CAPITULO 7. MODELO DE SISTEMAS BIOLOGICOS

OBJETIVOS

1. Preparar y ejecutar el plan de acción para formular y resolver un modelo. (CDIO 2.1.1.4)
2. Obtener modelos conceptuales y cualitativos de diversos sistemas físicos. (CDIO 2.1.2.2)
3. Establecer las conexiones entre los fenómenos físicos y el modelo. (CDIO 2.1.2.3)
4. Usar modelos cuantitativos y soluciones. (CDIO 2.1.2.4)
5. Generalizar suposiciones para simplificar ambientes y sistemas complejos (CDIO 2.1.2.1)
6. Discutir una aproximación desde varias disciplinas para asegurar que el sistema se entienda desde todas las perspectivas relevantes. (CDIO 2.3.1.2)
7. Establecer prioridades dentro de las metas generales (CDIO 2.1.1.3)
8. Identificar sistemas propios y sistemas con interacción entre áreas (CDIO 2.3.2.4).
9. Seguir la estructura y el proceso de integración del conocimiento (CDIO 2.4.5.5).

CONTENIDO

Clase 1

Planteo ecuaciones diferencia
Planteo modelos de estado discretos. Solución vía MATLAB.

Clase 2

Modelos de población continuo y discreto
Capacidad de carga
Sistemas discretos no lineales y con retardo
Modelo predador -presa

Clase 3

Sistema biológico: propagación de infecciones y vacunación

Clases 4 y 5

Sistema biológico: conducción nervios, potencial de acción
Sistema biológico: insulina – glucosa. Simulación

Para el desarrollo de modelos de sistemas biológicos es útil revisar los conceptos básicos de los sistemas discretos, el planteo y solución de ecuaciones diferencia y el planteo y solución de modelos de estado discretos.

En un **sistema discreto** las variables están definidas en instantes discretos o determinados del tiempo. Generalmente se asume que los intervalos de tiempo en los cuales están definidas las variables están espaciados uniformemente y se denotan por un conjunto de enteros en el rango $(-\infty, \infty)$.

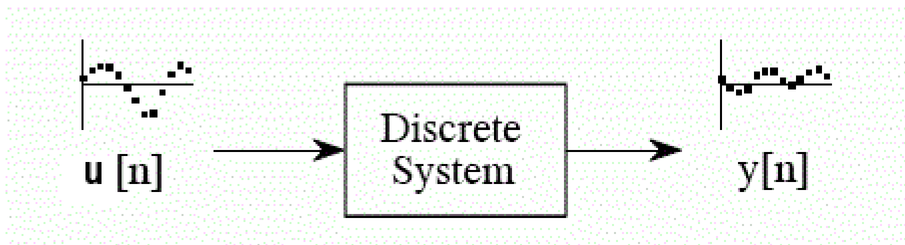


Figura 1

Las variables también se pueden notar por u(n); u(k); u(KT)

k o n: es un entero y T: intervalo de tiempo

Para los sistemas que se van a modelar se va a asumir T constante y por simplicidad se omite este parámetro en el argumento de la función. Los sistemas discretos se presentan en diferentes áreas de la ingeniería, economía, biología, etc.

Las señales discretas se pueden definir de la forma:

$$u(k) = \begin{cases} (1/2)^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

También se pueden expresar como una secuencia:

$$u(k) = \{1, 1/2, 1/4 \ldots . (1/2)^i \ldots ..\}$$

Se define la suma de dos secuencias como:

$\{c_k\} = \{a_k\} + \{b_k\}$	1

Se define el producto:

$$\{c_k\} = \{a_k\} \cdot \{b_k\}$$

Como la secuencia

$c_k = a_k b_k$	2

Los sistemas discretos se pueden describir de varias formas:

- Ecuación diferencia – ecuación de recurrencia
- Algoritmo.
- Variables de estado discretas.
- Diagrama de bloques.

La secuencia de Fibonacci (Leonardo de Pisa 1175-1250), donde cada número es la suma de los dos anteriores:

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots.\}$$

es otra forma de plantear un problema cuya solución recuerda a la media dorada o la "divina proporción", problema de la geometria griega clásica

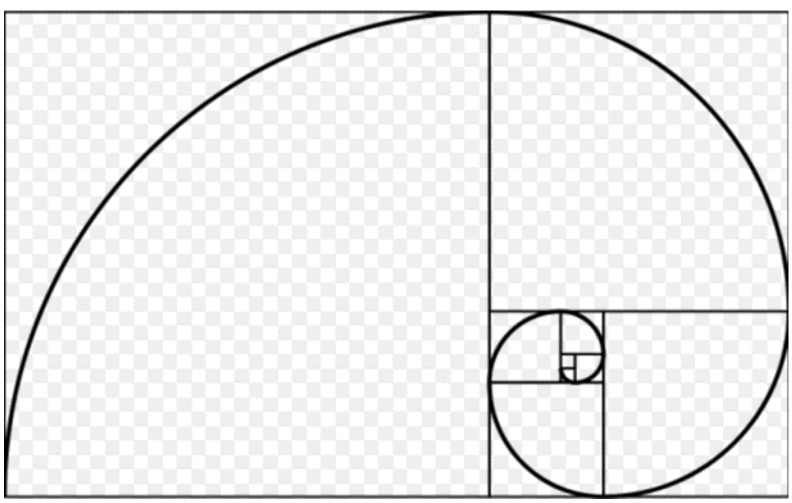


Figura 2 Cuadrado dorado y espiral logarítmica

En el rectángulo dorado se va removiendo un cuadrado a cada paso y se trazan arcos circulares que conectan esquinas opuestas de los cuadrados, esto genera una espiral logarítmica y la relación del lado mayor al lado menor de cada rectángulo resultante tiende a $1{,}61803\ldots$, la media dorada. [1]

Se cree que fue J. Kepler (1571-1630) el primero que estableció una relación entre los números de Fibonacci, la media dorada (Golden mean) y ciertos aspectos del crecimiento de las plantas[2]

La fórmula de recurrencia de Kepler:

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2); y(0) = 0;\ y(1) = 1$$

Cada elemento de la secuencia es igual a la suma de los dos predecesores inmediatos. Además, la relación entre dos elementos sucesivos es tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y(k+1)}{y(k)} \to 1{,}61803\ldots \text{ , la media dorada.}$$

La espiral logarítmica se hace evidente en la forma de las conchas de ciertos moluscos, como el Nautilus, Figura 3. El crecimiento hacia el exterior de la espiral se hace por pasos que guardan la proporción.

En botánica se observa este patrón de crecimiento en múltiples plantas y hojas: las hojas de la savia (aloe vera), las capas del repollo, las piñuelas del pino y las semillas del girasol. (Figura 4 tomada de nota 1)

Este arreglo regular se denomina **"Phyllotaxis"** (del griego phýllon "hoja" y táxis "arreglo")".[3]

[1] Deborah Byrd. What's special about the shape of a Nautilus shell? HUMAN WORLD. April 18, 2013. Disponible en: http://earthsky.org/human-world/nautilus-shell-fibonacci-logarithmic-spiral-golden-spiral. Consultado 01 febrero 2017

[2] EDELSTEIN – KESHET Leah. *Mathematical Models in Biology.* Collection Classics in Applied Mathematics. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.

[3] PhiTaxis: Fibonacci digital simulation of spiral Phyllotaxis. Disponible en http://www.sciteneg.com/PhiTaxis/PHYLLOTAXIS.htm. Consultado 01 febrero 2017

"Cutaway of a Nautilus shell showing the chambers arranged in an approximately logarithmic spiral" (Nota 1)

Figura 3

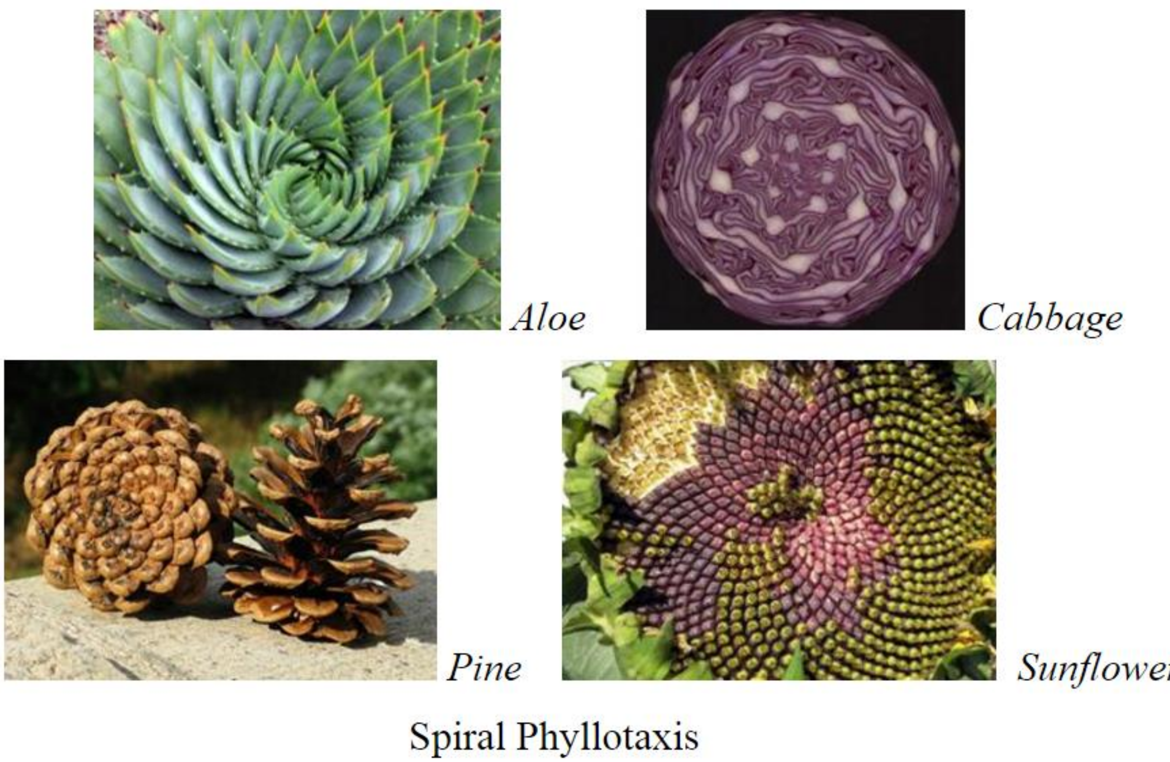


Figura 4

La fórmula de recurrencia dada por Kepler es posiblemente el primer modelo matemático de un fenómeno biológico, y se conoce también como ***ecuación diferencia***.

Ejemplo 1. Una cuenta de ahorros gana intereses del i % por año, compuesto mensualmente. El interés se calcula sobre el balance del mes anterior y el dueño puede hacer cualquier número de depósitos y retiros durante el mes.

Sea y(k-1) el balance del mes anterior, el interés generado es y(k-1)i/12, y el neto del movimiento adicional del mes (depósitos, -retiros) se nota por u(k).

$$\underbrace{y(k)}_{\substack{Saldo\\ mes\ k}} = \underbrace{y(k-1)}_{\substack{Saldo\\ mes\ k-1}} + \underbrace{y(k-1)\frac{i}{12}}_{\substack{\text{Interes sobre}\\ \text{saldo mes k}-1}} + \underbrace{u(k)}_{\substack{\text{Movimiento}\\ \text{neto mes k}}}$$

$$y(k) = \left(1 + \frac{i}{12}\right) y(k-1) + u(k)$$

Como el sistema es invariante con el tiempo también se puede escribir como:

$$y(k+1) = \left(1 + \frac{i}{12}\right) y(k) + u(k+1)$$

Ecuación diferencia de primer orden.

En general la descripción entrada – salida de un sistema discreto tiene la forma:

$y(k) = f\left[u_0 ....u_k, y_0 ....y_{k-1}\right]$	3

$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + ... + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + ... + b_m u(k-m)$	4

Ecuación diferencia lineal de coeficientes constantes, de orden n. Cuando el lado derecho es igual a cero se tiene la ecuación diferencia homogénea, cuando existe excitación externa se tiene la ecuación no homogénea.

Las ecuaciones también se pueden representar por un diagrama de bloques. Para ello el retardo unitario se representa por el bloque D (delay): la salida es igual a la entrada retardada una unidad de tiempo T. Este bloque es el equivalente de la unidad de retardo unitaria continua.

Ejemplo 2[4]. Representar gráficamente la ecuación diferencia:

$$y(k) = u(k) + \frac{3}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2)$$

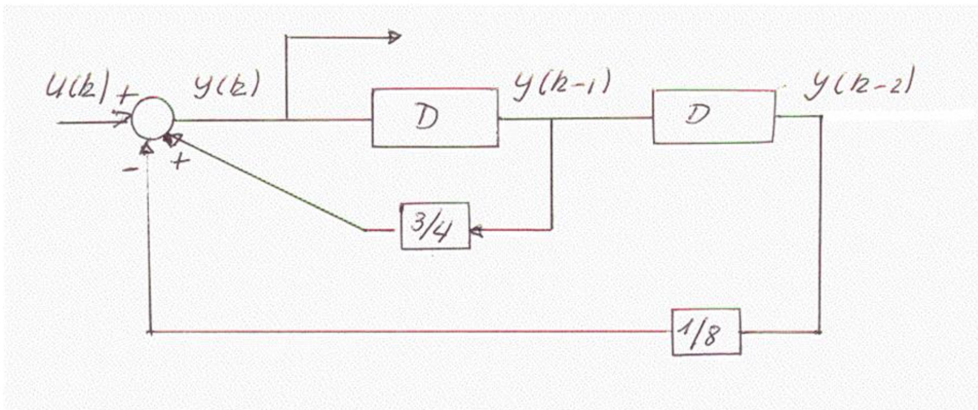


Figura 5

Significa que para encontrar el valor de la salida en el instante kT se debe tomar la entrada en kT, sumar 0.75 veces la salida en el paso (k-1)T y restar 0.125 veces la salida en el paso (k-2)T.

Algoritmo:

Un algoritmo es un procedimiento para resolver un problema recurrente.

```
% Ejemplo 2 Ecuación diferencia
u = 0:10;
y = zeros(size(u));
w = zeros(1,2);
cst = [3/4 -1/8];
for idx=1:length(u)
y(idx) = u(idx)+cst(1)*w(1)+cst(2)*w(2);
w(2) = w(1);
w(1) = y(idx);
end
figure()
stem(y)
```

[4] GABEL Robert A. and ROBERTS Richard A. *Signals and Linear Systems.* 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 1987.

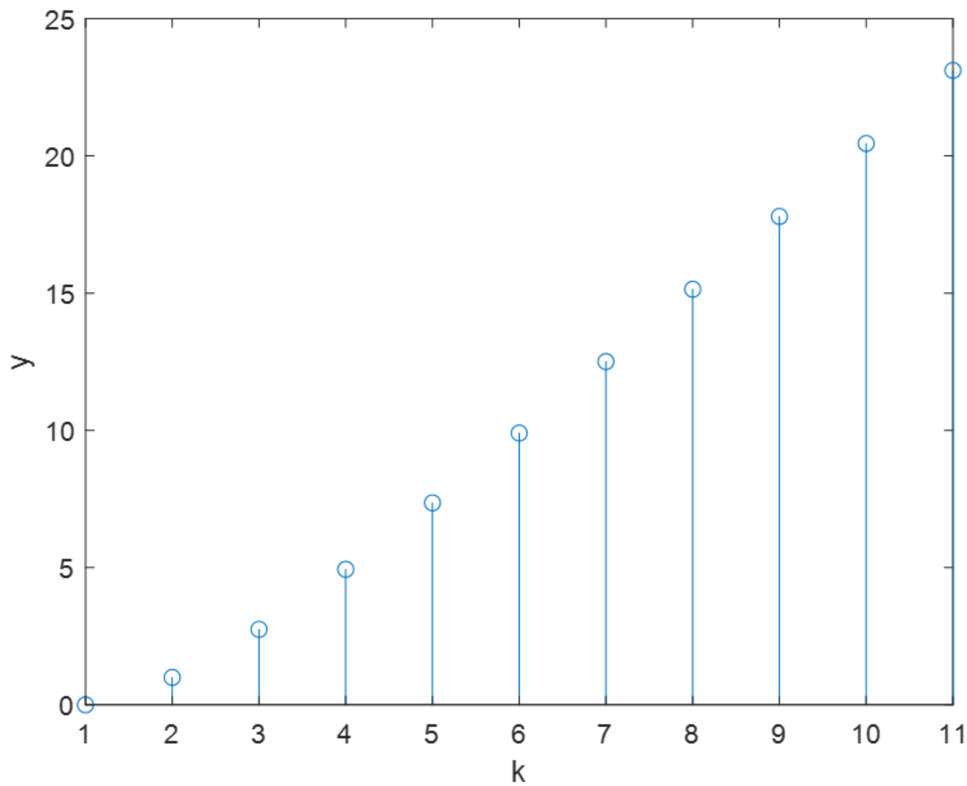


Figura 6

Descripción en el espacio de estado

La descripción por medio de variables de estado para sistemas discretos es muy similar a la empleada en los sistemas continuos: la descripción matricial es indiferente respecto a la representación del tiempo y los conceptos de valores propios, vectores propios, controlabilidad y observabilidad son comunes en las dos representaciones.

Similar al caso continuo el planteo de ecuaciones de estado se puede obtener:

- A partir de la ecuación diferencia, empleando variables tipo fase.
- Planteo directo de las ecuaciones de estado

Dada una ecuación diferencia:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_0 u(k)$$

Se definen las variables de fase como

$$\begin{aligned}
&x_1[k] = y[k] && \Rightarrow x_1[k+1] = y[k+1] \\
&x_2[k] = y[k+1] && \Rightarrow x_1[k+1] = x_2[k] \\
&x_3[k] = y[k+2] && \Rightarrow x_2[k+1] = x_3[k] \\
&\vdots \\
&x_n[k] = y[k+n-1] && \Rightarrow x_{n-1}[k+1] = x_n[k]
\end{aligned}$$

$$x_n[k+1] = y[k+n] = b_0u[k] - a_{n-1}x_n[k] - \cdots - a_1x_2[k] - a_0x_1[k]$$

La forma compañera (*companion) es*

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u[k]$$ $$y[k] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x[k]$$	5

De la misma forma que para los sistemas continuos, se pueden desarrollar otras realizaciones, útiles en el análisis y diseño de sistemas de control en el espacio de estado.

La ecuación discreta general con retardos sobre la señal de entrada es:

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \ldots + a_1y(k+1) + a_0y(k) \\ = b_nu(k+n) + b_{n-1}u(k+n-1) + \cdots b_1u(k+1) + \ b_0u(k) \end{aligned}$$

Una forma compañera es[5]:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} u[k]$$ $$y[k] = [(b_0 - a_0b_n) \quad (b_1 - a_1b_n) \quad \ldots \quad (b_{n-1} - a_{n-1}b_n] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \ b_nu(k)$$	6

Ejemplo 3*.* Un sistema esta descrito por:

[5] Linear Dynamic Systems and Signals, Prentice Hall 2003. Prepared by Professor Zoran Gajic

$$y[k+3] + 2y[k+2] + 4y[k+1] + y[k] = u[k]$$

a. Plantear el modelo en variables de estado tipo fase:

Como hay 3 retardos sobre la variable $\boldsymbol{y}$ se definen 3 variables de estado:

$$x_1[k] = y[k]$$
$$x_2[k] = y[k+1]$$
$$x_3[k] = y[k+2]$$
$$x_1[k+1] = y[k+1] = x_2[k]$$
$$x_2[k+1] = y[k+2] = x_3[k]$$
$$x_3[k+1] = y[k+3] = -2x_3[k] - 4x_2[k] - x_1[k] + U[k]$$

Las ecuaciones de estado son

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \end{bmatrix}$$

b. representar el conjunto de ecuaciones por un diagrama de bloques:

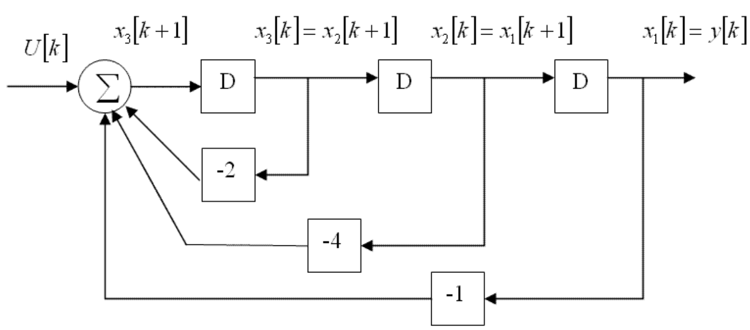


Figura 7

La forma general de la representación por medio de variables de estado es:

$\boldsymbol{X}[k+1] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{U}(k), k)$ $\boldsymbol{Y}[k] = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{U}(k), k)$	7

Cuando el sistema es variante con el tiempo:

$\boldsymbol{X}[k+1] = \boldsymbol{A}_d(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}_d(k)\boldsymbol{U}(k)$ $\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}_d(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}_d(k)\boldsymbol{U}(k)$	8

Donde A_d, B_d, C_d, D_d son funciones de k y de las siguientes dimensiones:

- **X** (k) vector de variables de estado del sistema (n x 1)
- $\mathbf{A_d}$ (k) matriz del sistema (n x n)
- $\mathbf{B_d}$ (k) matriz de entrada (n x p)
- **U** (k) vector de variables de entrada (p x 1)
- **Y** (k) vector de variables de salida (q x 1)
- $\mathbf{C_d}$ (k) matriz de salida (q x n)
- $\mathbf{D_d}$ (k) matriz "hacia delante" (q x p)

Para el caso invariante las matrices del sistema, A_d, B_d, C_d, D_d, no son funciones de la variable k:

$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{U}(k)$ $\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{U}(k)$	9

Ejemplo 4. Plantear la ecuación de estado

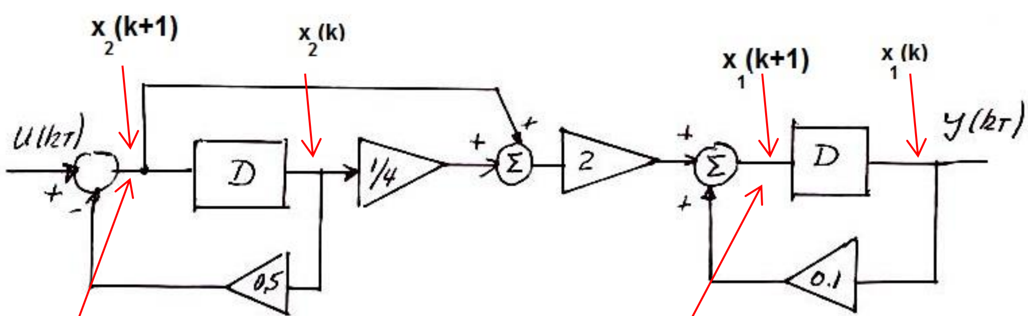


Figura 8

$\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{x_2(k+1) = u(k) - 0,5x_2(k)}$

$\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{x_1(k+1) = 0,1x_1(k) + 2[x_2(k+1) + 0,25x_2(k)]}$

Reemplazando ecuación a en la b

$$\boldsymbol{x_1(k+1) = 0,1x_1(k) - 0,5\,x_2(k) + 2u(k)}$$

La representación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

Solución de la ecuación de estado discreta

En el capítulo anterior se obtuvo la forma general de la representación por medio de variables de estado, ecuación 20, simplificada como:

$$\boldsymbol{X}[k+1] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{U}(k), k)$$
$$\boldsymbol{Y}[k] = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}(k), \boldsymbol{U}(k), k)$$

Cuando el sistema es variante con el tiempo:

$\boldsymbol{X}[k+1] = \boldsymbol{A}_d(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}_d(k)\boldsymbol{U}(k)$ $\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}_d(k)\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}_d(k)\boldsymbol{U}(k)$	10

Donde A_d, B_d, C_d, D_d son funciones de k y de las siguientes dimensiones:

- **X** (k) vector de variables de estado del sistema (n x 1)
- $\boldsymbol{A_d}$ (k) matriz del sistema (n x n)
- $\boldsymbol{B_d}$ (k) matriz de entrada (n x p)
- **U** (k) vector de variables de entrada (p x 1)
- **Y** (k) vector de variables de salida (q x 1)
- $\boldsymbol{C_d}$ (k) matriz de salida (q x n)
- $\boldsymbol{D_d}$ (k) matriz "hacia delante" (q x p)

Para el caso invariante las matrices del sistema, A_d, B_d, C_d, D_d, no son funciones de la variable k:

$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{U}(k)$ $\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{U}(k)$	11

Solución homogénea

Para el caso invariante con el tiempo, la respuesta debida al estado inicial únicamente, sin entrada externa:

$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \cdot \boldsymbol{X}(k)$	12

Con un vector de condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{X}_{K=0} = \boldsymbol{X}(0)$$

Por medio de iteraciones:

$$X(1) = Ad \cdot X(0)$$
$$X(2) = Ad \cdot X(1) = Ad^2 \cdot X(0)$$

Se llega a la forma general:

$\boldsymbol{X}(k) = (\boldsymbol{A}_d)^k \cdot \boldsymbol{X}(0)$	13

La matriz $A_d^{\,k}$ es la matriz de transición de estados para el sistema discreto, y cumple un papel similar a $\phi(t) = e^{At}$ en el sistema continuo.

Para resolver el sistema homogéneo solo es necesario evaluar $A_d^{\,k}$ empleando multiplicaciones sucesivas o un programa como MATLAB. De la misma forma que para el caso continuo existen también métodos analíticos, como el empleo del teorema de Cayley – Hamilton, más allá del objetivo de este curso.

Ejemplo 5. Encontrar la solución homogénea de:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + x_3(k)$$
$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_2(k) + 2x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_3(k)$$

$$X(0) = [2 \quad 4 \quad 6]^T$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

Para k = 0:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Para k = 1

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ x_3(2) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 & -2(\frac{1}{2})^2 & 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}(2-2) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & 2(\frac{1}{2})^{2-2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

Para k = 2

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \\ x_3(3) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^3 & -3\left(\frac{1}{2}\right)^3 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}(2-3) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & 3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

En general la matriz de transición de estado es:

$$A^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & -k\left(\frac{1}{2}\right)^k & k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}(2-k) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k & k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

$$X[k] = Ad^k \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k (-12k^2 + 24k - 2) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k (24k + 4) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^k 6 \end{bmatrix}$$

Respuesta completa

Para el caso no homogéneo se considera una secuencia de vectores entrada en los instantes k = 0, 1, 2,… $U(0), U(1)$…. y un conjunto de condiciones iniciales X(0).

$$\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{U}(k)$$
$$\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{U}(k)$$

La solución completa es de la forma:

$$X(1) = A_dX(0) + B_dU(0)$$
$$X(2) = A_dX(1) + B_dU(1) = {A_d}^2 \cdot X(0) + A_d \cdot B_d \cdot U(0) + B_d \cdot U(1)$$
$$X(3) = A_dX(2) + B_dU(2) = {A_d}^3 \cdot X(0) + {A_d}^2 \cdot B_d \cdot U(0) + A_d \cdot B_d \cdot U(1) + B_d \cdot U(2)$$

Para el instante t_k

$$\boldsymbol{X}(k) = {\boldsymbol{A}_d}^k\boldsymbol{X}[0] + \sum_{j=0}^{k-1} {\boldsymbol{A}_d}^{k-1-j}\boldsymbol{B}_d \cdot \boldsymbol{U}[j]$$

Haciendo un cambio de variable:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{A}_d^k \; \boldsymbol{X}[\boldsymbol{0}] + \sum_{j=1}^{k} {\boldsymbol{A_d}}^{k-j}\boldsymbol{B_d} \cdot \boldsymbol{U}[j-1]$$	30

Comparada con la solución continua

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B \cdot U(\tau) \cdot d\tau$$

La matriz de transición de estados para sistemas invariantes es

$$\Phi(t,\tau) = e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

Y en la representación discreta:

$\boldsymbol{\Phi}[(k,j)] = \boldsymbol{A}^{k-j}$	13

La respuesta completa en términos de la matriz de transición de estados:

$\boldsymbol{X}[k] = \boldsymbol{\Phi}[k]\boldsymbol{X}[0] + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{\Phi}[k,j] \cdot \boldsymbol{B}_d \cdot \boldsymbol{U}[j-1]$	14

La única diferencia entre la representación continua y la discreta es el uso de la sumatoria en reemplazo de la integral.

Una respuesta en forma cerrada es muy dispendiosa de obtener porque la sumatoria de convolución se debe evaluar n^2 veces; es más directo evaluar la respuesta empleando multiplicaciones sucesivas o MATLAB®

Ejemplo 6. Para el sistema discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2]k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix}$$

$$y[k] = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}$$

Encontrar y(k) para las condiciones iniciales:

$$x[0] = [-1 \quad 3]^T$$

Y las entradas:

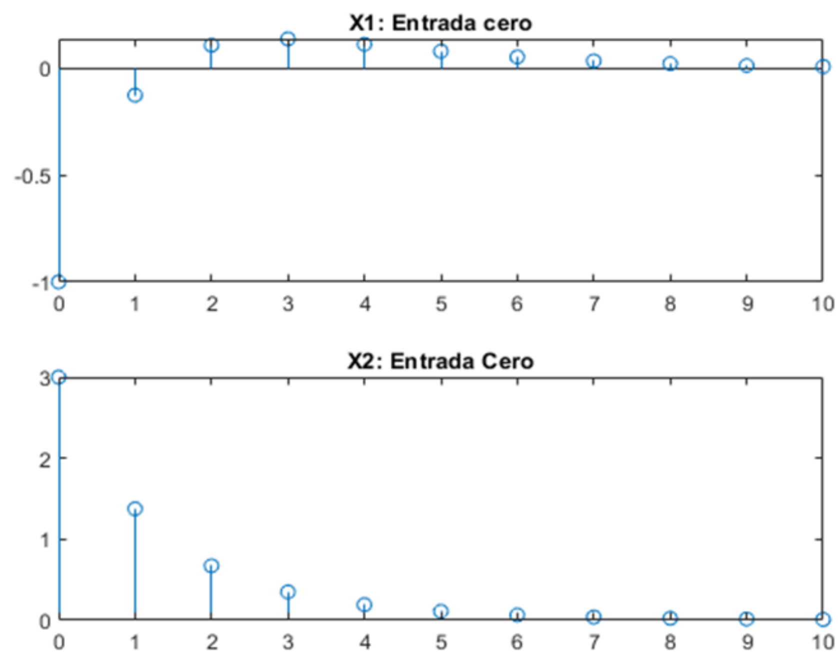
$$u_1[k] = k \;\; y \;\; u_2[k] = e^{-k} \quad \text{para k } = \text{ 0,1,.... y 0 para k} < 0$$

```
%Sistemas_Dinamicos Ejemplo 6
%Solución sistemas discretos
clear all; close all
Ad = [1/2  1/8; 1/8  1/2];
Bd = [1 0; 0 1];
Cd = [1 2];
Dd = 0;
%Modelo de estado
Ts = 1;
med = ss(Ad,Bd,Cd,Dd,1)
k = 0:1:10;
%respuesta entrada cero
[Y,k,X]= initial(med,[-1 3]',k);
subplot(2,1,1),stem (k,X(:,1)),title('X1: Entrada cero')
subplot(2,1,2),stem (k,X(:,2)),title('X2: Entrada Cero')
figure
stem(k,Y),title 'Respuesta entrada cero Y'
%Respuesta Estado cero
U1 =k.* ones(size(k));
U2 = exp(-k).*ones(size(k));
Uin =[U1'; U2']
[Y1,k,X1]= lsim(med,Uin,k);
figure
subplot(2,1,1),stem (k,X1(:,1)),title('X1: Estado cero')
subplot(2,1,2),stem (k,X1(:,2)),title('X2: Estado Cero')
figure
stem(k,Y1),title 'Respuesta Estado cero Y'
% % respuesta completa
[Y2,k,X2]= lsim(med,Uin,k,[-1 3]');
figure
subplot(2,1,1),stem (k,X2(:,1)),title 'X1: respuesta completa'
subplot(2,1,2),stem (k,X2(:,2)),title 'X2: respuesta completa'
figure
stem(k,Y2),title 'Respuesta completa Y'
```

```
A =
        x1     x2
  x1    0.5  0.125
  x2  0.125    0.5

B =
      u1  u2
  x1   1   0
  x2   0   1

C =
      x1  x2
```

```
  y1   1   2

 D =
      u1  u2
  y1   0   0

Uin =

 Columns 1 through 7

        0    1.0000    2.0000    3.0000    4.0000    5.0000    6.0000
   1.0000    0.3679    0.1353    0.0498    0.0183    0.0067    0.0025

 Columns 8 through 11

   7.0000    8.0000    9.0000   10.0000
   0.0009    0.0003    0.0001    0.0000
```

Respuesta debida a las condiciones iniciales (Respuesta a entrada cero)



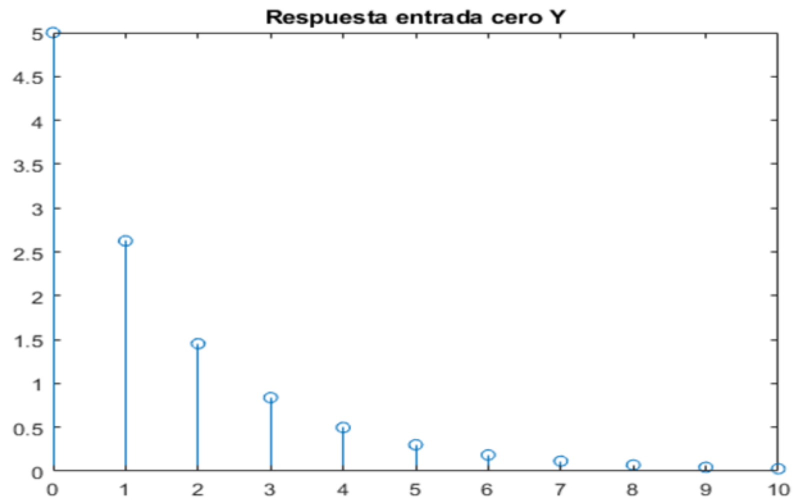
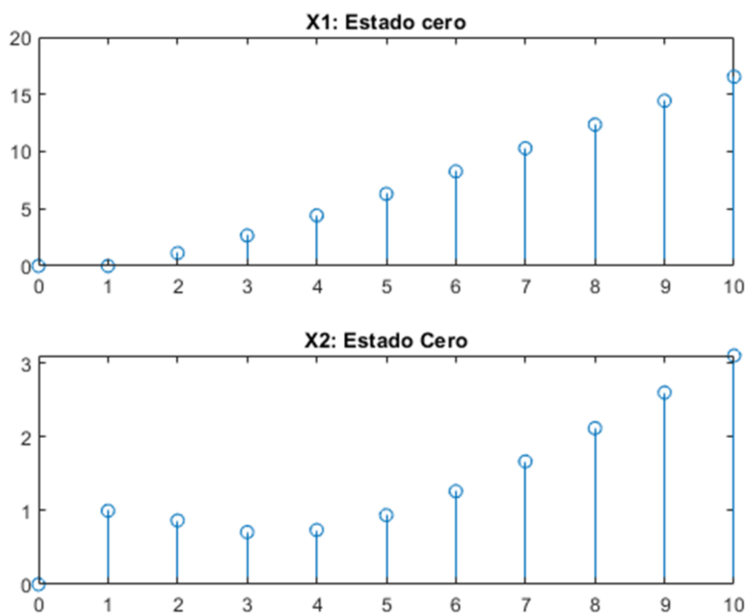


Figura 9

Respuesta debida a la entrada o en estado cero



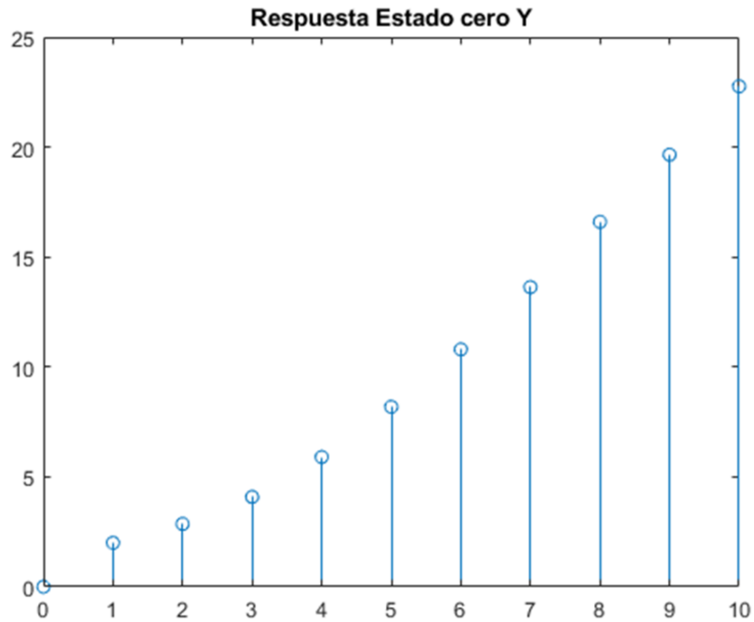
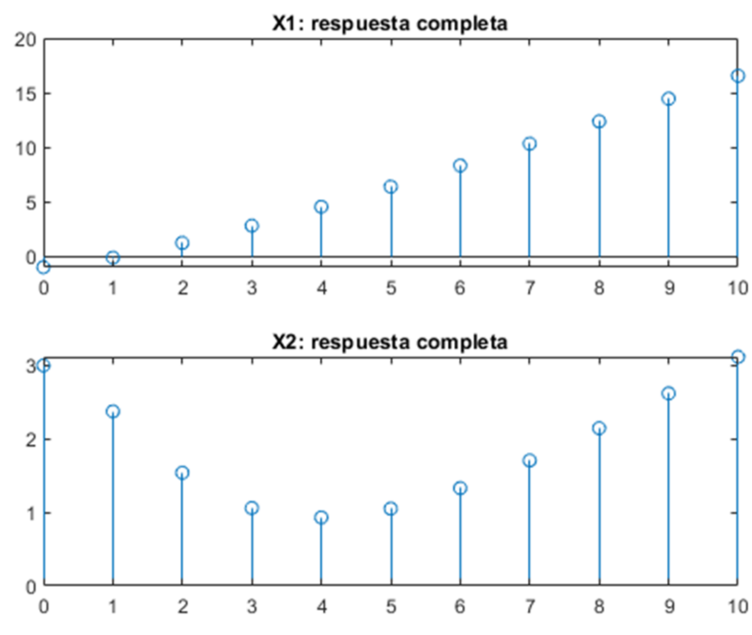


Figura 10

Respuesta completa



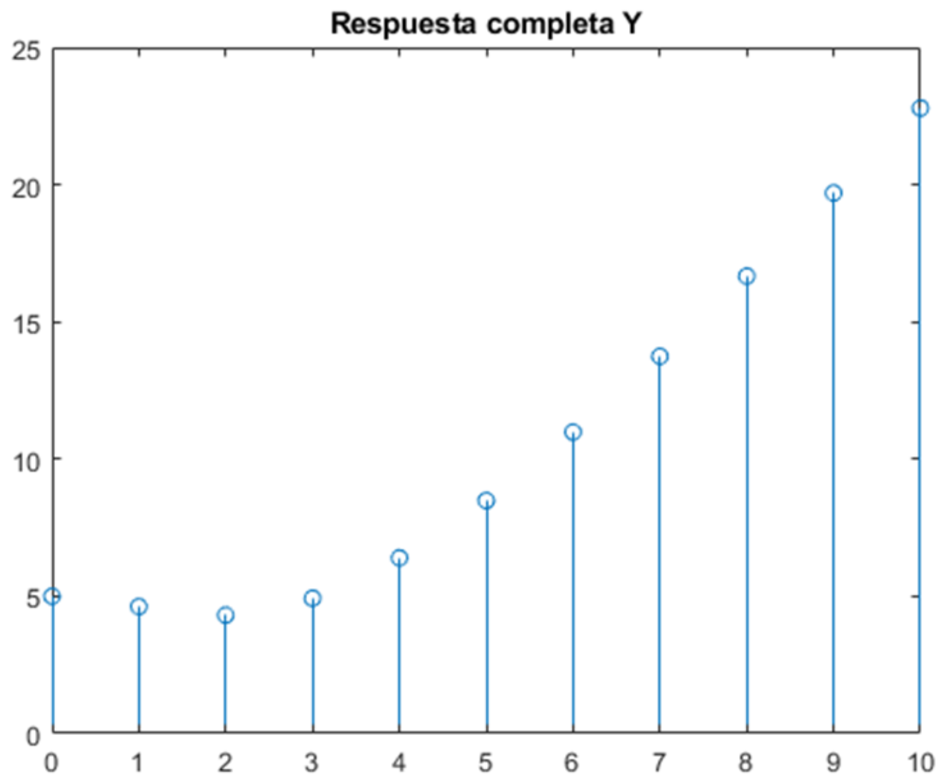


Figura 11

Ejemplo 7. Encontrar la solución de la ecuación

$$y(k) = y(k-1) + y(k-2)$$

Con condiciones iniciales $y_0 = y_1 = 1$

Esta ecuación generará la secuencia de Fibonacci, creciente ilimitadamente:

$$y(k) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Como el sistema es invariante con el tiempo:

$$y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 0$$

La forma "companion" es:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1(k+1)} \\ \boldsymbol{x_2(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y(k)} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1(k)} \\ \boldsymbol{x_2(k)} \end{pmatrix}$$

La solución homogénea:

$$\boldsymbol{X}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y(k)} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz Ad son

$$det[\lambda I - A] = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6182 \ldots$: la media dorada

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}6182 \ldots$$

La solución analítica es de la forma:

$$y(k) = C_1(\lambda_1)^k + C_2(\lambda_2)^k$$

Empleando las condiciones iniciales se obtiene:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$
$$y(1) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para hallar las constantes se tiene:

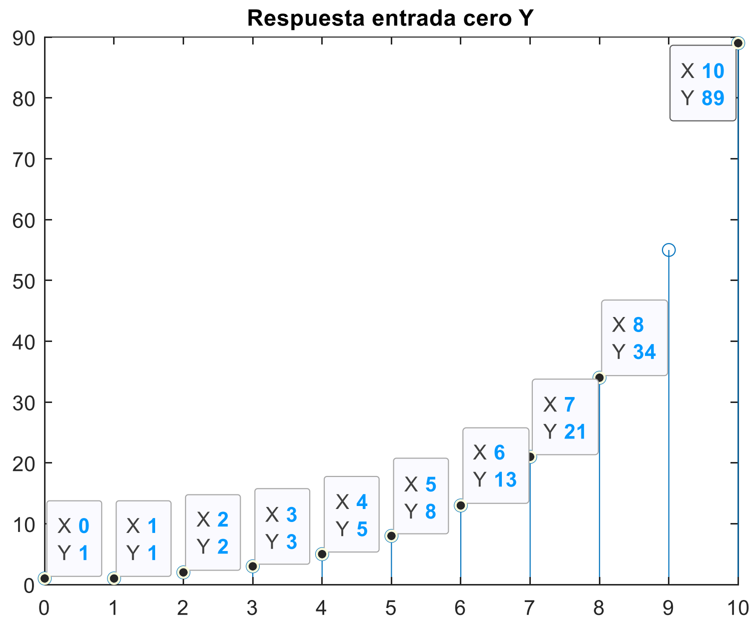
$$c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = 0.27$$
$$c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = 0.724$$

Entonces:

$$y(k) = 0.724[1.62]^k + 0.276[-0.62]^k$$

El término $[1.62]^k$ es creciente y por lo tanto y(k) crece ilimitadamente.

Para sistemas discretos si la magnitud de un valor propio es mayor que uno, fuera del círculo de radio unitario, el sistema es inestable.




```
%Sistemas_Dinamicos Ejemplo  7
%Solución sistemas discretos _ Fibonacci
clear all; close all
Ad = [0  1; 1  1];
Bd = [0 0]';
Cd = [1 0];
Dd = 0;
%Modelo de estado
Ts = 1;
med = ss(Ad,Bd,Cd,Dd,1)
k = 0:1:10;
%respuesta entrada cero
[Y,k,X]= initial(med,[1 1]',k);
subplot(2,1,1),stem (k,X(:,1)),title('X1: Entrada cero')
subplot(2,1,2),stem (k,X(:,2)),title('X2: Entrada Cero')
figure
stem(k,Y),title 'Respuesta entrada cero Y'
```

Esta ecuaciones se usan para modelar el crecimiento geométrico, en el cual se asume que una población tiene N_k individuos al final del año k con k= 0,1,2,…, si la población aumenta a una tasa del 2% por año de la población existente al principio del año:

$$N(k+1) = N(k) + 0.02N(k)$$
$$N(k+1) = 1.02N(k) \qquad \mathrm{N_0} \ \text{población inicial año 0}$$

En general se puede escribir como:

$$N(k+1) = \alpha N(k)$$

Donde α es la tasa de crecimiento.

Las ecuaciones también se pueden representar por un diagrama de bloques. Para ello el retardo unitario se representa por el bloque D (delay): la salida es igual a la entrada retardada una unidad de tiempo T.

Este bloque es el equivalente de la unidad de retardo unitaria continua.

Ejemplo 14.[6] Desarrollo de un modelo de población de plantas estacionales.

Las plantas anuales producen semillas al final del verano (por ejemplo, agosto), se secan y mueren. Una fracción de esas semillas sobreviven el invierno y algunas de ellas germinan al comienzo de la siguiente estación (por ejemplo, mayo), dando origen a la nueva generación de plantas. Algunas semillas alcanzan a sobrevivir hasta el segundo año. Semillas mayores a dos años no son viables. Para sostener la especie el número que germina debe ser alto.

Usar las siguientes variables:

γ = número de semillas producido por planta.

[6] Tomado de EDELSTEIN – KESHET Leah. *Mathematical Models in Biology.* Collection Classics in Applied Mathematics. Philadelphia. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2005.

α = fracción de semillas del año anterior que germinan en Mayo

β = fracción de semillas de dos años que germinan en mayo

σ = fracción de semillas que sobreviven un invierno dado

Variables y suposiciones:

Las **p(n)** plantas existentes en el año inicial florecen en primavera y cada una produce **γ** semillas en el mes de agosto. Una fracción **σ** de semillas sobrevive el invierno y de ellas una fracción **α** germina la primavera siguiente (generación de primer año). Una fracción **β** sobrepasa otro invierno y germina una primavera más tarde (generación de segundo año).

Variables:

- p(n) es el número de plantas en al año n
- $s^0(n)$ numero de semillas nuevas producidas en agosto
- $s^1\ (n)$ es el número de semillas, de antigüedad un año, en el año n y antes de germinar (ejemplo Abril)
- $s^2\ (n)$ es el número de semillas, de antigüedad dos años, en el año n y antes de germinar (ejemplo Abril)
- $\bar{s}^1(n)$ es el número de semillas, de antigüedad un año, que quedan en Mayo (después de la germinación de unas semillas en Abril)
- $\bar{s}^1(n)$ es el número de semillas, de antigüedad un año, que quedan en Mayo (después de la germinación de unas semillas en Abril)
- $\bar{s}^2(n)$ es el número de semillas, de antigüedad dos años, que quedan en Mayo (después de la germinación de unas semillas en Abril)

Plantear una ecuación para el número de plantas en el año n+2. P(n+2)

El problema se resume en un esquema

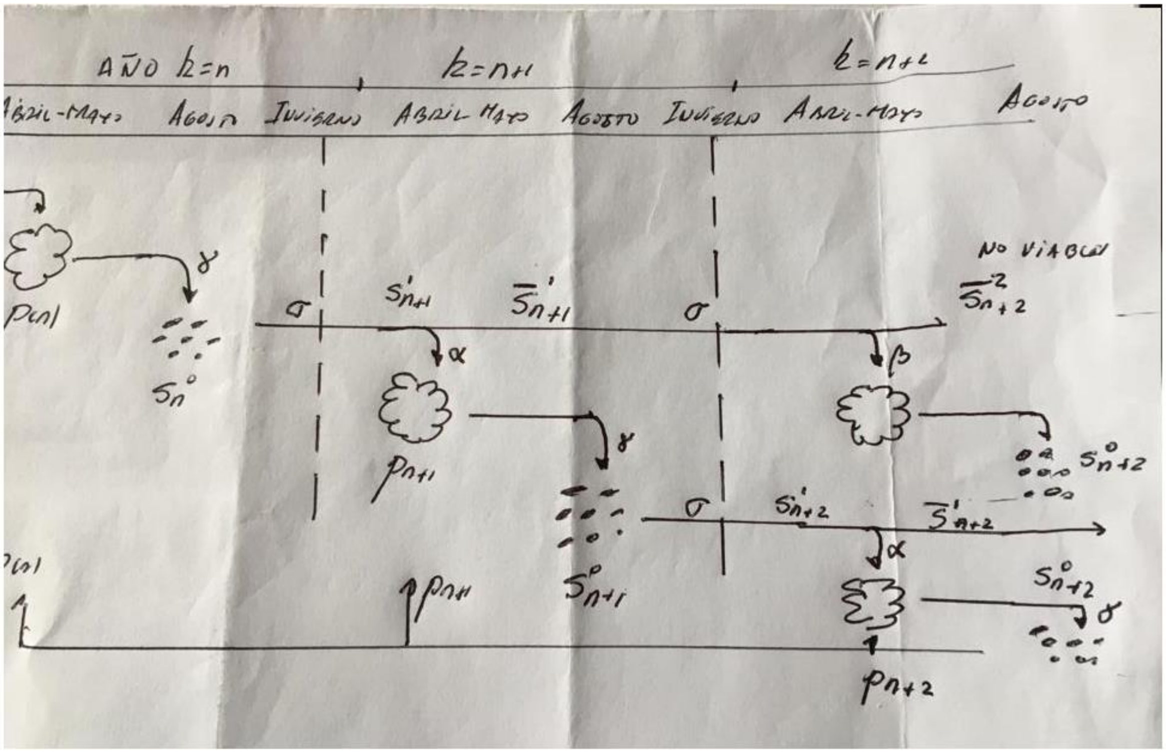


Figura 17

Ecuaciones:

En mayo germinan una fracción de las semillas del año anterior + una fracción de las semillas de dos años de antigüedad:

$$p(n) = \alpha S^1(n) + \beta S^2(n)$$

Después de la germinación el banco de semillas se reduce de tal forma que, para las dos clases de semillas se tiene:

$$\begin{aligned} &Semillas\ remanentes \\ &\qquad = (Fraccion\ que\ NO\ germino) * Numero\ de\ semillas\ existente\ en\ Abril \end{aligned}$$

$$\bar{s}^1(n) = (1-\alpha)S^1(n)$$

$$\bar{s}^2(n) = (1-\beta)S^2(n)$$

Agosto de cada año se producen semillas nuevas a una tasa de:

$$S^0(n) = \gamma p(n)$$

Cada invierno el banco de semillas cambia por mortalidad y envejecimiento y, las semillas nuevas en la generación n serán un año más viejas en la generación n+1

$$s^1\ (n+1) = \sigma S^0(n)$$

$$s^2\ (n+1) = \sigma \bar{s}^1(n)$$

Las ecuaciones se pueden ir combinando para obtener:

$$s^1\ (n+1) = \sigma S^0(n) = \sigma\gamma p(n)$$

$$s^2\ (n+1) = \sigma \bar{s}^1(n) = \sigma(1-\alpha)S^1(n)$$

La ecuación para la población de plantas en el año n+1 es:

$$p(n+1) = \alpha S^1(n+1) + \beta S^2(n+1)$$

$$p(n+1) = \alpha\sigma\gamma p(n) + \beta\sigma(1-\alpha)S^1(n)$$

Pero como el sistema es invariante:

$$s^1\ (n) = \sigma S^0(n-1) = \sigma\gamma p(n-1)$$

La población de plantas en al año n+1:

$$p(n+1) = \alpha\sigma\gamma p(n) + \beta\sigma^2(1-\alpha)\gamma p(n-1)$$

Ecuación diferencia lineal, invariante, de segundo orden

Verificación:

Como el sistema es invariante la ecuación también se puede plantear como:

$$p(n) = \alpha\sigma\gamma p(n-1) + \beta\sigma(1-\alpha)\sigma\gamma p(n-2)$$

De la misma forma que la transformada de Laplace permite transformar las ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en ecuaciones algebraicas en la variable *s,* la transformada Z permite transformar las ecuaciones de diferencia, lineales e invariantes en ecuaciones algebraicas en la variable *Z,* como se estudiará en cursos posteriores.

Ejemplo 12.[7] En una región del bosque habitan Z zorros y C conejos. Cuando no hay conejos para comer la tasa de mortalidad de los zorros es mayor que el índice de nacimientos; y si no hay zorros el índice de nacimiento de los conejos supera su tasa de mortalidad.

La tasa de mortalidad porcentual total de los conejos empieza en el valor Mco (Tasa de mortalidad de conejos cuando no hay zorros) y se incrementa en forma proporcional (constante de proporcionalidad α) , al número de zorros.

Similarmente, la tasa de natalidad porcentual de los zorros empieza en el valor Nzo (tasa de natalidad de los zorros en ausencia de conejos) y se incrementa en forma proporcional (constante de proporcionalidad β) al número de conejos.

Usar: Nco = tasa porcentual de natalidad de conejos en ausencia de zorros
Mzo = tasa porcentual de mortalidad de zorros en ausencia de conejos
Zo = número de Zorros en t = 0
Co = número de conejos en t = 0

a. Plantear las ecuaciones de estado continuas para Z(t) y C(t).

b. Plantear las ecuaciones de estado discretas para las mismas variables.

c. Empleando MATLAB resolver el conjunto b. Asuma y justifique todos los parámetros. Grafique el diagrama de fase Z(k) vs C(k). Variar los parámetros y observe los “diagramas de fase” resultantes. ¿Qué conclusiones se pueden sacar?

El modelo general de población es de la forma:

Cambio de Población = [Tasa natalidad][Población] - [Tasa mortalidad][Población]

a. Las tasas de mortalidad total de conejos, Mc, y de natalidad total de zorros, Nz, son:

$$Mc = Mco + \alpha Z(t)$$
$$Nz = Nzo + \beta C(t)$$

La ecuación continua que describe la población de conejos es:

[7] Tomado de referencia 13

$$\frac{dC(t)}{dt} = Nco \bullet C(t) - [Mco + \alpha \bullet Z(t)] \bullet C(t)$$

La ecuación continua que describe la población de zorros es:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = [Nzo + \beta \bullet C(t)] \bullet Z(t) - Mzo \bullet Z(t)$$

Reorganizando:

$$\frac{dC(t)}{dt} = [Nco - Mco] \bullet C(t) - \alpha Z(t) \bullet C(t)$$
$$\frac{dZ(t)}{dt} = [Nzo - Mzo] \bullet Z(t) + \beta Z(t) \bullet C(t)$$

Dos ecuaciones diferenciales de primer orden NO LINEALES.

b. De las dos últimas ecuaciones se obtiene el modelo discreto:

$$C(k+1) - C(k) = [Nco - Mco] \bullet C(k) - \alpha Z(k) \bullet C(k)$$

$$Z(k+1) - Z(k) = [Nzo - Mzo] \bullet Z(k) + \beta Z(k) \bullet C(k)$$

c. Solución empleando MATLAB

Caso 1: Conejos inicial: 100, Zorros inicial 10, α = 1% y β = 0.1% (500 Iteraciones)

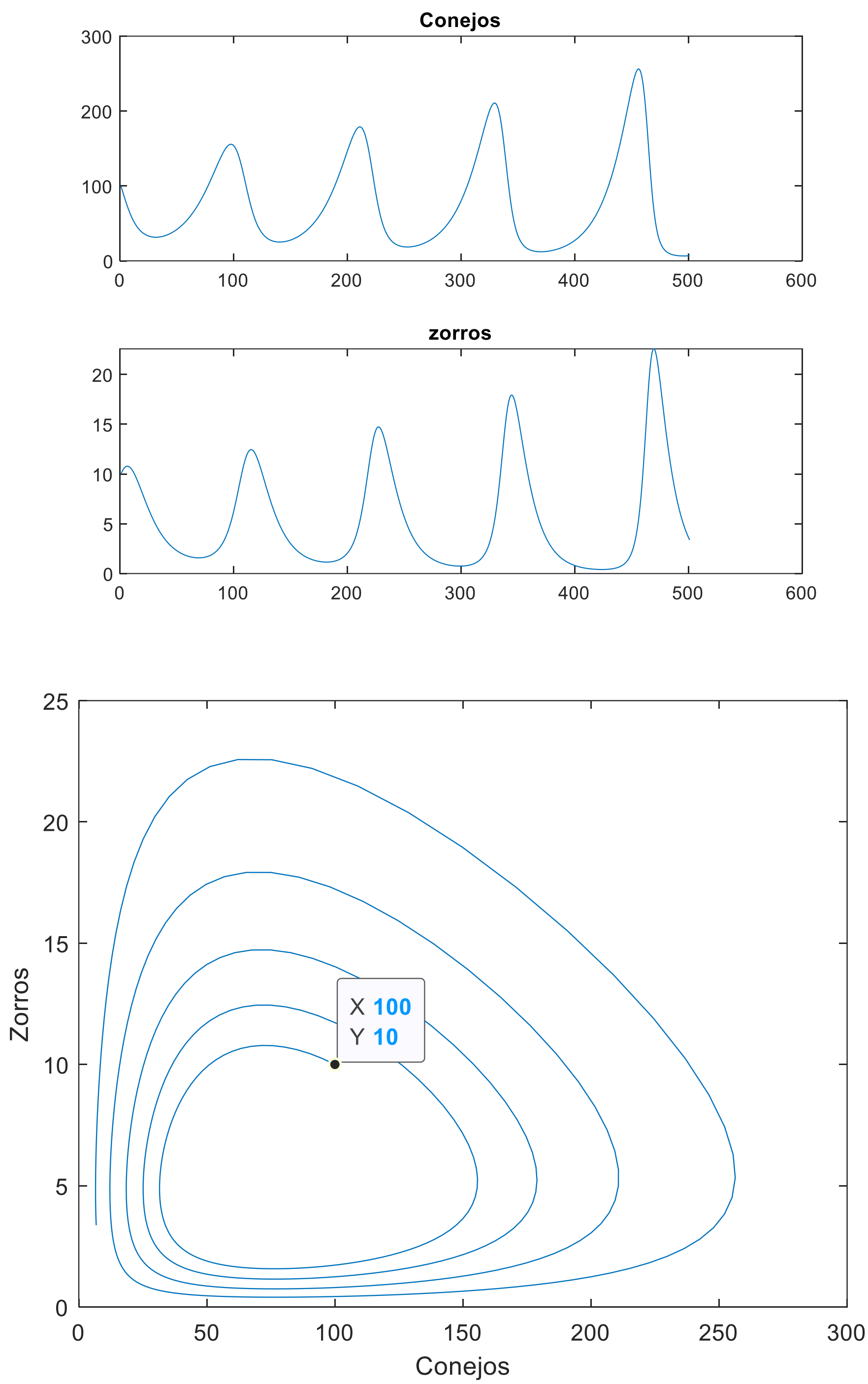


Figura 14a

Caso 2: Conejos inicial: 100, Zorros inicial 10, α = 1% y β = 0.5%

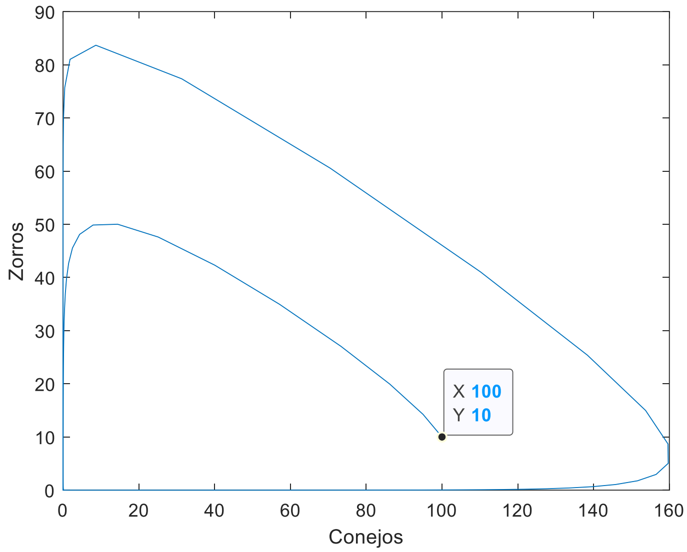


Figura 14b

Caso 3: Conejos inicial: 100, Zorros inicial 10, α = 0.5% y β = 1%: Alto crecimiento de la población de zorros, alta tasa de mortalidad de conejos

Se acabaron los conejos a las 8 iteraciones.

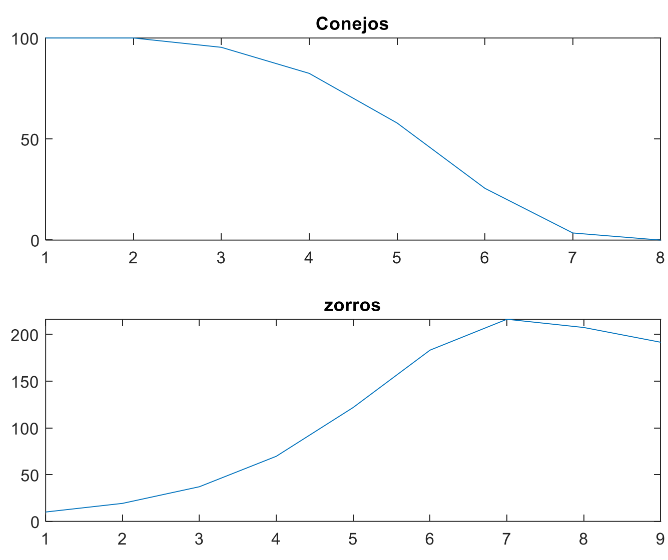


Figura 14c

El comportamiento de las variables es altamente dependiente de los parámetros: en el caso uno la solución es cíclica, después de 500 iteraciones todavía no se ha llegado a un punto de equilibrio, en los casos 2 y 3 rápidamente se llega al punto (0,0)

También hay condiciones para las cuales se agota la población de conejos:

Nco = 0.1000

Mco = 0.0500

Nzo = 0.0050

Mzo = 0.0800

a = 0.0100 (1%)

b = 0.0050 (05%)

Z = 40 – Población inicial de zorros

C = 100 – Población inicial de conejos

Se acabaron los conejos a las 367 iteraciones

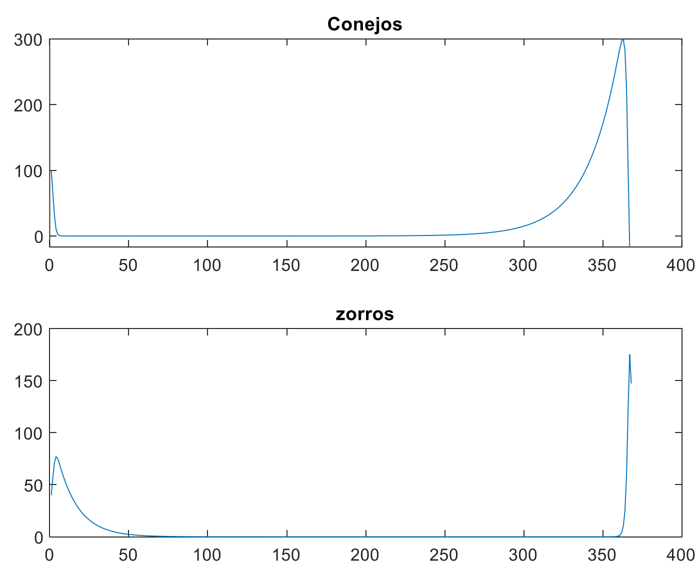


Figura 14d

```
%Capitulo 3 Ejemplo 12 Zorros y conejos
%Datos
clear all; close all
Tf=500
Nco = 0.1
Mco = 0.05
Nzo = 0.005
Mzo = 0.08
a = 0.01
b = 0.005
Z(1) = 40
C(1) = 100
for I = 1:Tf
    Z(I+1) =Z(I)*[1+ Nzo - Mzo] + b*Z(I)*C(I);
    if C(I) > 0.0
       C(I+1) = C(I)*[1 + Nco - Mco] - a*Z(I)*C(I);
    else disp('Se acabaron los conejos')
        disp(I)
        break
    end
end
subplot (2,1,1),plot(C),title 'Conejos'
subplot(2,1,2),plot(Z), title 'zorros'
if I == Tf
figure
plot(C,Z)
xlabel('Conejos')
ylabel('Zorros')
else disp('No se alcanzaron las iteraciones')
end
```

Ejemplo 14 Solución sistema no lineales con tiempo muerto[8]

El modelo general de población es de la forma:

Cambio de Población = [Tasa natalidad][Población]-[Tasa mortalidad][Población]

Los sistemas "depredador – presa" se estudian detalladamente debido a su compleja dinámica y la importancia que tienen para el manejo de los recursos naturales renovables (MSY = máximum sustainable yield). Sobre explotación conduce a inestabilidad del sistema

[8] Annik Martin • Shigui Ruan. Predator-prey models with delay and prey harvesting. Journal of Mathematical. Biology. Vol 43, 247–267 (2001)

o agotamiento de los recursos. La adición de un factor constante de cosecha y de tiempo de retardo lleva a sistemas inestables y oscilatorios.

Suponer los siguientes factores:

- La tasa de natalidad [**np**] de las presas es proporcional a la población de presas existente en el tiempo t, [**x(t)**] y, está limitada por un factor de restricción natural al crecimiento de la población de presas que depende de la cantidad de presas en el tiempo t. Esta restricción no depende de la población de depredadores
- La tasa de mortalidad de las presas [**mp**] es proporcional al número de depredadores.
- Cazadores externos eliminan un cantidad constante [**H**] de presas.
- En el crecimiento de los depredadores es necesario tener en cuenta un tiempo de retardo [**τ**]. La población de depredadores [**y(t)**] crece proporcional a la población de las presas y de depredadores en el tiempo (t-τ).
- La tasa de mortalidad de los depredadores es constante.

Este problema corresponde al modelo "Wangersky–Cunningham Model with Prey Harvesting" descrito por las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = x(t)[r_1 - ax(t) - by(t)] - H$$

$$\frac{dy}{dt} = -r_2 y(t) + cx(t-\tau)y(t-\tau)$$

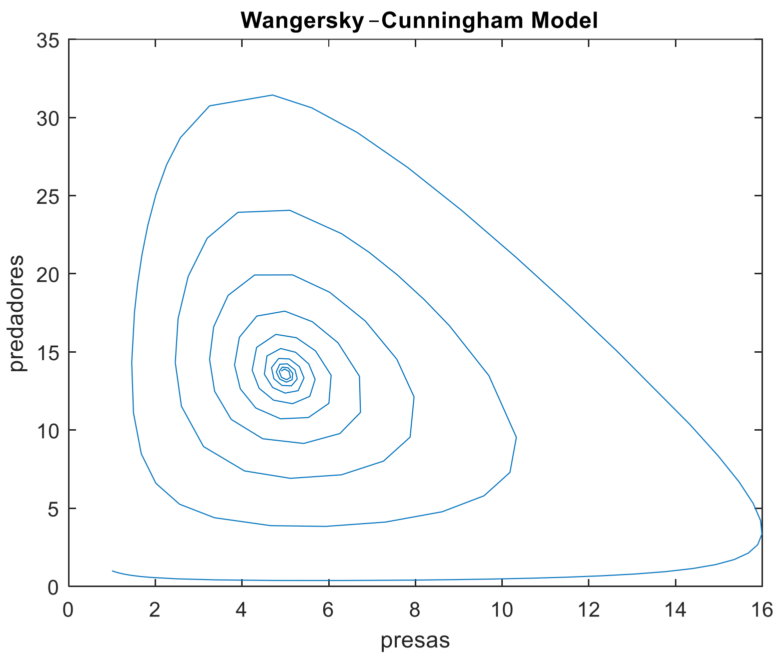
Dónde:

r_1 = tasa de incremento de la población de presas (prey)
r_2 = tasa de muerte de los depredadores (predator)
b = factor de efecto de los depredadores sobre las presas
c = factor de efecto de la caza sobre la población de predadores
a = factor de restricción natural al crecimiento de la población de presas
H = tasa constante de caceria

Para ver el tipo de resultado que se obtiene con:

$r_1 = 20$; a = 1, b = 1, H = 7; $r_2 = 15$; c = 3

Para tiempo muerto muy pequeño (τ = 0,01), el sistema tiende hacia un punto de equilibrio:



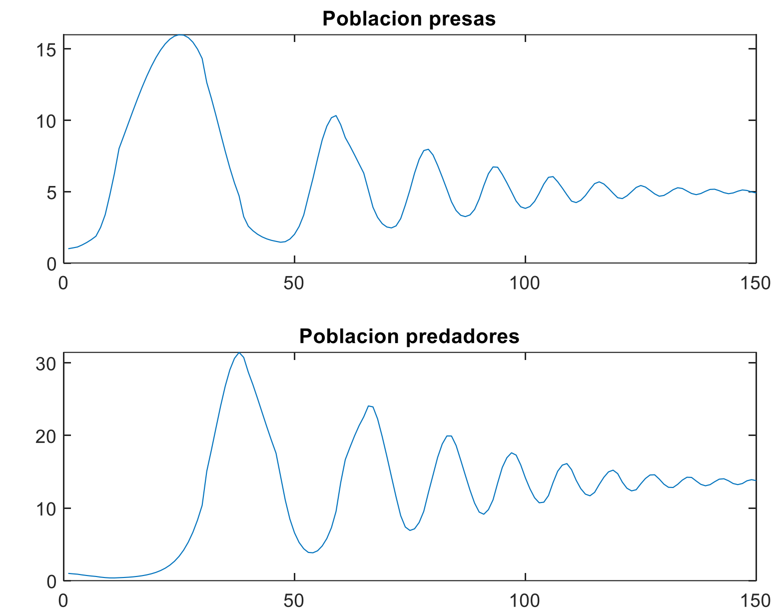
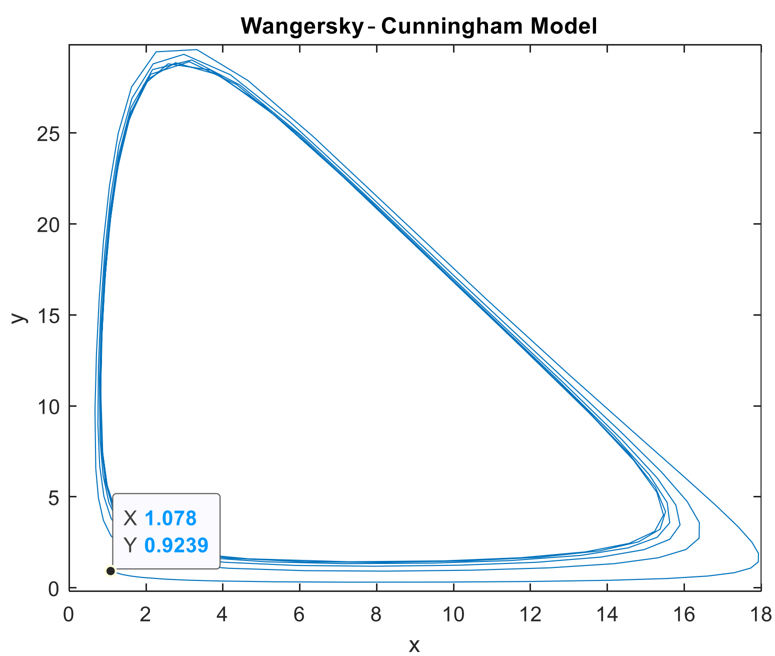


Figura 16a

Para tiempos muertos de 0.04 el sistema muestra bifurcaciones:



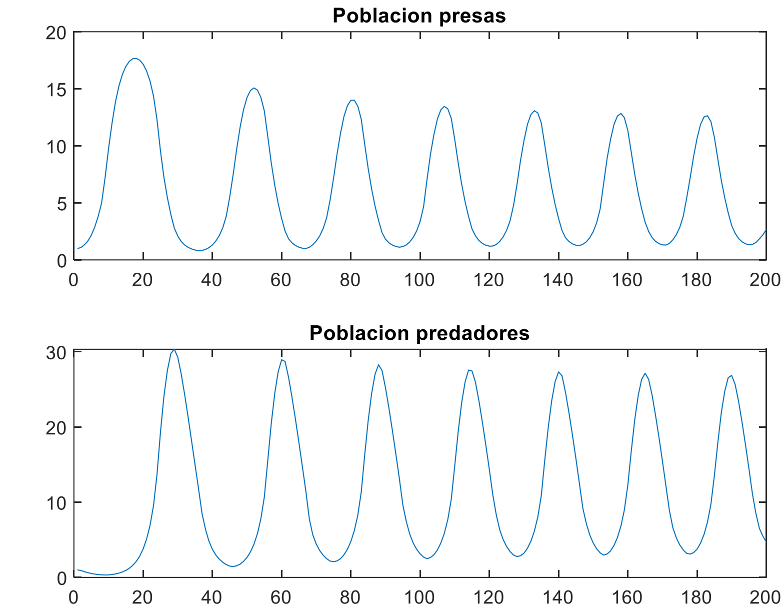
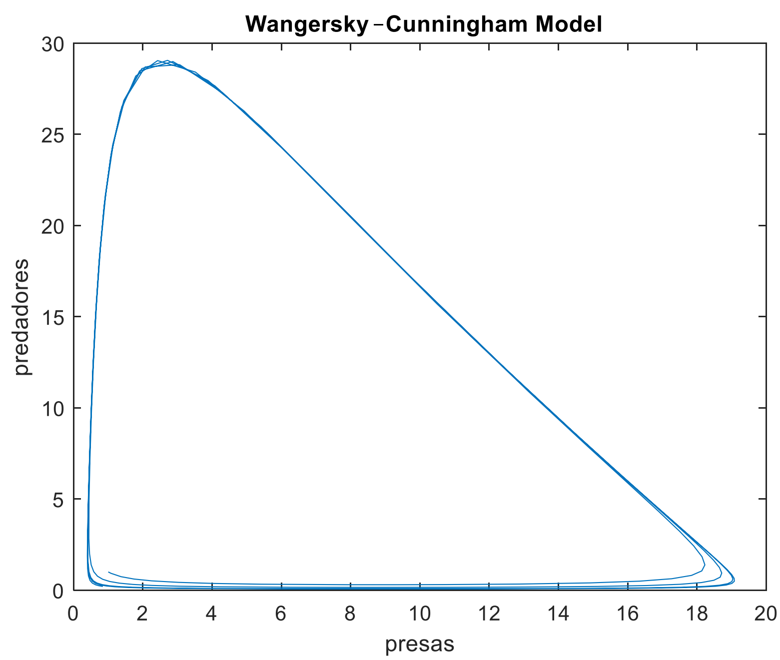


Figura 16b

Bifurcaciones para $t = 0.0631$



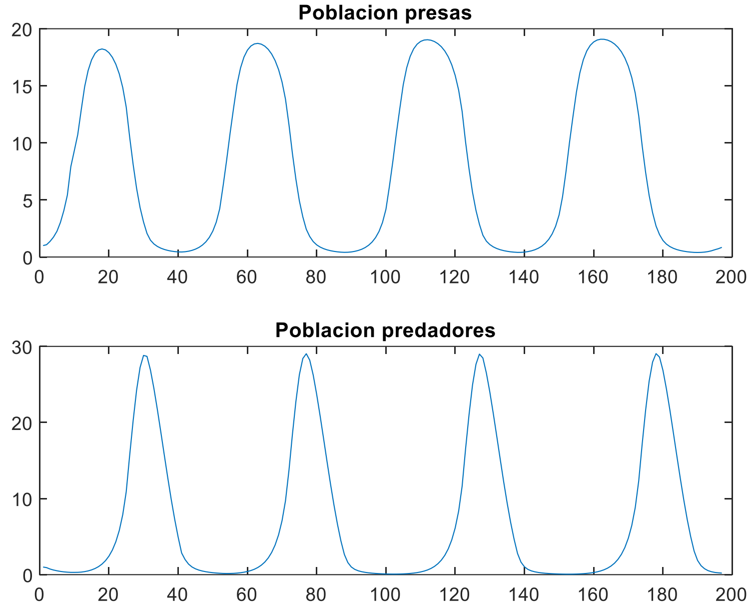


Figura 16c

Inestable para tiempo muertos de 0.0633

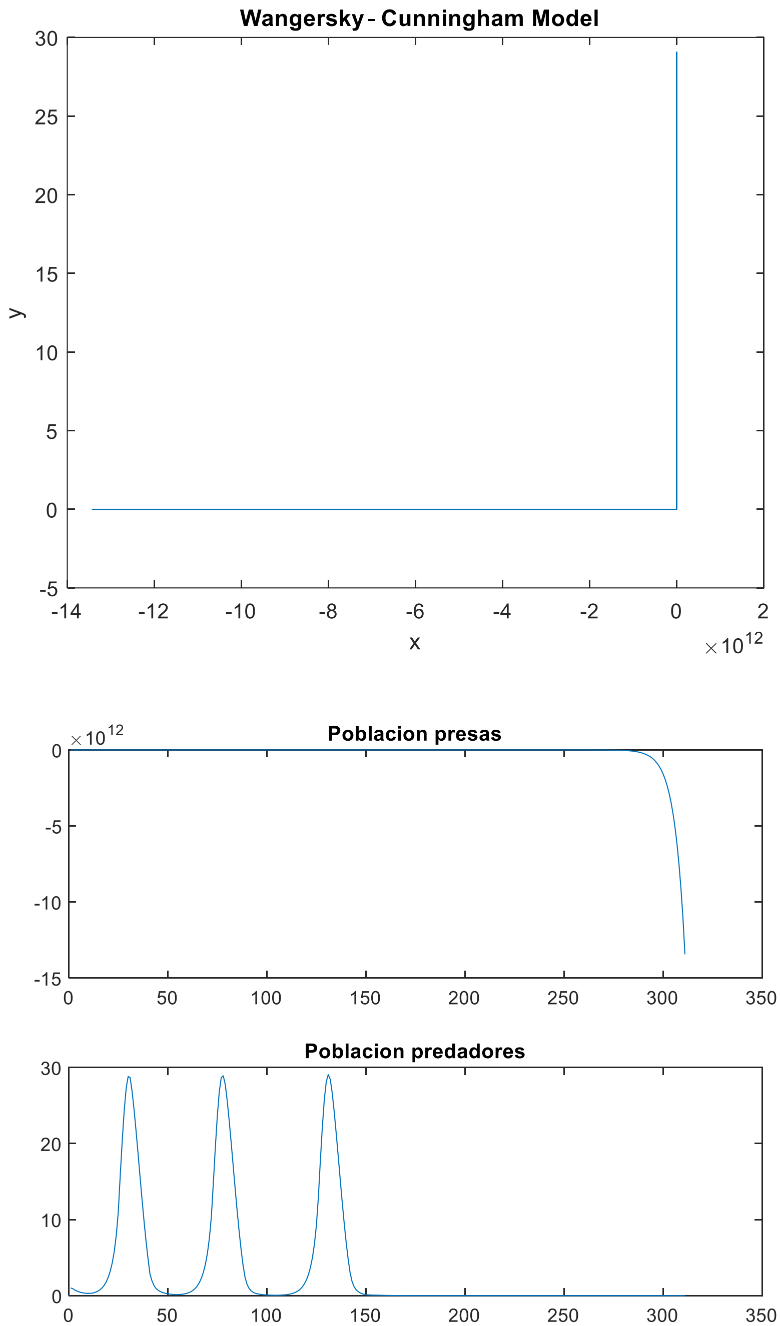


Figura 16d

```
%Capitulo 3 Ejemplo 14
```

```
%Wangersky-Cunningham Model with Prey Harvesting
%Annik Martin • Shigui Ruan. Predator-prey models with delay and prey
harvesting.
% Journal of  Mathematical. Biology. Vol  43, 247-267 (2001)
clear all
close all
ro = 20; a = 1; b = 1; H = 7; r2 =15; c = 3;
lags = [0.001 0.0631];
tspan = [0 5];
sol = dde23(@ddefun, lags, @history, tspan)
plot(sol.y(1,:),sol.y(2,:)), title ' Wangersky-Cunningham Model'
function dxdydel = ddefun(t,x,Z)
xlag1 = Z(:,1);
xlag2 = Z(:,2);
dxdydel = [20*x(1)-x(1)*x(1)-x(1)*x(2)-7;-15*x(2)+3*xlag1(1)*xlag2(2)]
end
function s = history(t)
  s = ones(2,1);
end
```

Modelos de sistema biológicos

Material y graficas tomadas de: ***N.H. McClamroch. State Models of Dynamic Systems. A case study approach. Springer Verlag. 1980***

"Case Study 6-5: A study of blood sugar and insulin levels with application to diabetes"

Variables y Unidades

G: glucosa en sangre mg/ml
I: insulina en sangre mg/ml

U_1 : tasa de entrada de alimento mg/h
U_2 : tasa de entrada de insulina mg/h

Descripción y Ecuaciones

Después de un periodo de ayuno, por ejemplo 4 horas, con entradas $U_1 = 0$ y $U_2 = 0$, se llega a un punto de equilibrio con $\bar{G} = M_1 \; e \; \bar{I} = 0$ el nivel de glucosa es constante y no hay insulina en la sangre.

Insulina en sangre

Si G < M_1 el páncreas no secreta insulina.

Si G excede el valor de equilibrio (G > M_1) el páncreas secreta insulina a una tasa proporcional a la diferencia entre (G – M_1), por ejemplo $a_3 x(G - M_1)$

Una vez que la insulina (I) entra al flujo sanguíneo, experimenta una reacción y se reduce a una tasa proporcional al nivel de ella misma (por ejemplo $a_4 xI$).

El nivel de insulina se puede incrementar, como en el caso de un paciente diabético, por medio de la adición de Insulina directamente al flujo sanguíneo, a una tasa proporcional a U_2 (por ejemplo $b_2 xU_2$)

Las ecuaciones que describen los dos comportamientos de la insulina son:

$$G \leq M_1 : \ \frac{dI}{dt} = -a_4 I + b_2 U_2$$

Y

$$G > M_1 : \frac{dI}{dt} = a_3(G - M_1) - a_4 I + b_2 U_2$$

Los coeficientes a y b dependen de las características de uso de la Insulina por cada persona.

a_3: velocidad de secreción de la insulina 1/h

a_4: velocidad de reducción de la insulina 1/h

b_2: 1/ml

Glucosa en sangre:

Cuando hay glucosa en la sangre, la insulina induce el metabolismo de la glucosa, la tasa de cambio de G es proporcional al producto de los niveles de Insulina y de Glucosa, por ejemplo $a_1(IxG)$

Si G < M_1 , glucosa por debajo del punto de equilibrio, el hígado libera Glucosa a una tasa proporcional a (M_1 -G), por ejemplo $a_2(M_1 - G)$

(La hipoglucemia es una afección por la que el nivel de glucosa sanguínea está por debajo del rango normal. La glucosa es la principal fuente de energía del cuerpo.)

Si G > M_1 el hígado no libera glucosa.

El nivel de glucosa en sangre también se aumenta por la adición de glucosa directamente a la sangre, proporcional a la entrada de alimentos, por ejemplo $b_1 U_1$

Las ecuaciones que describen los dos comportamientos de la glucosa son:

$$G \leq M_1: \ \frac{dG}{dt} = -a_1 I x G - a_2(G - M_1) + b_1 U_1$$

Y

$$G > M_1: \frac{dG}{dt} = -a_1 I x G + b_1 U_1$$

Los coeficientes a y b dependen de las características de uso de la Glucosa por cada persona.

a_1: ml/h-mg

a_2: velocidad de reducción de la glucosa 1/h

b_1: 1/ml

Resumen de ecuaciones:

$$G \leq M_1$$

$$\frac{dI}{dt} = -a_4 I + b_2 U_2$$

$$\frac{dG}{dt} = -a_1 I x G - a_2(G - M_1) + b_1 U_1$$

$$G > M_1$$

$$\frac{dI}{dt} = a_3(G - M_1) - a_4 I + b_2 U_2$$

$$\frac{dG}{dt} = -a_1 I x G + b_1 U_1$$

Modelo no lineal: cambio alrededor del punto de equilibrio M_1 y tiene el producto de I por G. Las dos ecuaciones son acopladas.

Punto de equilibrio:

Con entradas externas cero y $G \leq M_1$:

$$0 = -a_4\bar{I} \;\rightarrow \bar{I} = 0 \text{ El páncreas no segrega Insulina}$$

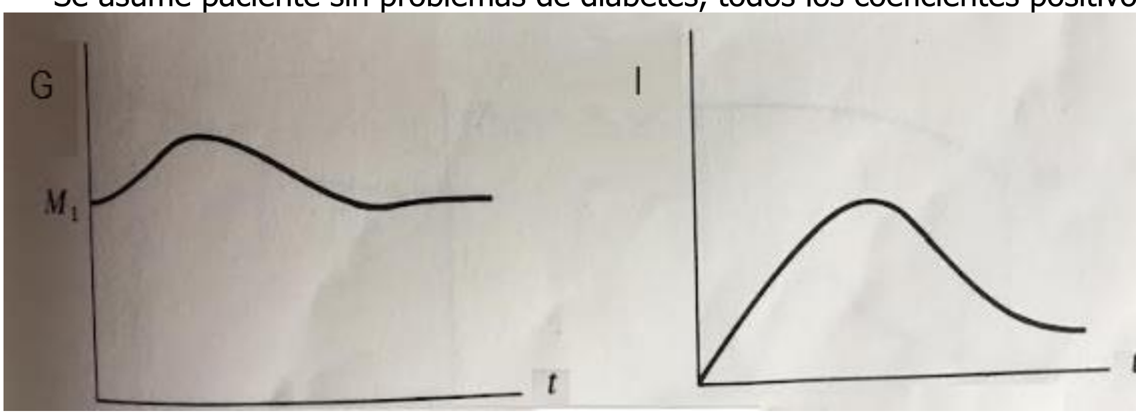
$$0 = -a_1\bar{I}x\bar{G} - a_2(\bar{G} - M_1) \rightarrow \bar{G} = M_1 \text{ La Glucosa esta en su nivel estable}$$

A partir de este punto de equilibrio se pueden plantear varias situaciones.

1. Respuesta a una entrada externa de alimento de forma exponencial:

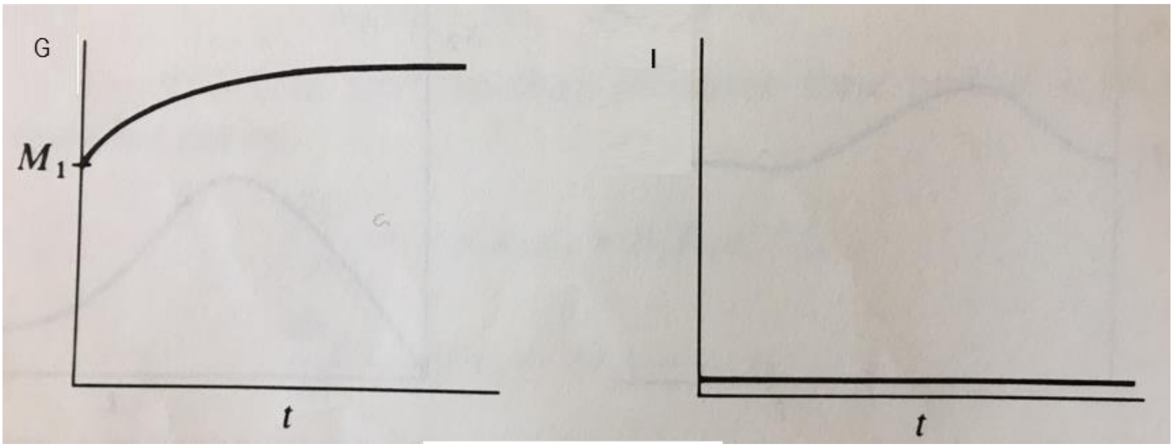
$$u_1(t) = R_1 e^{-k_1 t}\ ;\ u_2(t) = 0\ \forall\, t \geq 0$$

   Se asume paciente sin problemas de diabetes, todos los coeficientes positivos



Forma aproximada respuesta G e I paciente sano

2. En la misma situación (punto de equilibrio y entrada de alimento) un paciente con problemas de diabetes, el páncreas no secreta la cantidad adecuada de Insulina (parámetro a_3 muy pequeño). La Glucosa alcanza un valor final mayor de M_1.



Forma aproximada respuesta G e I paciente con problemas de diabetes

Al transcurrir el tiempo el valor de la entrada u_1 tiende a cero, para un análisis aproximado $\overline{U_1}$ se puede asumir pequeño pero diferente de cero, de esta forma:

$$\bar{I} \sim \frac{b_1}{a_1} x \left(\frac{\overline{U_1}}{\bar{G}} \right)$$

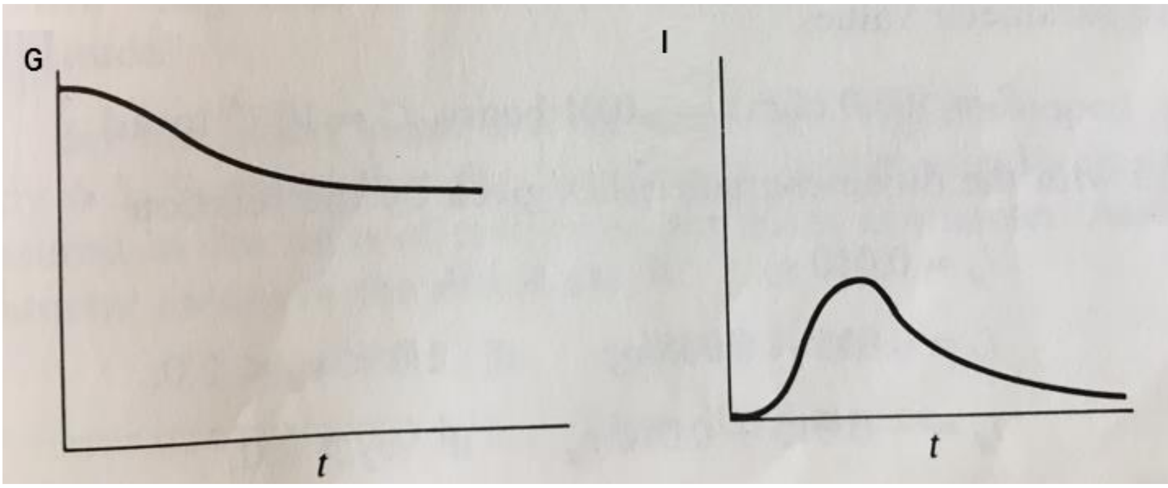
$$\bar{G} = M_1 + \frac{a_4}{a_3} \bar{I}$$

3. Paciente diabético, $a_3 = 0$ y se parte de un punto en el cual:

$$G(0) > M_1 \; ; I(0) = 0$$

Las entradas externas son:

$$u_1(t) = 0 \; ; \; u_2(t) = R_2 e^{-k_2 t} \;\; \forall \, t \geq 0$$



Forma aproximada respuesta G e I paciente diabético, entrada insulina

El valor final de I tiende a cero (se termina el efecto de la entrada de insulina) y la Glucosa disminuye desde su valor > M_1 , que a partir de una modelo linealizado se puede aproximar a:

$$G(t) \sim G(0) - \frac{a_1 M_1 b_2}{a_4}\left(\frac{R_2}{k_2}\right)$$

La dosis de insulina debe ser tal que el valor final de G debe ser M_1

$$M_1 = G(0) - \frac{a_1 M_1 b_2}{a_4}\left(\frac{R_2}{k_2}\right)$$

De donde los parámetros de la dosis de insulina son:

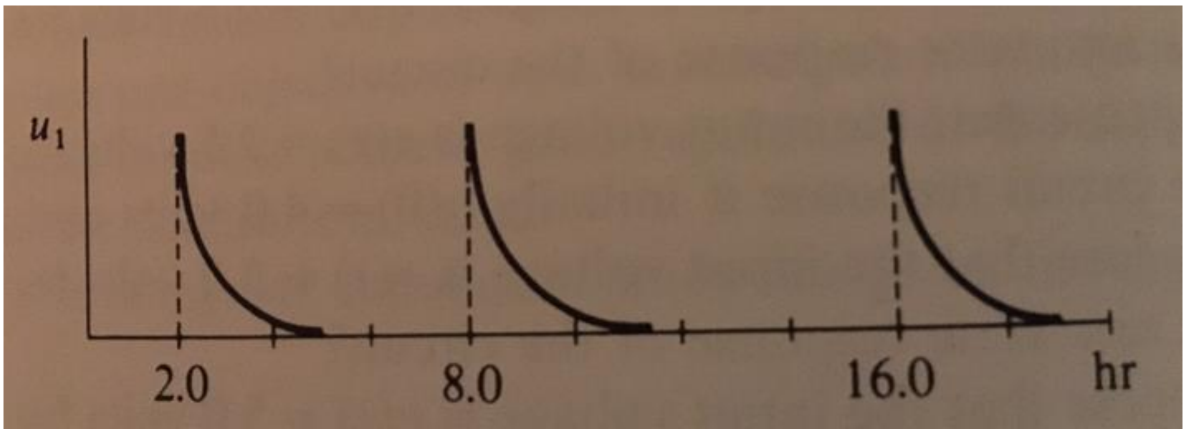
$$\left(\frac{R_2}{k_2}\right) = \frac{a_4}{a_1 b_2}\left[\frac{G(0)}{M_1} - 1\right]$$

Análisis empleando SIMULINK®

Para el modelo planteado se van a asumir los siguientes parámetros, con sus respectivas unidades:

$$a_2 = 1.0\ \frac{1}{h}\ ;\ b_1 = 1.0\ \frac{1}{ml};\ a_4 = 2.0\ \frac{1}{h};\ M_1 = 100\ \frac{mg}{ml}$$

Para los dos primeros casos no hay entrada de insulina y la entrada de glucosa correspondiente a las tres comidas es una secuencia de exponenciales. Cada exponencial tiene una magnitud máxima de 100 mg/h y una constante de tiempo de 0.5 h.



Secuencia de exponenciales representando la entrada de alimento debidas a desayuno – almuerzo y comida.

Para los objetivos de esta actividad solo es necesario simular el caso cuando $G > M_1$

Las condiciones iniciales son:

G(0) = 100 mg/ml; I(0) = 0.0 mg/ml

Caso a: Individuo normal

$$a_1 = 0.05\ \frac{ml}{h - mg};\ a_3 = 0.5\ \frac{l}{h}$$

Simular el sistema de ecuaciones, graficar G(t) vs t e I(t) vs t, para todo el tiempo entre 0 y 20 h. ¿Cuáles son los valores finales de las variables?

Caso b: Paciente con problemas de diabetes

$$a_1 = 0.05\ \frac{ml}{h - mg};\ a_3 = 0.01\ \frac{l}{h}$$

Simular el sistema de ecuaciones, graficar G(t) vs t e I(t) vs t, para todo el tiempo entre 0 y 20 h. ¿Cuáles son los valores finales de las variables?

Caso c: Paciente diabético

$$a_3 = 0.00\ \frac{l}{h}$$

Además de la entrada de alimento ya descrita, necesita una secuencia de entradas de insulina

$$u_2(t) = R_2 e^{-k_2 t}\ \ \forall\ t \geq 0$$

Ajuste los parámetros de la entrada de insulina (amplitud y constante de tiempo) y verifique con la simulación si el nivel de glucosa tiende a M_1 antes de la próxima entrada de alimentación.

¿Cumplen los parámetros de la entrada de insulina esta relación?

$$\left(\frac{R_2}{k_2}\right) = \frac{a_4}{a_1 b_2}\left[\frac{G(0)}{M_1} - 1\right]$$

Notas

1. ***N.H. McClamroch. State Models of Dynamic Systems. A case study approach. Springer Verlag. 1980***

Revisiones

Revisión 1	Noviembre 2022	CCB

REFERENCIAS

1. CHEN Chi-Tsong. Linear Systems Theory and Design. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.
2. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
3. Karnopp D.C.; Margolis D.L. and Rosenberg R.C. System Dynamics. 4th Edition. John Wiley and Sons. 2006.
4. L.CHUA , C. DESOER, E. KUH. Linear and Nonlinear Circuits. New York. McGraw-Hill. International Edition 2000.
5. Eytan Modiano State Variable Description of LTI systems: http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/signalssystems/Lecture11_12.pdf
6. Carl H. Durney STATE-SPACE METHOD CIRCUITS Matlab® TUTORIAL: http://www.ece.utah.edu/eceCTools/StateSpace/Circuits/Matlab/StateSpaceCircTutor.pdf
7. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=SystemModeling
8. https://stackoverflow.com/questions/70761535/convolution-integral-export-as-animation-in-jupyter
9. U of M. & CMU. Frequency Response Analysis and Design Tutorial. 1996 http://www.engin.umich.edu/group/ctm/freq/freq.html.
10. Mathworks. Control System Toolbox™ 9 Getting Started Guide. © COPYRIGHT 2000–2010 by The MathWorks, Inc.
11. R.C.Dorf and R.H. Bishop. Modern Control Systems. 10th Edition. Upper saddle River. NJ. Prentice Hall. 2005.
12. Sedra & Smith. Microelectronic Circuits. 4th Edition. New York: Oxford University Press. 1998.

1. CHEN Chi-Tsong. Linear Systems Theory and Design. 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.
2. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. Modeling and Analysis of Dynamic Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
3. Zachary S Tseng. The phase plane.
4. http://www.math.psu.edu/tseng/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf
5. BAY John S. Fundamentals of Linear State Space Systems. New York: McGraw Hill International 1999.
6. GABEL Robert A. and ROBERTS Richard A. Signals and Linear Systems. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 1987.
7. NEKOOGAR Farzad and MORIARTY Gene. Digital Control using DSP. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall PTR. 1999.
8. ZAK. S. Systems and Control. New York. Oxford University Press. 2003.
9. Anexo 5 Método de Runge Kutta para ecuaciones diferenciales //repositorio.bib.upct.es.
10. MathWorks Inc. MATLAB Function reference manual.

11. Mark L. Fowler. MATLAB Functions. 2001
12. David Houcque. Applications of MATLAB: Ordinary Differential Equations (ODE). Northwestern University
13. Cleve's Corner. Stiff Differential Equations. MATLAB News & Notes - May 2003.
14. Devries University. Using Simulink Tutorial. ..\matlab_Doc\Simulink\Using_Matlab_Simulink.pdf.
15. U. Michigan. Simulink Basics Tutorial: ..\matlab_Doc\Simulink\UMICH_Simulink_Tutorial.pdf

Sitios www:

1. Eytan Modiano State Variable Description of LTI systems: http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/signalssystems/Lecture11_12.pdf
2. Carl H. Durney STATE-SPACE METHOD CIRCUITS Matlab® TUTORIAL. http://www.ece.utah.edu/eceCTools/StateSpace/Circuits/Matlab/StateSpaceCircTutor.pdf
3. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=SystemModeling

PROBLEMAS

1. Resolver y graficar la respuesta homogénea de la ecuación de diferencia:

$$y(k+1) - 5y(k) + 4y(k-1) = 0; \qquad \text{Condiciones iniciales} \begin{bmatrix} 9 & 33 \end{bmatrix}^T$$

Graficar para diferentes conjuntos de condiciones iniciales:

$$y(k+2) - 2y(k+1) + 2y(k) = 0$$

2. Resolver la ecuación diferencia por el método directo y por convolución

$$y(k) - \frac{1}{9}y(k-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^k \; para\, k \geq 0$$

$$= 0 \text{ para } \mathrm{k} < 0$$

Con condiciones iniciales iguales a cero.

3. Para el sistema discreto de la Figura P1:

a. Plantear la ecuación diferencia entrada – salida.
b. Plantear el modelo en variables de estado
c. Evaluar la respuesta impulso
d. Evaluar la respuesta completa para una secuencia de entrada paso y condiciones iniciales y(0) = 1, y(-1) = 2

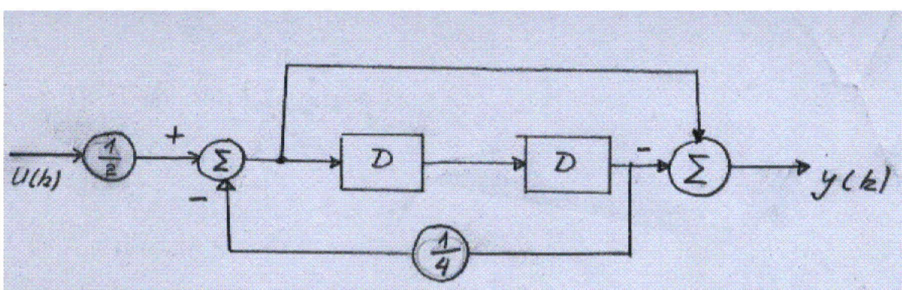


Figura P1

4. Para el sistema discreto de la Figura P2:

a. Evaluar la secuencia impulso.
b. Empleando convolución evaluar la respuesta para una secuencia de entrada:

$$u(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad para\, k \geq 0$$
$$= 0 \qquad \text{para k} < 0$$

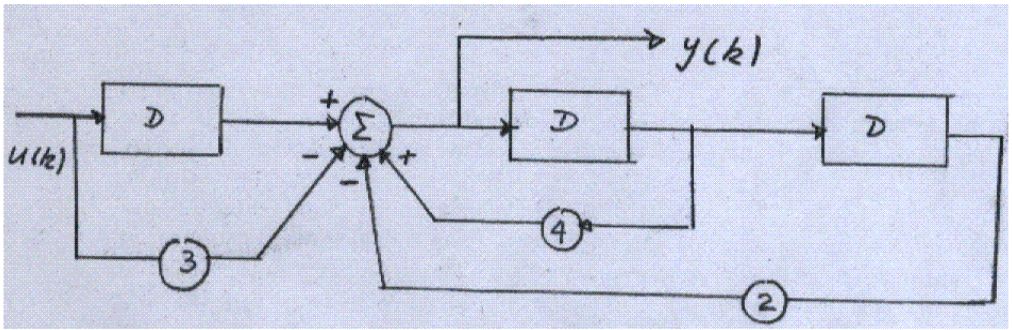


Figura P2

5. Para la ecuación diferencia:

$$y(k) + y(k-1) + y(k-2) = (10)^k$$

Las condiciones iniciales son: y(-1) = 1, y(-2) = 0

a. Encontrar la solución completa empleando el método directo.
b. Plantear el modelo en variables de estado y resolver la ecuación de estado.
c. Resolver empleando MATLAB.

6. Plantear el modelo en variables de estado del sistema discreto de la Figura P3.

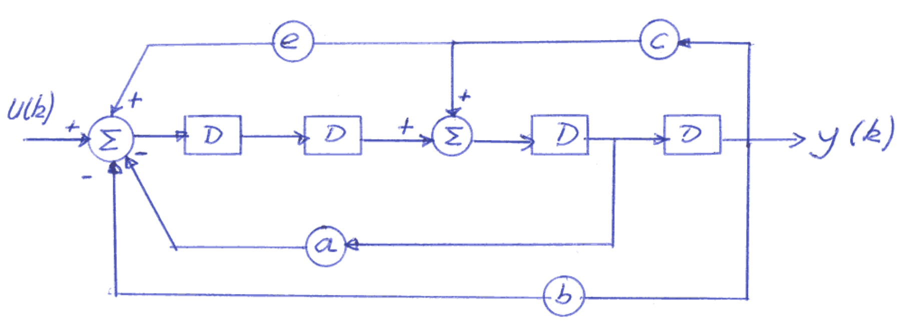


Figura P3

7. Para el sistema de tres ecuaciones diferencia:

$$x(n+1) = 3x(n) + 5y(n) + 2z(n)$$
$$y(n+1) = x(n) - y(n) + z(n)$$
$$z(n+1) = 2x(n) + y(n) + 3z(n)$$

Encontrar el vector de estado [x(n) y)n) z(n)]^T si el estado inicial es:

$$[1 \quad 0 \quad -1]^T$$

Graficar los estados.

8. Un préstamo de monto **d(0)** se debe pagar en **N** meses, con una tasa de interés mensual de **R%** sobre saldo. El abono a capital más los intereses, notado **a(k)** se paga al final de cada periodo y cada pago es dos veces el pago del periodo inmediatamente anterior.

    a. Plantear el modelo en variables de estado.

    b. Si n = 5 meses, la tasa de interés mensual es del 1% y el monto inicial del préstamo es de $5.000.000 encontrar el valor de cada abono mensual y el valor total cancelado.

9. Para el problema 8 del capítulo 1:

    a. Asuma condiciones iniciales y resolver empleando MATLAB.
    b. Comparar diferentes casos de respuesta.

10. [9]En el sistema circulatorio los glóbulos rojos se destruyen y reemplazan constantemente. Como estos glóbulos portan el oxígeno que requiere el cuerpo, su número se debe mantener en un nivel fijo.

    El bazo diariamente filtra y destruye una fracción ***f*** del número de glóbulos rojos existente ***R*** y la medula produce un número proporcional al número de glóbulos perdidos el día anterior. La constante de producción se nota ***γ***

[9] Tomado referencia 3

a. Plantear la ecuación diferencia que describe al número de glóbulos rojos el día n.

b. Determinar las raíces de la ecuación característica.

c. Demuestre que si una de las raíces características es igual a uno (1) se logra el punto de equilibrio de ***R.***

d. Bajo la condición establecida en el punto c, cual es la solución de la ecuación diferencia.

1. [10]Construir un modelo de estado de tiempo discreto para la población adulta de perros de una ciudad que prediga el número de perros infectados de rabia en cualquier año. Se sabe que:

   c. El 10% de las hembras adultas (h_a) se infecta, pero sólo el 55% de los machos adulto (m_a) se contagia.

   d. El número de cachorros que nace cada año equivale a un 80% de la población de hembras adultas.

   e. El 40% de los cachorros son machos, el resto son hembras.

   f. Para convertirse en adulto un cachorro requiere dos años.

   g. El 20% de la población total de perros muere cada año.

[10] Tomado referencia 11