Análisis de Sistemas Dinámicos. Capitulo 1 Modelo de sistemas: circuitos eléctricos lineales e invariantes

Ing. Carlos E. Cotrino B. M Sc.

Modelo de sistemas lineales: circuitos eléctricos

Objetivos

1. Utilizar datos, indicios e información para formular las ecuaciones de un sistema (CDIO 2.1.1)
2. Identificar suposiciones y fuentes de error (CDIO 2.1.1)
3. Discutir la generalización de soluciones analíticas (CDIO 2.1.3)
4. Computar las soluciones al problema. (CDIO 2.1.5)
5. Describir las abstracciones necesarias para definir y modelar un sistema. (CDIO 2.3.2)
6. Identificar las interfaces esenciales entre los elementos del sistema (CDIO 2.3.2)
7. Interpretar los factores relevantes del sistema (CDIO 2.3.3)

Clase 1

Contenido

- Definir y clasificar sistemas.
- Definir las propiedades de linealidad e invariancia.
- Definir variables y constantes.
- Definir modelos y el procedimiento para obtenerlo

Temas para repasar

- Descripción de sistemas en el dominio del tiempo.

Que es un sistema?

- Cualquier cosa se puede tratar como un sistema
- Sistema: conjunto de elementos interactuantes.
- Para que "cualquier cosa" se pueda estudiar formalmente como un sistema se deben aplicar restricciones.

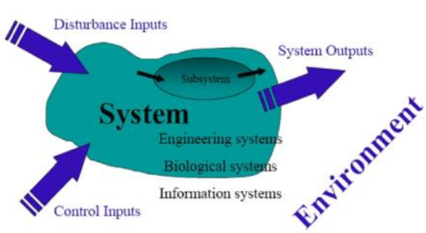
¿Qué es un sistema?

- Puede verse un sistema como un proceso que transforma variables de entrada y estados en otras variables de salida, mediante la interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas.

$u(t)$ → Sistema (Estado Inicial) → $y(t) = F\{t, u(t), x_0\}$

Que restricciones tiene un sistema?

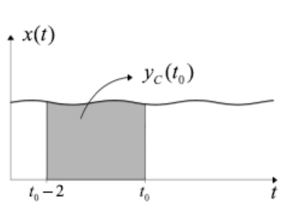
- Ser limitado: Las fronteras del sistema separan a las componentes internas del mundo externo.

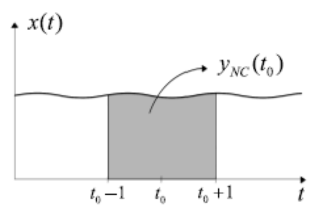


- Tener un objetivo y un rendimiento medible
- Interactuar con otros sistemas y el ambiente
- Existir alguna relación causa – efecto y un cierto grado de estabilidad

Causalidad

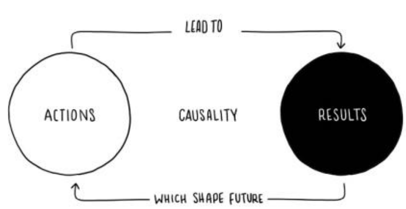
Sistema Causal:	Sistemas no Causal:
Sistema que utiliza solamente la entrada en el instante actual y pasados para establecer su salida. Sistema no anticipativo.	Sistema que necesita de tiempos futuros de la entrada para establecer la salida.



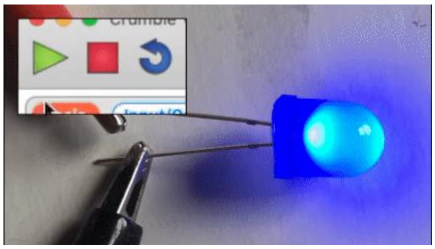


Causalidad

Sistema Causal:	Sistemas no Causal:
Un sistema es *causal* si la salida en $t = t_0$ depende de los valores de la entrada y de la salida para $t \leq t_0$.	Un sistema no causal es anticipatorio: genera una respuesta antes de tener aplicada una entrada



Sistema estático: sin memoria



Sistemas sin memoria:
Sistema que depende solamente del instante actual de la entrada para establecer la salida.

Las salidas actuales son el resultado de las entradas actuales únicamente.

- Se describe por ecuaciones algebraicas.
- Un sistema es sin memoria si y sólo si

  $y(t_0)$ solo depende de $u(t_0)$, para todo t_0

$$y(t_0) = f\{u(t_0)\}$$

Sistema dinámico o con memoria

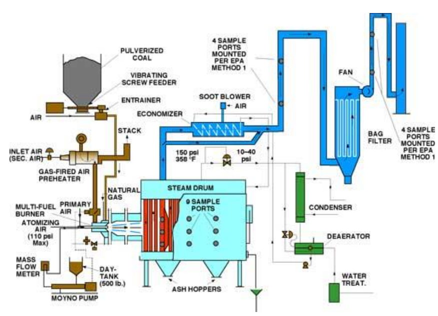
- Sistema que depende de tiempos diferentes al instante actual para establecer la salida.
- *Las* salidas actuales son el resultado de las entradas actuales y la historia pasada: tiene memoria.
- Se describe por ecuaciones diferenciales

Entrada sencilla – salida sencilla (SISO)

- Un sistema se denomina *SISO* (Single Input Single Output) si tiene una sola variable de entrada y una sola variable de salida.
- Se emplean escalares

Entrada múltiple – salida múltiple (MIMO)

- Un sistema se denomina *MIMO* (Multiple Input Multiple Output) si tiene varias variables de entrada y varias variables de salida.
- Se emplean vectores y matrices



http://www.energy.psu.edu/sp/facilities/researchboiler.html

Sistema: concentrado - distribuido

Sistema Concentrado:	**Sistemas Distribuido:**
Sólo tiene como variable independiente al **tiempo**, se describe por medio de un conjunto finito de variables de estado • Se describe por ecuaciones diferenciales totales.	Tiene dos o más variables independientes, requiere un número infinito de variables de estado. • Se describe por ecuaciones diferenciales parciales.




Sistema: continuo - discreto

Sistema Continuo:	**Sistemas Discreto:**
Un sistema es continuo en el tiempo si acepta como entradas señales continuas en el tiempo y genera como salidas señales continuas. • Se describe por variables continuas y ecuaciones diferenciales $u(t)$ $y(t)$	Un sistema es llamado de tiempo discreto si acepta como entrada señales discretas en el tiempo y genera como salida señales discretas. • Se describe por secuencias y ecuaciones diferencia $u(k\ t)$ $y(k\ t)$


Invariancia

Sistema Invariante: Sistema que mantiene fijo en el tiempo su comportamiento y características.	**Sistema Variante:** Sistema que cambia en el tiempo su comportamiento y características.

- Un sistema es invariante con el tiempo si dado un estado inicial y una entrada:

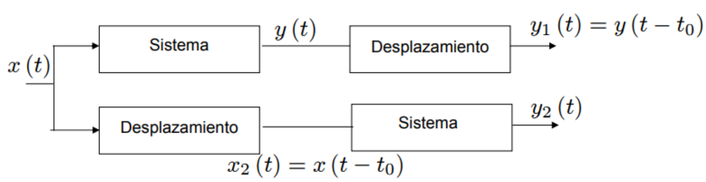
$\{\ x(t_0)\ ,\ u[t_0\ ,\ \infty)\ \}$ ====➔ $\{\ x[t_0\ ,\ \infty)\ ,\ y[t_0\ ,\ \infty)\ \}$

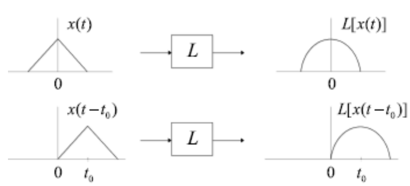
y para cualquier tiempo $\tau \in$ R:

$\{\ x(t_0 + \tau)\ ,\ u[t_0 + \tau,\ \infty)\ \}$ ➔$\{\ x[t_0 + \tau,\ \infty),\ y[t_0 + \tau,\ \infty)\ \}$

- De lo contrario el sistema es variante con el tiempo.

Invariancia

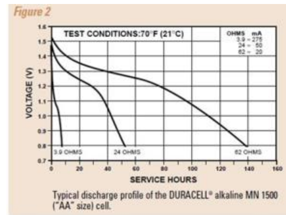


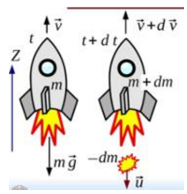


Sistema invariante - variante

Invariante

Variante





Linealidad - Superposición

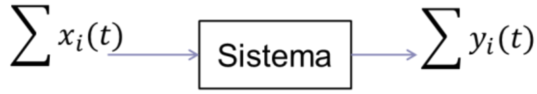
- Un sistema es lineal si para los pares
  $\{ x_1(t_0) , u_1[t_0 , \infty) \}$ ======➔
  $\{ x_1[t_0 , \infty) , y_1[t_0 , \infty) \}$

  y

  $\{ x_2(t_0) , u_2[t_0 , \infty) \}$ ======➔
  $\{ x_2[t_0 , \infty) , y_2[t_0 , \infty) \}$

  y para todo $\alpha,\beta \in R$, las siguientes relaciones son validas:

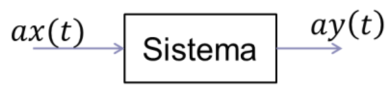
Linealidad - Superposición



1. *Aditividad:*

$\{x_1(t_0) + x_2(t_0)\ ,\ u_1[t_0\ ,\infty) + u_2[t_0\ ,\infty)\ \}\ \rightarrow$

$\{x_1[t_0\ ,\infty) + x_2[t_0\ ,\infty)\ ,\ y_1[t_0\ ,\infty) + y_2[t_0\ ,\infty)\}$



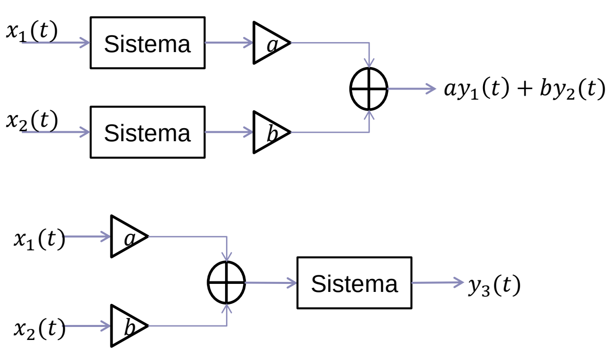
2. *Homogeneidad*

$\{\ \alpha x_1(t_0)\ ,\ \beta u_1[t_0\ ,\infty)\ \}\quad ======\rightarrow$

$\{\ \alpha x_1[t_0\ ,\infty)\ ,\ \beta y_1[t_0\ ,\infty)\ \}$

En caso contrario el sistema es no lineal.

Linealidad - Superposición



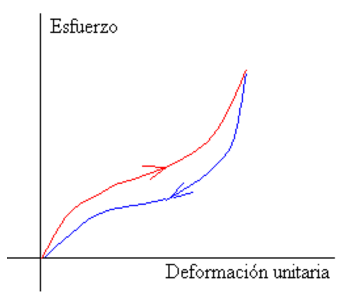
Bajo que condiciones es lineal?
Puede ser no lineal?

Sistema no lineal

Cómo es la relación volumen vs nivel?

Ejemplo 1

- La característica entrada – salida describe un sistema lineal?



- Existe representación matemática para la curva de histéresis?

Parámetros físicos

- *Unidades, dimensiones y rangos.*
- *Constantes:* parámetros físicos del sistema, generalmente son desconocidas o poco definidas y por lo tanto se deben encontrar por medio de un proceso de identificación de sistemas.
- *Variables:* describen el comportamiento del sistema respecto al tiempo: las excitaciones son externas y conocidas a priori, las salidas y los estados internos se deben determinar.

Variables

- ***Variables de "esfuerzo":*** asociadas con la capacidad de desarrollar un trabajo. Se pueden representar en general por la letra e
- ***Variables de "flujo":*** asociadas con el movimiento de masa. Se pueden representar por la letra ***f***.
- Para la descripción de los componentes se requieren dos variables una ***de esfuerzo y otra de flujo.***

Variables

SISTEMA	ESFUERZO e(t)	FLUJO f(t)
Eléctrico	Voltaje v(t) – (V)	Corriente i(t) - (A)
Mecánico Traslación	Fuerza f(t) – (N)	Velocidad v(t) – (m/s)
Mecánico Rotación	Momento o Torque τ(t) –(N-m)	Velocidad angular – ω(t) – rad/s
Hidráulico	Presión p(t) – (Pa)	Tasa de flujo, f(t) – (m^3 /s)
Térmico	Temperatura T(t) – ($°C$)	Flujo de calor Q(t) – (J/s)

C.Cotrino Ene-2023

25

25

Constantes

Parámetros físicos del sistema, generalmente son desconocidas o poco definidas y por lo tanto se deben encontrar.

- Por medición directa.
- Por información de los fabricantes: especificaciones, curvas etc.
- Por un experimento de identificación de sistemas.

C.Cotrino Ene-2023

26

26

Potencia

- La potencia instantánea entregada o disipada por el componente es el producto de la variable “esfuerzo” por la variable “flujo”, excepto en los sistemas térmicos donde el flujo de calor tiene unidades de potencia:

$$p(t) = e(t)\, f(t)$$

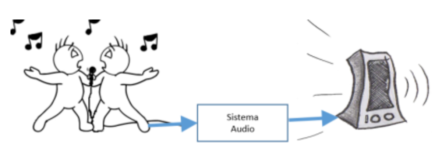
- La energía o trabajo:

$$E(t) = \int^{t} p(t)dt = \int^{t} e(t)\, f(t)$$

Actividad

Para los siguientes sistemas indique:

1. Objetivos
2. Variables de entrada y de salida
3. Relación causa – efecto
4. Estabilidad?



Ejemplo 2

Una hidroeléctrica tiene una cabeza efectiva de 324 m y un flujo promedio de 137 m3 /s. La represa cubre un área de 640 km2. La eficiencia de las turbinas es el del 92% y la del generador del 95%.

a. Calcular la potencia hidráulica disponible
b. Asumiendo efectos externos despreciables, cuál es la disponibilidad de energía, si el nivel del agua puede bajar 1 m ?
c. Cuál es el máximo de la potencia y de la energía eléctrica disponible

Clase 2

Contenido

- Definir variables de estado.
- Plantear ecuaciones de estado de circuitos eléctricos, lineales e invariantes.

Temas para repasar

- Leyes de Kirchoff de voltaje y corriente.
- Ecuación diferencial entrada - salida

Temas futuros

- No lineales, variantes

Que es modelar un sistema?

- Es PLANTEAR un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento del sistema.
- Ningún sistema puede ser modelado exactamente.
- Todo modelo es una aproximación de la realidad y se pierden detalles importantes.

Para qué se modela[3]

Análisis: dado un modelo (S), unas entradas (U) y un estado inicial (X), se puede predecir la respuesta del sistema (Y)
Síntesis: dadas unas entradas (U) y unas salidas deseadas (Y), encontrar el sistema (S) que produce dichas salidas.
El mayor trabajo de la ingeniería es la síntesis de sistemas.
"Analysis, except in the service of synthesis, is a rather sterile pursuit for an engineer"

Modelos

- Construcciones y abstracciones simplificadas de un sistema físico usadas para predecir su comportamiento.
- Modelos físicos a escala reflejan algunas de las características del sistema físico.
- Se incluyen aquellas aspectos relevantes para el objetivo del estudio.

- Objetivo y Requerimientos del análisis
- Delimitar el alcance y definir restricciones
- Dividir el problema en el sistema de interés y su entorno

Definición

- Definir las fronteras
- Definir las relaciones con los demás subsistemas y el ambiente
- Definir el procedimiento para obtener el modelo
- Distinguir entre el sistema real y el modelo

- Objetivo y Requerimientos del análisis
- Delimitar el alcance y definir restricciones
- Dividir el problema en el sistema de interés y su entorno

Descomponer

- Dividir en Subsistemas y componentes básicos.
- Identificar parámetros y variables
- Plantear diagramas de interconexión (por ejemplo cuerpo libre)

- Identificar y enumerar los componentes.
- Plantear los diagramas de interconexion.
- Identificar todos los parámetros y variables necesarias, sus convenciones y orientaciones

Plantear ecuaciones empleando principios básicos

Principios básicos: ecuaciones se obtienen a partir de las leyes de interconexión, las leyes de los elementos y de los principios físicos fundamentales.

Tipos de Ecuaciones:

- entrada – salida
- Variables de estado

Entrada – salida o variables de estado?
Ecuaciones de los componentes individuales.
Ecuaciones del sistema a partir de las leyes de interconexión y de conservación.

Solucionar

- Métodos analíticos (para ecuaciones diferenciales, diferencia, algebraicas)
- Empleando transformadas (Laplace, Z, Fourier)
- Métodos numéricos (Ejemplo Matlab)
- Simulación (Ejemplo Simulink, simspace etc,)

Evaluar

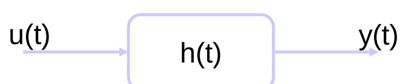
- Se cumplen los objetivos?
- Se satisfacen las condiciones de balance de masa y energía?
- Se satisfacen los limites de error establecidos?
- En caso contrario revisar descomposición y planteo.

Procedimiento experimental

Identificación: dados los datos históricos de entradas (U) y salidas (Y), generalmente por experimentación sobre sistemas reales, obtener un modelo (S) y un estado (X) que sea consistente con los datos experimentales.
Esta es la esencia de la experimentación científica.

Diseñar experimento
Tomar datos para identificación
Tomar otro conjunto de datos para verificar
Emplear herramientas de software.
Verificar validez

Modelo: Entrada - salida



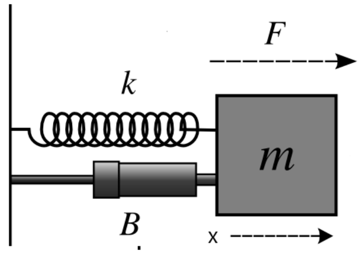
Ecuación Integro – Diferencial lineal de coeficientes constantes

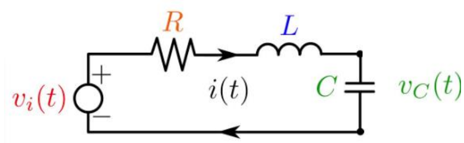
$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots . a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots . . + b_0 u$$

- Lineal
- Coeficientes constantes (invariante)

Ejemplo 3 Sistema de segundo orden

- Sistema masa (M) – resorte (K)– fricción (B) y Circuito RLC.
- Plantear ecuación diferencial para el desplazamiento x (corriente i)
- La entrada externa es fuerza (voltaje)





Estado de un sistema

- El estado de un sistema en el tiempo t_0 es la mínima cantidad de información que junto con la entrada $u[t_0, \infty)$ determinan la respuesta del sistema para todo $t \geq t_0$.
- El estado resume la información pasada requerida para determinar el comportamiento futuro del sistema.

Espacio de estado

- Se definen variables de estado en sistemas con almacenamiento de energía; no aplica para sistemas instantáneos.
- Se asocia una variable de estado con cada elemento de almacenamiento de energía
- Selección no es única
- El conjunto de variables de estado debe ser linealmente independiente.
- La representación de estado se puede emplear para sistemas: lineales, no lineales, variantes, invariantes, continuos, discretos, SISO y MIMO

Espacio de estado

- Ecuaciones de estado es el conjunto que describe las relaciones entre la entrada, la salida y el estado del sistema.
- Las ecuaciones son de la forma:

$$\dot{x}_i = f_i(t; x_1, x_2 \ldots . x_n; u_1, u_2 \ldots u_p); x_i(t_0) = x_{i0} \quad i = 1,2 \ldots n$$
$$y_j = h_j(t; x_1, x_2 \ldots . x_n; u_1, u_2 \ldots u_p); \quad j = 1,2 \ldots q$$

Espacio de estado

- En notación vectorial:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$
$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{u} \in \mathfrak{R}^p, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^q$$

- *f* y *h* son funciones vectoriales:

$$\mathbf{f}: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p \to \mathfrak{R}^n$$
$$\mathbf{h}: \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p \to \mathfrak{R}^q$$

Espacio de estado

- En notación matricial sistema invariante:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$
$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$$
$$\mathbf{F}: \mathfrak{R} \bullet \mathfrak{R}^n \mathfrak{R}^p \to \mathfrak{R}^n$$
$$\mathbf{H}: \mathfrak{R} \bullet \mathfrak{R}^n \mathfrak{R}^p \to \mathfrak{R}^q$$

- X es el vector de estado, U el vector de entradas y Y el vector de salidas:

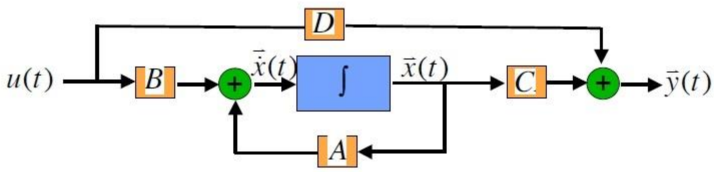
$$\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{U} \in \mathfrak{R}^p, \mathbf{Y} \in \mathfrak{R}^q$$

Sistema lineal e invariante[4]

- Todos los elementos de las matrices A, B, C, D son constantes.

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + B\vec{U}$$

$$\vec{Y} = C\vec{X} + D\vec{U}$$



C.Cotrino Ene-2023 47

47

Variables de estado circuitos eléctricos

Variables generalizadas	Variable Eléctrica	Unidades SI
Esfuerzo, *e*	Voltaje, *v*	V = N-m/C
Flujo, *f*	Corriente, i	A = C/s
Momentum, l	Flujo, φ	V-s
Desplazamiento, δ	Carga, *q*	C = A-s
Potencia, *p*	v(t)i(t)	W = N-m/s
Energía, *E*	$\int^{q} v\,dq;\ \int i\,d\phi$	J = V-A-s = W-s = N-m

C.Cotrino Ene-2023 48

48

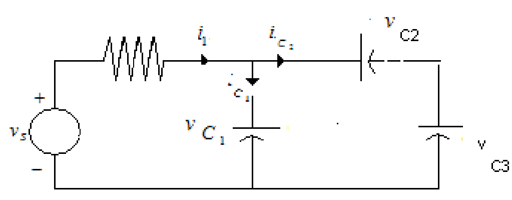
Ecuaciones de estado: procedimiento

Para el planteo de las ecuaciones de estado se sigue un procedimiento sencillo:

- Seleccionar las variables de estado: voltaje (v) o carga (q) en los condensadores y corriente (i) o flujo (f) en las inductancias.
- Las variables de estado deben ser linealmente independientes
- Para los condensadores se plantean las ecuaciones de corriente de nodo (KCL).
- Para las inductancias se plantean las ecuaciones de voltaje de malla (KVL)

Ejemplo 4 Independencia lineal

Para el circuito dado plantear el modelo en variables de estado. $C_1 = 1$; $C_2 = C_3 = 2$ y R = 2.

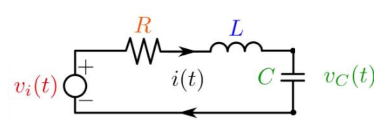


Relación entre representaciones

1. No hay una descripción de estado única.
2. Como el estado es la mínima cantidad de información que, junto con la entrada, permite evaluar el comportamiento dinámico del sistema, el número de variables de estado de un sistema si es único.
3. Las diferentes representaciones de estado que se obtienen de un mismo sistema deben estar relacionadas por transformaciones lineales.

Ejemplo 5 Sistema de segundo orden

- Plantear el conjunto de ecuaciones de estado que describe al sistema. Tomar como salida el voltaje sobre el condensador
- Variables (v,i)
- Variables (q,φ)



$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v_L$$

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_c(t)$$

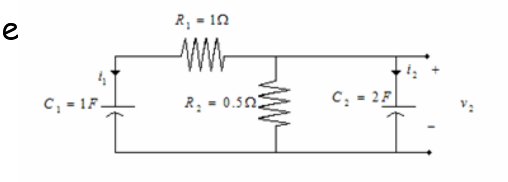
Ejemplo 6 Varios modelos de estado

- Plantear el modelo en variables de estado tomando como variable de estado:

a. La carga

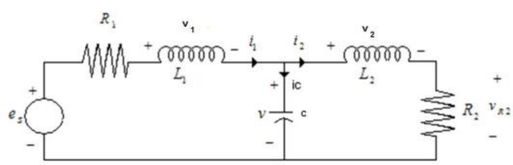
b. El voltaje

- La variable de salida deseada es la corriente i_2



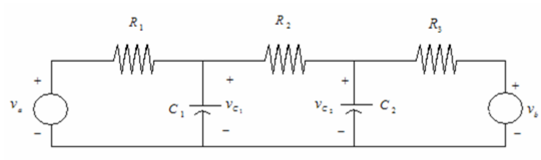
Ejemplo 7 Modelo tercer orden (Estudiantes)

- Plantear el conjunto de ecuaciones de estado que describe al sistema. Tomar como salida v_{R2}
- Variables (v,i)
- Variables (q,φ)



Ejemplo 8 Sistema MIMO (Estudiantes)

- Para el sistema MIMO plantear la ecuación de estado. Como vector de salida se requieren las corrientes entregadas por las fuentes de voltaje.



Clase 3

Contenido

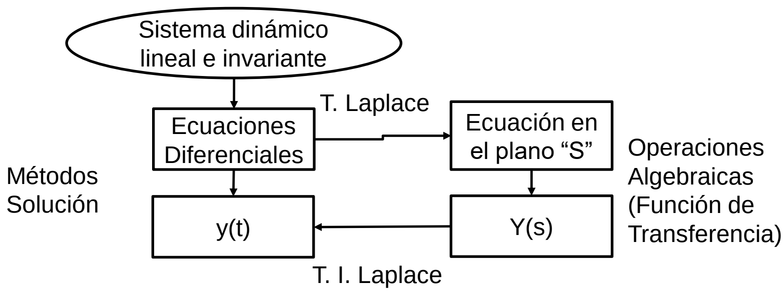
1. Resolver ecuaciones de estado LIT en forma analítica.
2. Obtener retratos de fase
3. Resolver empleando MATLAB.
4. Establecer relaciones entre representación de estado y entrada-salida.

Temas para repasar

- Solución Ecuaciones Diferenciales Continuas (Ecuaciones Diferenciales)

Modelos sistemas LIT
Sistemas Continuos

- Modelo Entrada –salida: ecuación que describe la variable de salida de interés (y) en función de las entradas (u).
- Modelo en el espacio de estado



Respuesta de un sistema

- La respuesta de un sistema para todo $t \geq t_0$ se puede determinar si se conoce la entrada $u(t)\ \forall\ t \geq t_0$ y el estado $X(t_0)$ y se puede representar como:

$\{\ x(t_0)\ ,\ u[t_0\ ,\ \infty)\ \}$ ===➔ $\{\ x[t_0\ ,\ \infty)\ ,\ y[t_0\ ,\ \infty)\ \}$

Estado en t_0 ===➔ Estado $x(t)\ \forall\ t \geq t_0$

y entrada $\forall\ t \geq t_0$

Salida $y(t)\ \forall\ t \geq t_0$

Respuesta de un sistema lineal

- La respuesta de un sistema lineal se puede descomponer en dos partes:
- Respuesta a {X(t_0) , u(t_0)} = Respuesta a {x(t_0) , 0 } + Respuesta a { 0 , u(t_0)}
- La primera es la respuesta a entrada cero, debido a la energía inicial almacenada y la segunda es la respuesta en estado cero debida únicamente a la entrada externa.

Solución de la Ecuación de Estado

Solución de Ecuaciones de Estado Invariantes

Para el caso invariante en el tiempo, es decir: ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** constantes se debe determinar la solución ***x(t)*** de la ecuación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

para un estado inicial ***x(0)*** y entrada ***u(t)***, ***t*** ≥ ***0*** dados.
Empleando el procedimiento del factor integrante:

$$e^{-A\tau}\dot{x}(\tau) - e^{-A\tau}Ax(\tau) = e^{-A\tau}Bu(\tau)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A\tau}x(\tau)\right) = e^{-A\tau}Bu(\tau)$$

Solución de la Ecuación de Estado

de la integración de esta última ecuación entre ***0*** y ***t*** se obtiene

$$e^{-A\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

igual a:

$$e^{-At}x(t) - e^{0}x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Como la inversa de e^{-At} es e^{At} y $e^{0} = I$, la solución es

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Solución de la Ecuación de Estado

La ecuación anterior es la solución general de la ecuación de estado. Se conoce como la *fórmula de variación de los parámetros*. La substitución de dicha solución en la ecuación de salida:

y = Cx + Du, genera ***y(t):***

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Superposición de la respuesta a entrada cero, debida a las condiciones iniciales, y la respuesta en estado cero, debida a la entrada externa únicamente.

Matriz de transición de estados

- La matriz de transición de estado: relaciona el estado en cualquier otro tiempo t con el estado en el instante inicial $t_0 = 0$

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}(t)}$$

- Se puede evaluar por:
  - Teorema de Cayley – Hamilton
  - Empleando la matriz fundamental del sistema
  - Transformada de Laplace
  - Numéricamente. (función expm matlab)

Solución de la ecuación de estado a entrada cero (homogénea)

- La respuesta para entrada cero es:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$$

$$\mathbf{X}_{\substack{Entrada\\cero}}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0) = e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{X}(0)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX}$$

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \mathbf{C}\mathrm{e}^{\mathbf{A}(\mathbf{t})}\mathbf{X}(\mathbf{0})$$

- La respuesta la determina la matriz de transición de estados.
- MATLAB: comandos: *expm* (Matrix exponential), initial (Initial condition response of state-space model).

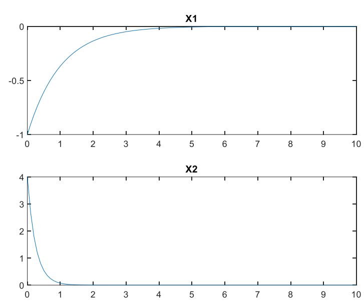
Solución ecuación de estado en estado cero

- Respuesta debida a la excitación externa únicamente, estado inicial cero.
- La solución se puede escribir como:

$$X(t) = \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau}_{\text{Respuesta forzada o enestado cero}}$$

- La respuesta y(t):
- $y(t) = CX(t) + Du(t) = \underbrace{C\int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau + Du(t)}$

Ejemplo 9



- Para la ecuación de estado :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

- El sistema es desacoplado
- Obtener la solución a entrada cero.
- $x(0) = (-1 \quad 4)'$

Solución de la ecuación de estado MATLAB

- *Expm:* Matrix exponential
- *Initial*: Initial condition response of state-space model.
- Step: Step response plot of dynamic system
- lsim: Simulate time response of dynamic system to arbitrary inputs
- Resolver el ejemplo anterior empleando expm e initial

Ejemplo 10 Resolver empleando MATLAB (Estudiantes)

- Resolver el circuito del ejemplo 7 si se tienen los siguientes valores:
- $R_1 = 2\Omega; R_2 = 5\Omega$
- $L_1 = 0{,}5H; L_2 = 1H; C_1 = 0{,}5F$
- Condiciones iniciales:
- $i_{L1}(0) = 0; i_{L2}(0) = 0{,}4A; v_{C1}(0) = 2V$
- La entrada es una señal:
- $v_1(t) = (0{,}5sen3t)1(t)$

Retrato de Fase

- Similar a un campo de direcciones, el retrato de fase es una herramienta grafica para visualizar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial.
- El plano cartesiano donde se grafica el plano de fase se denomina "Plano de fase".
- Las curvas paramétricas trazadas por las soluciones se denominan trayectorias.
- La forma de las trayectorias dependen de la ubicación de los valores propios.

Retrato de Fase

- Retrato de fase: grafica de varias respuestas a entrada cero en el plano de fase.
- Se elige un conjunto de condiciones iniciales en un área de interés en el plano x_1 vs x_2
- Se grafica la solución homogénea como una curva dirigida en el sentido positivo del tiempo.
- El efecto de la matriz sobre la respuesta se visualiza empleando los retratos de fase.

Punto de equilibrio

- Un punto de equilibrio es solución de la ecuación **Ax = 0**.
- Un punto de equilibrio es una solución constante de la ecuación del sistema.
- Para un sistema lineal existe una sola solución ubicada en el origen : **x = 0**. (Asumiendo det(**A**) ≠ 0).
- En los puntos de equilibrio, las trayectorias de los retratos de fase:
  - Convergen (valores propios con parte real negativa)
  - Divergen (valores propios con parte real positiva)
  - Circundan (valores propios imaginarios)

Retratos de fase (Ref. 3)

- Valores propios reales negativos y diferentes.
- ..\Soporte\Imagenes\retrato 01.png
- 1 valor propio real negativo y otro positivo.
- ..\Soporte\Imagenes\retrato 02.png
- Valores propios reales, negativos e iguales. (2 vectores propios independientes). ..\Soporte\Imagenes\retrato 03.png
- Valores propios reales, negativos e iguales. (1 vector propio independiente). ..\Soporte\Imagenes\retrato 04.png
- Valores propios imaginarios. ..\Soporte\Imagenes\retrato 05.png
- Valores propios complejos conjugados, parte real negativa. ..\Soporte\Imagenes\retrato 06.png

Ejemplo 11 Retratos de fase Matlab (Estudiantes)

- Generar los retratos de fase para un sistema 2x2.
- Valores propios reales negativos
- Valores propios reales positivos
- Identificar los invariantes

De ecuación entrada – salida a espacio de estado

- A partir de la ecuación entrada – salida:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots . a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots .. + b_0 u$$

- Caso base: no hay derivadas sobre la variable de entrada.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots . a_0 y = b_0 u$$

- Se definen las variables tipo fase:

$$\dot{q_1} = q_2 \; ; \; \dot{q_2} = q_3 \; ; \; \ldots \; \dot{q_{n-1}} = q_n$$

$$\dot{q}_n = \frac{1}{a_n} (-a_{n-1} q_n - \cdots - a_0 q_1 + b_o u)$$

- La ecuación de salida: $y = q_1$

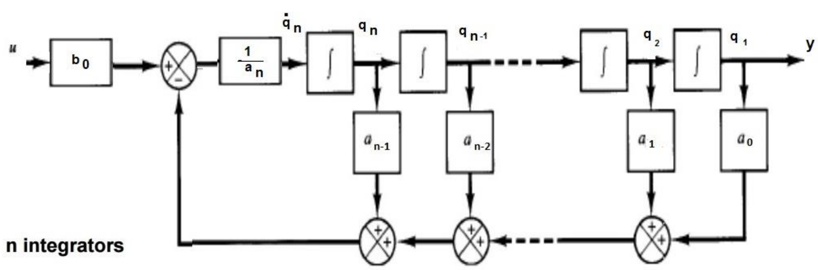
Relación entre modelos

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \frac{-a_2}{a_n} & \cdots & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \vec{q}$$

Forma "companion"

Diagrama en bloques[2]



Ejemplo 12

Para la ecuación entrada – salida:

$$2\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 3u$$

- Obtener la representación en variables de estado
- Graficar el diagrama de bloques.
- Evaluar la respuesta paso

Clase 4

Contenido

1. Emplear la Transformada de Laplace para resolver ecuaciones de estado
2. Definir función de transferencia
3. Obtener H(s) a partir del modelo de estado

Temas para repasar

- Transformada de Laplace

Temas futuros

Transformada de Laplace

- Sistemas LINEALES E INVARIANTES.
- Simplifican el análisis.
- Convierten ecuaciones diferenciales en algebraicas
- Suministran información no evidente en el dominio del tiempo.
- Incluyen las condiciones iniciales al principio del análisis.
- Relacionan la integral de convolución con el producto de las transformadas.

Transformada de Laplace

- Dominio del tiempo:
  Función definida:
  $f(t) \forall\, t\ [0, \infty)$
- Sistemas Lineales e invariantes
- Función integrable
  $\int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt \leq M; \forall\, \sigma > 0$

Comportamiento en t

- Dominio de la frecuencia:
  $s = \sigma + j\omega$
  $\sigma\ y\ \omega\ \in\ \mathbb{R}$
  $F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$
- 0^- incluye impulso en t = 0.

Comportamiento en s

Propiedades[11]

	Properties	Time Domain	Laplace Transform
1	Linearity	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+\ldots+a_nx_n(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)+\ldots+a_nX_n(s)$
2	Frequency Shifting	$e^{-\alpha t}x(t)$	$F(s+\alpha)$
3	Time Delay	$x(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}X(s)$
4	Time Scaling	$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha}X\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
5	Time Differentiation	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)-x(0^-)$
6	Time Integration	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)d\tau$
7	Initial Value Theorem	$\lim_{t\to 0^+}x(t)$	$\lim_{s\to\infty}sX(s)=x(0^+)$
8	Final Value Theorem	$\lim_{t\to\infty}x(t)$	$\lim_{s\to 0}sX(s)=x(\infty)$
9	Time Convolution	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$

Solución ecuación de estado en Laplace

- Sistema LIT:

$$\dot{X} = AX + BU; Y = CX + DU$$

- Empleando transformada de Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{C(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{ESTADO INICIAL}} + \underbrace{C(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\text{EXCITACION EXTERNA}} + DU(s)$$

- Solución en el dominio del tiempo:

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{\mathbf{A}t}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Soluciones en **t** y en **s**, ***con entrada cero***

- La respuesta a entrada cero en el tiempo:

$$Y_{\substack{Entrada \\ cero}}(t) = Ce^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{X}(0) = C\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{X}(0)$$

- La respuesta a entrada cero en la frecuencia:

$$Y(s) = \underbrace{C(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\text{ESTADO INICIAL}}$$

- La matriz de transición de estados:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{\Phi}(s)\}$$
$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Soluciones en **t** y en **s**, ***excitación externa y*** *estado inicial cero*

- La respuesta con estado inicial = cero en el tiempo:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + \mathrm{Du(t)}$$

- La respuesta a estado cero se evalúa empleando la MULTIPLICACIÓN en el domino s:

$$Y(s) = C\Phi(s)BU(s) + DU(s)$$

Solución ecuación de estado

Si det(sI-A) ≠ 0, la matriz es no singular, y la matriz inversa se obtiene como:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)} adj(sI-A)$$

$adj(sI-A)$ = traspuesta de la matriz de cofactores de (sI - A)

$$adj(sI-A) = \left[\gamma_{ij}\right]^T$$

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

$\det M_{ij}$ es un escalar llamado el menor

M_{ij} se obtiene de la matriz (sI – A) eliminando la fila i y la columna j

Ejemplo 13 Uso transformada de Laplace

- Empleando la transformada de Laplace evaluar la respuesta de:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{U}$$

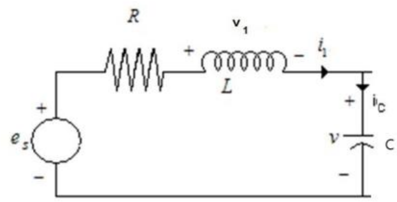
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{X}$$

- Debida al estado inicial $X(0) = [0 \quad 1 \quad 0]^T$ y a un escalón unitario 1(t)

Ejemplo 14 Solución modelo 2do orden (Estudiantes)

Resolver el modelo de estado del circuito de segundo orden (Ver Ejemplo 5 Lámina 49)

- Graficar el voltaje de salida (v_C) para entrada cero.
- Graficar la respuesta en estado cero para entrada paso.
- Graficar la respuesta completa.
- Repetir el análisis si emplean las variables (q,φ), la variable de salida es el voltaje sobre el condensador



Valores: $R_1 = 2\Omega;\ L_1 = 1H; C_1 = 0{,}5F$
Condición inicial $i_{L1}(0) = 0{,}5;\ \ v_{c1}(0) = 1$

Convolución

- Para un sistema lineal, causal, invariante y relajado, cero condiciones iniciales en t = 0, la respuesta se puede evaluar empleando la integral de convolución:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- Donde h(t) es la respuesta del sistema relajado a una entrada impulso
- En sistemas invariantes la respuesta es función de (t-τ): el tiempo transcurrido desde la aplicación de la excitación.

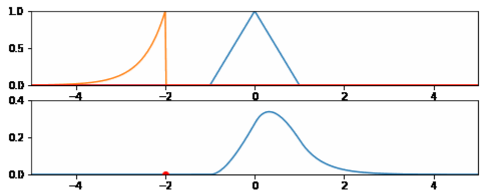
Convolución[8]

La integral de convolución es conmutable:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t u(t-\tau)h(\tau)d\tau =$$

$$y(t) = h(t) * u(t)$$

La respuesta es el área bajo la curva producto entre la entrada y la respuesta impulso desplazada



Teorema de convolución

- Para sistemas LIT la transformada de Laplace de *y(t)*:

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt$$

- Sistema causal:

$$h(t-\tau) = 0 \;\; \forall t < \tau$$

- Sistema en estado cero en t = 0⁻

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)(d\tau)\right]e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}dt$$

Teorema de convolución

- Se puede intercambiar el orden de integración:

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}(dt) \right] u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- Hacer un cambio de variable: $\lambda = t - \tau$

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{-\tau}^{\infty} h(\lambda)e^{-s(\lambda)}(d\lambda) \right] u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- Sistema relajado antes de la aplicación de la excitación:

$$h(\lambda) = 0 \;\; \forall \lambda < 0$$

Teorema de convolución

- Límites de la integral interna se pueden cambiar:

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{0^-}^{\infty} h(\lambda)e^{-s(\lambda)}(d\lambda) \right]}_{H(s)} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- H(s) es independiente de τ :

$$Y(s) = H(s) \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} u\,(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{U(s)} \quad Y(s) = H(s)U(s)$$

- La convolución de dos funciones en el dominio *t* es equivalente a multiplicar las transformadas de las funciones en el dominio *s*.

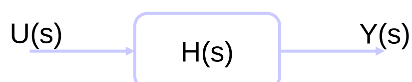
Función de transferencia

- Todo sistema LIT en estado cero se puede describir por una representación *entrada/salida* con función de transferencia:

$$H(s) = Y(s)/\,U(s)\ \Big|_{\text{en estado cero}} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}}\ \Big|_{\text{en estado cero}}$$

- H(s) es la transformada de Laplace de la respuesta impulso en estado cero: h(t)
- Para sistemas SISO: H(s) es una función escalar,

Función de transferencia



La transformada de Laplace de la ecuación integro – diferencial, con condiciones iniciales nulas (estado cero) lleva a:

$$(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s^1 + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s^1 + b_0)U(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Función de transferencia

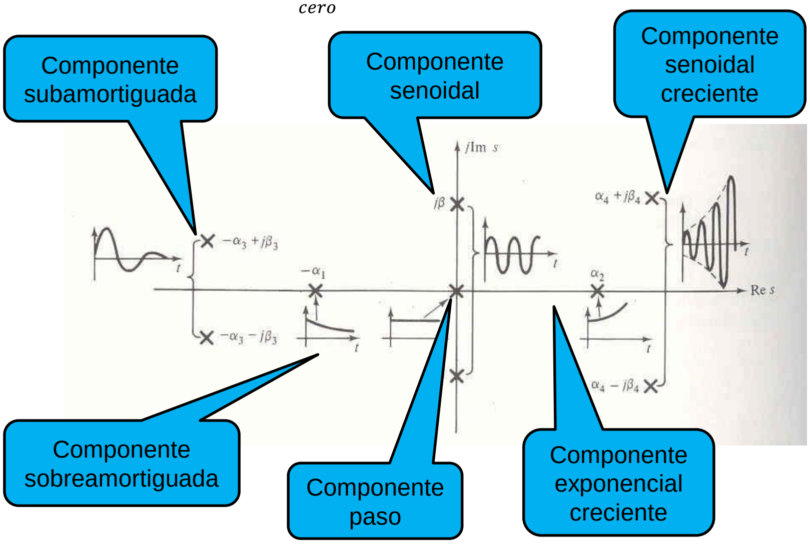
- La función de transferencia que se obtiene es racional.
- Si m < n la función es estrictamente propia
- Una función racional es irreducible si y solo si no hay términos comunes entre los polinomios del numerador y denominador, excepto una constante.
- Un sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia propia e irreducible H(s), si el grado de esta es igual al número de variables de estado del sistema.

Polos y Ceros

- Polo: valores de *s* para los cuales la función F(s) es indeterminada, raíces de D(s)=0
- Cero: valores de *s* para los cuales la función F(s) es nula. Raíces de N(s) = 0
- Pueden estar ubicados en cualquier parte del plano complejo.
- Si existe frecuencia critica compleja, debe existir el conjugado.
- Pueden estar en s = 0 y en s = ∞

Relación dominio s – dominio t[4]

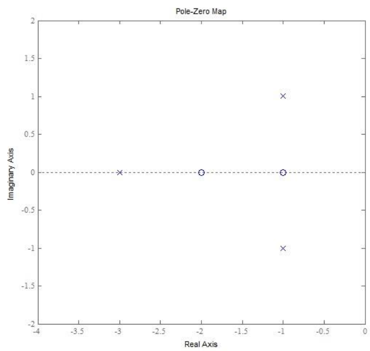
$$Y_{\underset{cero}{estado}}(s) = H(s)U(s)$$

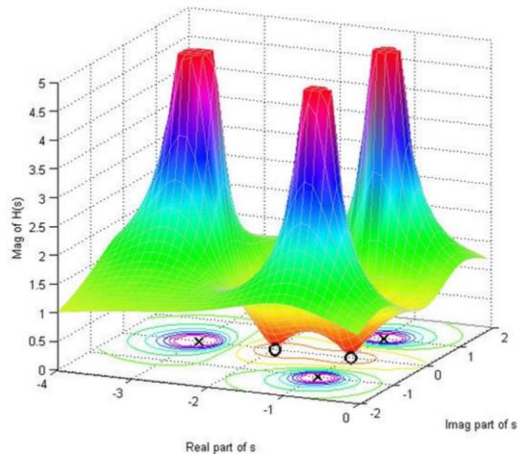


MATLAB

- Comando **tf** : Create tf objects representing continuous-time or discrete-time transfer functions in polynomial form.
- Comando **zpk**: Create zpk objects representing continuous-time or discrete-time transfer functions in zero-pole-gain (factorized) form

Ejemplo 14 Polos y Ceros[7]





$$F(s) = K\frac{(s+1)(s+2)}{[(s+1)^2+1](s+3)}$$

De estado a función de transferencia

- Si el sistema LIT es de dimensión finita, también se puede representar en el espacio de estado:

$$\dot{X} = AX + BU; Y = CX + Du$$

- La respuesta debida a la entrada externa:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

- La función de transferencia es:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

De estado a función de transferencia

- Sistema SISO: $H(s)$ es un escalar
- MIMO: arreglo matricial pxq, elementos racionales
- La ecuación característica **det(sI – A) = 0** los polos de **H**(s) y los valores propios de ***A***.
- Si D = 0, la función de transferencia es estrictamente propia
- Un sistema está completamente caracterizado por su función de transferencia propia e irreducible $G(s)$, si el grado de esta es igual al número de variables de estado del sistema.

Función de transferencia

- Las diferentes representaciones de estado que se obtienen de un mismo sistema deben estar relacionadas por transformaciones lineales.
- La función de transferencia:
  - Es invariante bajo transformaciones lineales
  - Sólo existe una función de transferencia

Ejemplo 15 Solución por Laplace (Estudiantes)

- Evaluar las funciones de transferencia del circuito del ejemplo 7, (lámina 54) para las dos representaciones de estado.
- Está el sistema completamente caracterizado por su función de transferencia H(s)?
- Graficar el diagrama de polos y ceros
- Como se puede cambiar la ubicación de los polos y los ceros?

Clase 5

Contenido

1. Definir respuesta de frecuencia
2. Evaluar la respuesta de frecuencia de sistemas lineales e invariantes.
3. Graficar los diagramas de Bode de magnitud y fase, emplear MATLAB
4. Ilustrar respuesta de frecuencia de filtros

Temas para repasar

- Transformada de Laplace
- Números complejos

Temas futuros

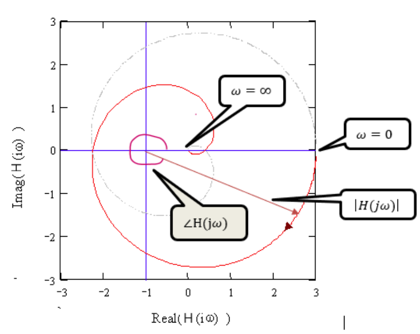
Respuesta en frecuencia

- Suministra la respuesta en estado cero para entrada seno de cualquier frecuencia.
- Se puede obtener en el laboratorio.
- Básica para el diseño de circuitos electrónicos y control clásico.
- Para excitación senoidal:

$$s = j\omega$$

Grafica de Nyquist

- Se obtiene el complejo:
$H(s)|_{s=j\omega}$
$= Re[H(j\omega)] + jIm[H(j\omega)]$
- También se puede escribir como:
$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$$
- Nyquist: grafica de la representación rectangular (o polar) vs frecuencia



Grafica directa magnitud y fase

- La gráfica de magnitud:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{[Re[H(j\omega)]]^2 + [Im[H(j\omega)]]^2}\ \text{vs}\ \omega$$

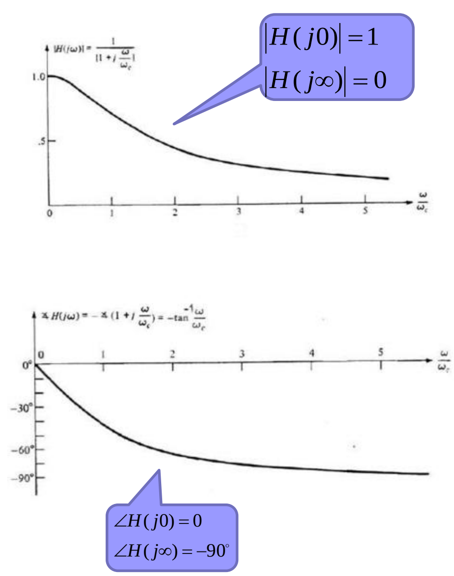
- La gráfica de fase:

$$\angle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{Im[H(j\omega)]}{Re[H(j\omega)]}\right) vs\ \omega$$

- Se puede ver el comportamiento del sistema para cualquier frecuencia.

Ejemplo 16 Grafica directa

- La Función H(s) con un solo polo real negativo se puede escribir de la forma:
- $H(s) = \frac{\omega_p}{s+\omega_p}$
- En el estado estable:
- $H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\omega_p}{j\omega+\omega_p} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_p}}$
- $|H(j\omega)| = \frac{1}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_p}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$
- $\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_p}$



Diagramas de Bode

- Rango dinámico de las señales, frecuencias y ganancias es grande.
- El uso de escalas logarítmicas permite representar en una sola gráfica rangos dinámicos grandes.
- Para el eje de frecuencia se emplea una escala logarítmica: logω

Decibel

Se define el dB, en términos de potencia

$$dB = 10\log\frac{P_2}{P_1}$$

Si son definidas sobre la misma resistencia:

$$dB = 20\log\frac{V_2}{V_1}$$

Se extiende a funciones de transferencia:

$$dB = 20\log|H(j\omega)|$$

Diagramas de Bode

- Para la amplitud se emplea escala lineal pero se representa una variable logarítmica.

$$dB = 20\log\left|H(j\omega)\right|$$

- El diagrama de BODE de amplitud:

$$20\log\left|H(j\omega)\right| \; vs \log\omega$$

- El diagrama de BODE de fase:

$$\angle H(j\omega) \;\; vs \;\; \log \omega$$

Diagrama de Bode básico: H(s) = K

Término constante K contribuye con una línea recta constante de magnitud :

20 log10(K)

Fase: si K > 0, no hay aporte

Si K < 0, adicionar -180°

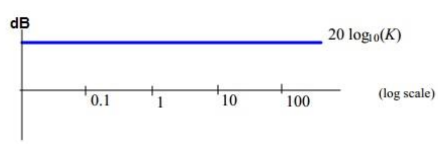


Diagrama de Bode básico: H(s) = s

$$H(s)|_{s=j\omega} = jw$$

Magnitud:

$$dB = 20\log(\omega)$$

Fase:

$$\Phi = tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0}\right) = +90°$$

El corrimiento de fase es constante de + 90°

Cero en el origen: derivador, adelanta 90°

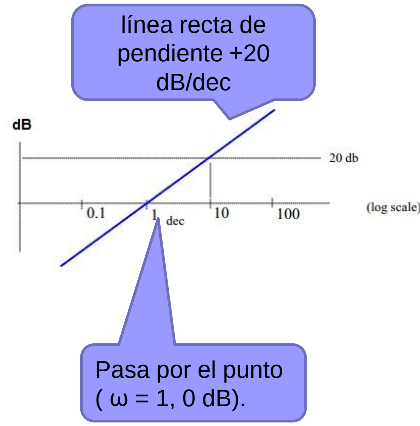


Diagrama de Bode básico: H(s)=1/s

$$H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{jw} = -j\frac{1}{\omega}$$

Magnitud:

$$dB = -20\log(\omega)$$

Fase:

$$\Phi = tan^{-1}\left(\frac{-1/\omega}{0}\right) = -90°$$

El corrimiento de fase es constante de - 90°

Polo en el origen: integrador, atrasa 90°

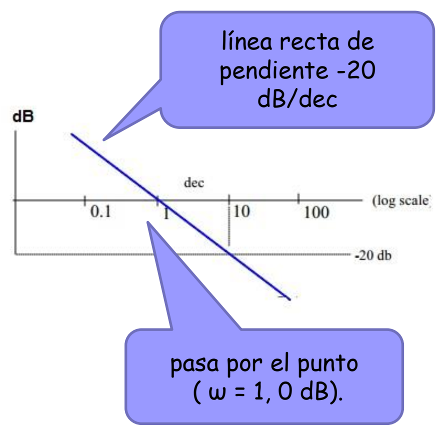


Diagrama de Bode básico: 1er orden (polo real negativo)

- Función con un solo polo real negativo:

$$H(s) = \frac{\omega_p}{(s + \omega_p)}$$

- El valor numérico del numerador es arbitrario.

$$H(s)|_{s=j\omega} = \frac{\omega_p}{(j\omega + \omega_p)} = \frac{{\omega_p}^2}{{\omega_p}^2 + \omega^2} - j\frac{\omega\omega_p}{{\omega_p}^2 + \omega^2}$$

- La magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

- La fase:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_p}$$

BODE Magnitud 1er orden

- La magnitud:

$$20\log|H(j\omega)| = -20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = -10\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right]$$

- Asíntota para $\omega >> \omega_p$, alta frecuencia

$$\approx -10\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right] = \underbrace{-20}_{m}\underbrace{\log\omega}_{x} + \underbrace{20\log\omega_p}_{\mathrm{b}}$$

- Línea recta en el plano dB vs logω. La pendiente es de – 20 dB/ década o de – 6 dB/Octava.

BODE Amplitud 1er orden

- Asíntota para : $\omega << \omega_p$, baja frecuencia

$$-10\log\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right] \approx -10\log(1) \to 0$$

- Para baja frecuencia la magnitud tiende a cero.
- En la frecuencia del polo: $\omega = \omega_p$

$$-10\log 2 \approx -3dB$$
$$-3db = 10\log\frac{P_o}{P_{in}} \Rightarrow \frac{P_o}{P_{in}} = \frac{1}{2}$$

- En la frecuencia del polo la potencia promedio entregada a una R es la mitad respecto a baja frecuencia

BODE Fase 1er orden

- La fase:

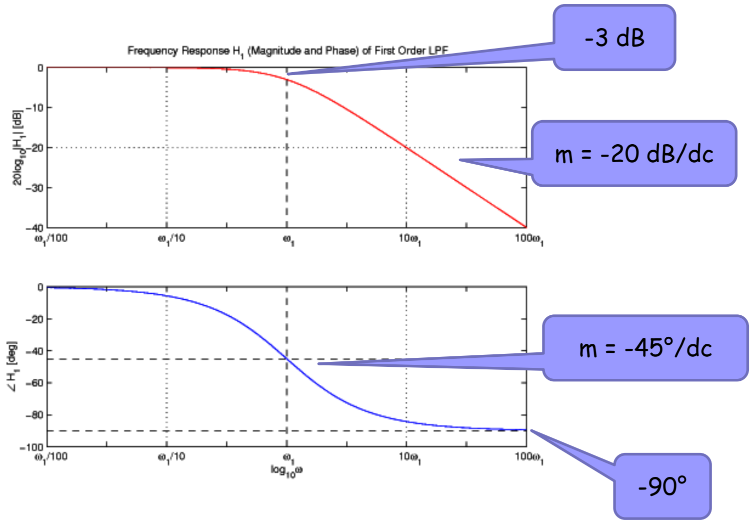
$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_p}$$

- Asíntotas:

$$\omega < 0.1\omega_p \quad \angle H(j0) = 0$$
$$\omega > 10\omega_p \quad \angle H(j\infty) = -90°$$
$$\omega = \omega_p \quad \angle H(j\omega_p) = -45°$$

- Línea recta de pendiente -45 °/década.

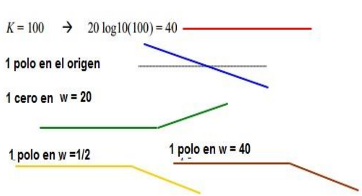
BODE 1er orden[11]

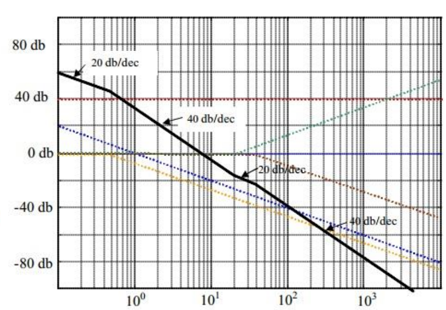


Ejemplo 17 – Bode aproximado[12]

$$H(s) = \frac{200(s+20)}{s(2s+1)(s+40)}$$

$$= (100)\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{s+20}{20}\right)\left(\frac{40}{s+40}\right)\left(\frac{1/2}{s+1/2}\right)$$





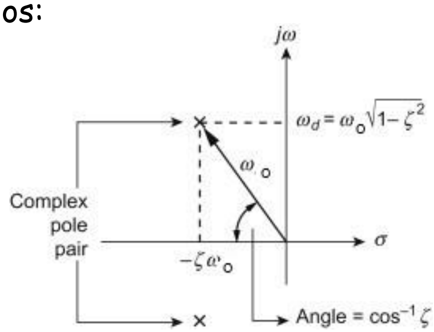
Respuesta 2do orden (0 ≤ ξ ≤1)[11]

- Polos complejos conjugados:

$$H(s) = \frac{(\omega_0^2)}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + {\omega_0}^2}$$
$$\xi, \omega_0 \quad > 0 \; y \; \in \Re$$

- Polos en:

$$s = -\alpha \pm j\omega_d$$
$$s = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$
$$\alpha = \xi\omega_0; \omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$



Respuesta 2do orden (0 ≤ ξ ≤1)

- La magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left|\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_o}\right|}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}}$$

- Los valores extremos

$$|H(j0)| = 1$$
$$|H(j\infty)| = 0$$

- Para la frecuencia ω_0

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{2\xi}$$

BODE 2do orden ($0 \leq \xi \leq 1$)

- La magnitud:

$$20\log|H(j\omega)| = -10\log\left\{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right\}$$

- Comportamiento asintótico

$$\omega >> \omega_o : -10\log\left[\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^4 + (2\xi)^2\left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2\right]$$

$$= \underbrace{-40}_{m}\underbrace{\log\omega}_{x} + \underbrace{40\log\omega_o}_{b}$$

- La pendiente es de – 40 dB/ década o de – 12 dB/Octava.

BODE 2do orden ($0 \leq \xi \leq 1$)

- Comportamiento asintótico:

$$\omega << \omega_0$$

$$-10\log(1) \rightarrow 0$$

- Para baja frecuencia la magnitud tiende a cero
- En la frecuencia natural $\omega = \omega_0$

$$-10\log(2\xi)$$

- En la frecuencia de corte la corrección depende de la relación de amortiguamiento ξ

Respuesta 2do orden (0 ≤ ξ ≤1)

- Existe una frecuencia para la cual la magnitud es máxima:

$$\frac{d}{d\omega}\left|H(jw)\right| = 0$$
$$\omega_{res} = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} \quad \xi < 0.707$$
$$\left|H(j\omega_{res})\right| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

- Cuando

$$\xi \to 0$$
$$\omega_{res} = \omega_0$$
$$M_{res} \to \infty$$

BODE fase 2do orden (0 ≤ ξ ≤1)

- La fase:

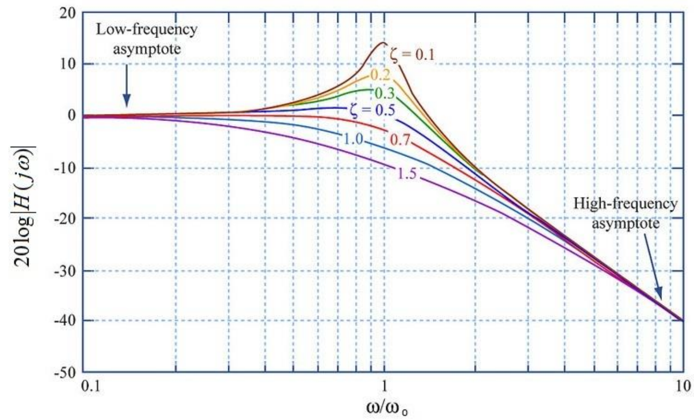
$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\xi\,\omega/\omega_0}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Valores:

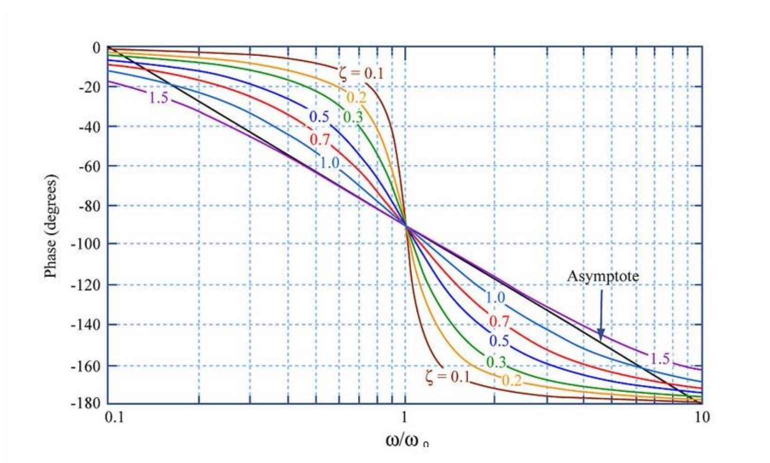
$$\omega < 0.1\omega_0 \ : \angle H(j0) = 0$$
$$\omega = \omega_0 : \ \angle H(j\omega_0) = -90^\circ$$
$$\omega > 10\omega_0 : \ \angle H(j\infty) = -180^\circ$$

- Función monótona decreciente con pendiente -90° / década

BODE Exacto 2do orden ($0 \leq \xi \leq 1$)[12]



BODE Exacto 2do orden ($0 \leq \xi \leq 1$)[12]



Bode y Matlab[10]

- Bode
- Compute the Bode frequency response of LTI models
- **Syntax**
- bode(sys)
- bode(sys,w)
- bode(sys1,sys2,...,sysN)
- bode(sys1,sys2,...,sysN,w)
- bode(sys1,'PlotStyle1',...,sysN,'PlotStyleN')
- [mag,phase,w] = bode(sys)

Ejemplo 18 – Bode y Matlab (Estudiantes)

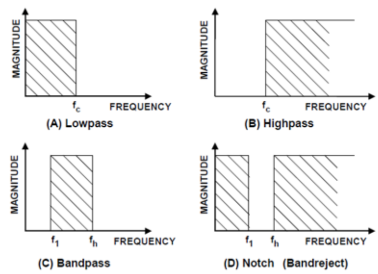
- Empleando Matlab obtener el diagrama de bode de magnitud y fase de:

$$H(s) = \frac{200(s+20)}{s(2s+1)(s+40)}$$

Definiciones de filtros[13]

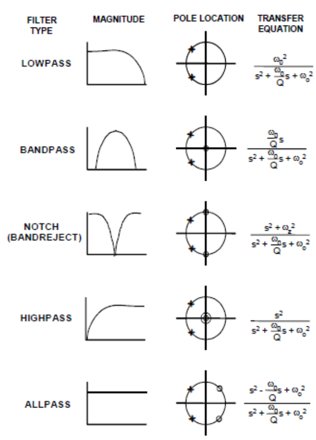
- Filtro: circuito electrónico, pasivo o activo, analógico o digital etc. que tiene una respuesta de frecuencia diseñada para rechazar o transmitir señales, típicamente voltaje, en determinado rango de frecuencias.
- Análisis aplica solo en estado estable senoidal

$$s = jw$$



Idealized Filter Responses

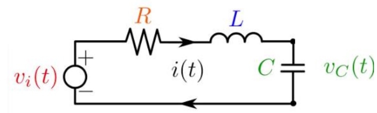
Filtros de segundo orden[13]



Standard Second-order Filter Responses

Ejemplo 19 Filtros y Bode (Estudiantes)

- Para el circuito serie del ejemplo 5 ya se obtuvo el modelo de estado.
- Tomar la salida sobre la resistencia y definir función de transferencia H_1
- Tomar la salida sobre el condensador y definir función de transferencia H_2



$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_C$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v_L$$

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_c(t)$$

Filtros y Respuesta de frecuencia[13]

- Las dos funciones anteriores se pueden escribir como:
- $H_1 = \dfrac{s\left(R/_L\right)}{s^2+s\left(R/_L\right)+1/_{LC}}$
- $H_2 = \dfrac{1/_{LC}}{s^2+s\left(R/_L\right)+1/_{LC}}$
- La frecuencia natural del sistema:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Se define el Factor de calidad del circuito como:

$$Q = \frac{Energia\ almacenada\ en\ la\ Inductancia}{Energia\ disipada\ en\ resistencia}$$

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

- Factor de calidad alto: las pérdidas de potencia en la parte resistiva del circuito es baja.

Ejemplo 20A Filtro BP (Estudiantes)

- Para la función H_1 :
- $L = 100\mu H; C = 0{,}15\mu F\ y\ R = 2{,}2\Omega$
- Calcular la frecuencia ω_o; convertirla a Hz, calcular Q_o en la frecuencia de resonancia.
- Graficar diagrama de polos y ceros
- Obtener los diagramas de BODE.
- En el diagrama de amplitud verificar f_o
- Encontrar las frecuencias para -3 dB o puntos de potencia mitad. (f_h y f_l)
- Ancho de banda $BW = f_h - f_l$

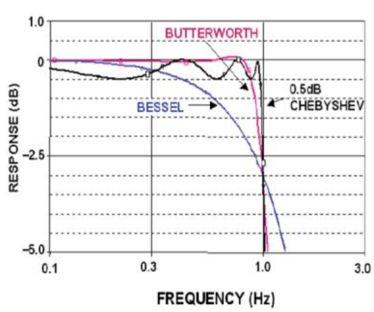
Ejemplo 20B Filtro LP (Estudiantes)

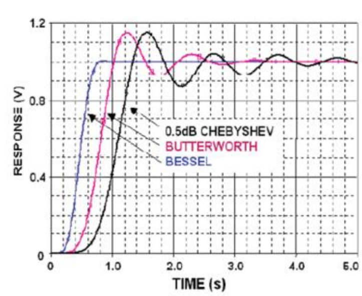
- Para la función H_2 :
- $L = 25mH; C = 47\mu F\ y\ R = 33\Omega$
- Calcular la frecuencia ω_o; convertirla a Hz, calcular Q_o en la frecuencia de resonancia.
- Graficar diagrama de polos y ceros
- Obtener los diagramas de BODE.
- En el diagrama de amplitud verificar f_o
- Encontrar la frecuencia para -3 dB o punto de potencia mitad.

Aproximaciones

- **Butterworth**: mejor compromiso entre atenuación y corrimiento de fase
- No presenta rizado en la banda de paso.
- Polos de la función de transferencia están en un círculo de radio 1. (asumiendo frecuencia de corte normalizada $\omega_o = 1$).
- **Chebyshev**: mayor atenuación que el filtro Butterworth del mismo orden, pero con rizado en la banda de paso
- Los polos de la función de transferencia están ubicados sobre una elipse.
- Corrimiento de fase es mayor que en la aproximación Butterworth,
- **Bessel**: mejor corrimiento de fase: lineal con la frecuencia, pero sacrifica la característica de atenuación.

Aproximaciones





Ejemplos de aplicación: ECG[14]

Permanent Filters	High Pass: 0.05 Hz 1st order; Low Pass: 170 Hz 1st order Baseline Wander: Baseline reset by adaptive zeroing algorithm
Notch filter (Mains noise Rejection)	50 Hz 4th order Butterworth, 49.1 Hz – 50.9 Hz, 60 Hz 4th order Butterworth, 59.1 Hz – 60.9 Hz
Low Pass (Muscle Artifact Filter)	35 Hz 4th order

www.ti.com — TEXAS INSTRUMENTS — *Signal Processing and Heartbeat Detection*

3.2 Filtering Line-Frequency Noise

The sampled EKG waveform contains some amount of superimposed line-frequency content. This line-frequency noise is removed by digitally filtering the samples. A 17-tap low-pass FIR filter with pass-band upper frequency of 6 Hz and stop-band lower frequency of 30 Hz is implemented in this application. The filter coefficients are scaled to compensate the filter attenuation and provide additional gain for the EKG signal at the filter output. This adds up to a total amplification factor of greater than 1000× for the EKG signal. Figure 4 shows the EKG waveform at the output of the FIR filter.

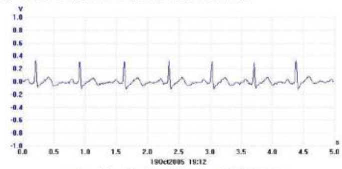


Figure 4. Low-Pass Filtered Waveform at DAC0 Output

Acelerometro[15]

FUNCTIONAL BLOCK DIAGRAMS

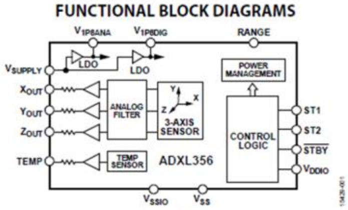


Figure 1. ADXL356

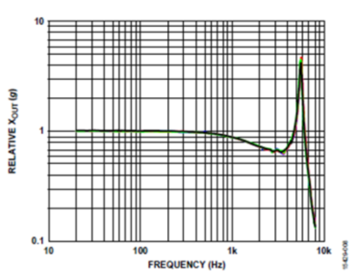


Figure 8. ADXL356 Frequency Response for X-Axis

FILTER

The ADXL356/ADXL357 use an analog, low-pass, antialiasing filter to reduce out of band noise and to limit bandwidth. The ADXL357 provides further digital filtering options to maintain optimal noise performance at various ODRs.

The analog, low-pass antialiasing filter in the ADXL356/ ADXL357 provides a fixed 3 dB bandwidth of approximately 1.5 kHz, the frequency at which the voltage output response is attenuated by approximately 30%. The shape of the filter response in the frequency domain is that of a sinc filter. While the analog antialiasing filter attenuates the output response around and above its cutoff frequency, the MEMS sensor has a resonance at 5.5 kHz and mechanically amplifies the output response at around 2 kHz and above. These competing trends are apparent in the overall transfer function of the ADXL356, as shown in Figure 8 to Figure 10. Therefore, the overall −3 dB bandwidth of the ADXL356 is 2.4 kHz, and the overall bandwidth with ±4 dB flatness is about 4.4 kHz.

Resonant Frequency[1]	5.5	kHz

BANDWIDTH		
−3 dB, overall transfer function[6]	2.4	kHz

Referencias

1. CHEN Chi-Tsong. *Linear Systems Theory and Design.* 3rd Edition. New York: Oxford University Press. 1999.
2. CLOSE Charles, FREDERICK Dean and NEWELL Jonathan. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems.* 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons. 2002.
3. Karnopp D.C.; Margolis D.L. and Rosenberg R.C. System Dynamics. 4th Edition. John Wiley and Sons. 2006.
4. L.CHUA , C. DESOER, E. KUH. *Linear and Nonlinear Circuits.* New York. McGraw-Hill. International Edition 2000.
5. Eytan Modiano State Variable Description of LTI systems: http://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/signalssystems/Lecture11_12.pdf
6. Carl H. Durney STATE-SPACE METHOD CIRCUITS Matlab® TUTORIAL: http://www.ece.utah.edu/eceCTools/StateSpace/Circuits/Matlab/StateSpaceCircTutor.pdf

Referencias

7. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=Introduction&section=SystemModeling
8. https://stackoverflow.com/questions/70761535/convolution-integral-export-as-animation-in-jupyter
9. U of M. & CMU. Frequency Response Analysis and Design Tutorial. 1996 http://www.engin.umich.edu/group/ctm/freq/freq.html.
10. Mathworks. **Control System Toolbox™ 9** Getting Started Guide. © COPYRIGHT 2000–2010 by The MathWorks, Inc.
11. R.C.Dorf and R.H. Bishop. *Modern Control Systems.* 10th Edition. Upper saddle River. NJ. Prentice Hall. 2005.
12. Sedra & Smith. Microelectronic Circuits. 4th Edition. New York: Oxford University Press. 1998.

Referencias

13. Analog Devices. Analog Filters Chapter 8. Consultado Febrero 2023
14. Texas Instruments. Application Report SLAA280B. Heart Rate and EKG Monitor using the MSP430FG439. March 2018.
15. Analog Devices. ADXL 356/ADXL 357- Low Noise, Low Drift, Low Power 3 Axis MEMS Accelerometers. Data Sheet. June 2020