga a la mitad es:
$$t_{med} = \frac{0,69}{|r|}$$
- Cuando r > 0 el tiempo para que la población se duplique es igual:
$$t_{med} = \frac{0.69}{r}$$



## Modelo "Malthus"

- Malthus 1798 investigando los registros de nacimiento de una parroquia inglesa encontró que la población local se doblaba cada 30 años

- Por lo tanto:
$$r = \frac{0,69}{30} x100\% = 2,3\%\ por\ año$$
- Tasa de crecimiento cercana a la realidad hasta mediados del siglo pasado

## Malthus[6]

- The world population growth rate declined from around 2% per year 50 years ago to under 1.0% per year.
- The world population increased from 1 billion in 1800 to around 8 billion today.

$$(8B) = (1B)e^{rt_1}$$

$$r = \frac{ln8}{220}x100\% = 1{,}04\frac{\%}{year}$$



## Ro

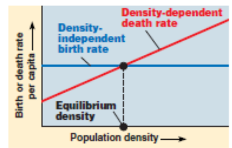
- b: tasa de nacimientos por unidad de tiempo (unidad: $t^{-1}$)
- 1/d: tiempo esperado de vida (unidad: t) para un individuo bajo condiciones óptimas.
- Ro: # esperado de descendientes por individuo en toda su vida:

$$R_0 = \frac{b}{d}$$

- Epidemiologia: propagación de una infección. Ro < 1 epidemia decrece: un infectado es reemplazado por menos de uno nuevo

# Modelos mas realistas

- Tasas de nacimiento y muerte NO son fijas, estos procesos dependen del tamaño de la población:
  - Dependencia de la tasa de muerte (d) de la densidad por competencia por recursos.





Aproximación lineal

$$d(N) = d(1 + {}^{N}/_{k})$$

K tiene las mismas unidades de N: numero de individuos.



# Muerte dependiente de densidad

- Cuando k = N la tasa de mortalidad se dobla
- La ecuación diferencial de población es:

$$\frac{dN}{dt} = \left[b - d\left(1 + {}^{N}/_{k}\right)\right] N$$

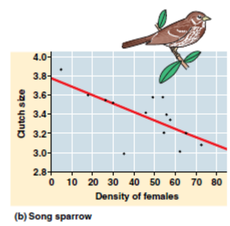
- El estado estable de la nueva ecuación:

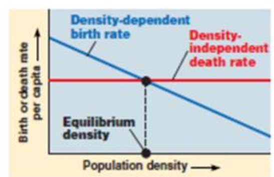
$$\bar{N} = k\frac{b-d}{d} = k(R_0 - 1)$$

- Esta es la "capacidad de carga" del sistema.
- Es la intersección entre la condición independiente (b) y la curva dependiente de densidad (d)

## Nacimientos dependientes de densidad

- Experimentos soportan el decrecimiento de la tasa de nacimientos cuando aumenta la población.
    - Aproximación lineal
    - $b(N) = b(1 - {}^{N}/_{k})$
    - Cuando k = N la tasa de natalidad es cero
    - K nuevamente es numero de individuos






## Nacimientos dependiente de densidad

- La ecuación diferencial de población es:

$$\frac{dN}{dt} = \left[b\left(1 - {}^{N}/_{k}\right) - d\right]N$$

- El estado estable de la nueva ecuación:

$$\bar{N} = k\frac{b-d}{b} = k\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

- Esta es la "capacidad de carga" del sistema.
- Es la intersección entre la condición independiente (d) y la curva dependiente de densidad (b)

# Ecuación de crecimiento logístico

- Los dos modelos dependientes de la densidad son de la forma:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

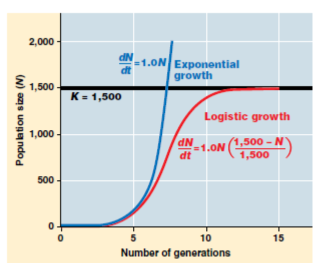
- La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación logística:

$$\frac{dN}{dt} = (b-d)N\left(1-\frac{N}{k}\right)$$



# Ecuación de crecimiento logístico

- La solución es:
- $N(t) = \frac{kN(0)}{N(0)+(k-N(0))e^{-rt}}$
- con $r = b - d$ la tasa natural de crecimiento y k la "capacidad de carga" del sistema



## Modelo Lotka Volterra

- Describe relaciones entre Predador y Presa (Predator (N)-Prey (R)):
- Tasas de muerte y nacimiento de las presas se combinan en una ecuación logística
- El consumo de presas es función del producto RxN
- La tasa de nacimiento de predadores es función del consumo



## Modelo Lotka Volterra

- Modelo presas:
- $\frac{dR}{dt} = rR\left(1 - \frac{R}{k}\right) - \alpha RN$
- Líneas que conectan puntos con $\frac{dR}{dt} = 0$ son:
- R = 0 y
- $N = \left(\frac{r}{a}\right)\left(1 - \frac{R}{k}\right)$
- Modelo predador:
- $\frac{dN}{dt} = caRN - dN$
- Líneas que conectan puntos con $\frac{dN}{dt} = 0$ son:
- N = 0 y
- $R = \left(\frac{d}{ca}\right)$

# Ejemplo 7

- En un acuario existen en k=0, pirañas y guapuchas. La población se muestrea cada día y se sabe que:
  - La tasa de reproducción de las pirañas es función de la población de guapuchas, y la tasa de muerte es proporcional a la población de pirañas.
  - La tasa de reproducción de las guapuchas es función de la cantidad de alimento externo aplicado, que no lo comen las pirañas, y su tasa de mortalidad es función de la población de pirañas.
- Plantear el modelo en variables de estado que describe a $P_p$ y $P_g$



# Ejemplo 12 Sistema discreto no lineal

- En una región del bosque habitan Z zorros y C conejos. Cuando no hay conejos para comer la tasa de mortalidad de los zorros es mayor que el índice de nacimientos; y si no hay zorros el índice de nacimiento de los conejos supera su tasa de mortalidad.
- La tasa de mortalidad porcentual total de los conejos empieza en el valor Mco (Tasa de mortalidad de conejos cuando no hay zorros) y se incrementa en forma proporcional (constante de proporcionalidad $\alpha$) , al número de zorros.
- Similarmente, la tasa de natalidad porcentual de los zorros empieza en el valor Nzo (tasa de natalidad de los zorros en ausencia de conejos) y se incrementa en forma proporcional (constante de proporcionalidad $\beta$) al número de conejos.
- Plantear y resolver el modelo de estado

# Modelo Lotka Volterra con capacidad de carga infinita

- Modelo presas:
$$\frac{dR}{dt} = rR - \alpha RN$$
- Modelo predador:
$$\frac{dN}{dt} = caRN - dN$$
- Este modelo es inestable



# Ejemplo 1 LV con capacidad infinita[7]

Los ciervos de cola blanca (White tailed deer) se alimentan de algodoncillo (milkweed).
***V*** = number of milkweed plants,
***N*** = number of deer,
***a*** = the intrinsic rate of increase of milkweed,
***b*** = the feeding rate of deer and milkweed defensive response to feeding,
***c*** = the numerical response of deer (efficiency with which deer turn food into progeny), and
***d*** = deer death rate.

- ***dV/dt = aV - bNV***
- ***dN/dt = cNV - dN***
- Simular con los siguientes valores:
- ***V*** = 200
- ***N*** = 20 (***a*** = 0.2,
- ***d*** = 0.3,
- ***c*** = 0.001, and
- ***b*** = 0.001.
- Graficar variables versus tiempo, 100 iteraciones y retratos de fase

# Ejemplo 2 LV con capacidad finita[7]

- Simular las ecuaciones LV con capacidad de carga finita:
- $dV/dt = aV(K - V)/K - bNV$
- $dN/dt = cNV - dN$
- K = 1000

- Evaluar la influencia de a, b y c sobre la estabilidad y los valores finales de las variables.
- Efecto de variar a: 0,2; 0,4 y 1,2.
- Con a = 0,5 variar b: 0.005, 0.001 y 0.0008
- Con b='.001 variar c: 0.0005, 0.001 y 0.005



# Ejemplo 16

Desarrollo de un modelo de población de plantas estacionales.

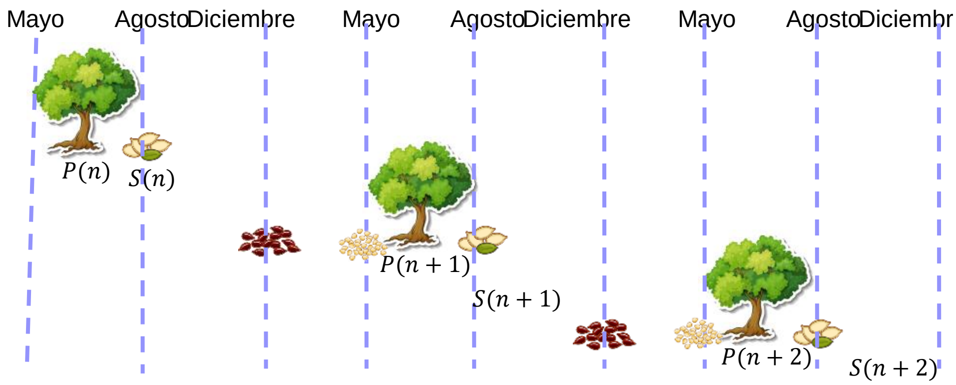
Las plantas anuales producen semillas al final del verano (por ejemplo, agosto), se secan y mueren. Una fracción de esas semillas sobreviven el invierno y algunas de ellas germinan al comienzo de la siguiente estación (por ejemplo, mayo), dando origen a la nueva generación de plantas. Algunas semillas alcanzan a sobrevivir hasta el segundo año.

Semillas mayores a dos años no son viables. Para sostener la especie el número que germina debe ser alto.

Usar las siguientes variables:

- $\gamma$ = número de semillas producido por planta.
- $\alpha$ = fracción de semillas del año anterior que germinan en Mayo
- $\beta$ = fracción de semillas de dos años que germinan en mayo
- $\sigma$ = fracción de semillas que sobreviven un invierno dado

# Ejemplo 16






# Referencias


1. GABEL Robert A. and ROBERTS Richard A. *Signals and Linear Systems.* 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 1987.
2. EDELSTEIN – KESHET Leah. *Mathematical Models in Biology.* Collection Classics in Applied Mathematics. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.
3. ERONINI Umez Eronini. *Dinámica de sistemas y control.* México: Thomson Learning. 2001.
4. BAY John S. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. New York: McGraw Hill International 1999.
5. Ellner S. and Guckenheimer J. Dynamic Models in Biology. Princeton University Press. 2006
6. Rob J. de Boer. Modeling Population Dynamics: A Graphical Approach. Disponible en: http://theory.bio.uu.nl/rdb/books/
7. https://ourworldindata.org/world-population-growth. Consultado Octubre 2022.
8. S. Malcolm. ***Plant-Herbivore Interactions Computer Modeling Assignment- Western Michigan University***