

Análisis de Sistemas dinámicos. Capítulo 2 Modelos de sistemas mecánicos.

Ing. Carlos E. Cotrino B. M. Sc.

Modelos de sistemas físicos

1. Preparar y ejecutar el plan de acción para formular y resolver un modelo. (CDIO 2.1.1.4)
2. Obtener modelos conceptuales y cualitativos de diversos sistemas físicos. (CDIO 2.1.2.2)
3. Establecer las conexiones entre los fenómenos físicos y el modelo. (CDIO 2.1.2.3)
4. Usar modelos cuantitativos y soluciones. (CDIO 2.1.2.4).
5. Generalizar suposiciones para simplificar ambientes y sistemas complejos (CDIO 2.1.2.1)
6. Discutir una aproximación desde varias disciplinas para asegurar que el sistema se entienda desde todas las perspectivas relevantes. (CDIO 2.3.1.2)
7. Establecer prioridades dentro de las metas generales (CDIO 2.1.1.3).
8. Identificar sistemas propios y sistemas con interacción entre áreas (CDIO 2.3.2.4).
9. Seguir la estructura y el proceso de integración del conocimiento (CDIO 2.4.5.5)

Clase 1

Contenido

1. Definir las variables y los componentes mecánicos de traslación.
2. Definir la estrategia para el planteo y solución de modelos.
3. Definir y emplear las leyes de interconexión.
4. Plantear modelos y obtener las respuestas de sistemas mecánicos de traslación.

Temas para repasar

- Leyes de Newton
- Ley de D'alambert
- Planteo de modelos en el espacio de estado.
- Solución ecuaciones de estado



Procedimiento

1. Definir claramente el sistema y sus subsistemas, identificar los componentes individuales y las variables a emplear.
2. Obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales a partir de las leyes físicas de los componentes individuales y de las leyes de interconexión y de conservación.
3. Plantear el conjunto de ecuaciones de estado. Si el sistema es no lineal se encuentran los puntos de equilibrio y se desarrolla un modelo linealizado.

Procedimiento

4. Resolver el conjunto de ecuaciones para diferentes tipos de excitaciones y de condiciones iniciales. Para la solución se pueden usar procedimientos analíticos o numéricos.
5. Obtener las funciones de transferencia de cada subsistema y emplear los diagramas de bloques y flujo para encontrar la función de transferencia total.
6. Para el análisis se emplean también Simulink™ y Matlab™, en este caso se pueden realizar simultáneamente los pasos 4 y 5.

Variables y unidades traslación

Variables generalizadas	Variable mecánica de traslación	Unidades SI
Esfuerzo, e	Fuerza, F	Newtons (N)
Flujo, f	Velocidad, V	Metro/segundo (m/s)
Momentum, I	Momentum, L	N-s
Desplazamiento, δ	Desplazamiento, X	m
Potencia, p	$F(t)V(t)$	$W = N \cdot m/s$
Energía, E	$\int_x^x F dx; \int_m^m V dm$	$J = W \cdot s = N \cdot m$

Variables^{1,2}

- Momentum l es la integral del “esfuerzo”:

$$l(t) = \int_0^t e(t)dt = l_0 + \int_0^t e(t)dt$$

- En forma derivada:

$$\frac{dl}{dt} = e(t) \Rightarrow dl(t) = e(t)dt$$

- Desplazamiento es la integral del “flujo”:

$$\delta(t) = \int_0^t f(t)dt = d_0 + \int_0^t f(t)dt$$

- En forma derivada:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = f(t) \Rightarrow d\delta(t) = f(t)dt$$

Variables^{1,2}

- Empleando las formas diferenciales la energía se puede expresar como:

$$E(t) = \int^t e(t) d\delta = \int^t f(t) dl(t)$$

- Cuando esfuerzo es función del desplazamiento:

$$E(\delta) = \int^{\delta} e(\delta) d\delta$$

- Cuando flujo es función del momentum:

$$E(l) = \int^m f(l) dl$$

- Por esto las variables l y δ también se conocen como variables de energía

Fricción viscosa

- En el elemento fricción las variables de esfuerzo y de flujo están relacionadas por una función estática:

$$e = Bf$$

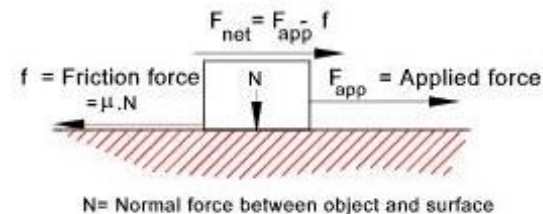
- Fricción viscosa: se desarrolla entre capas de fluidos que se mueven a diferentes velocidades, básica en el análisis de flujo de fluidos y mecanismos lubricados.
Relación lineal

$$\vec{F} = B\vec{v}$$

Fricción de Coulomb³

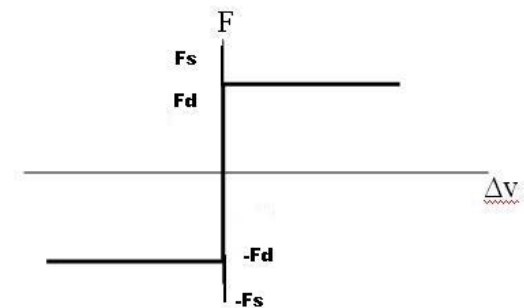
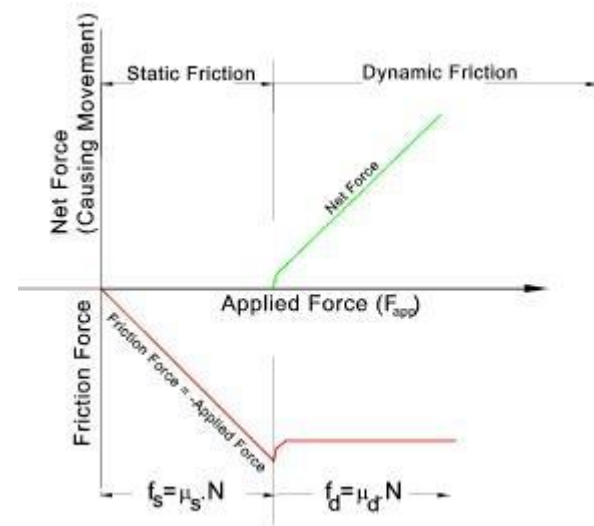
- Fricción seca o de Coulomb: aparece entre cuerpos rígidos cuyas superficies no lubricadas están en contacto.

La fricción de Coulomb no depende de la velocidad relativa sino de la componente normal N de la fuerza de reacción de la superficie.



Fricción de Coulomb³

- Para fuerza externa F_{app} pequeña el bloque no se mueve: debe existir una fuerza de fricción estática F que balancee a F_{app} .
- Si F_{app} sigue aumentando, el bloque permanecerá inmóvil hasta que F_{app} alcance un valor mínimo F_s , a partir del cual el bloque se desliza. (Se asume que el bloque no gira)



Fricción de Coulomb

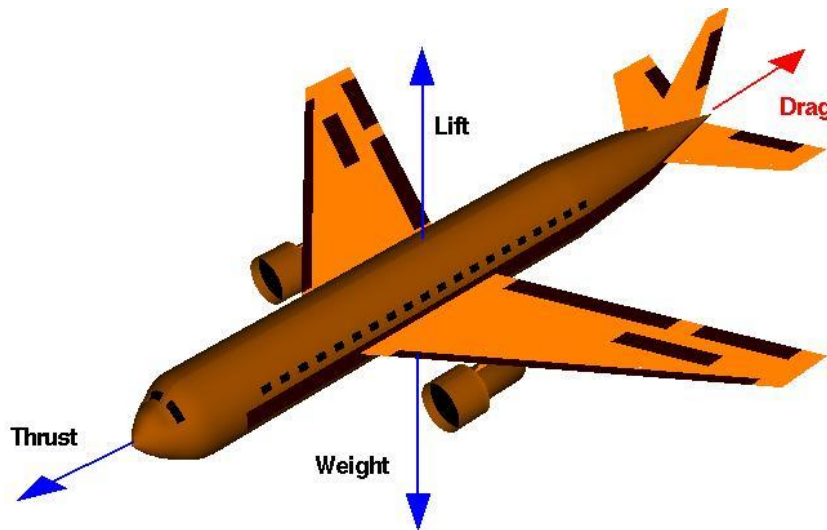
- μ_s : Coeficiente de fricción estática (Adimensional)
- μ_d : Coeficiente de fricción cinética (Adimensional)
- μ_s y μ_d dependen de la naturaleza y de la condición de las superficies en contacto, y por tanto el margen de error es significativo ($\cong \pm 5\%$).
- La relación velocidad - fuerza de fricción es no lineal.

Materials	μ
steel/steel	0.8
copper/steel	0.5
Auto brakes (clean)	0.4
Auto brakes (wet)	0.2
aluminum on snow	0.35
ski wax on snow	0.04
ice on ice	0.05-0.15

Coeficientes de fricción estática

www.virginia.edu

Fricción de Arrastre⁴



- Fuerza mecánica generada por un objeto sólido que se mueve en un fluido. No lineal

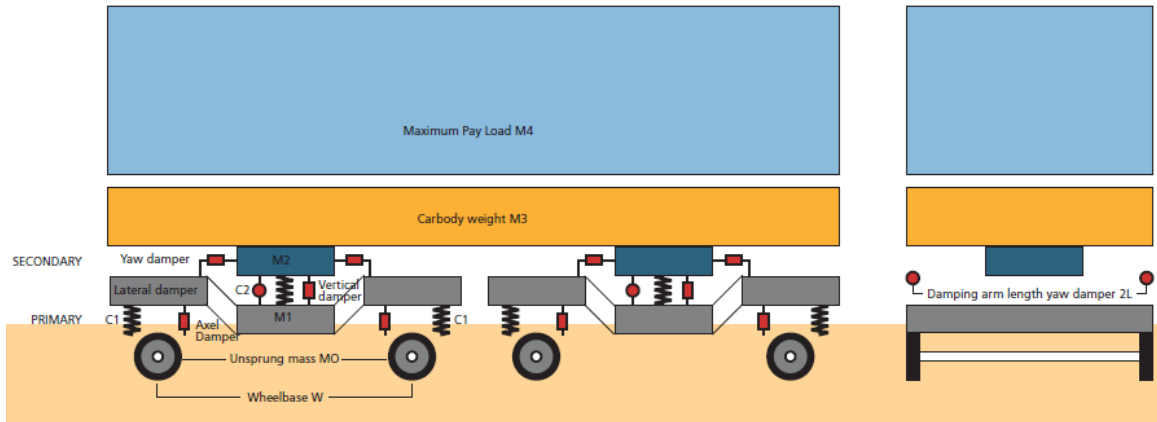
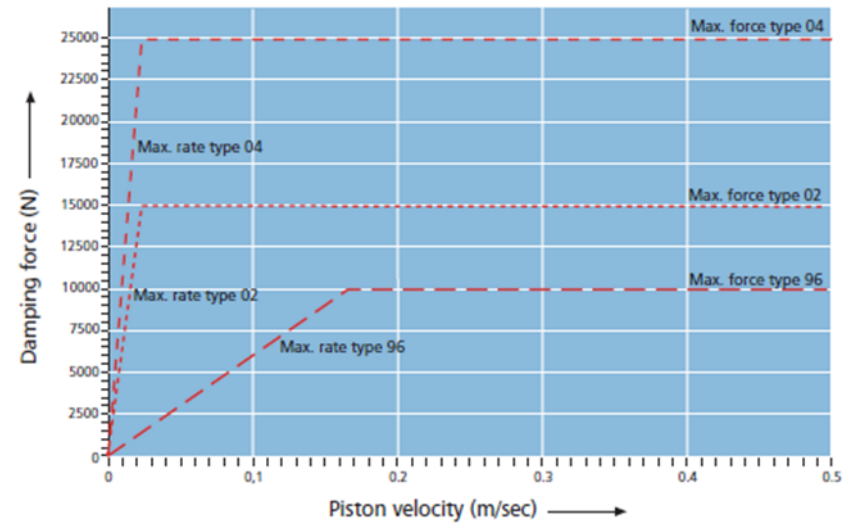
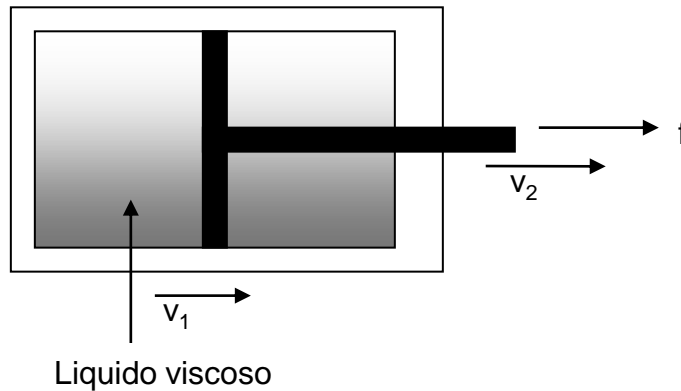
$$D = C_d \times \frac{\rho \times V^2}{2} \times A$$

Drag = coefficient x density x velocity squared x reference area
two

Coefficient **C_d** contains all the complex dependencies and is usually determined experimentally.

Choice of reference area **A** affects the value of **C_d**.

Amortiguador⁵



Specifications

Type 96

Max. damping force	10 kN
Max. damping rate	60 kNs/m
Dust cover / reservoir tube	Ø 80 mm / Ø 70 mm

Type 02

Max. damping force	15 kN
Max. damping rate	600 kNs/m
Dust cover / reservoir tube	Ø 102 mm / Ø 89 mm

Type 04

Max. damping force	25 kN
Max. damping rate	1.000 kNs/m
Dust cover / reservoir tube	Ø 120 mm / Ø 108 mm

Amortiguador⁶

Shock absorbers provide controlled, predictable deceleration. These products work by converting kinetic energy to thermal energy.

More specifically, motion applied to the piston of a hydraulic shock absorber pressurizes the fluid and forces it to flow through restricting orifices, causing the fluid to heat rapidly.

The thermal energy is then transferred to the cylinder body and harmlessly dissipated to the atmosphere



Hydraulic shock absorbers.OTO-HUI.COM

Rigidez (Stiffness)

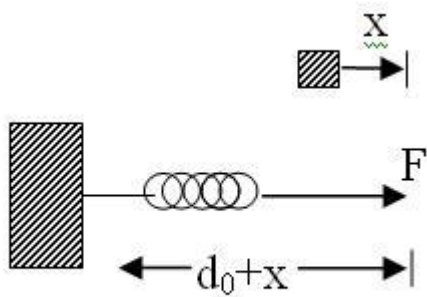
- Dispositivos en los cuales se establece una relación estática entre una variable de esfuerzo y un desplazamiento, existe almacenamiento y entrega de energía sin disipación.

$$e = K\delta$$

- La variable de esfuerzo es función del desplazamiento

$$e = e(\delta)$$

Rigidez



- Todo elemento mecánico que se deforme cuando se somete a una fuerza externa se puede modelar por el elemento rigidez.

$$\delta(t) = \delta_0 + x(t)$$

- Para un resorte lineal, operado en su rango dinámico, la relación en el plano (f - x) esta dada por la ley de Hooke:

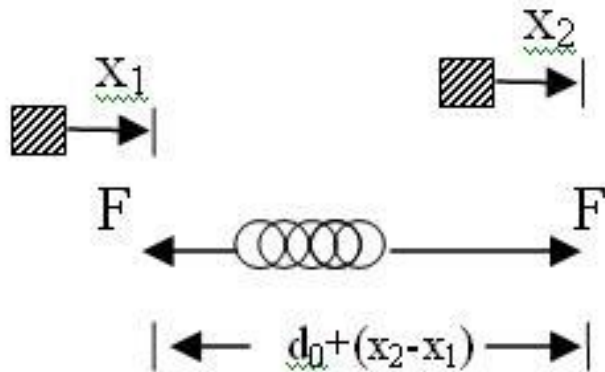
$$f = K\Delta x$$

Resorte

- La constante K (N/m) es proporcional al modulo de Young, al área de la sección transversal e inversamente proporcional a la longitud.
- El inverso de K se define como la "Complianza" del elemento y la relación se puede escribir de una forma equivalente a la relación voltaje (esfuerzo) - carga (desplazamiento) en un condensador eléctrico.

$$f = \left(\frac{1}{C} \right) \Delta x$$

Resorte



- Cuando se aplica una fuerza externa en un extremo del resorte ideal, sin masa, una fuerza de igual magnitud pero de sentido contrario se debe ejercer en el otro extremo.
- La masa del resorte se modela por aparte

Resorte

- Energía almacenada:

$$E(t) = \int_0^t e(t) f(t) dt + E_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow f(t) = \frac{d\delta}{dt} \rightarrow f(t) dt = d\delta$$

$$E(t) = \int_{\delta_0}^{\delta} e(\delta) d\delta + E_0$$

- E_0 es la energía almacenada cuando el desplazamiento del resorte es δ_0 , no hay esfuerzo externo aplicado y se puede asumir cero

$$E(t) = \int_{\delta_0}^{\delta} e(\delta) d\delta$$

Resorte

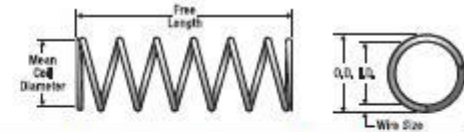
- Cuando el resorte está fuera de la posición relajada, δ_0 , se almacena una energía potencial:

$$E(t) = \frac{1}{2}k(\delta)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

- Por lo tanto se requiere una variable de estado para describir el estado de la energía en el elemento y para determinar la respuesta dinámica se debe conocer $x(t_0)$, posición inicial.

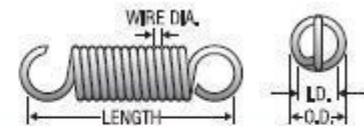
Resorte⁷

Resorte de compresión



O.D.		CENTURY STOCK NUMBER	FREE LENGTH		I.D.		RATE		SUGG. MAX. DEFL.		SUGG. MAX. LOAD		SOLID LENGTH		WIRE DIA.		TOTAL COILS	MAT'L	F N S H	C
Inches	mm		Inches	mm	Inches	mm	Lbs./In.	N/mm	Inches	mm	Lbs.	N	Inches	mm	Inches	mm				
0.109	2.77	3550	1.19	30.2	.085	2.2	1.4	.24	.76	19	1.0	4.6	.32	8.2	0.012	0.3	26.0	MW	C	GI
0.109	2.77	B18-150	1.25	31.8	.087	2.2	.77	.14	.90	23	.69	3.1	.35	8.9	0.011	0.3	31.0	MW	C	N
0.109	2.77	2506	1.25	31.8	.083	2.1	1.9	.33	.70	18	1.3	5.8	.36	9.2	0.013	0.3	27.0	MW	C	GI
0.109	2.77	U-70	1.31	33.3	.077	2.0	5.9	1.0	.37	9.4	2.2	9.6	.35	8.9	0.016	0.4	22.0	MW	CG	N
0.109	2.77	LL-80	1.31	33.3	.073	1.9	8.7	1.5	.23	5.9	2.0	9.0	.41	10.5	0.018	0.5	22.0	SST	C	N

Resorte de extensión



O.D.		CENTURY STOCK NUMBER	LENGTH		RATE		INITIAL TENSION		SUGG. MAX. DEFL.		SUGG. MAX. LOAD		WIRE DIA.		MAT'L	F N S H
Inches	mm		Inches	mm	Lbs./In.	N/mm	Lbs.	N	Inches	mm	Lbs.	N	Inches	mm		
0.120	3.05	80078	.38	9.5	7.9	1.4	.2	.9	.20	5.1	1.8	8.0	0.016	0.41	MW	N
0.120	3.05	80078S	.38	9.5	6.7	1.2	.2	.8	.16	4.0	1.2	5.4	0.016	0.41	SST	N
0.120	3.05	80090	.38	9.5	14	2.5	.2	.9	.15	3.9	2.4	11	0.018	0.46	MW	N
0.120	3.05	80090S	.38	9.5	12	2.1	.2	.8	.12	3.0	1.6	7.2	0.018	0.46	SST	N
0.120	3.05	80068	.50	12.7	2.0	.35	.1	.5	.60	15	1.3	5.9	0.014	0.36	MW	N

Como medir la constante k?

Ejemplos de aplicación de los dos tipos de resortes

Masa

- Dispositivo en el cual se establece una relación estática entre el momentum (l) y el flujo (f).
- Este elemento se denomina en general inercia, notado I y definido como:

$$f = \frac{l}{I}$$

- El flujo es función del momentum: $f(l)$.

Masa

- Para el elemento inercia, denominado masa en el sistema mecánico de traslación la ecuación terminal es:

$$v = \frac{l}{m}$$

- El momentum es la integral de la variable esfuerzo:

$$l = \int e(t)dt \rightarrow \dot{l} = \int f(t)dt$$

$$\frac{dl}{dt} = e(t) \text{ o } dl = e(t)dt$$

Masa

- Para la energía

$$E(l) = \int_{l_0}^l f(l)dl + E_0$$

- Si cuando el esfuerzo es cero la energía es cero y si el momentum l_0 corresponde al punto de la gráfica f vs l para el cual $f = 0$:

$$E(l) = \int_{l_0}^l f(l)dl$$

- Cuando la masa tiene una velocidad V la energía será:

$$E_k = \int_{l_0}^l f(l)dl = \int_{l_0}^l \frac{l}{m} dL = \frac{1}{2}mv^2$$

Masa

- De la segunda ley de Newton: "La resultante de las fuerzas actuantes sobre una partícula es igual a la tasa de cambio del momento lineal de la partícula".

$$\vec{L} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- Cuando la masa es constante y no se consideran efectos relativistas

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Masa

- Un Newton produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg .
- En ingeniería la libra no se puede usar como unidad de masa: Una fuerza de una libra aplicada a la masa estándar produce una aceleración de $g = 32,2 \text{ ft/s}^2$, no unitaria. La unidad de masa consistente con la definición $f = m \cdot a$ es el slug:

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2}$$

- El "Slug" es una masa $32,2$ veces mayor de la masa de la libra estándar.

Masa

- Si la masa tiene un desplazamiento vertical h relativo a la posición de referencia también se almacena energía potencial:

$$E_p = mgh$$

- Condiciones iniciales, $v(t_0)$ y si hay movimiento vertical la altura inicial $h(t_0)$.
- En el elemento masa hay almacenamiento de energía y se requiere por lo menos una variable de estado para la descripción dinámica.

Elementos mecánicos traslación

Relación general	Relación lineal	Unidades SI
$F = \Phi_R (V)$	$F = BV$	B: N-s/m
$X = \Phi_c (F)$	$X = CF$	C: m/N
$F = \Phi_{c^{-1}} (X)$	$F = KX$	K: N/m
$L = \Phi_L (V)$	$L = mV$	m : kg
$V = \Phi_L^{-1} (L)$	$V = L/m$	

Interconexión- traslación^{1,2}

Ley de D'alambert

- La segunda ley de Newton para una partícula sometida a múltiples fuerzas actuando simultáneamente:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Una forma alterna de la Segunda Ley de Newton se obtiene pasando el término de la derecha:

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

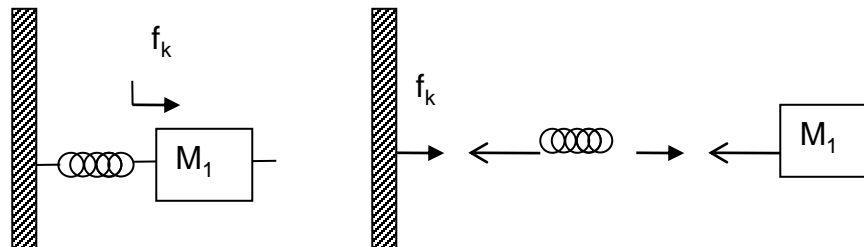
Interconexión- traslación

- Si se adiciona el vector $-m\vec{a}$ a las fuerzas que actúan sobre la partícula se obtiene un sistema de vectores equivalentes a cero; este vector de magnitud y dirección opuesta a la aceleración representa una fuerza inercial o "Fuerza de D'alambert".
- Bajo el efecto de las fuerzas externas y la fuerza inercial la partícula se considera en equilibrio dinámico y el sistema bajo análisis se puede resolver por los métodos empleados en estática.

Interconexión- traslación

Fuerzas de reacción.

- La tercera ley de Newton establece que junto con cualquier fuerza de un elemento sobre otro, existe una fuerza de reacción sobre el primer elemento de igual magnitud pero de dirección opuesta:



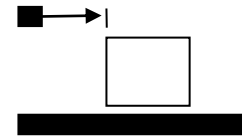
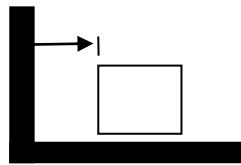
Interconexión- traslación

- Cuando los extremos de dos elementos están conectados se desplazan la misma distancia y con la misma velocidad; en otras palabras la suma algebraica de los desplazamientos a lo largo de una trayectoria cerrada es cero.

$$\sum_i \Delta x_i = 0$$

- Los desplazamientos se deben medir respecto a la misma referencia.
- Cada desplazamiento x_i lleva asociado su signo de acuerdo con la dirección en la cual se recorre la trayectoria cerrada.

Desplazamiento
medido
respecto al
Marco de
Referencia.



Desplazamiento
medido
respecto a la
condición de
equilibrio

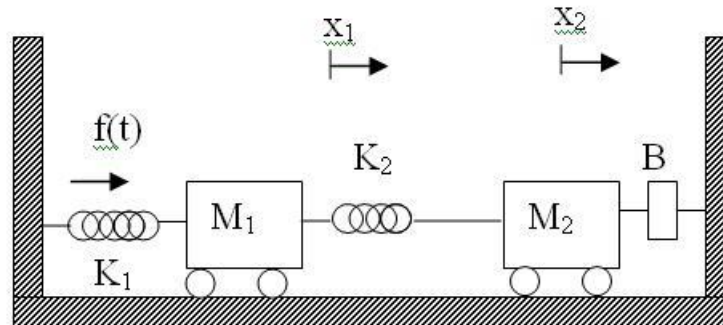
Ejemplo 1¹

Para el sistema mecánico:

Plantear los diagramas de cuerpo libre ($M_1=M_2$ y $K_1=K_2$).

Plantear la ecuación de estado, tomar como salida v_2 , velocidad de M_2

Obtener la función de transferencia.

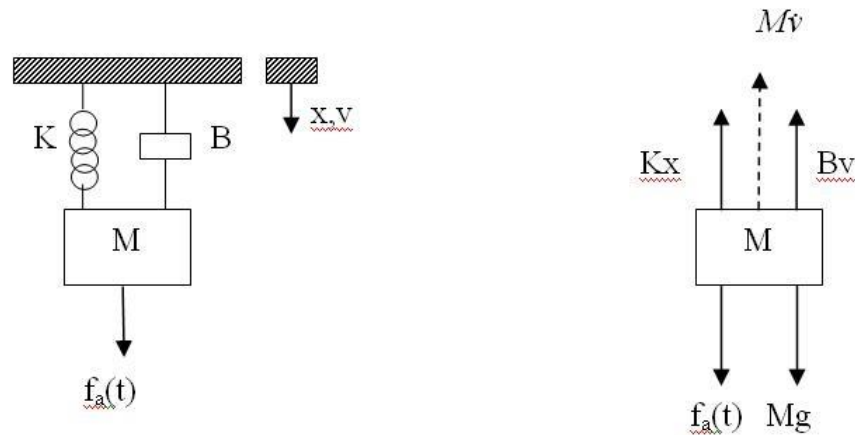


<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

Introduction: System Modeling

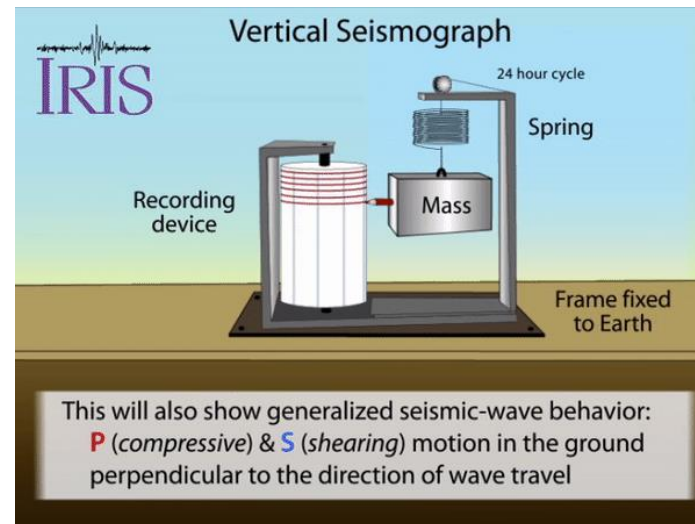
Ejemplo 2¹

Dibujar el diagrama del cuerpo libre y plantear la ecuación que describe el movimiento de la masa M .



Ejemplo 3^o Sismógrafo

El sismógrafo de la figura registra el movimiento inercial de la masa M , respecto al punto de equilibrio estático, debido a desplazamientos de la tierra w . Plantear el modelo de estado, la salida es el desplazamiento de la pluma de registro



https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/seismograph_vertical

Ejemplo 3³


La masa $M = 45$ kg, la constante del resorte es de 2.9 kN/m y la fricción es de 16.15 N/m/s².

Asumir una entrada:

$$x_1 = X_1 \cos \omega_1 t$$

1. Plantear el modelo en variables de estado, la salida es el desplazamiento relativo $x_2 - x_1$
2. Calcular la frecuencia natural del sistema.
3. Graficar la respuesta para varias frecuencias de la entrada.
4. Si el valor máximo del desplazamiento es de 2.5 mm, cual será la aceleración que lo produce?

Especificaciones de un sismógrafo:



Professional all-in-one earthquake sensors

Larger, higher sensitivity sensors are integrated into our Gecko "Pro" range of seismographs and accelerographs. These models have an optional internal battery providing hours of backup run time if the main power source becomes unavailable.

Gecko **Tremor** uses velocity sensors with a flat frequency response from 0.5 seconds to 500Hz. By adjusting the sensing amplitude range, users can tune the Tremor seismograph for surveys and local earthquake and aftershock monitoring (high sensitivity, reduced clip level) or for high amplitude blast & urban vibration monitoring using the full 254mm/s range.

The Gecko **SMA-HR** uses the latest technology low noise optical sensors for high resolution strong motion acceleration monitoring while maintaining a $\pm 2g$ full scale range, ideal for structural engineering applications. For high range strong motion sensing, the **SMA-XR** provides a $\pm 10g$ range with low noise and frequency sensitivity.

The **Prism** velocity sensors use compact, robust components to achieve high sensitivity in a portable package. Available with Short Period (**-SP**) frequency response, or low noise Medium Period (**-MP**) and Long Period (**-LP**) broadband versions, each model is suited to monitoring seismic data at different distance scales: local, regional or global, respectively.

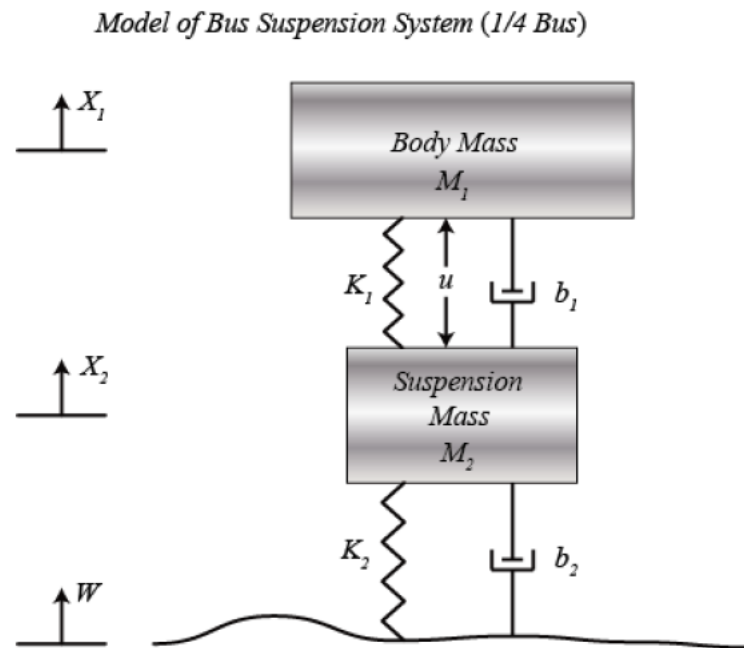
SMA-HR and -XR, TREMOR, PRISM-SP, -MP and -LP

VELOCITY SENSORS					
	Flat Response	Max. Clip	Power	Height	Weight
BLAST	4.5 to 1600Hz	695 mm/s	0.8W	145mm (5.7 in)	2.2kg (4.9 lb)
FORCE	2 to 1600Hz	909 mm/s	0.8W	145mm (5.7 in)	2.2kg (4.9 lb)
TREMOR	2 to 500Hz	254 mm/s	0.8W	185mm (7.3 in)	3.0kg (6.6 lb)
PRISM-SP	10s to 150Hz	50 mm/s ∞	1.0W	185mm (7.3 in)	2.7kg (6.0 lb)
PRISM-MP	40s to 90Hz	40 mm/s ∞	1.0W	185mm (7.3 in)	2.7kg (6.0 lb)
PRISM-LP	120s to 60 Hz	40 mm/s ∞	1.0W	185mm (7.3 in)	2.7kg (6.0 lb)

<https://www.esearth.com/wp-content/uploads/2021/03/2021-Gecko-Range.pdf>

Ejemplo 4⁹ Aplicación suspensión activa

El sistema de suspensión de un automóvil se puede modelar (1/4 del sistema) como:



Suspension: System Modeling
Suspension: System Analysis

Ejemplo 4^o Aplicación suspensión activa

System parameters

(M1)	1/4 bus body mass	2500 kg
(M2)	suspension mass	320 kg
(K1)	spring constant of suspension system	80,000 N/m
(K2)	spring constant of wheel and tire	500,000 N/m
(b1)	damping constant of suspension system	350 N.s/m
(b2)	damping constant of wheel and tire	15,020 N.s/m
(U)	control force	

- Plantear las ecuaciones de estado, la variable de salida es $(x_1 - x_2)$
- Evaluar la funciones de transferencia respecto a la entrada de control $u(s)$ y respecto al disturbio $w(s)$.
- Graficar las respuestas paso, el disturbio es de amplitud 10 cm.

Clase 2

Contenido

1. Definir la estrategia para el planteo y solución de modelos de sistemas mecánicos de rotación.
2. Definir las variables y los componentes utilizados en los sistemas mecánicos de rotación.
3. Definir y emplear las leyes de interconexión.
4. Plantear modelos y obtener la respuesta de sistemas mecánicos de rotación

Temas para repasar

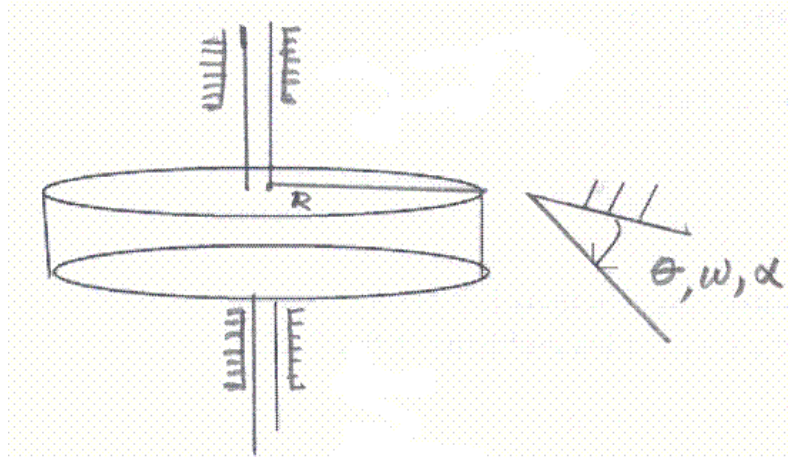
- Leyes de Newton
- Ley de D'alambert
- Solución ecuaciones de estado



Variables y unidades- Rotación

Variables generalizadas	Variable mecánica de traslación	Unidades SI
Esfuerzo, e	Torque, τ	Newton-metro (N-m)
Flujo, f	Velocidad angular, ω	Radian/segundo (rad/s)
Momentum, l	Momentum angular, H	N-m-s
Desplazamiento, δ	Angulo, θ	radian
Potencia, p	$\tau(t)\omega(t)$	$W = N\cdot m/s$
Energía, E	$\int_{\theta} \tau d\theta; \int_{h} \omega dh$	$J = W\cdot s = N\cdot m$

Marco de referencia



$$1rpm = 1rev \frac{2\pi rad}{1rev} \frac{1}{1m\left(\frac{60s}{1m}\right)} = 0.105 \frac{rad}{s}$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega(t') dt' \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$p(t) = \omega(t)\tau(t)$$

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^t p(t') dt'$$

Fricción - rotación

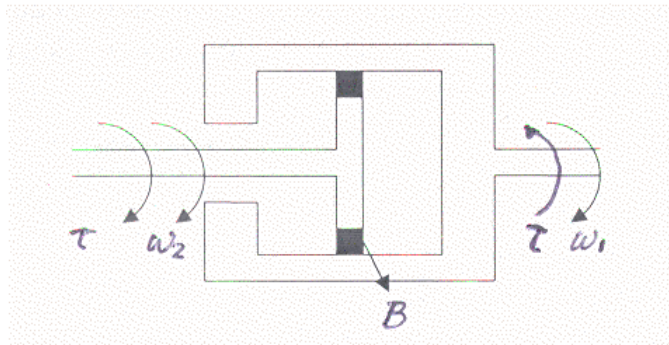
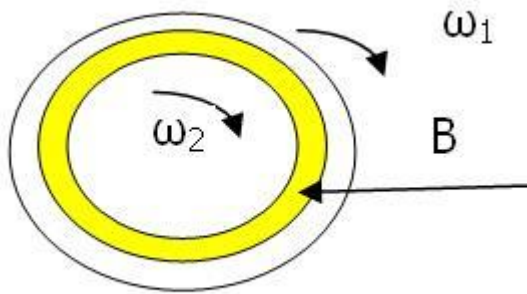
- En el elemento fricción las variables de esfuerzo y de flujo están relacionadas por una función estática:

$$e = B_t f$$

- Fricción viscosa: se desarrolla entre capas de fluidos que se mueven a diferentes velocidades, básica en el análisis de flujo de fluidos y mecanismos lubricados.
Relación lineal

$$\tau = B_t (\omega_2 - \omega_1) = B_t \Delta \omega$$

Amortiguador Rotacional⁵



<https://www.youtube.com/watch?v=XdRaTYDMSEA>

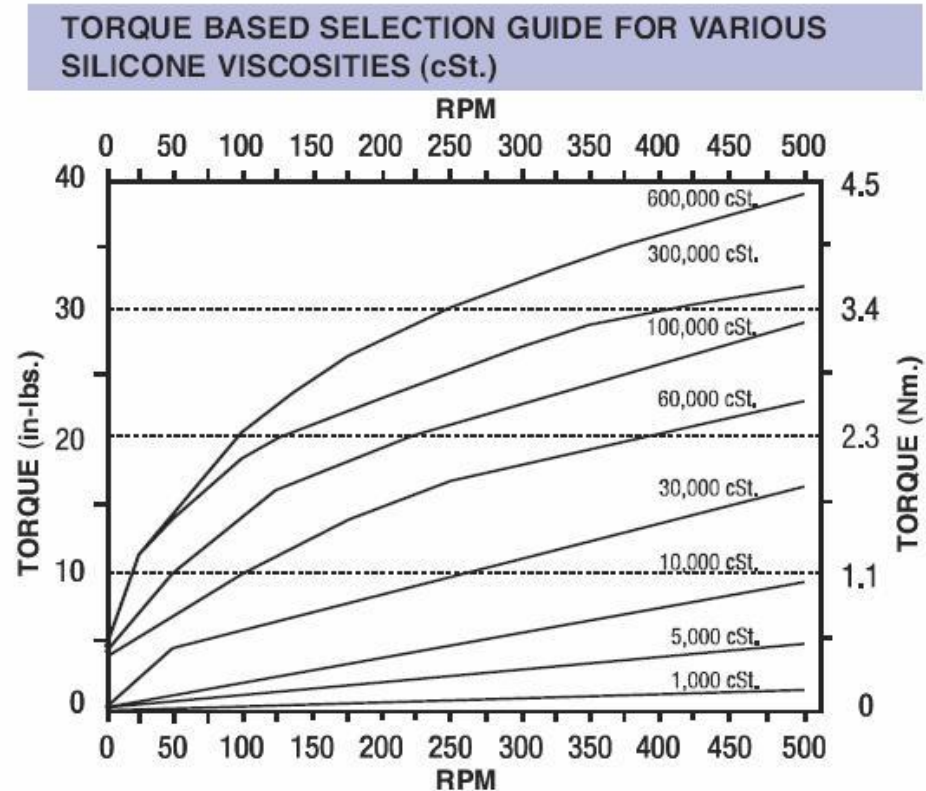
Amortiguador Rotacional⁵

Breakaway Torque Requirements:

3.0 in-lbs. (0.4 Nm.) for fluids 1K, 5K, 10K, 30K (cSt.)

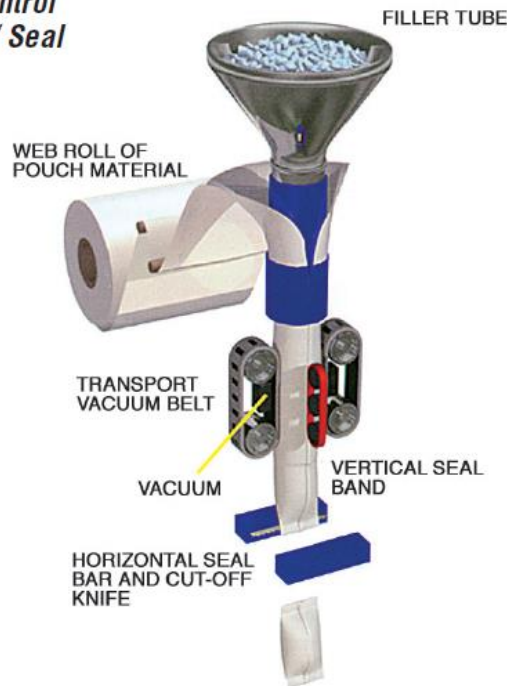
4.5 in-lbs. (0.5 Nm.) for fluids 60K, 100K, 300K (cSt.)

6.0 in-lbs. (0.8 Nm.) for fluids 600K (cSt.)



Amortiguador Rotacional⁶

RVD Application
Roll Feed Control
Vertical Fill / Seal

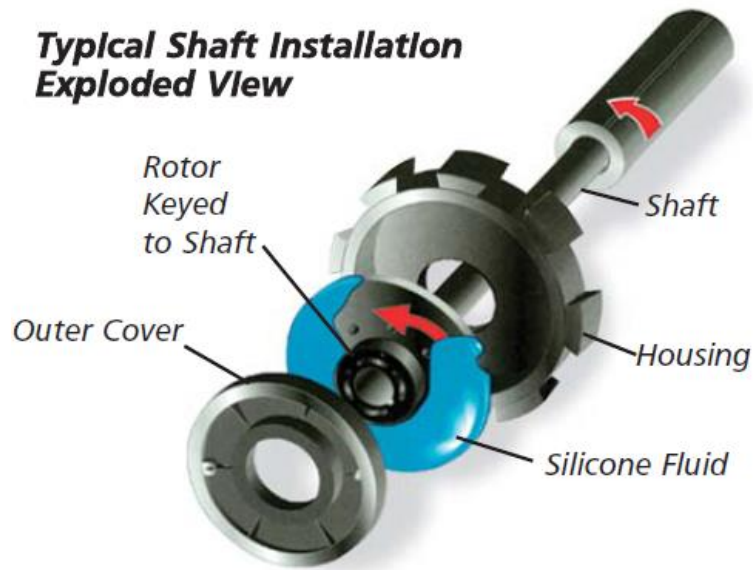


Rotary Viscous Dampers provide smooth control in applications that require continuous or intermittent positioning, forward, reverse and fixed path motion.

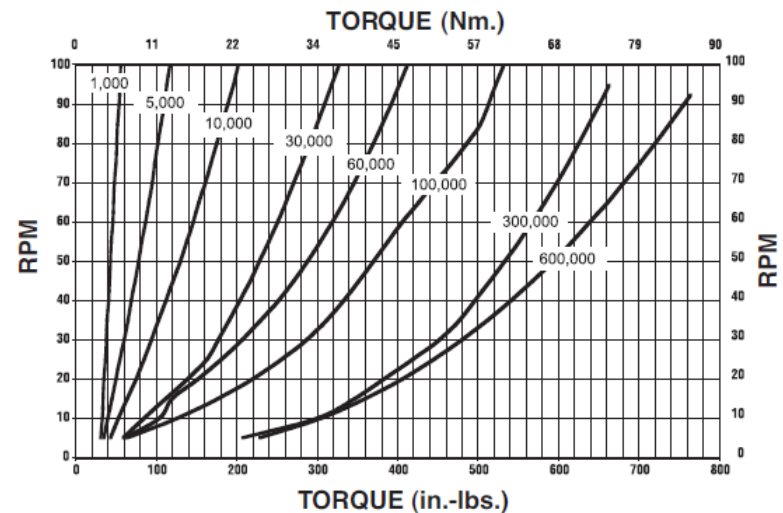
The RVD design combines low breakout friction with viscous damping to control bi-directional rotary motion in numerous applications.

Amortiguador Rotacional^{5,6}

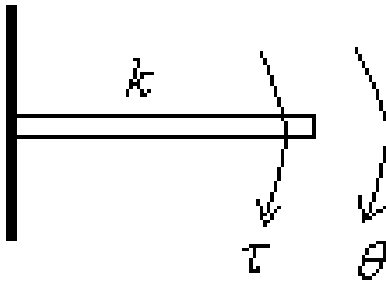
**Typical Shaft Installation
Exploded View**



**TORQUE BASED SELECTION GUIDE FOR VARIOUS
SILICONE VISCOSITIES (cSt.)**



Rigidez



- La variable de esfuerzo es función del desplazamiento

$$e = e(\delta) = K_T \delta$$

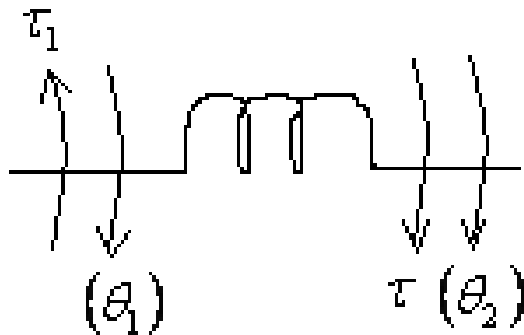
- θ es la posición angular definida respecto a la posición cuando el torque aplicado es igual a cero.

$$\tau = K_T \theta$$

- Si los dos extremos del eje se pueden mover entonces

$$\tau = K_T (\theta_2 - \theta_1)$$

Rigidez



- Cuando se asume que el momento de inercia del eje o resorte de torsión es despreciable, o esta representada por una J aparte, el momento o torque ejercido sobre los dos extremos del elemento debe ser igual en magnitud y de sentido opuesto.
- La rigidez rotacional se asocia con un resorte de torsión o con un eje flexible.

Resorte

- Energía almacenada:

$$E(t) = \int_{\delta_0}^{\delta} e(\delta) d\delta + E_0$$

- Si se asume que cuando no hay torque externo aplicado el desplazamiento angular es cero:

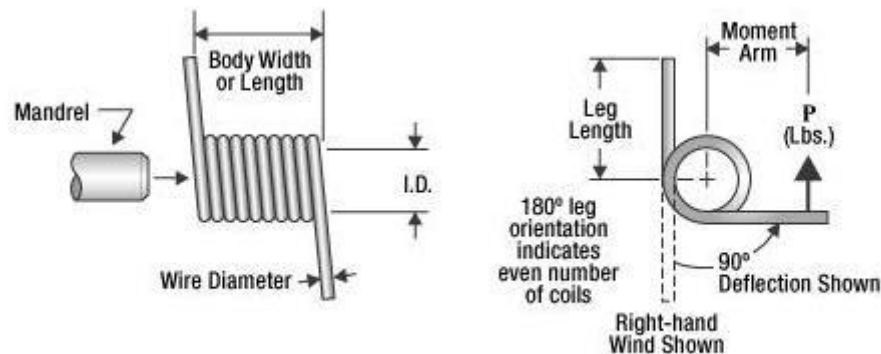
$$E(t) = \int_0^{\theta} K_T \theta d\theta$$

- La energía potencial almacenada

$$E(t) = \frac{1}{2} K_T (\theta)^2$$

Resorte⁷

- Por lo tanto se requiere una variable de estado para describir el estado de la energía en el elemento y para determinar la respuesta dinámica se debe conocer $\theta(t_0)$, posición inicial.



<https://www.youtube.com/watch?v=kGL2IJQUB84>

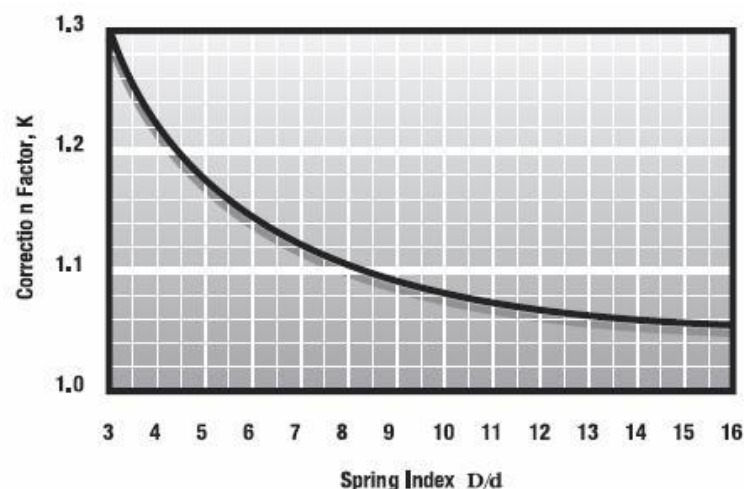
Resorte⁷

The spring rate and stress for helical, round-wire torsion springs can be calculated from:

$$R = \frac{PL}{\theta} = \frac{Ed^4}{3888DN} \quad S = \frac{32PLK}{\pi d^3}$$

Where: P = Load, Lbs.
L = Moment arm, inches
 θ = Angle of deflection, degrees
E = 30×10^6 , (28×10^6 /stainless) Young's Modulus
d = Wire diameter, inches
D = Body mean diameter (O.D. - d), inches
O.D. = Outside diameter, inches
N = Number of coils
K = Stress correction factor (see plot at right)
R = Rate (Constant), In.-Lbs./deg.
S = Stress (in bending), p.s.i.

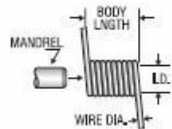
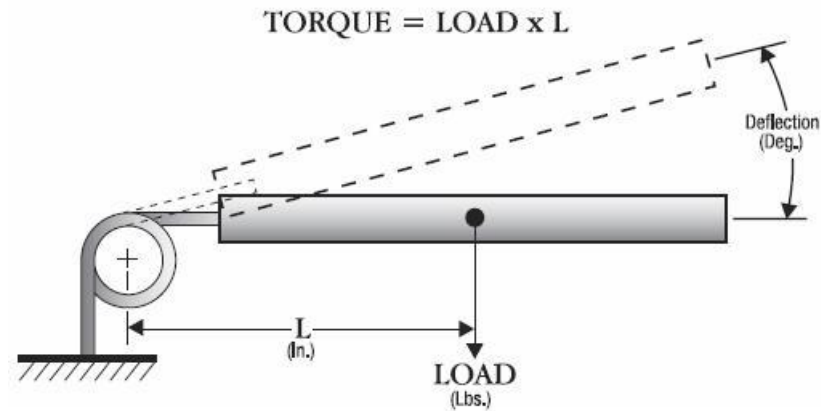
Bending deflections of long legs under load must be considered for some applications and added to the total angular deflection.



The uncorrected stress can be used for static applications.

The suggested maximum-allowable-stress value (S) for a torsion spring is considered to be 75% of the material's minimum tensile strength (MTS). MTS values are a function of the wire diameter and can be found in the "Material Properties" section of this catalog.

Resorte ⁷



CENTURY STOCK NUMBER	I.D.		O.D.		LEG LENGTH		BODY LENGTH		RATE		SUGG. MAX. DEFL.	SUGG. MAX. LOAD		NO. OF COILS	WIND DIRECT	WIRE DIA.		SUGG. MANDREL DIA.		M A T L	F N S H
	Inches	mm	Inches	mm	Inches	mm	Inches	mm	$\frac{\text{In-Lbs.}}{\text{Deg.}}$	$\frac{\text{N-mm}}{\text{Deg.}}$		In-Lbs.	N-mm			Inches	mm	Inches	mm		
TO-5056R	.206	5.23	.270	6.86	1.0	25	.28	7.15	.00486	.549	148	.72	81	7.	RIGHT	.032	.81	.17	4.20	MW	N
TO-5044LS	.210	5.33	.246	6.25	.75	19	.15	3.90	.00052	.059	229	.12	13	6.75	LEFT	.018	.46	.16	4.14	SST	N
TO-5044RS	.210	5.33	.246	6.25	.75	19	.15	3.90	.00052	.059	229	.12	13	6.75	RIGHT	.018	.46	.16	4.14	SST	N
TO-5044L	.210	5.33	.246	6.25	.75	19	.15	3.90	.00056	.063	254	.14	16	6.75	LEFT	.018	.46	.16	4.11	MW	N
TO-5044R	.210	5.33	.246	6.25	.75	19	.15	3.90	.00056	.063	254	.14	16	6.75	RIGHT	.018	.46	.16	4.11	MW	N
TO-1044	.210	5.33	.324	8.23	.79	20	.38	9.56	.06101	6.896	45	2.7	310	5.	LEFT	.057	1.45	.17	4.42	HD	Z

Momento de Inercia

- Inercia: medida de la resistencia u oposición al cambio. Se establece una relación estática entre el momentum (l) y el flujo (f).

$$f = \frac{l}{J}$$

- El flujo es función del momentum: $f(l)$.
- El momentum angular se representa por h

Momento de Inercia

- Para el elemento inercia, denominado momento de inercia J en el sistema mecánico de rotación la ecuación terminal es:

$$\omega = \frac{h}{J}$$

- El momentum es la integral de la variable esfuerzo:

$$l = \int e(t)dt \rightarrow h = \int \tau(t)dt$$

$$\frac{dh}{dt} = \tau(t) \text{ o } \tau(t) = J \frac{d\omega}{dt}$$

Momento de Inercia

- Para la energía

$$E(h) = \int_{h_0}^h \omega(h) dh + E_0$$

- Si cuando el esfuerzo es cero la energía es cero y si el momentum h_0 corresponde al punto de la gráfica w vs h para el cual $\omega = 0$:

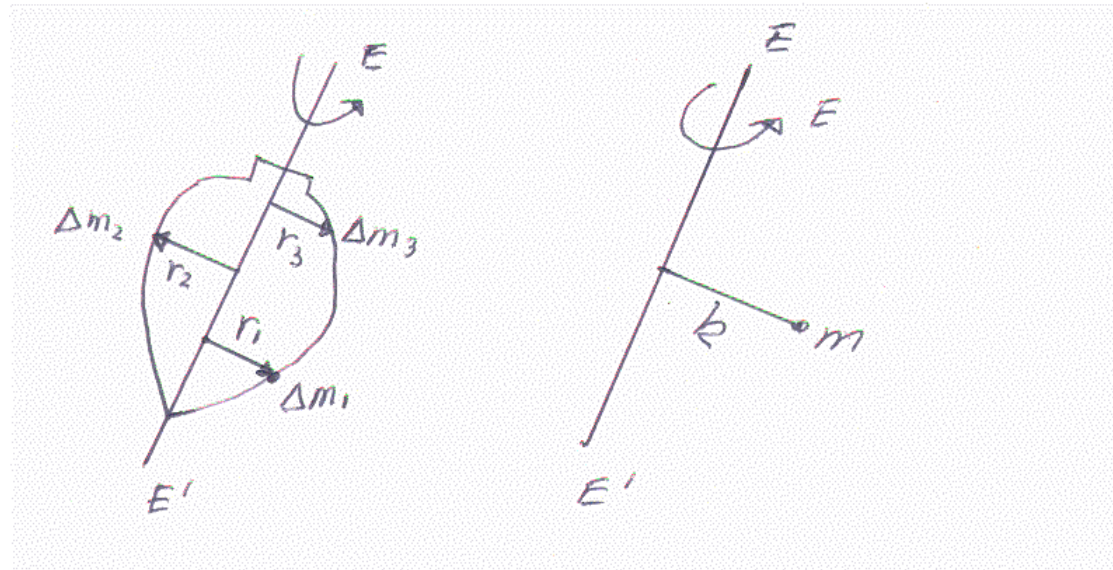
$$E(h) = \int_{h_0}^h \omega(h) dh$$

- Cuando la masa tiene una velocidad V la energía será:

$$E_k = \int_0^h \frac{h}{J} dh = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Momento de Inercia

- Si se considera una masa atada a un eje EE' por una cuerda de masa despreciable y libre de girar, cuando se aplique un torque externo la masa girará alrededor de EE'



Momento de Inercia

- La resistencia total a la rotación es:

$$r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots + r_n^2 \Delta m_n = \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Cuando $n \rightarrow \infty$

$$J = \int r^2 dm$$

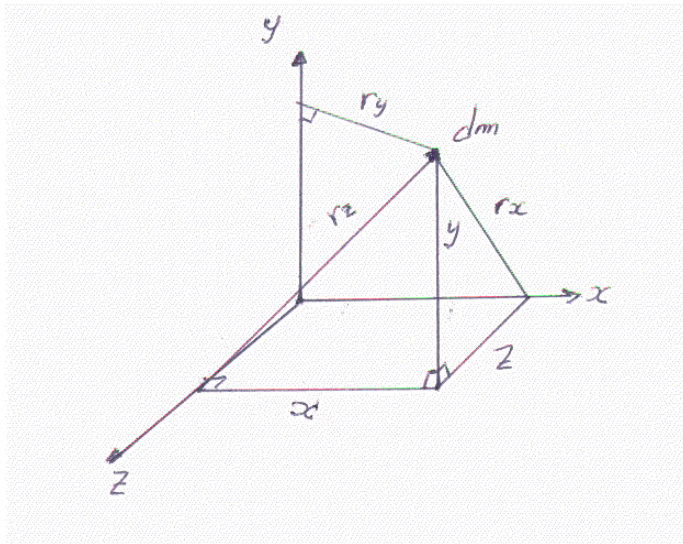
- El radio equivalente de giro:

$$J = k^2 m \quad o \quad k = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

- k : la distancia a la cual se debería concentrar toda la masa del cuerpo para que su momento de inercia J respecto al eje EE' permanezca constante.

Momento de Inercia

- Aplicando la definición a cada eje.



- Radios de giro:

$$r_y^2 = x^2 + z^2$$

$$r_x^2 = y^2 + z^2$$

$$r_z^2 = x^2 + y^2$$

- Momentos de inercia:

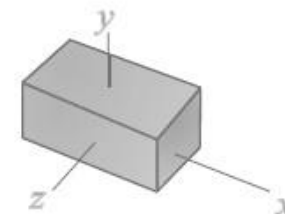
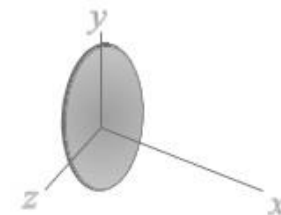
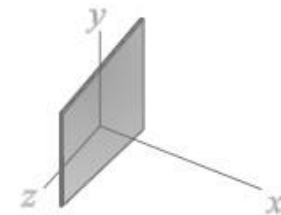
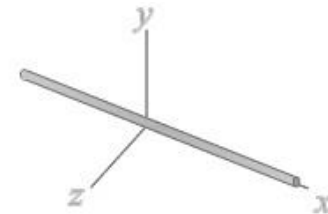
$$J_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

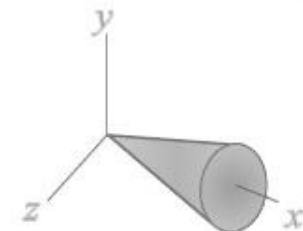
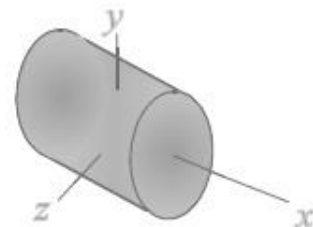
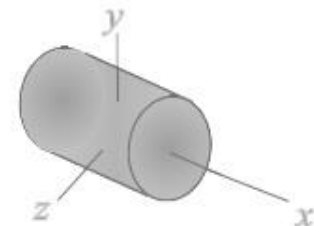
Principal Mass Moments of Inertia of Solid Geometrical Shapes ⁸

	I_x	I_y	I_z
Slender Rod $m = \text{mass}, l = \text{length of rod}$	0	$1/12 ml^2$	$1/12 ml^2$
Rectangular Plate $m = \text{mass}, b = \text{height of plate}, c = \text{width of plate}$	$1/12 m(b^2 + c^2)$	$1/12 mc^2$	$1/12 mb^2$
Thin Disk $m = \text{mass}, r = \text{radius of disk}$	$1/2 mr^2$	$1/4 mr^2$	$1/4 mr^2$
Rectangular Prism $m = \text{mass}, a = \text{depth (x)}, b = \text{height (y)}, c = \text{width (z)}$	$1/12 m(b^2 + c^2)$	$1/12 m(a^2 + c^2)$	$1/12 m(a^2 + b^2)$



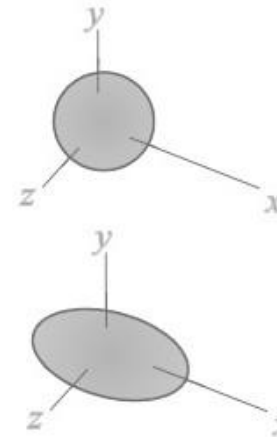
Principal Mass Moments of Inertia of Solid Geometrical Shapes ⁸

	I_x	I_y	I_z
Circular Cylinder $m = \text{mass}, l = \text{length of cylinder}, r = \text{radius}$	$\frac{1}{2} m r^2$	$\frac{1}{12} m (3r^2 + l^2)$	$\frac{1}{12} m (3r^2 + l^2)$
Elliptical Cylinder $m = \text{mass}, l = \text{length of cylinder (x)}, b = \text{height/2 (y)}, c = \text{width/2 (z)}$	$\frac{1}{4} m (b^2 + c^2)$	$\frac{1}{12} m (3c^2 + l^2)$	$\frac{1}{12} m (3b^2 + l^2)$
Circular Cone $m = \text{mass}, l = \text{length of cone}, r = \text{radius at base}$	$\frac{3}{10} m r^2$	$\frac{3}{5} m (\frac{1}{4} r^2 + l^2)$	$\frac{3}{5} m (\frac{1}{4} r^2 + l^2)$



Principal Mass Moments of Inertia of Solid Geometrical Shapes ⁸

	I_x	I_y	I_z
Sphere $m = \text{mass}, r = \text{radius}$	$\frac{2}{5} m r^2$	$\frac{2}{5} m r^2$	$\frac{2}{5} m r^2$
Ellipsoid $m = \text{mass}, a = \text{depth (x)}, b = \text{height (y)}, c = \text{width (z)}$	$\frac{1}{5} m (b^2 + c^2)$	$\frac{1}{5} m (a^2 + c^2)$	$\frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$



Elementos mecánicos rotación

Relación general	Relación lineal	Unidades SI
$\tau = \Phi_T (\omega)$	$\tau = B_T \omega$	B_T : N-m-s
$\theta = \Phi_C (\tau)$	$\theta = C \tau$	C : rad/N-m
$\tau = \Phi_C^{-1} (\theta)$	$\tau = K_T \theta$	K : N-m/rad
$H = \Phi_L (\omega)$	$H = J \omega$	J : N-m-s ² = kg-m ²
$\omega = \Phi_L^{-1} (h)$	$\omega = H/J$	

Interconexión - rotación

- Para una lámina rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas contenidas en el mismo plano de la lámina, se plantean dos conjuntos de ecuaciones: una para el movimiento del centro de masa G respecto a O (XYZ) dada por:

$$\sum F = m a$$

- Otra para el movimiento de rotación respecto a G :

$$\sum M_G = \dot{H}_G$$

- En el diagrama de cuerpo libre las fuerzas individuales se pueden representar por

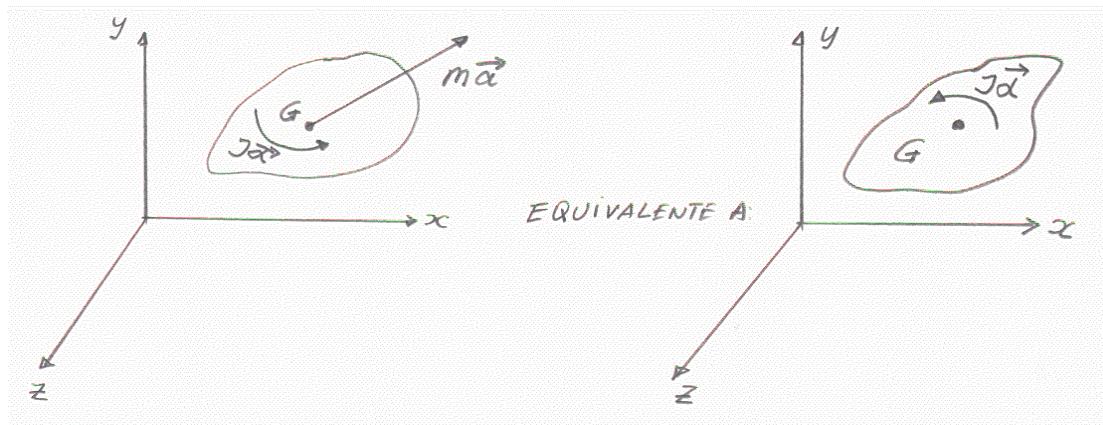
$$m \mathbf{a} \text{ y } \dot{\mathbf{H}}_G$$

Interconexión - rotación

- Cuando el movimiento esta restringido al plano de la lámina las ecuaciones se simplifican:

$$\sum F_X = m \vec{a}_x; \sum F_Y = m \vec{a}_y$$

$$\sum M_G = J \dot{\omega} = J \alpha$$



Interconexión - rotación

- Si el movimiento es solo rotatorio alrededor del centroide G , $\vec{a} = 0$ y la ley de interconexión se reduce a:

$$\sum (M_G)_{EXT} = J\alpha = J\dot{\omega}$$

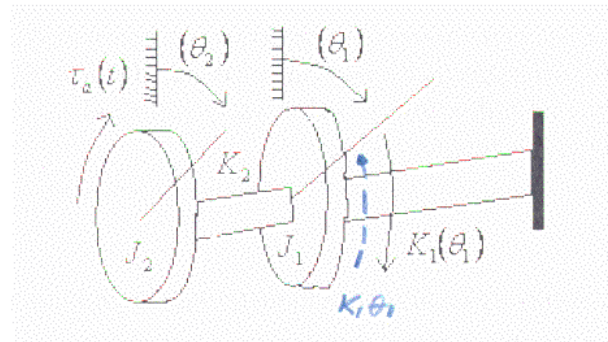
$$\sum (M_G)_{EXT} - J\dot{\omega} = 0$$

- La sumatoria incluye todos los momentos o torques externos que actúan sobre el cuerpo. El torque se puede considerar como un torque inercial y la ecuación se puede simplificar a

$$\sum_i \tau_i = 0$$

Interconexión - rotación

- Para cuerpos que están rotando alrededor del mismo eje, cualquier momento o torque ejercido por un elemento sobre otro esta acompañado por un torque de reacción de igual magnitud y dirección opuesta.



- Para cuerpos que no rotan sobre el mismo eje la magnitud de los dos torques no es necesariamente igual, como es el caso de la caja de engranajes.

Interconexión - rotación

- **Ley de desplazamientos angulares.**

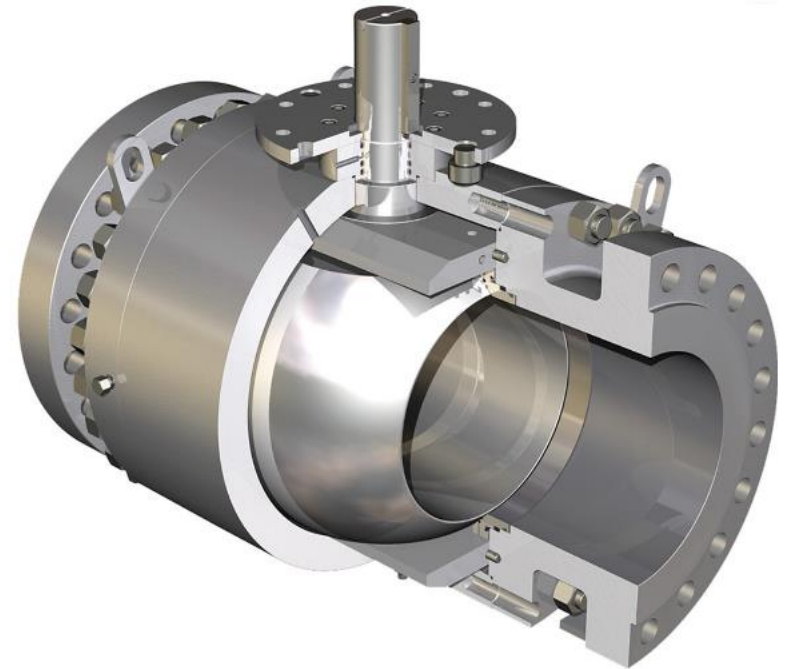
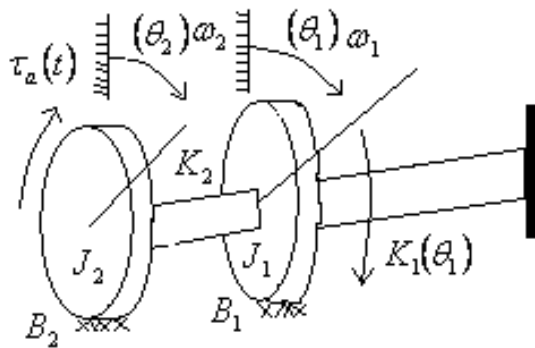
En un sistema rotatorio se pueden expresar los movimientos de algunos de los elementos en términos de los movimientos de los otros.

- Para todo t la suma algebraica de las diferencia de desplazamiento angular alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero:

$$\sum_i \Delta\theta_i = 0$$

Ejemplo 5^{1,9}

- Obtener las ecuaciones de estado para el sistema, la salida es θ_2
- Evaluar la función de transferencia: $\frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)}$

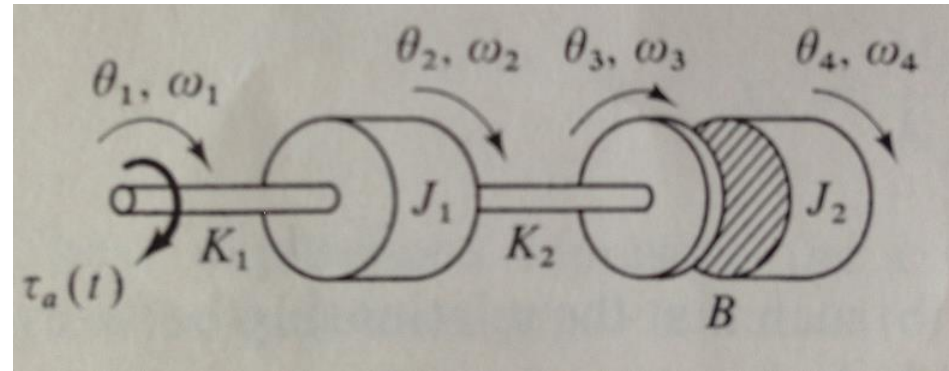


<https://www.youtube.com/watch?v=L0Dwf1t96G4>

Ejemplo 6¹

- Modelo en variables de estado.
Asumir:
- La variable de salida de interés es ω_4 . Plantear el sistema cuando la entrada es un generador de torque.
- Plantear el sistema cuando la entrada es un generador de velocidad angular.
- En los dos casos encontrar la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{\omega_4}{\text{Input}}$$



Emplear las variables de estado más convenientes para el desarrollo del modelo.

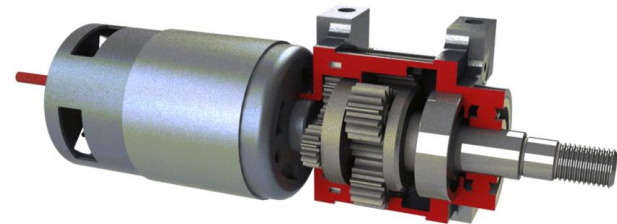
Clase 3

Contenido

1. Definir elemento de acople básico: el transformador.
2. Definir y emplear elementos de acople translación.
3. Definir y emplear elementos de acople rotacional
4. Definir y emplear elementos de acople translación - rotación y viceversa.

Temas para repasar

- Flujo magnético



Máquinas ideales

- Transmiten energía de un puerto a otro



- Bidireccionales
- Variables de flujo y de esfuerzo cambian de magnitud.

- No hay almacenamiento, generación ni disipación de energía.
- Conservación de energía:

$$e_1 f_1 = e_2 f_2$$

Máquinas ideales:

Transformador

$$f_2 = T f_1$$

- T = relación o módulo de transformación. Se asume constante.
- De la conservación de energía:
$$e_1 = T e_2$$
- La relación de esfuerzos es inversa de la relación de los flujos.

Girador

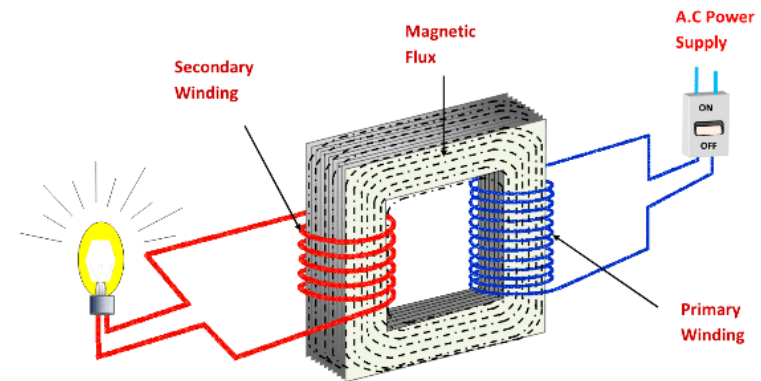
$$e_2 = G f_1$$

- G = relación o módulo del girador, se asume constante.
- De la conservación de energía

$$e_1 = G f_2$$

Transformador ideal

- Permeabilidad del núcleo es mucho mayor que la del aire: el flujo magnético estará restringido al núcleo.
- No hay pérdidas de flujo: cada línea de flujo magnético asociada a una vuelta de la inductancia 1 enlazará una vuelta de la inductancia 2.
- No hay disipación de energía
- Modelo valido para señales senoidales



Transformador ideal

- Si ϕ es el flujo a través de una espira:

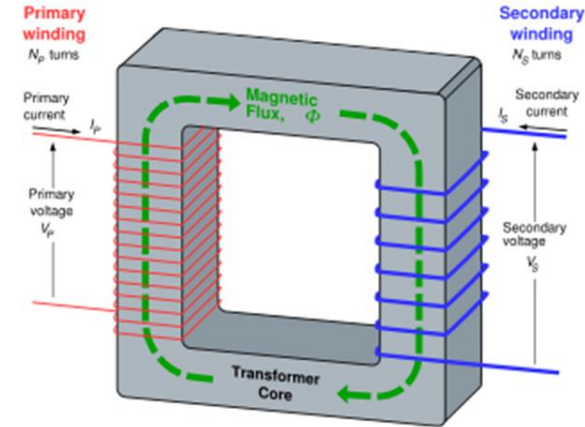
$$\phi_1 = N_1 \phi$$

$$\phi_2 = N_2 \phi$$

- La relación de voltajes:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1 \frac{d\phi}{dt}}{N_2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2}$$

- Observar que las dos corrientes entran al transformador



Máquina ideal: No hay pérdidas

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = -\frac{N_2}{N_1} = -N$$

Si $i_2 = 0 \rightarrow i_1 = 0$ independiente de v_1 .

Transformador ideal

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t)$$

$$i_2(t) = -\frac{N_1}{N_2} i_1(t)$$

- Transformador elevador:

$$N_2 > N_1$$

- Transformador reductor:

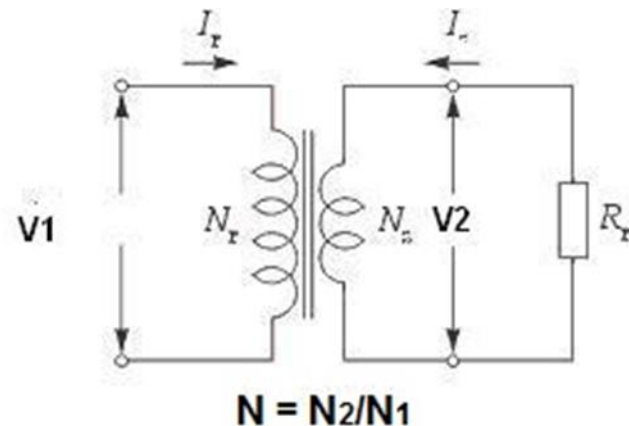
$$N_2 < N_1$$

- Cuando se conecta R carga la resistencia de entrada es:

$$R_{in} = \frac{V_1}{I_1}; V_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)V_2$$

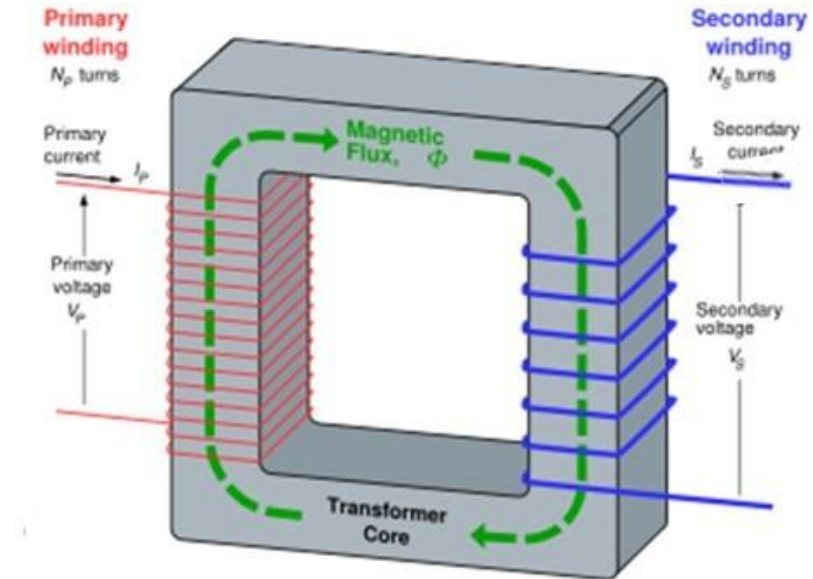
$$= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)(-I_2 R_L) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)R_L I_1$$

$$R_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L = \frac{1}{N^2} R_L$$



Transformador ideal carga en el secundario

- En el secundario se conecta una resistencia de carga
- La corriente del secundario tiene sentido positivo saliendo hacia la carga.
- Máquina ideal: No hay pérdidas.

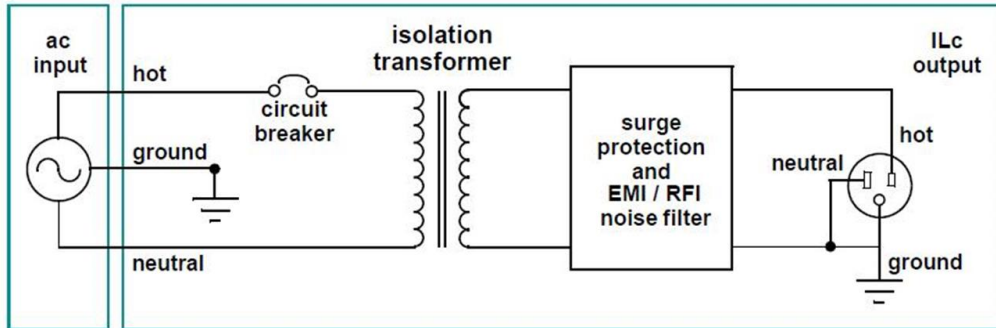


$$\begin{aligned} v_1(t)i_1(t) &= v_2(t)i_2(t) \\ \frac{i_1(t)}{i_2(t)} &= \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = N \end{aligned}$$

Cuando se conecta R carga:

$$\begin{aligned} R_{in} &= \frac{V_1}{I_1}; V_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)V_2 \\ &= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)(I_2 R_L) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)\left(\frac{N_1}{N_2}\right)R_L I_1 \\ R_{in} &= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_L = \frac{1}{N^2} R_L \end{aligned}$$

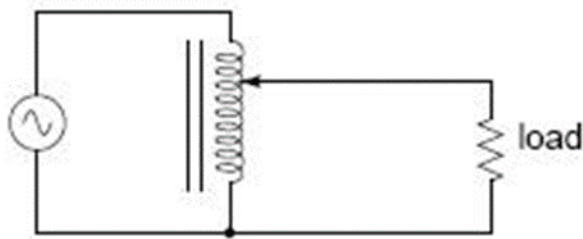
Aplicaciones:



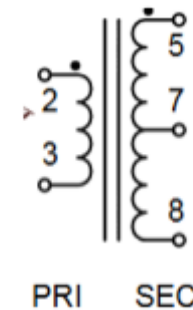
Aislamiento (Isolation)¹⁶



*The "Variac"
variable autotransformer*



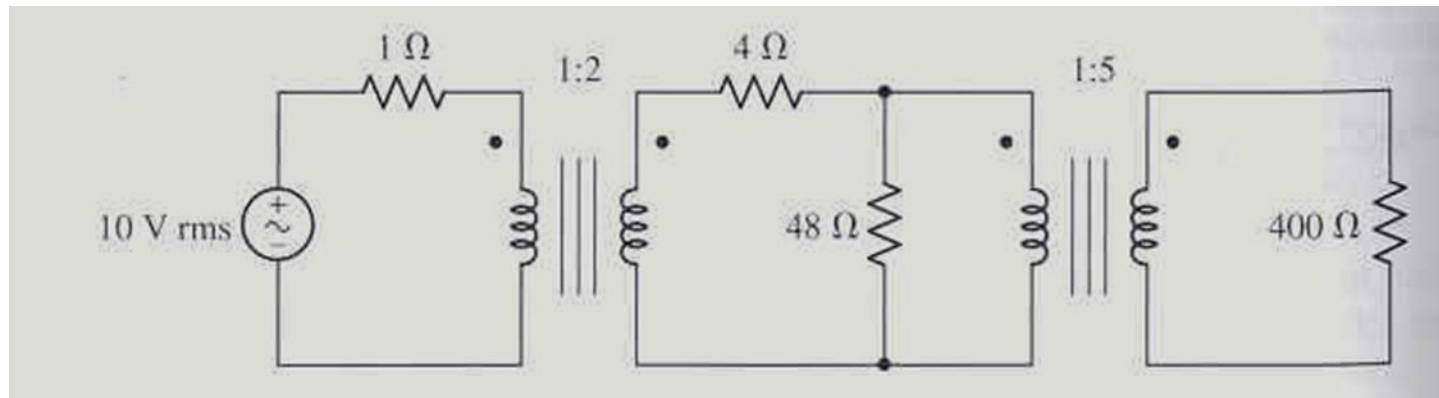
Puede ser elevador o reductor
No hay aislamiento galvánico



Transformador con Taps

Ejemplo 7²

Evaluar la potencia se disipa en cada resistencia.
Los transformadores son ideales-
La alimentación es senoidal.



Máquinas reales

- Conversión de energía: pérdida debidas a conversiones inútiles o no deseables.
- Disipación de calor: resistencia eléctrica, fricción
- Energía acústica: ruido, vibraciones
- Energía luminosa: radiación
- La disipación de energía en forma de calor se puede modelar por aparte.
- Eficiencia:

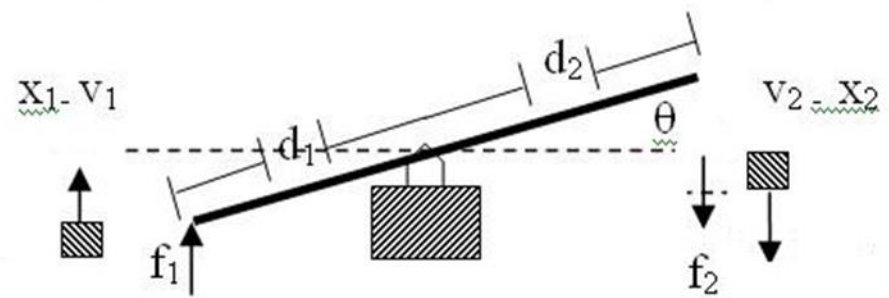
$$\eta = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = \frac{P_{OUT}}{P_{OUT} + P_{PERDIDA}}$$

Palanca

- Ideal: barra rígida, sin masa, soportada en un pivote.
- No hay fricción ni energía almacenada.
- Para ángulos pequeños (< 0.25 rad): $\sin(\theta) \approx \theta$

- la potencia en el puerto de entrada es igual a la potencia en el puerto de salida:

$$e_1(t)f_1(t) = e_2(t)f_2(t)$$



Palanca

- Para ángulos pequeños:

$$\begin{aligned}\text{sen}\theta &= \frac{x_1}{d_1} \Rightarrow x_1 = d_1 \text{sen}\theta \\ x_1 &\approx d_1 \theta\end{aligned}$$

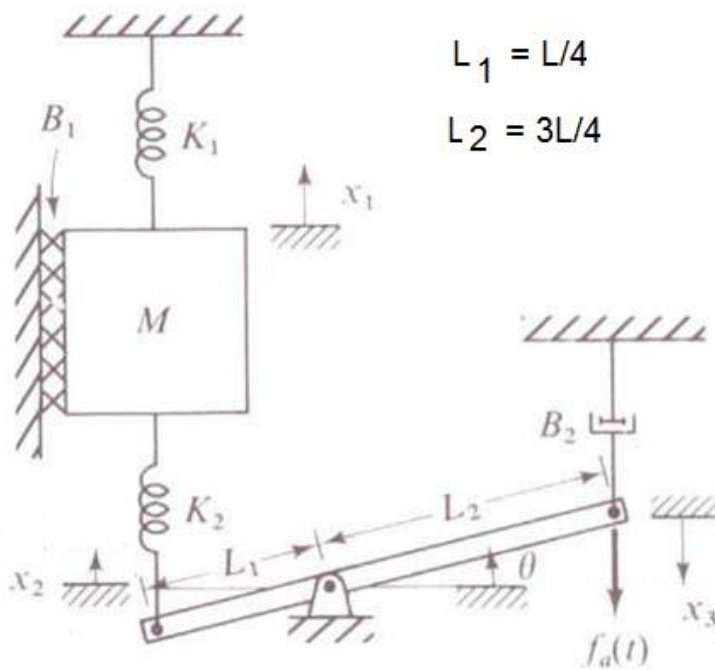
$$\begin{aligned}\text{sen}\theta &= \frac{x_2}{d_2} \rightarrow x_2 = d_2 \text{sen}\theta \\ x_2 &\approx d_2 \theta\end{aligned}$$

$$\frac{x_2}{d_2} = \frac{x_1}{d_1} \quad \text{o} \quad x_2 = \left(\frac{d_2}{d_1} \right) x_1$$

- De la ecuación de potencia

$$\begin{aligned}f_1 v_1 &= f_2 v_2 \\ f_1 &= \frac{v_2}{v_1} f_2 = \frac{d_2}{d_1} f_2\end{aligned}$$

Ejemplo 8¹



Se aplica una fuerza externa $f_a(t)$. La palanca es ideal y está en la posición horizontal sin fuerza externa aplicada. El ángulo θ es pequeño.

- Plantear el modelo de estado. Las variables de estado son:

$$x_1; v_1; \theta$$

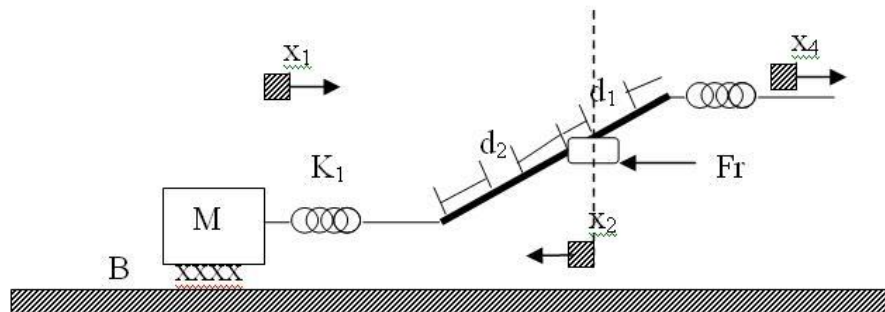
- El ángulo θ es pequeño.
- Plantear la ecuación de salida si la variable de interés es la fuerza de reacción del pivote.

Plantear a partir de la condición de Equilibrio estático producido por la gravedad

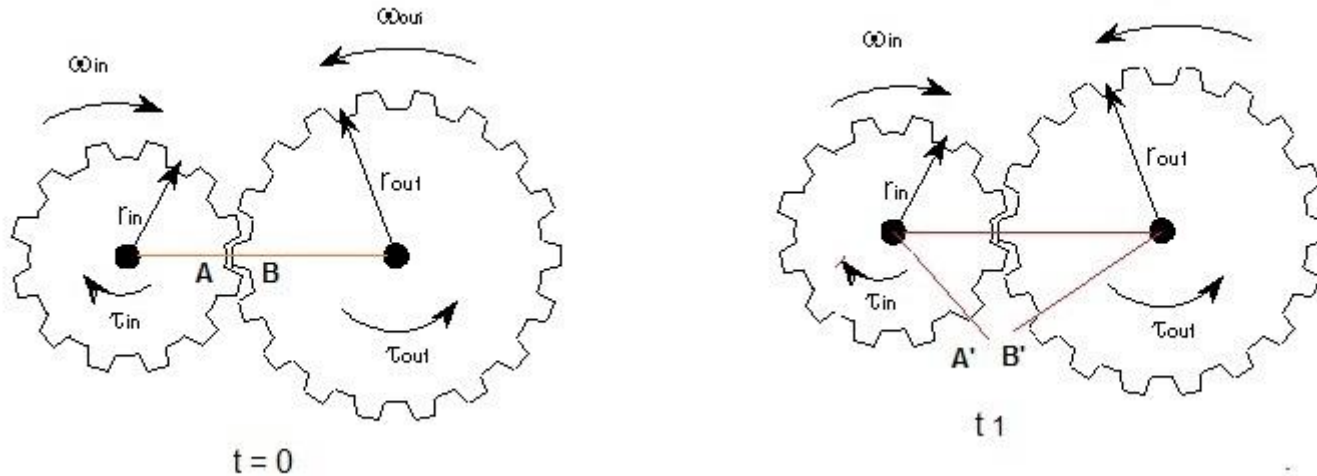
Ejemplo 9¹

Plantear el modelo en variables de estado del sistema mecánico dado. Encontrar la ecuación de salida si se tiene como variable de salida F_r , la fuerza que ejerce el pivote.

La entrada es el desplazamiento $x_4(t)$ aplicado al resorte K_2 . Se asume que el ángulo de rotación es pequeño, de tal forma que el movimiento se puede considerar horizontal únicamente.



Engranajes



- Los engranajes son el equivalente rotacional de la palanca.
- Se asumen engranajes ideales: $J = 0$, $B = 0$, sin energía inicial almacenada y un perfecto acople de los dientes.
- La relación de engranajes es

$$\frac{n_{out}}{n_{in}} = \frac{r_{out}}{r_{in}} = N$$

Engranajes

- Las longitudes de los arcos deben ser iguales

$$PA' = PB'$$

$$\theta_{in} r_{in} = \theta_{out} r_{out}$$

$$\frac{\theta_{in}}{\theta_{out}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} = \frac{\omega_{motor}}{\omega_{load}} = \frac{r_{out}}{r_{in}} = \frac{n_{load}}{n_{motor}} = N$$

- Las direcciones positivas de los engranajes son opuestas; de lo contrario aparecería un signo negativo de la relación.

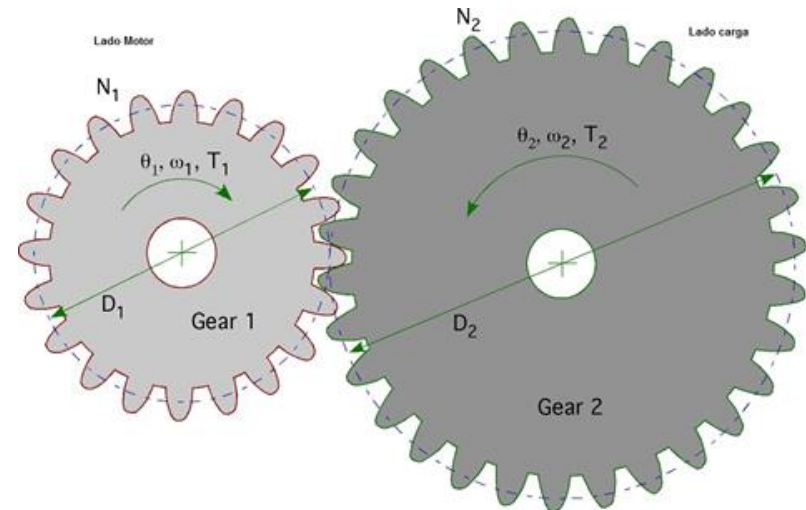
Engranajes

- Como J y B se han asumido cero:

$$P_{in} = P_{out}$$

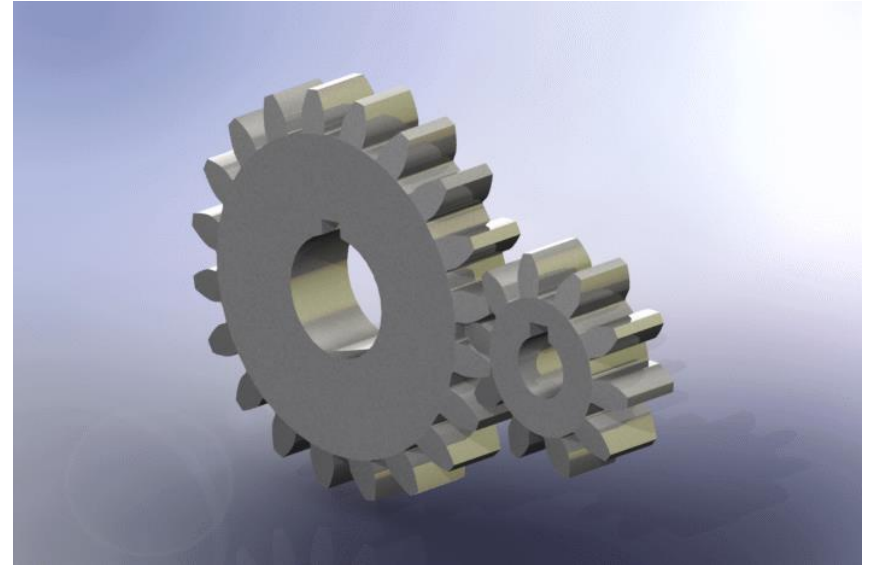
$$\omega_{in}\tau_{in} = \omega_{out}\tau_{out}$$

$$\frac{\tau_{out}}{\tau_{in}} = \frac{\omega_{in}}{\omega_{out}} = N$$



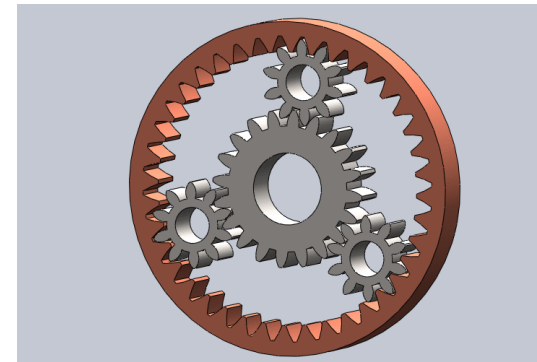
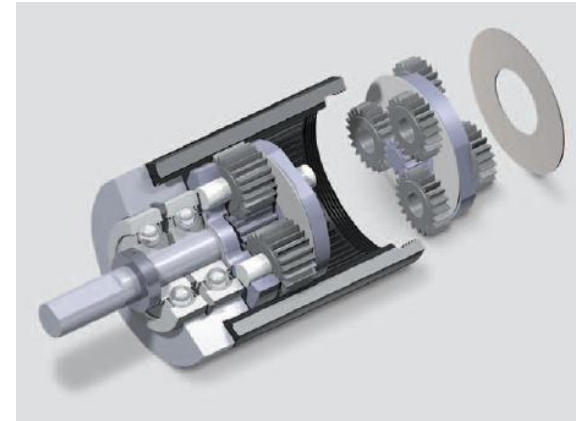
Engranajes²

- Engranajes tipo "Spur" la caja puede tener una o más etapas; cada etapa esta conformada por dos ruedas dentadas, la primera de ellas montada directamente sobre el eje del motor.
- Se emplean para bajos torques: $< 2\text{Nm}$
- Reducciones 6:1 a 5752:1
- Alta eficiencia
- Bajo ruido.



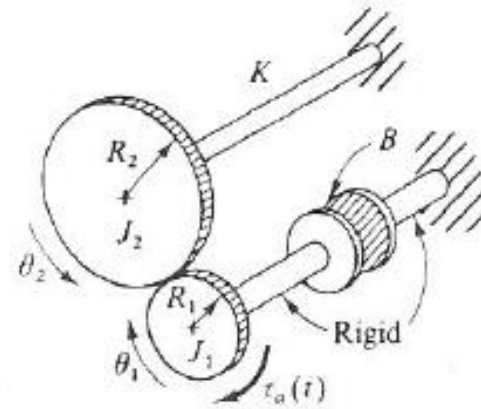
Engranajes²

- “Planetaria”, de varias etapas conformadas por varias ruedas dentadas.
- Transferencia de altos torques (Maxon hasta 180 Nm)
- Reducciones 4:1 a 6285:1



Ejemplo 10¹ Engranajes con perdidas

- La entrada externa es el torque $\tau_a(t)$ y hay dos variables de salida de interés en el engranaje J_1 : el momentum angular total y el torque viscoso, sentido horario asumido positivo.

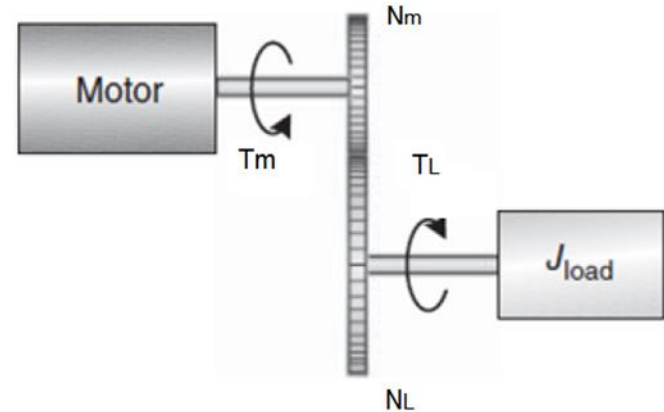


Plantear el modelo en variables de estado
Ecuación diferencial para el desplazamiento angular de J_1 y el torque externo.

Inercia reflejada

- Cuando la carga se acopla al eje del motor empleando una caja de engranajes la inercia que se ve en el eje del motor cambia de valor.
- Equivalente a la resistencia reflejada al lado primario del transformador

$$N = \left(\frac{N_L}{N_m} \right) > 1 \text{ caja reductora}$$



m: lado motor; l: lado carga

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_L} = \frac{N_L}{N_m} \rightarrow \Theta_L = \left(\frac{N_m}{N_L} \right) \Theta_m$$

$$\frac{T_m}{T_L} = \frac{N_m}{N_L} \rightarrow T_M = \left(\frac{N_m}{N_L} \right) T_L$$

Inercia reflejada

- La inercia de la carga:

$$T_L = J_L \frac{d\omega}{dt} = J_L \frac{d^2\theta}{dt^2} = J_L s^2 \Theta_L$$

- La inercia vista en el lado moto, en representación de Laplace:

$$T_M(s) = \left(\frac{N_m}{N_L}\right) T_L = \left(\frac{N_m}{N_L}\right) [J_L s^2 \Theta_L(s)]$$

$$T_M(s) = \left(\frac{N_m}{N_L}\right) \left[J_L s^2 \left(\frac{N_m}{N_L}\right) \Theta_m(s) \right]$$

$$T_M(s) = s^2 \left[\left(\frac{N_m}{N_L}\right)^2 J_L \right] \Theta_m(s)$$

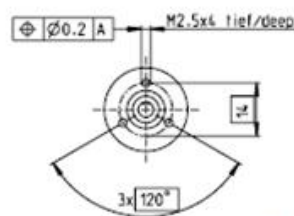
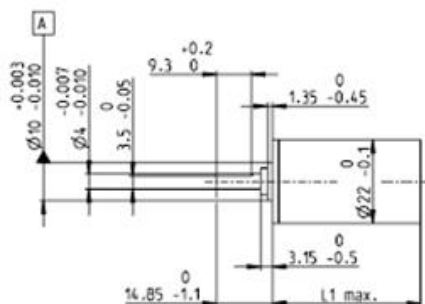
- El efecto de una carga (J_L) visto desde el lado del motor es:

$$J_R = \left[\left(\frac{N_m}{N_L}\right)^2 J_L \right]$$

- Se puede incluir la eficiencia de la caja de engranajes:

$$J_R = \left(\frac{1}{\eta}\right) \left(\frac{J_L}{N^2}\right)$$

Engranajes¹⁰



M 1:2

Technical Data

Planetary Gearhead	straight teeth
Output shaft	stainless steel, hardened
Bearing at output	ball bearing
Option	sleeve bearing
Radial play, 10 mm from flange	max. 0.2 mm
Axial play	max. 0.2 mm
Max. axial load (dynamic)	100 N
Max. force for press fits	100 N
Direction of rotation, drive to output	=
Max. continuous input speed	6000 rpm
Recommended temperature range	-40...+100°C
Number of stages	1 2 3 4 5
Max. radial load, 10 mm from flange	30 N 50 N 55 N 55 N 55 N

maxon gear

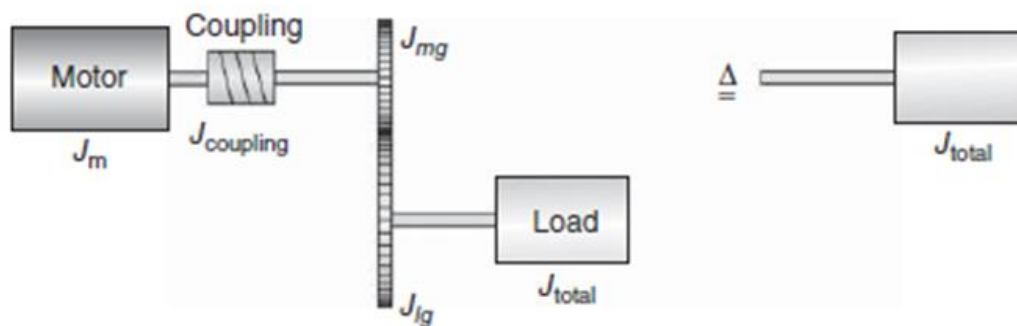
- Stock program
- Standard program
- Special program (on request)

Part Numbers

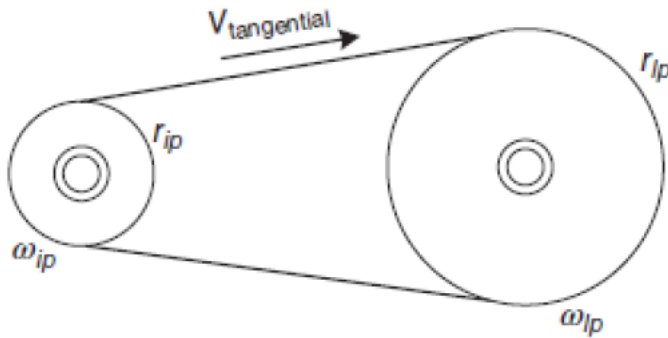
		134156	134158	134163	134168	134172	110340	134183	134186	134190	134195	134203
Gearhead Data												
1 Reduction		3.8:1	14:1	53:1	104:1	198:1	370:1	590:1	742:1	1386:1	1996:1	3189:1
2 Absolute reduction		15/4	225/16	3375/64	87723/645	50425/256	10556001/20561	59049/100	759375/1024	152640015/114264	266012023/96305	1594323/500
3 Max. motor shaft diameter	mm	4	4	4	3.2	4	3.2	4	4	3.2	3.2	4
4 Number of stages		1	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5
5 Max. continuous torque	Nm	0.5	0.5	0.8	0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6 Max. intermittent torque at gear output	Nm	0.8	0.8	1.2	1.2	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6	1.6
7 Max. efficiency	%	84	70	59	59	49	49	49	42	42	42	42
8 Weight	g	42	55	68	68	81	81	81	94	94	94	94
9 Average backlash no load	"	1.0	1.2	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
10 Mass inertia	gcm ²	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
11 Gearhead length L1*	mm	22.6	29.4	36.2	36.2	43.0	43.0	43.0	49.8	49.8	49.8	49.8

Ejemplo 11 Inercia reflejada

- El sistema de la figura usa una caja de engranajes Maxon 134158, la carga tiene una inercia de $4,8 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2$, hallar la inercia total en el lado motor.



Pulley and belt^{17,18}



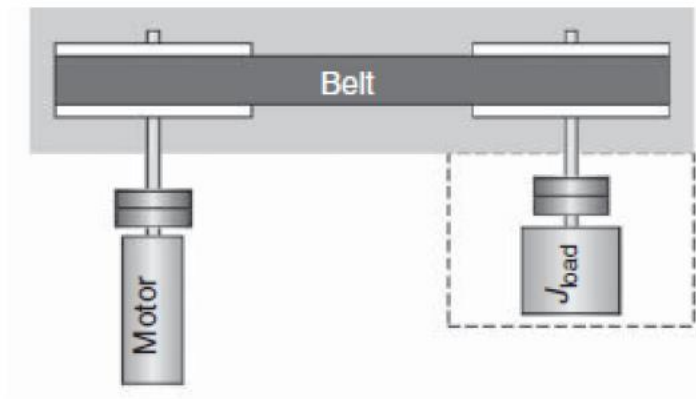
- La velocidad tangencial es constante:

$$v_{tang.} = \omega_{ip} r_{ip} = \omega_{lp} r_{lp}$$

La relación de transmisión:

$$N_{BP} = \frac{\text{Motor speed}}{\text{Load speed}} = \frac{\omega_{ip}}{\omega_{lp}} = \frac{r_{lp}}{r_{ip}}$$

$$\omega_{load\ pulley} = \frac{1}{N_{BP}} \omega_{input\ pulley}$$



<https://www.youtube.com/watch?v=F7O3RBTRix4>

Pulley and belt^{17,18}

- La inercia reflejada por el mecanismo en su eje de entrada es:

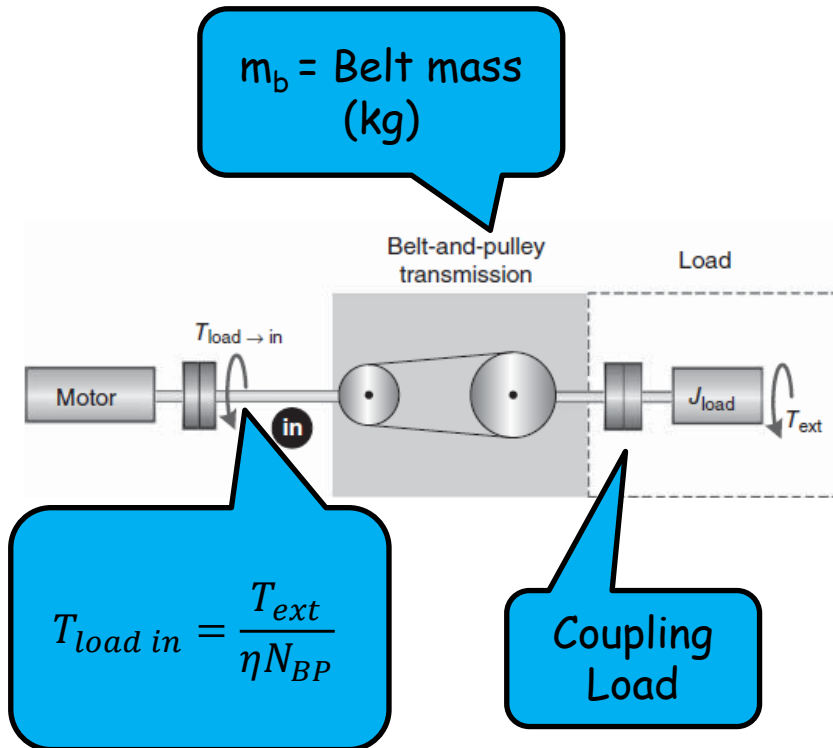
$$J_R = J_{Pin} + J_{Bin} + J_{LPin} + J_{Lin} + J_{C2in}$$

- La inercia de la correa se puede evaluar como:

$$J_{Bin} = mr^2 = (m_b)r_{ip}^2$$

- Similar a la caja de engranajes:

$$J_R = J_{Pin} + \frac{1}{\eta} (m_b r_{ip}^2) + \frac{1}{\eta N_{BP}^2} (J_{PL} + J_L + J_{C2})$$

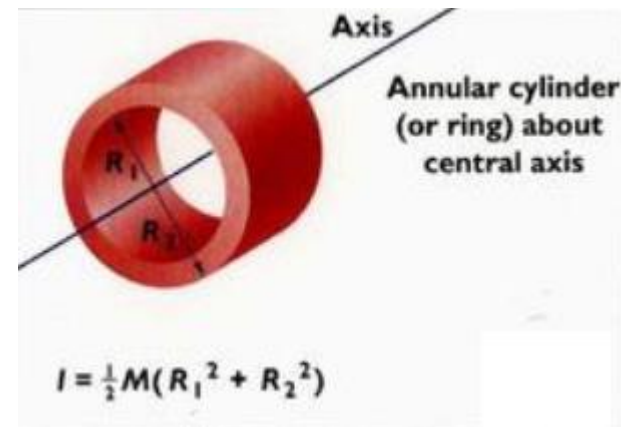


Efecto de un torque externo
Sobre la carga

Ejemplo 12¹⁷

A belt and pulley arrangement will be moving a weight of 10 lb. The pulleys are hollow cylinders, 5 lb each, with an outer radius of 2.5 in. and an inner radius of 2.3 in.

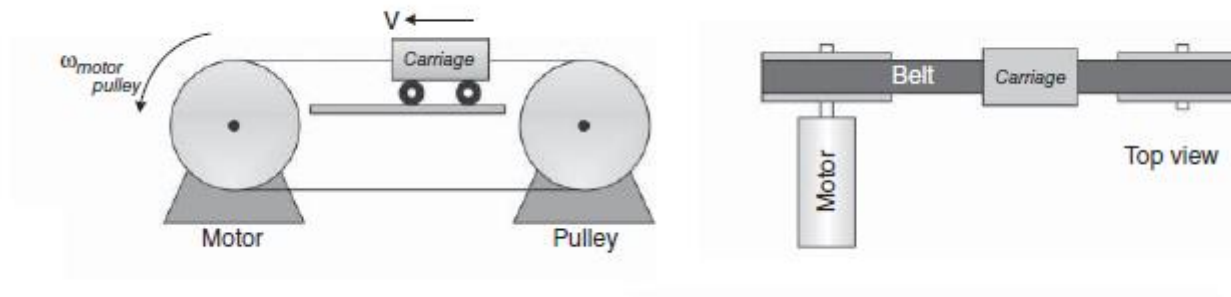
- Find Total inertia reflected to the motor shaft.



Belt drive^{17,18}

- La carga va conectada a la correa y entre dos poleas idénticas.
- Se puede modelar como piñón y cremallera:

$$N_{BD} = \frac{1}{r_{ip}}$$



- Aplicaciones de baja inercia y baja carga

https://www.motioncontrolonline.org/content-detail.cfm/Motion-Control-News/Linear-motor-vs-Belt-drive/content_id/2023

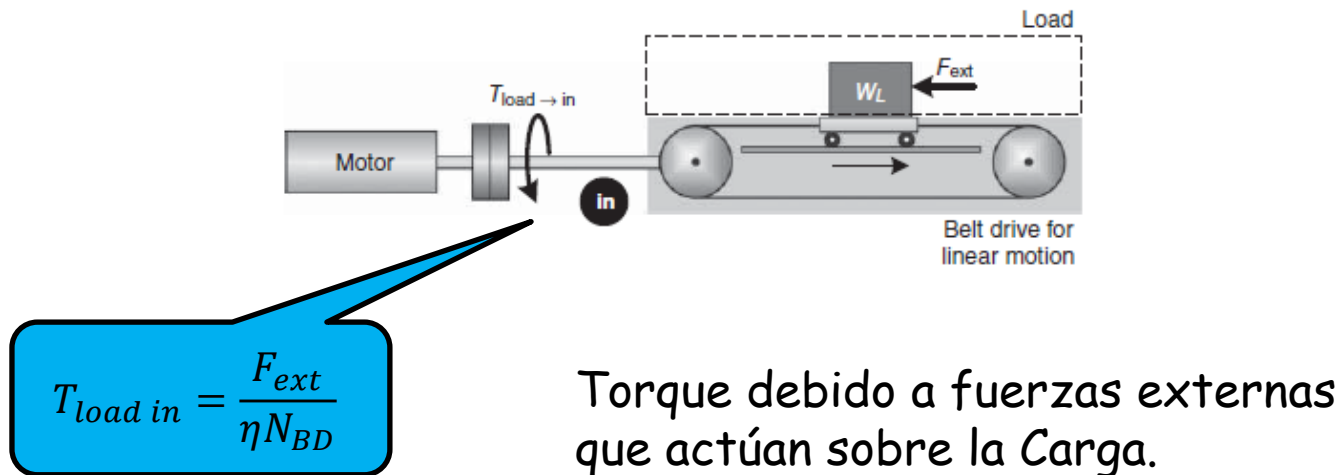
Belt drive^{17,18}

- La inercia reflejada:

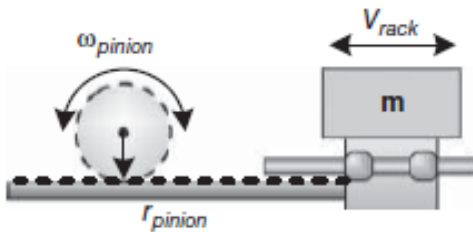
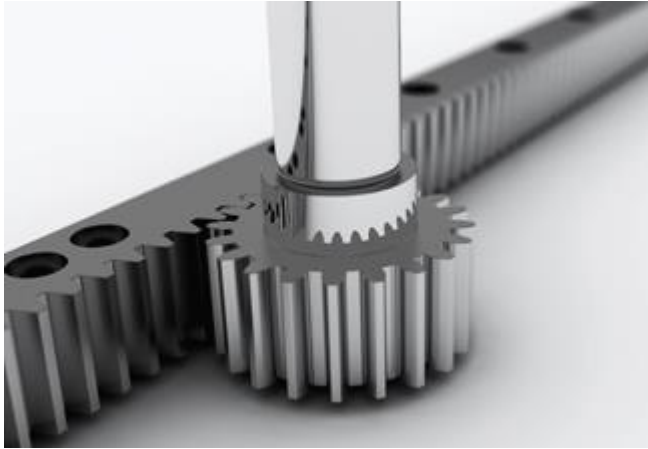
$$J_{ref} = J_{IP} + J_{load\ in} + J_{carr\ in} + J_{belt\ in} + J_{LP}$$

- Las dos poleas son iguales, por lo tanto $J_{LP} = J_{IP}$

$$J_{ref} = 2J_{pinion} + \frac{1}{\eta N_{BD}^2} (m_L + m_C + m_{belt})$$



Piñón y cremallera^{17,18,19}



- Convierte movimiento rotatorio del motor en translación:

$$V_{rack} = r_{pinion} \omega_{pinion}$$

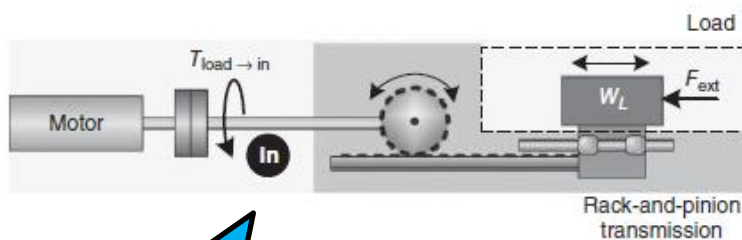
- La relación de transmisión:

$$N_{RP} = \frac{\text{Motor Speed}}{\text{Load speed}} = \frac{1}{r_{pinion}}$$

:

<https://www.youtube.com/watch?v=3hc170NTztg>

Piñón y cremallera^{17,18}



$$T_{load\ in} = \frac{F_{ext}}{\eta N_{RP}}$$

Torque debido a fuerzas externas que actúan sobre la Carga.

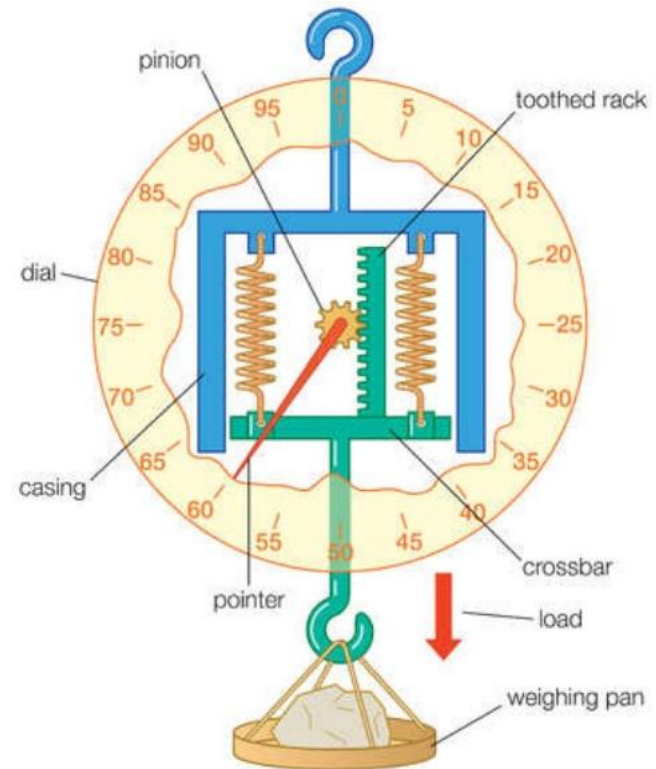
- La inercia reflejada:
- $J_{ref} = J_{pinion} + J_{load\ in} + J_{carr\ in}$
- $J_{ref} = J_{pinion} + \frac{1}{\eta N_{RP}^2} (m_L + m_c)$
- Carruaje y carga son de translación.

Piñón y cremallera¹¹

Application	HORIZONTAL translation		VERTICAL lifting	
	APPLICATION PARAMETERS			
Units	Metric	Imperial	Metric	Imperial
Mass to move, M	Kg	W/gc, Lb * s2 / ft.	Kg	W/gc, Lb * s2 / ft.
Linear Speed, V	M/s	Ft/s	M/s	Ft/s
Acceleration time, ta	s	s	s	s
Acceleration due to gravity, g	9.8 M/s2	32.2 Ft/s2	9.8 M/s2	32.2 Ft/s2
Coefficient of friction, μ	-	-	-	-
Pitch circle dia. of pinion, d	mm	in.	mm	in.
External Force, F	N	Lbs.	N	Lbs.
Service Factor, S.F. *	-	-	-	-
	CALCULATED DATA			
Acceleration, a	a = V/ta. M/s2	a = V/ta, Ft/s2	a = V/ta. M/s2	a = V/ta, Ft/s2
Application force at rack, Fr	Fr = μM*g + M*a + F N	Fr = μM*g + M*a + F Lbs.	Fr = M*g + M*a + F N	Fr = M*g + M*a + F Lbs.
Application Torque at Pinion, Tp	Tp = (Fr * d)/2000 NM	Tp = (Fr * d)/24 Lb.Ft.	Tp = (Fr * d)/2000 NM	Tp = (Fr * d)/24 Lb.Ft.
Design Torque, Td	Td = Tp * S.F. NM	Td = Tp* S.F. Lb.Ft.	Td = Tp * S.F. NM	Td = Tp * S.F. Lb.Ft.
Max. Rotational speed of pinion, Np	Np = (V * 19,100)/d RPM	Np = (V * 229.2)/d RPM	Np = (V * 19,100)/d RPM	Np = (V * 229.2)/d RPM

Ejemplo 13³

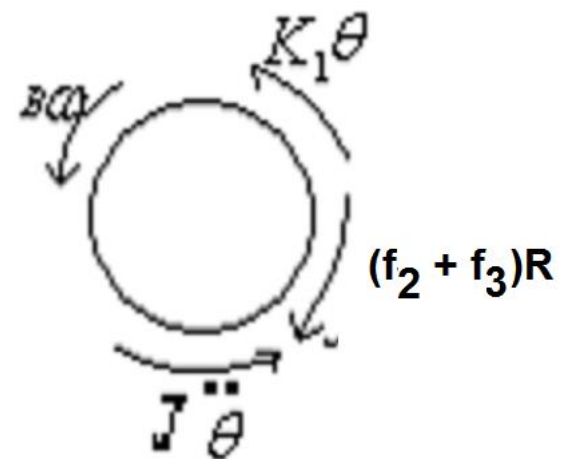
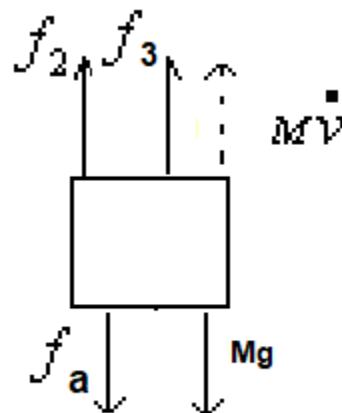
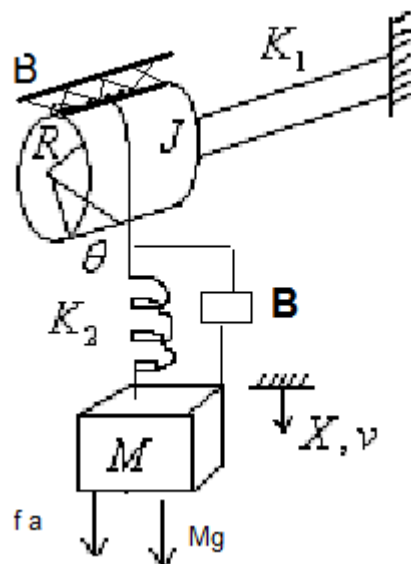
- Una báscula de gramos opera mediante un sistema de engranajes de piñón y cremallera. La cremallera está unida a la plataforma de pesado y el indicador está unido al piñón. El movimiento de la cremallera está limitado por guías verticales. Se emplea un resorte para devolver la plataforma a su posición original. Plantear el modelo de estado del sistema. Tomar como salida el ángulo de giro del indicador θ .
- Asumir que la masa a pesar M_1 no cambia durante el experimento.



Ejemplo 14¹

La masa M esta suspendida del torno de radio R por medio de un cable flexible con una constante K_2 y fricción B . Plantear el modelo de variables de estado.

Las entradas son el desplazamiento x y la masa del bloque. La variable de salida es la posición de angular del torno R .



Clase 4

Contenido

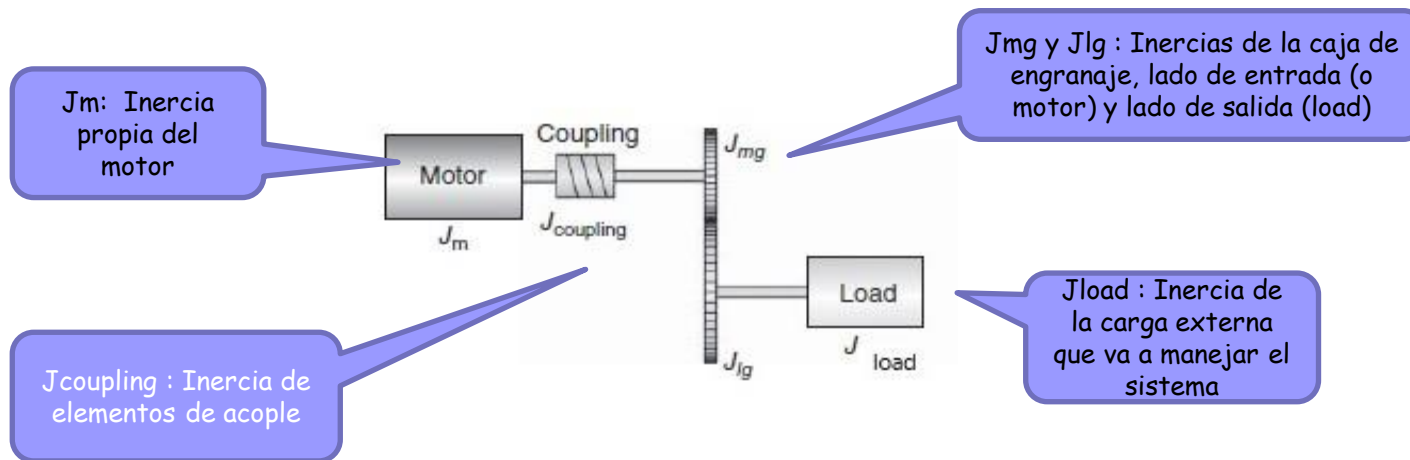
1. Calcular inercia total y relación de inercia
2. Obtener perfil de velocidad de la carga
3. Obtener perfil de torque
4. Calcular máximo torque esporádico y máximo torque continuo.
5. Estudiar dos casos: operación de alzamiento (lift) y banda transportadores

Temas para repasar

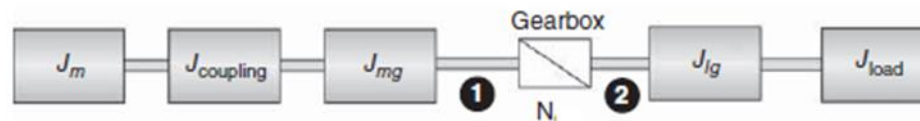
- Maquinas básicas
- Valor RMS

Inercia total

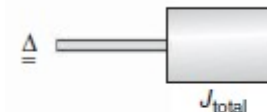
- Para análisis y selección de motores es necesario calcular la inercia total, referida al lado del motor



- Bloques



$$J_T = J_m + J_{coup.} + J_{mg} + \frac{1}{\eta N^2} (J_{lg} + J_{Load})$$



Relación de inercias

- Si el fabricante publica la Inercia total equivalente de la caja, referida al lado motor:

$$J_T = J_m + J_{coup.} + J_{totgm} + \frac{1}{\eta N^2} (J_{Load})$$

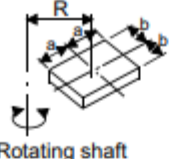
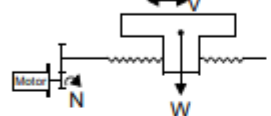
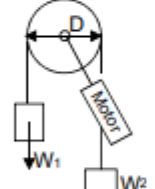
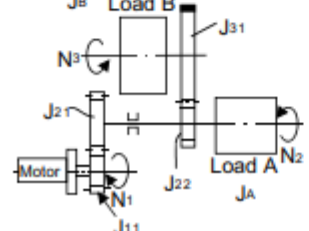
- La relación de inercias: es la relación entre la inercia externa total que debe mover el motor respecto a su propia inercia.

$$J_R = \frac{\sum Inercias Externas}{J_m}$$
$$J_R = \frac{J_T - J_m}{J_m}$$

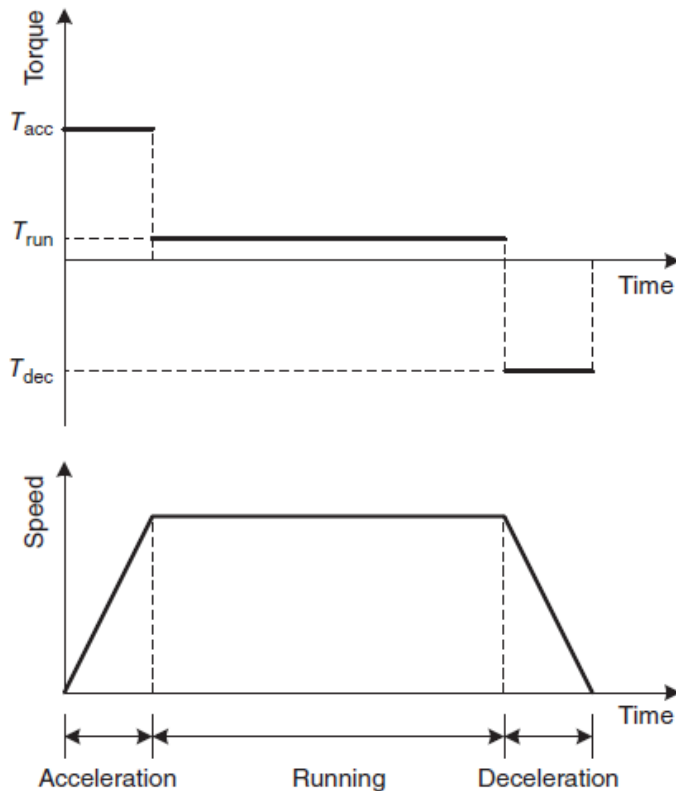
- La relación de inercias es un parámetro importante en el proceso de selección de motores y cajas, como se verá posteriormente.

Momentos de inercia de cargas²²

Calculation of load moment of inertia

Type	Structure	Formula
Prism		$J_L = W \left(\frac{a^2 + b^2}{3} + R^2 \right) \times 10^{-4} \dots\dots\dots (4.3)$ <p> J_L : Load moment of inertia [kg·m²] a, b, R : See the left figure [cm] </p>
Linearly moving object		$J_L = \frac{W}{4} \times \left(\frac{V}{\pi N} \right)^2 = W \cdot \left(\frac{\Delta S}{20\pi} \right)^2 \times 10^{-4} \dots\dots\dots (4.4)$ <p> J_L : Load moment of inertia at motor shaft [kg·m²] V : Speed of the linearly moving object [m/min] N : Motor speed [r/min] ΔS : Travel amount in one motor rotation [mm/rev] W : Mass of the linearly moving object [kg] </p>
Hanged object		$J_L = \frac{W \cdot D^2}{4} + J_P \dots\dots\dots (4.5)$ <p> W : Total mass ($W_1 + W_2$) [kg] J_P : Moment of inertia of the pulley [kg·m²] D : Diameter of the pulley [m] </p>
Load of which speed is changed		$J_L = J_{11} + (J_{21} + J_{22} + J_A) \cdot \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 + (J_{31} + J_B) \cdot \left(\frac{N_3}{N_1} \right)^2 \dots\dots\dots (4.6)$ <p> J_A, J_B : Moment of inertia of the loads A and B [kg·m²] J_{11} to J_{31} : Moment of inertia of teeth [kg·m²] N_1 to N_3 : Rotation speed of each axis [r/min] </p>

Perfil de velocidad y torque^{17,18}



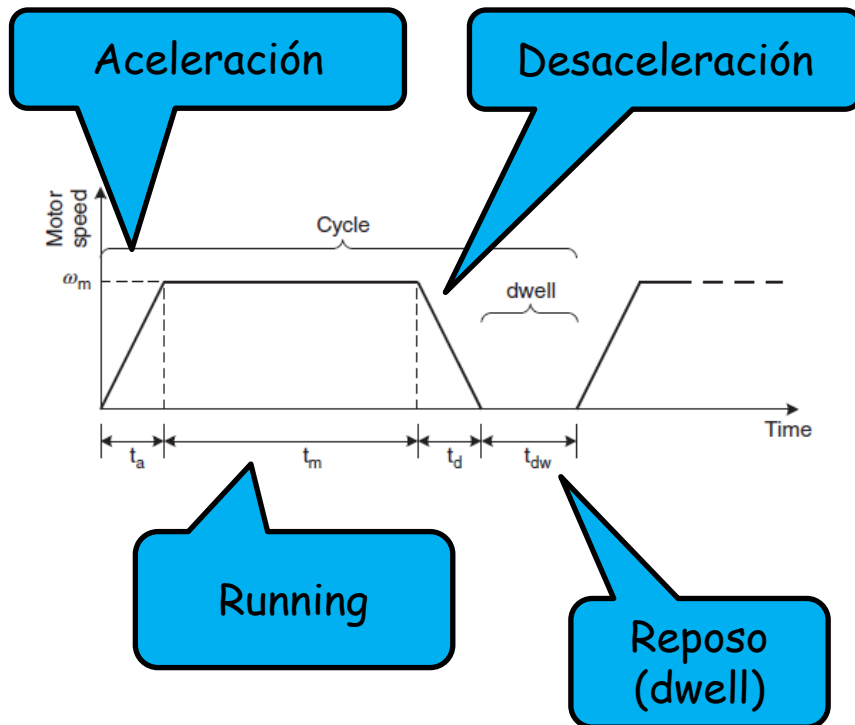
- Aceleración:
$$T_{acc} = J_T \ddot{\theta}_m + T_{ext m}$$
- Máximo torque requerido (Peak Torque) o esporádico.
- Running Torque:
- Velocidad constante, no hay efecto de la inercia:

$$T_{run} = T_{ext m}$$

- Desaceleración:
- Aceleración negativa:

$$T_{dec} = -J_T \ddot{\theta}_m + T_{ext m}$$

Torque RMS (Continuous)^{17,18}



- Para calcular el torque continuo se emplea el valor RMS:
- $T_{RMS} = \left[\frac{1}{T} \left(T_{acc}^2 \cdot t_a + T_{run}^2 \cdot t_m + T_{dec}^2 \cdot t_d + T_{dw}^2 \cdot t_{dw} \right) \right]^{1/2}$
- Torque en reposo, dwell, puede ser cero o un valor constante (motor detenido, pero eje sosteniendo una carga)

Torque requerido^{17,18}

- El torque que desarrolla el motor T_m debe trabajar contra el torque generado por la inercia total J_{tot} y cualquier torque externo adicional.
- Inercia y torque se deben reflejar sobre el eje del motor.
- Ley de Newton:
$$\sum T = J_T \ddot{\theta}_m$$
$$T_m = J_T \ddot{\theta}_m + T_{ext\ m}$$
- El torque externo se origina por fuerzas externas como:
- Fricción, gravedad o por disturbios de proceso (maquinado, sobrecarga etc.)

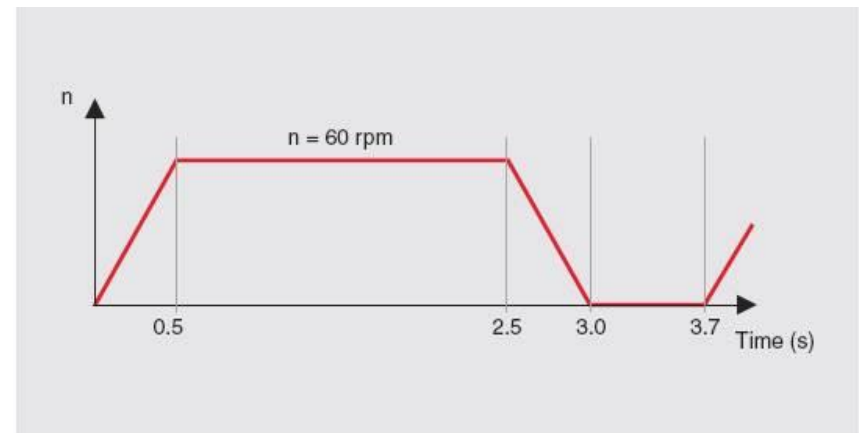
Ejemplo 6⁸

Un motor va a manejar una carga inercial de $J = 130000 \text{ g-cm}^2$. El torque producido por la fricción es constante e igual a 300 mNm .

La carga se debe desplazar periódicamente según el perfil de velocidad dado.

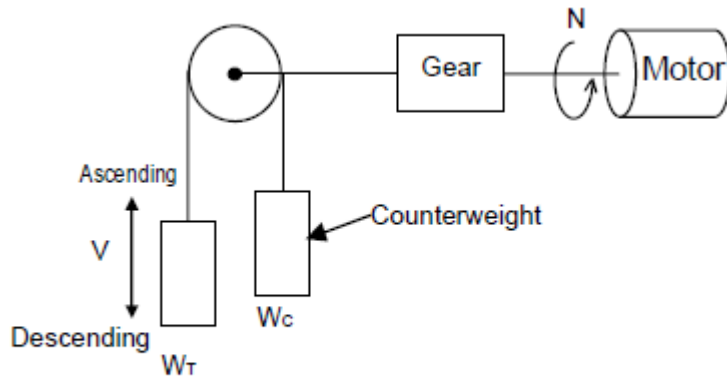
Seleccionar engranajes.

Usar información Maxon



maxon gear

Análisis caso 1: Lift²¹



Mechanical structure for Lift operation

Operation	Condition	
	$W_T - W_C \geq 0$	$W_T - W_C < 0$
Ascending	Power driving	Regenerative driving
Descending	Regenerative driving	Power driving

- Solo se considera el caso "Power Driving".
- Para la fase de ascenso Paso de la carga mayor que contrapeso ($W_T > W_C$).
- Para la fase de descenso: ($W_T < W_C$).
- Las combinaciones contrarias llevan a la fase "Regenerative Driving"

W_T : Load mass [kg]
 W_C : Counterweight mass [kg]
 W_{cs} : Unbalanced load mass of the chain [kg]
 V_{max} : Maximum ascending speed [m/min]
 η : Machine efficiency
 N_{max} : Motor speed at the ascending speed V_{max} [r/min]

Referencias

1. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. 3rd Edition. John Wiley & Sons. 2002.
2. KARNOPP Dean; MARGOLIS Donald and ROSENBERG Ronald. *Systems Dynamics*. 4th Edition. John Wiley & Sons. 2006.
3. www.roymech.co.uk.
4. www.grc.nasa
5. ITT - KONI Railway dampers for rolling stock. Publication 1030.76. 2009.
6. ITT. Shock Absorber Technologies. IND0438R2 2009.
www.enidine.com.
7. Century Spring. Technical faq's. www.centurysprings.com
8. HOLMAN J.P. *Experimental methods for engineers*. 8th edition. McGraw Hill International edition. 2012
9. University of Michigan. Control Tutorials for MATLAB and Simulink. Disponible en:
<http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Home>

Referencias

10. BROWN F.T. Engineering System Dynamics. 2nd Edition. Boca Raton: Taylor & Francis. 2007.
11. BEER Ferdinand Et. Al. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. 7th Edition. McGraw Hill. 2004.
12. Enidine. Rotary Viscous Damper (RVD) for Precision Rotary Control .
<http://enidine.us/Industrial/Librarymain.html>
13. Andantex- Merobel EMP-Electromagnetic Particle Brakes & Clutches. Pub. RX_FR_0133. 2007
14. <http://health.uottawa.ca/biomech/courses/apa4311/solids.pdf>.
15. Cameron. **WKM 370D Series Trunnion-mounted ball valves**. © 2019 Schlumberger.
16. Geojoy Mathew, Medical Devices Isolation-"How safe is safe enough". WHITE PAPER
17. Maxon. Program 2017/18 High Precision Drives and Systems.. May 2017 edition. www.maxonmotor.com.

Referencias

18. Franklin G.F; Powell J.D. and Emani Naeni A. Feedback Control of Dynamic Systems. 4th Edition. Upper Saddle River, NJ. 2006
19. Hakan Gürocak. INDUSTRIAL MOTION CONTROL., John Wiley & Sons, Ltd. 2016
20. Damir Zarko. Fundamentals of Mechanical Components for Electric Drives. University of Zagreb. 2018.
21. Mitsubishi Electric. Technical Note 31. Capacity Selection II. SH-060004 ENGB
22. Mitsubishi Electric. Technical Note 30. Capacity Selection I. SH-060003ENG-G (1009)