Fundamentos de Microeconomía

Conceptos y Definiciones
Matemáticas

Temas

- Funciones.
- Propiedades de las funciones.
- Cambios, tasas de cambio y pendientes.
- Derivadas.
- Sistema de Ecuaciones.
- Optimización.
- Optimización restringida (con restricciones).

Funciones

- Una función es una regla que describe la relación entre dos o más variables. Por ejemplo

$$C = a + b\,Y^d$$
$$QD = QD\,(P)$$
$$QD = a\ - bP$$

En general, una función es un “proceso” que asocia cada elemento del conjunto X a un solo elemento del conjunto Y.

Propiedad: para cada valor de $x \in X$, existe un único valor de $y \in Y$ asociado a x.

Funciones

- Representación general cuando no conocemos la relación algebraica especifica entre dos variables.

$$y = f(x)$$

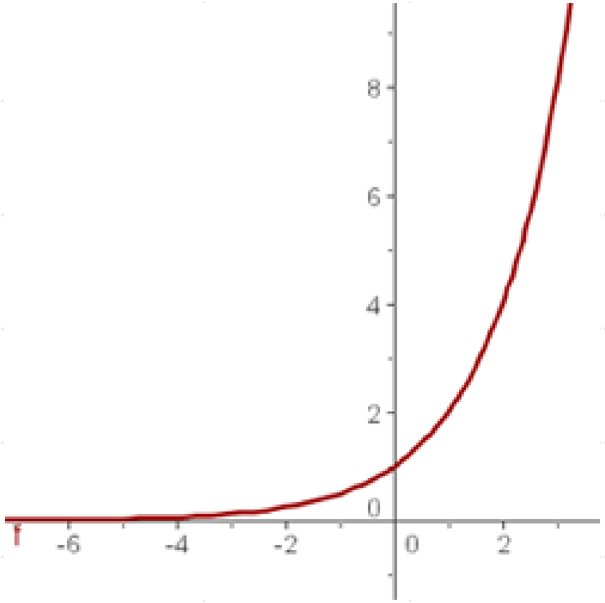
- Esta representación significa que "y depende de x de acuerdo a la regla f".
- Usualmente, x es denominada la variable independiente, mientras que y es llamada la variable dependiente.
- En casos más generales, una variable y depende de varias variables

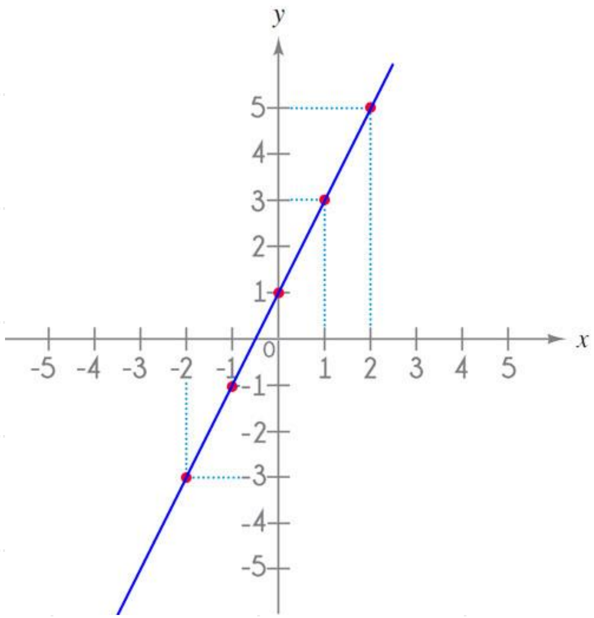
$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_1)$$

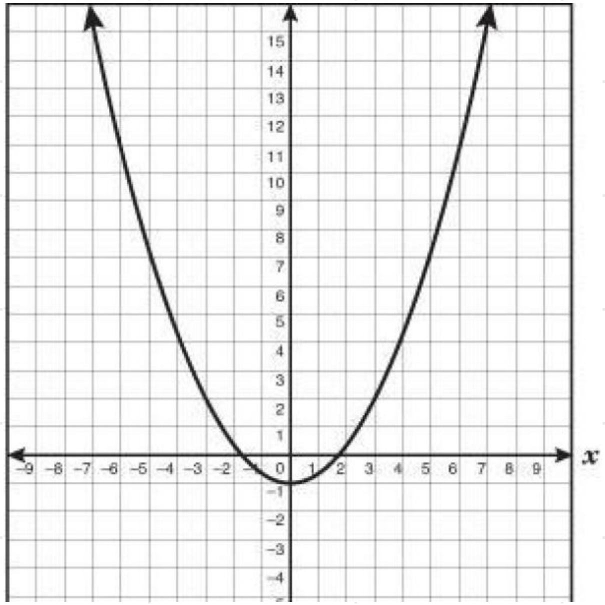
- Por ejemplo:

$$Ingreso = f\ (edad, experiencia, educación, habilidad)$$

Gráficas Funciones



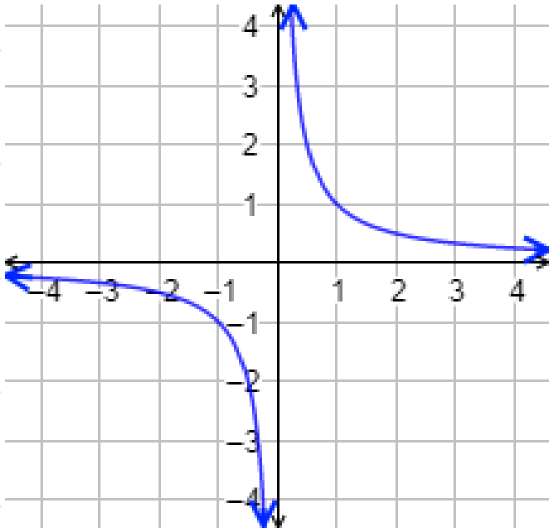




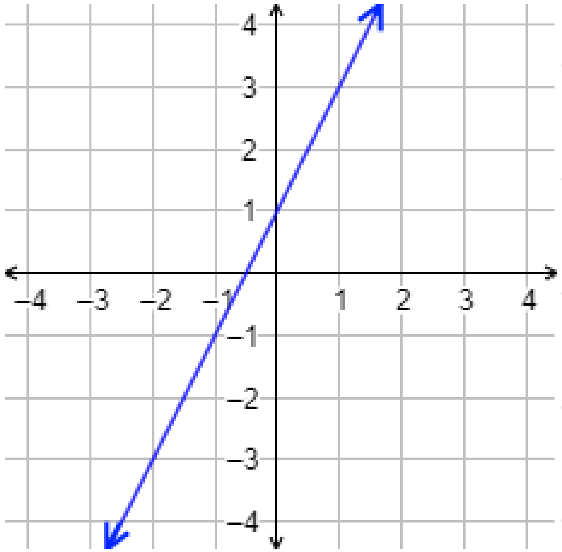
Propiedades Funciones

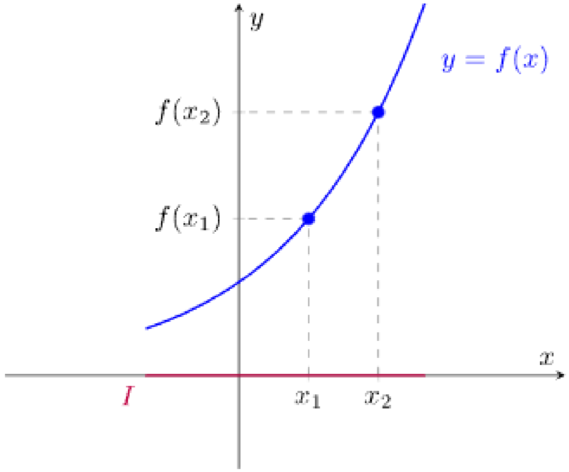
- Función continua: su grafico puede ser dibujado sin levantar el lápiz. No posee saltos ni quiebres.
- Función lineal: tiene la siguiente forma y=a + b x
- Función monótona: cuando el grafico de la función siempre es creciente o siempre es decreciente.

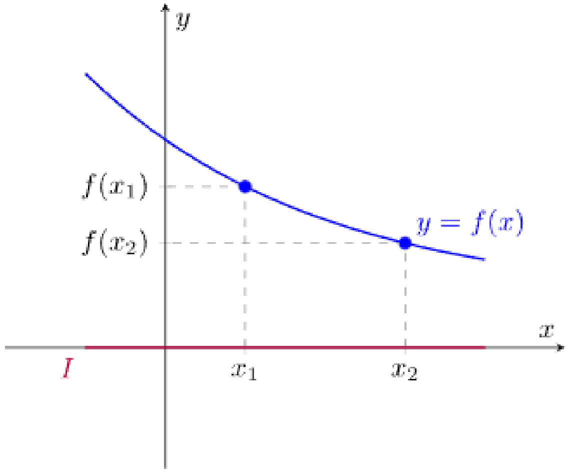
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = 2x + 1$$

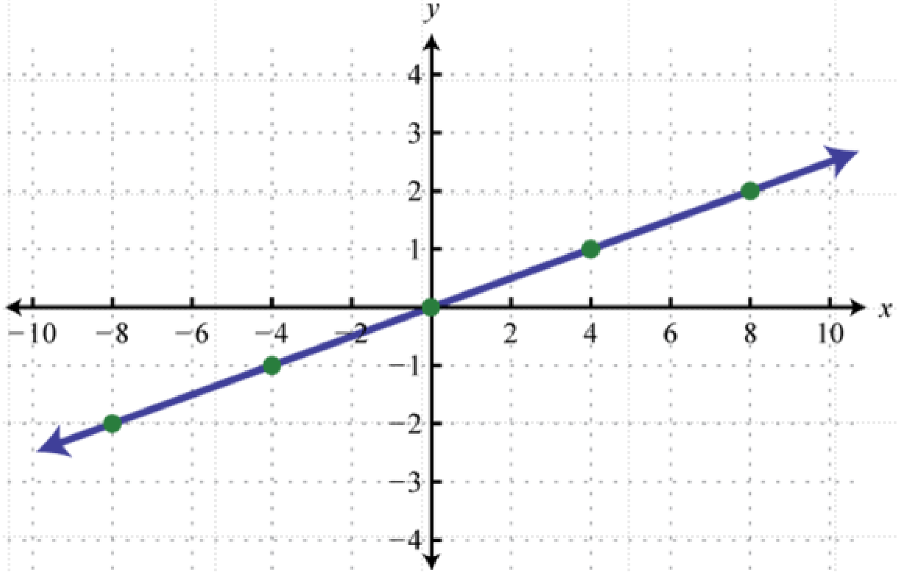


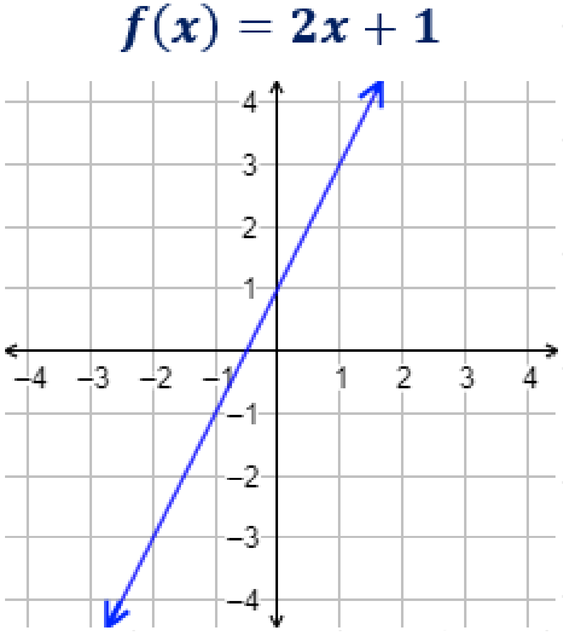


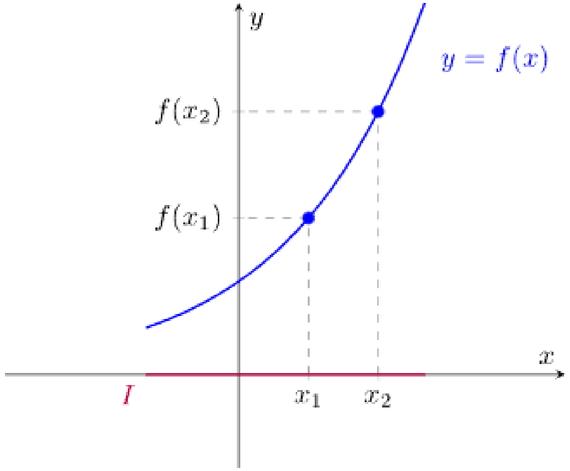


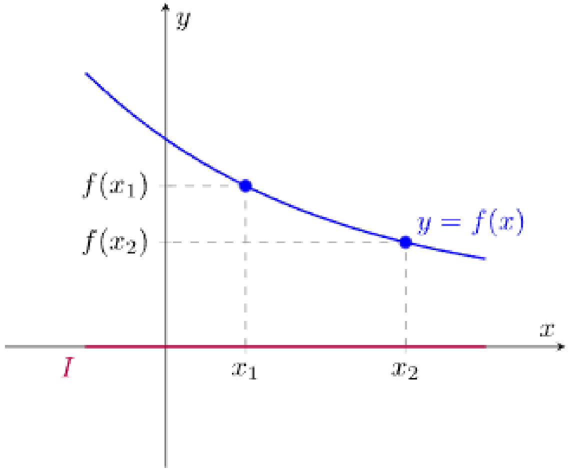
Propiedades Funciones

- Función (estrictamente) creciente: siempre incrementa el valor de f(x)a medida que x incrementa.
- Función (estrictamente) decreciente: siempre decrece el valor de f(x) a medida que x incrementa.
- Función homogénea: la función incrementa o decrece “de forma proporcional” (Función Cobb-Douglas).



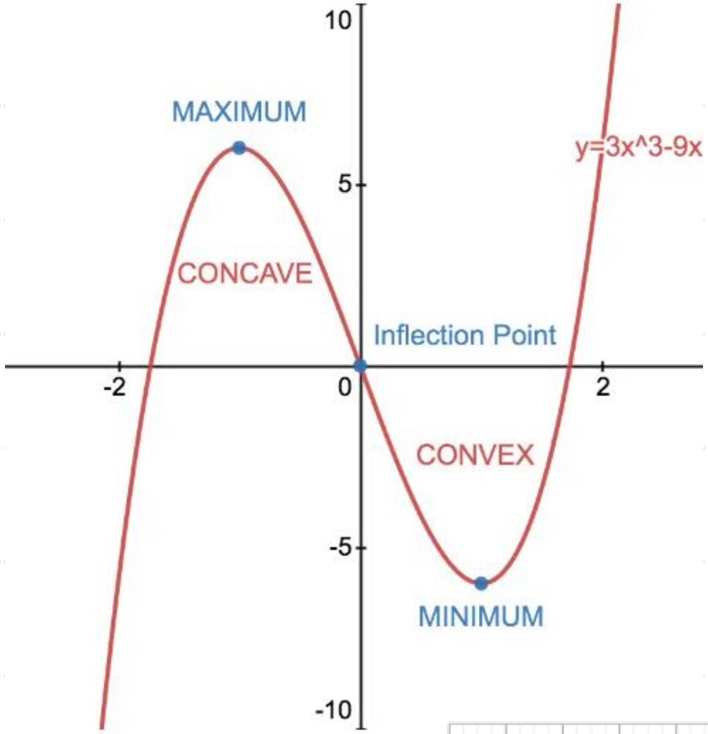


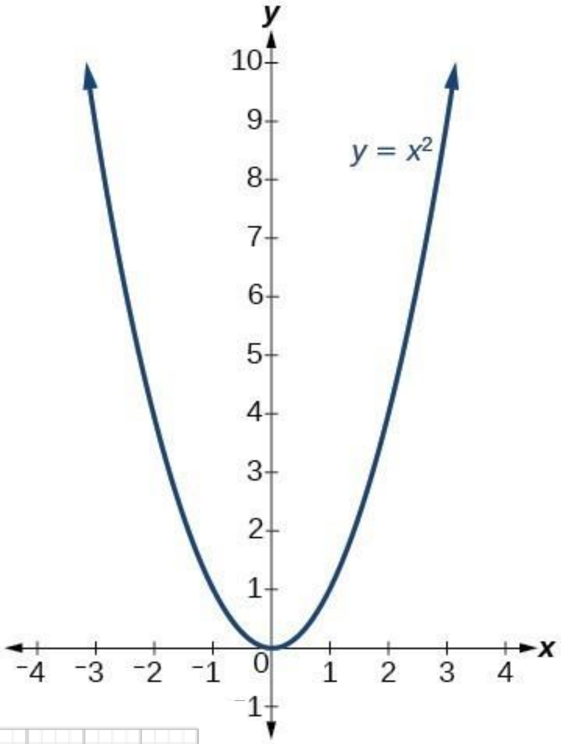


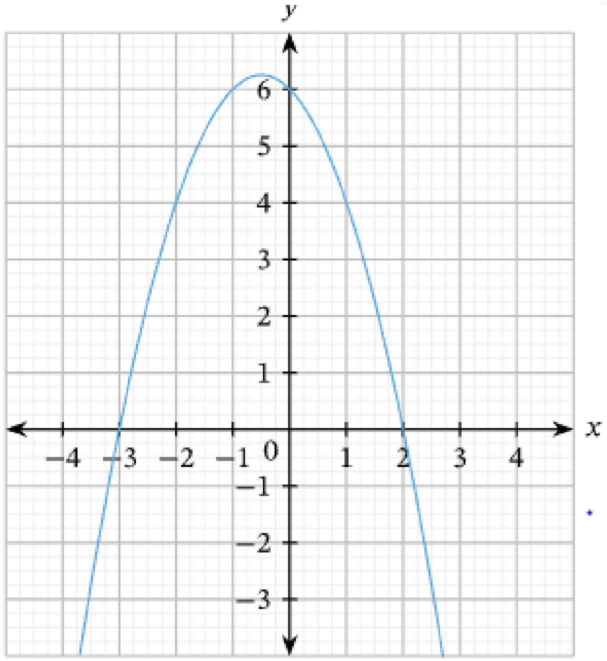


Propiedades Funciones

- Concavidad y Convexidad: curvatura de la gráfica (dados dos puntos cualesquiera, el segmento que los une está por debajo/arriba de la gráfica).







Función Inversa

Dada la función $y = f(x)$ es posible, bajo ciertas condiciones, encontrar $x = g(y)$

Si tenemos y como función de x, se puede calcular la función inversa simplemente despejando x como función de y.

- Ejemplo 1: $f(x) = 2x \rightarrow y = 2x \rightarrow x = \frac{y}{2} \rightarrow g(y) = \frac{y}{2}$
- Ejemplo 2: $f(x) = x^2$ No existe la función inversa.

Para todo $y \rightarrow x = +\sqrt{y}$ y $x = -\sqrt{y}$

Cambios y tasas de cambio

Cambios: $\Delta x = x'' - x'$

Usualmente estamos interesados en los cocientes entre dos cambios:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x' + \Delta x) - f(x')}{\Delta x}$$

- Donde Δx es un cambio pequeño o cambio marginal

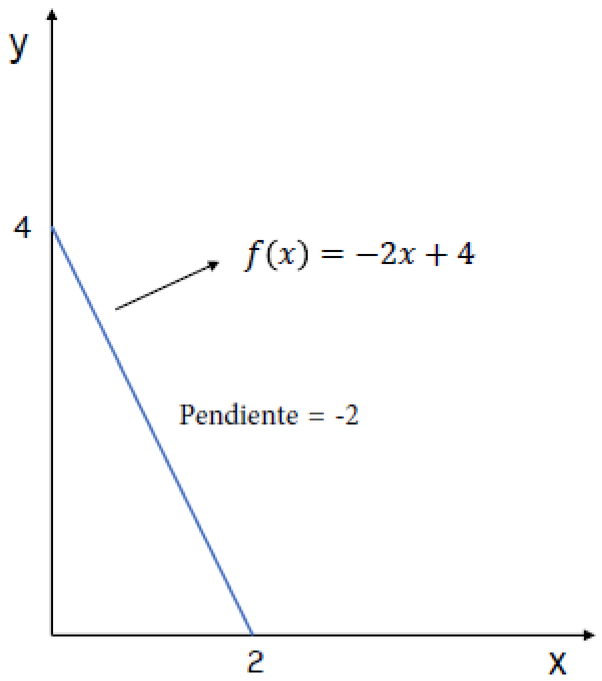
Importante:

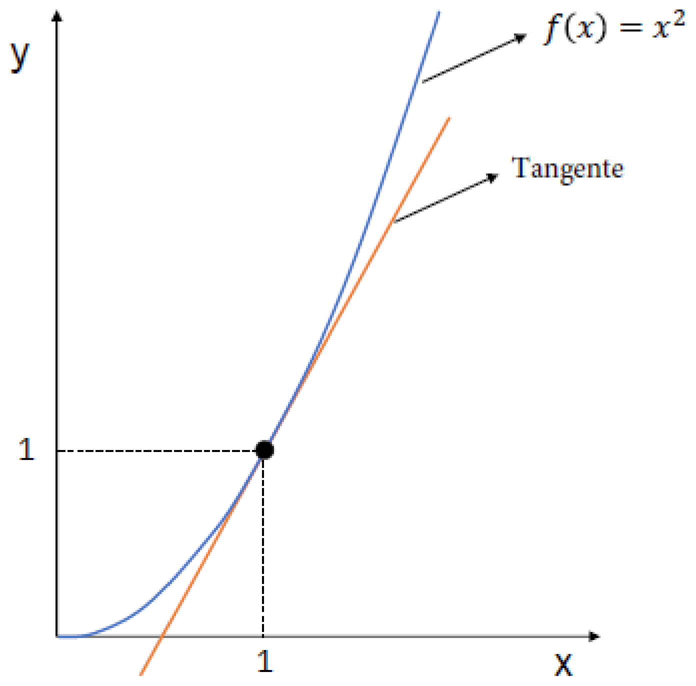
- El cambio es constante para funciones lineales.
- En funciones no lineales depende del valor de x

Pendientes

La tasa de cambio de una función puede ser interpretada gráficamente como la pendiente de la función.

- Una función no lineal tiene la propiedad de que la pendiente cambia a medida que x cambia.
- La tangente a una función es un punto x donde una función lineal posee la misma pendiente.





Valor absoluto: $|x|$

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Logaritmo Natural: $y = \ln x$

Algunas propiedades:

- $\ln(x\ y) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln x^{y} = y \ln x$

Derivadas

- La derivada de una función $y = f(x)$ se define como:

$$\lim \Delta x \ \rightarrow 0 = \frac{f(x \ + \Delta x) - f(x \ )}{\Delta x}$$

- El valor límite de dicho cociente es la pendiente de la recta tangente a la función en un punto determinado.

Derivadas

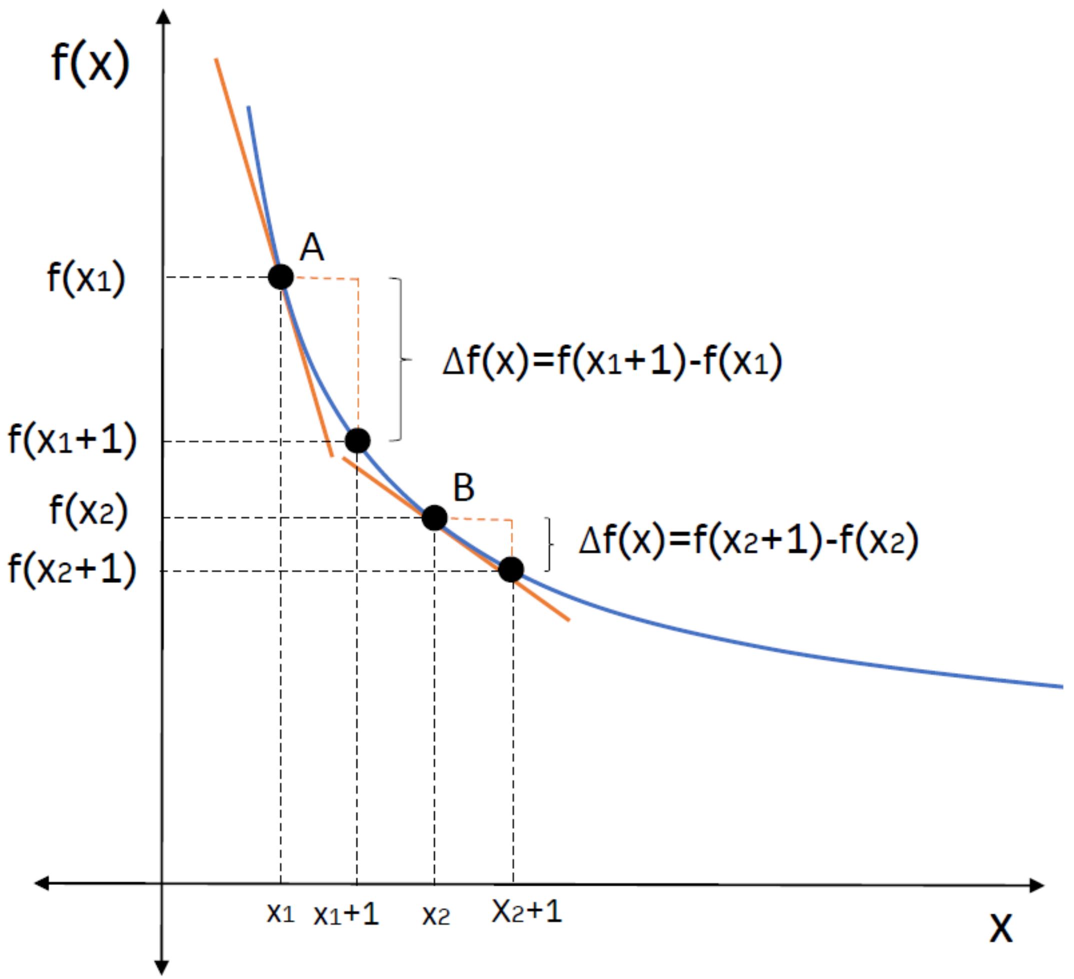
$$y = a$$
$$y = bx$$
$$y = x^b$$
$$y = \ln(x)$$

- Suma de funciones: $f(x)$= $\mathrm{g}(x) + h(x)$
- Regla del producto: $f(x)$= $\mathrm{g}(x) * h(x)$
- Regla de la cadena: $f(x)$= $\mathrm{h}(\mathrm{g}(x))$

Derivadas

$$y = a \;\rightarrow y' = 0$$
$$y = bx \rightarrow y' = b$$
$$y = x^b \rightarrow y' = bx^{b-1}$$
$$y = \ln(x) \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

- Suma de funciones: $f(x)$= $\mathrm{g}(x) + h(x) \rightarrow f(x') = \mathrm{g}'(x) + h'(x)$
- Regla del producto: $f(x)$= $\mathrm{g}(x) * h(x) \rightarrow f(x') = \mathrm{g}'(x)h(x) + h'(x)g(x)$
- Regla de la cadena: $f(x)$= $\mathrm{h}\big(\mathrm{g}(x)\big) \rightarrow f(x') = \mathrm{h}'\big(\mathrm{g}(x)\big)\,\mathrm{g}'(x)$


f(x)
A
f(x1)
Δf(x)=f(x1+1)-f(x1)
f(x1+1)
B
f(x2)
Δf(x)=f(x2+1)-f(x2)
f(x2+1)
x1
x1+1
x2
X2+1
X

Sistema de Ecuaciones

Conjunto de ecuaciones con más de una incógnita.

- Ejemplo: Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$4x - y = 4$$
$$x + 2y = 10$$

- Resolución: método de sustitución:

Sistema de Ecuaciones

Conjunto de ecuaciones con más de una incógnita.

- Ejemplo: Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$4x - y = 4$$
$$x + 2y = 10$$

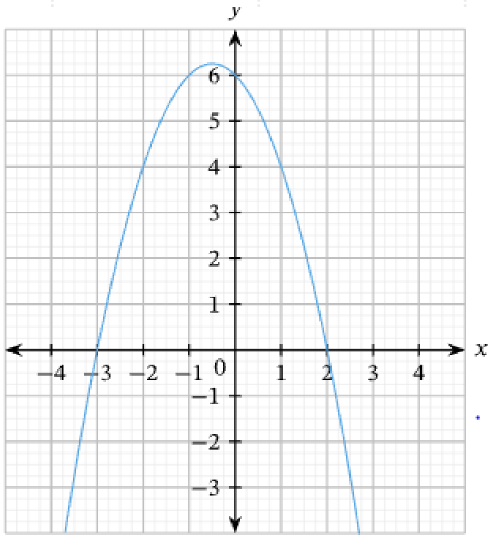
Resolución: método de sustitución:

- De la primera ecuación obtenemos que: $4x - 4 = y$
- Reemplazamos en la segunda ecuación: $x + 2(4x - 4) = 10$
- Resolvemos para obtener el valor de x: $9x - 8 = 10 \rightarrow 9x = 18 \rightarrow x = 2$
- Reemplazando en la primera ecuación, tenemos que $4(2) - 4 = 4$
- Solución (x, y) = (2; 4).

Optimización

$f(x)$ tiene un máximo en x^* si $f(x^*) \geq f(x)$ para todo x.

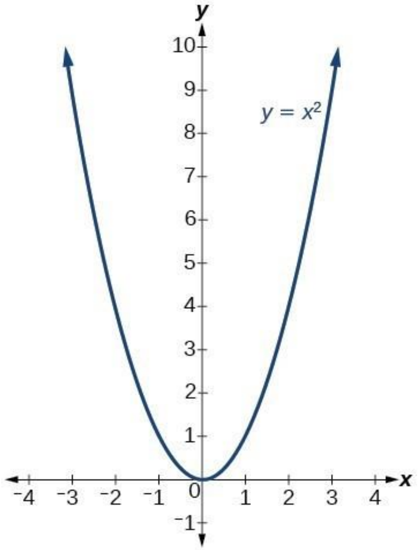
$f(x)$ tiene un mínimo en x^* si $f(x^*) \leq f(x)$ para todo x.



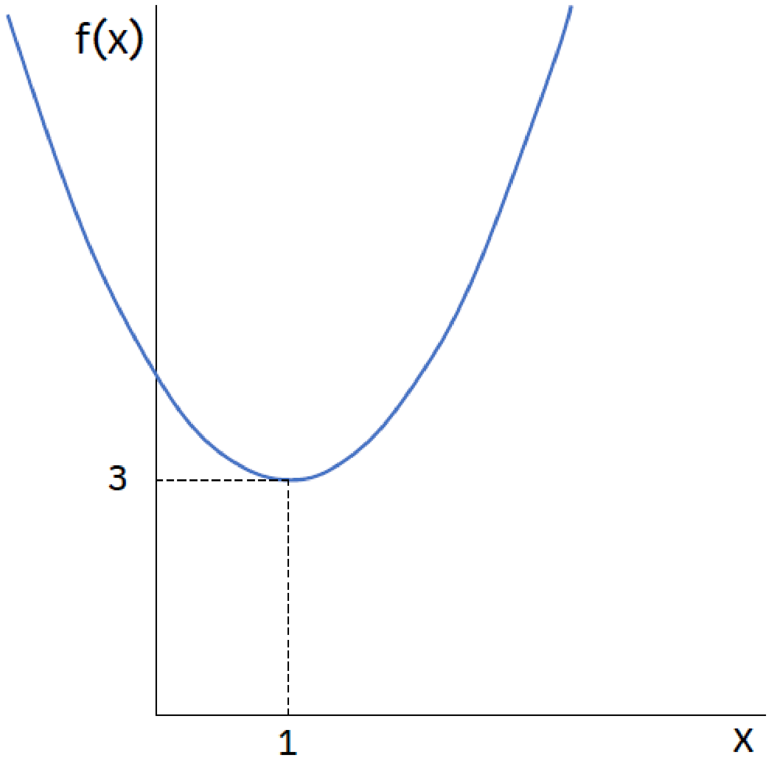
Una función es optimizable cuando: $f'(x^*) = 0$ – CPO

$$f''(x^*) \geq 0 : CSO \; - Minimo$$

$$f''(x^*) \leq 0 : CSO \; - Máximo$$

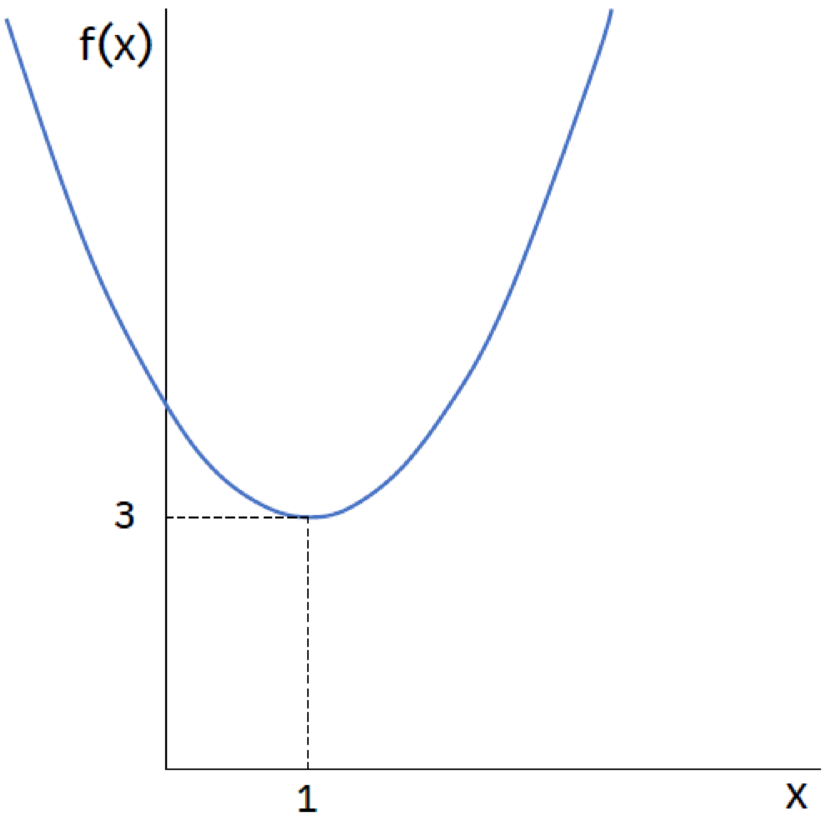


Ejemplo



$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

Ejemplo



$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x^* - 2 = 0 \rightarrow x^* = 1$$

$$f''(x) = 2 > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

Optimización Restringida

En este caso queremos calcular el máximo o mínimo de una función sobre un conjunto restringido de x.

- Consumir sujeto a un presupuesto
- Producir sujeto a capacidad de capital y trabajo