Conjuntos Difusos y Control Difuso en Matlab

William A. Gómez Roa
wa.gomez@javeriana.edu.co
Bioingeniería y Ciencia de Datos

Luis Esteban Muñoz Sarmiento
esteban@javeriana.edu.co
Ingeniería en Redes y Telecomunicaciones

Abstract

This work focuses on the application of fuzzy set theory using MATLAB. The main objective is to design a Mamdani-type fuzzy controller for regulating systems modeled as first-order systems. Membership functions, which are essential in fuzzy set theory, are explored, including forms such as triangular, trapezoidal, Gaussian, and sigmoidal functions. Key properties of membership functions, such as the core, support, and boundary, are analyzed. Furthermore, different classifications of fuzzy sets, such as normal, subnormal, convex, and non-convex fuzzy sets, are discussed. This work provides an in-depth insight into fuzzy set theory and its application in control systems.

Keywords: Fuzzy Sets, Fuzzy Control, Mamdani Controllers, Membership Functions, MATLAB

Resumen

Este trabajo se centra en la aplicación de la teoría de conjuntos difusos utilizando MATLAB. El objetivo principal es diseñar un controlador difuso tipo Mamdani para regular sistemas modelados como sistemas de primer orden. Se exploran las funciones de pertenencia, que son esenciales en la teoría de conjuntos difusos, incluyendo formas como las funciones triangulares, trapezoidales, gaussianas y sigmoidales. Se analizan propiedades clave de las funciones de pertenencia, como el núcleo, el soporte y el límite. Además, se discuten diferentes clasificaciones de conjuntos difusos, como los conjuntos difusos normales, subnormales, convexos y no convexos. Este trabajo ofrece una visión profunda de la teoría de conjuntos difusos y su aplicación en sistemas de control.

Palabras clave: Conjuntos Difusos, Control Difuso, Controladores Mamdani, Funciones de Membresía, MATLAB.

Conjuntos Difusos

En la teoría de conjuntos clásicos, la pertenencia de un elemento a un subconjunto del universo es una relación binaria, limitada a ser o no ser, sin matices intermedios. En contraposición, los conjuntos difusos ofrecen una perspectiva más flexible al permitir que los elementos tengan grados de pertenencia variables, lo que posibilita la representación de la incertidumbre y la ambigüedad inherentes a situaciones del mundo real. Este artículo se adentra en la teoría de conjuntos difusos, examinando su base matemática y explorando su aplicacion en el control de sistemas. A través de ejemplos, se ilustra cómo esta teoría permite la representación y el análisis de sistemas complejos, brindando soluciones más realistas y adaptables en entornos caracterizados por la variabilidad y la incertidumbre.

Un conjunto difuso $\tilde{A}$ en $\mathbb{R}^m$ se define como:

$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$

donde, $\mu_{\tilde{A}} \colon \mathbb{R}^m \to [0, 1]$ se llama la **función de membresía** de $\tilde{A}$ [1].

El valor $\mu_{\tilde{A}}(x)$ indica el grado en el que x pertenece a $\tilde{A}$. Un grado de pertenencia de 1 indica membresía completa en el conjunto, mientras que un grado de 0 representa una ausencia total de membresía, y cualquier valor entre 0 y 1 refleja una membresía parcial al conjunto.

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo la fiebre puede ser interpretada en términos de grados de membresía, en contraste con una definición estática (clásica) en un valor específico de temperatura para considerarla como fiebre alta [2].

Podemos definir una fiebre alta como una temperatura superior a 38.9 °C. Aunque la mayoría de los médicos estarán de acuerdo en que el umbral está alrededor de 38.9 °C, esto no significa que un paciente con una temperatura corporal de 38.8 °C no tenga fiebre alta, mientras que otro paciente con 38.9 °C sí la tenga. Por lo tanto, en lugar de utilizar esta definición rígida, cada temperatura corporal se asocia con un cierto grado. Por ejemplo, mostramos una posible descripción de la fiebre alta utilizando grados de membresía de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\mu(34.4\,^\circ\mathrm{C}) = 0,\\
&\mu(35.6\,^\circ\mathrm{C}) = 0,\\
&\mu(37.0\,^\circ\mathrm{C}) = 0,\\
&\mu(37.8\,^\circ\mathrm{C}) = 0.7,\\
&\mu(38.9\,^\circ\mathrm{C}) = 0.95,\\
&\mu(40.0\,^\circ\mathrm{C}) = 0.99,\\
&\mu(41.1\,^\circ\mathrm{C}) = 1,\\
&\mu(42.2\,^\circ\mathrm{C}) = 1,\\
&\mu(43.3\,^\circ\mathrm{C}) = 1.
\end{aligned}$$

El grado de pertenencia también puede representarse mediante una función continua.

Otro ejemplo de un conjunto difuso lo podemos ver en la Figura 2, donde se representa la función de membresia continua para el conjunto difuso de velocidades no mucho mayores a 190 km/h y no mucho menores a 170 km/h.

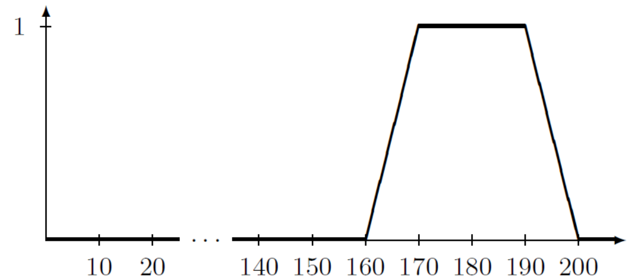

Figure 1: *El conjunto difuso representa las velocidades que no son significativamente menores de 170 km/h ni significativamente mayores de 190 km/h.*

Operaciones de Conjuntos Difusos

Sean $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ dos conjuntos difusos en $\mathbb{R}^m$ con funciones de membresía $\mu_{\tilde{A}}$ y $\mu_{\tilde{B}}$, respectivamente.

Unión

La función de membresía de la unión $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ se define como

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Intersección

La función de membresía de la intersección $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ se define como

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Complemento

El complemento de $\tilde{A}$ se denota como $\tilde{A}^c$ y se define como

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Ejercicio Operaciones en Conjuntos Difusos

Para los siguientes conjuntos difusos, calcular el complemento, la unión, y la intersección.

$\tilde{A} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{0.5}{3}, + \frac{0.6}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.6}{6}\right\}$

$\tilde{B} = \left\{\frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3}, + \frac{0.4}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.3}{6}\right\}$

$$\tilde{A}^c = \left\{\frac{0}{2} + \frac{0.5}{3}, + \frac{0.4}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.4}{6}\right\}$$

$$\tilde{B}^c = \left\{ \frac{0.5}{2} + \frac{0.2}{3}, + \frac{0.6}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.7}{6} \right\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}, + \frac{0.6}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.6}{6} \right\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{ \frac{0.5}{2} + \frac{0.5}{3}, + \frac{0.4}{4} + \frac{0.2}{5} + \frac{0.3}{6} \right\}$$

Función de Membresia

La difusión en un conjunto difuso se refiere a cómo se categoriza un elemento en dicho conjunto, ya sea que tenga valores discretos o continuos. Esto se logra mediante funciones de membresía que pueden expresarse gráficamente en diversas formas. Sin embargo, existen restricciones en cuanto a las formas que pueden tomar estas representaciones gráficas. Las reglas diseñadas para representar la difusión en una aplicación también pueden ser ambiguas o inciertas. La "forma" de la función de membresía es un aspecto crucial a considerar, ya que afecta cómo se clasifican los elementos. A continuación exploraremos algunas características y técnicas utilizadas para crear funciones de membresia [3].

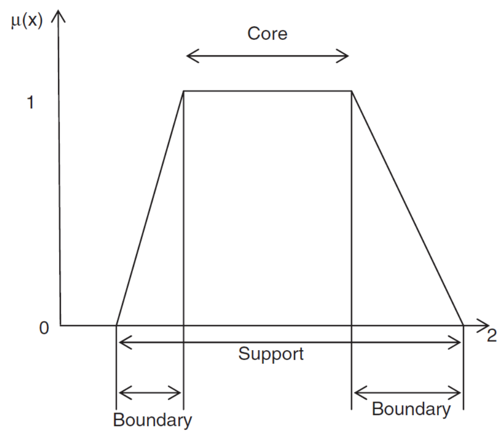

Figure 2: *Características de la función de membresia.*

Las características de la función de membresía están definidas por tres propiedades y las podemos observar en la Figura 2. Son:

(1) Núcleo: Los elementos que tienen una función de membresía igual a 1 son los elementos del núcleo.

(2) Soporte: El soporte contiene los elementos cuya membresía es mayor que 0.

(3) Límite: El límite contiene los elementos cuya membresía se encuentra entre 0 y 1.

Además, los conjuntos difusos se pueden clasificar según su función de memresia:

Conjunto difuso normal: Si la función de membresía tiene al menos un elemento en el universo cuyo valor es igual a 1.

Conjunto difuso subnormal: Si la función de membresía tiene valores de membresía inferiores a 1.

Conjunto difuso convexo: Si la función de membresía tiene valores de membresía que son monótonamente crecientes, monótonamente decrecientes o monótonamente crecientes y decrecientes con los valores crecientes de los elementos en el universo.

Conjunto difuso no convexo: Si la función de membresía tiene valores de membresía que no son estrictamente monótonamente crecientes, monótonamente decrecientes o ambos, con valores crecientes de los elementos en el universo.

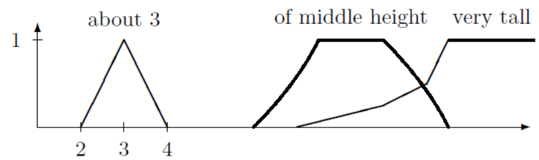

Figure 3: *Tres conjuntos difusos convexos*

Formas de Funciones de Pertinencia

Funciones de Pertinencia Triangulares

Una de las formas más simples y comunes de funciones de pertinencia es la triangular. Estas funciones tienen una apariencia que se asemeja a un triángulo y son ideales cuando se desea modelar una relación lineal entre las entradas y las salidas. Por ejemplo, en sistemas de control de temperatura, una función triangular podría describir la transición de "frío" a "cálido" de manera precisa y eficaz.

Funciones de Pertinencia Trapezoidales

Las funciones trapezoidales son similares a las triangulares pero permiten una transición más suave. Son especialmente útiles cuando se necesita modelar una zona de tolerancia o cuando la pertenencia no es estrictamente binaria. Estas funciones se aplican en sistemas donde cierta variación es aceptable, como en el control de calidad industrial.

Funciones de Pertinencia Gaussiana

Las funciones de pertinencia gaussiana se caracterizan por su forma de campana. Son excelentes para representar la incertidumbre en sistemas complejos. Estas funciones se utilizan en campos como el análisis de riesgo financiero, donde se modela la probabilidad de que una variable caiga en un rango particular.

Funciones de Pertinencia Sigmoidales

Las funciones sigmoidales adoptan una forma en "S" y son adecuadas para representar cambios abruptos en la relación entre las entradas y las salidas. Se aplican en situaciones donde una transición brusca es relevante, como en el control de procesos industriales.

Funciones de Pertinencia Exponenciales

Estas funciones capturan relaciones no lineales y describen sistemas con respuestas exponenciales. Se utilizan en sistemas dinámicos, como el procesamiento de señales, donde la amplificación puede describirse de manera efectiva con una función exponencial.

Funciones de Pertinencia Personalizadas

En ocasiones, se requieren funciones de pertinencia específicas diseñadas a medida para abordar desafíos particulares. Estas funciones altamente especializadas se crean para adaptarse a situaciones únicas y pueden encontrarse en aplicaciones diversas, desde el diseño de controladores de vuelo hasta el análisis médico avanzado.

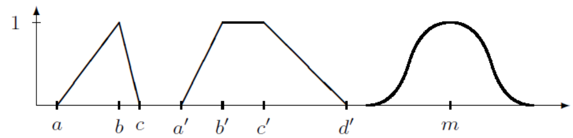

Figure 4: *Forma triangular, trapezoidal y sigmoide de la función de membresía. De izquierda a derecha.*

Existen varios métodos para asignar los valores de membresía o las funciones de membresía a variables difusas. La asignación puede realizarse simplemente por intuición o mediante el uso de algunos algoritmos o procedimientos lógicos. Entre los métodos para asignar los valores de membresía encontramos: intuición, inferencia, ordenamiento por rango, conjuntos difusos angulares, redes neuronales, algoritmos genéticos y temporización inductiva.

Control Difuso

En teoría de control clásica, el diseño de un sistema de control automático consta de dos pasos. En el primer paso, se analiza el sistema (la planta) y se construye un modelo matemático que lo describe. En el segundo paso, se desarrolla el controlador automático utilizando ese modelo como base. Para describir un sistema dinámico, el uso de ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencia parece la elección obvia. El objetivo es describir el comportamiento dinámico mediante unas pocas ecuaciones que sean lo más simples posible.

A diferencia de esto, el diseño de un controlador difuso se basa en reglas. Aquí, no se construye ningún modelo. En su lugar, diseñamos el controlador directamente, en cierto sentido, por intuición, aunque, por supuesto, el diseño aún requiere una comprensión del comportamiento de la planta. Por lo tanto, el controlador difuso se utiliza principalmente en sistemas donde no existe un modelo o donde el modelo tiene una estructura no lineal tan inconveniente que resulta imposible realizar un diseño de controlador clásico [4].

Controladores Mamdani

El controlador Mamdani se basa en un conjunto finito R de reglas de la forma "*if-then*":

$$R : \text{Si } x_1 \text{ es } \mu_R^{(1)} \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } \mu_R^{(n)} \text{ entonces } y \text{ es } \mu_R.$$

Donde $x_1, \dots, x_n$ son variables de entrada del controlador y y es la variable de salida.

Usualmente, los conjuntos difusos $\mu(i)_R$ o μ_R representan valores lingüísticos, es decir, conceptos vagos como "casi nulo", "de altura promedio" o "negativamente pequeño", los cuales, a su vez, son representados por conjuntos difusos.

Planteamiento del Problema

Este problema se enfoca en la aplicación de la teoría de conjuntos difusos utilizando Matlab. El objetivo es diseñar un controlador difuso del tipo Mamdani para regular una planta modelada como un sistema de primer orden con retardo. Los pasos clave incluyen el modelado de la planta con un controlador clásico, el diseño del controlador difuso con reglas y funciones de membresía, la implementación de este proceso en Matlab utilizando el Toolbox de 'Lógica Difusa', la simulación completa del sistema en Simulink y la comparación de los resultados de los controladores. El propósito es aprender y comprender la implementación práctica de la teoría de conjuntos difusos en el contexto del control de sistemas.

Solución

Se propone implementar un sistema de primer orden con retardo a la salida el cuál sigue la ecuación en el espacio s de Laplace:

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{K}$$

Con un controlador proporcional integral de la forma:

$$C(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

, y con un controlador Difuso del tipo Mandani.

En la siguiente Figura, se muestra la implementación en simulink de ambos sistemas:

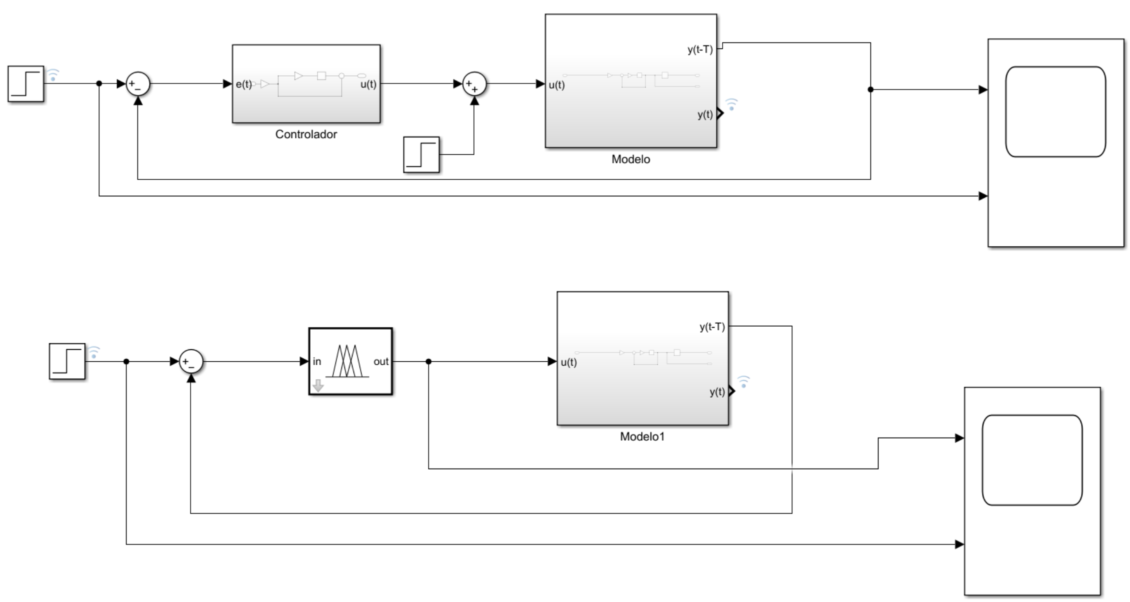

Figure 5: *Sistemas modelados en Simulink-Matlab.*

Se puede observar que el primer modelo esta siendo controlado por un controlador clásico mientras que el sistema de abajo esta siendo controlado por un controlador difuso.

Para implementar el controlador difuso en Matlab, primero debemos instalar el Toolbox 'Fuzzy Logic'.

Una vez completada la instalación, podemos encontrar el bloque 'Fuzzy' en el entorno de Simulink, lo que nos permitirá implementar cualquier tipo de controlador difuso en nuestros modelos.

Para configurar el controlador, primero debemos identificar la cantidad de entradas y salidas del mismo. En nuestro caso, contamos con una entrada y una salida. La entrada corresponde al error del sistema, que es la diferencia entre la variable de referencia (entrada deseada) y la medición realimentada del sistema, obtenida a través de un sensor. Por otro lado, la salida del controlador es una señal que se introduce en el modelo de la planta con el propósito de llevar la salida del proceso hacia la referencia y minimizar el error.

En la siguiente Figura podemos ver como es el entorno de configuración de un controlador difuso en Matlab; se debe seleccionar controlador del tipo Mandani, y luego elegir la cantidad y tipo de funciones de membresia que deseamos para las variables de entrada y de salida. En nuestro caso seleccionamos el rango de [-1 1], pues se presume que el error estara oscilando entre este rango.

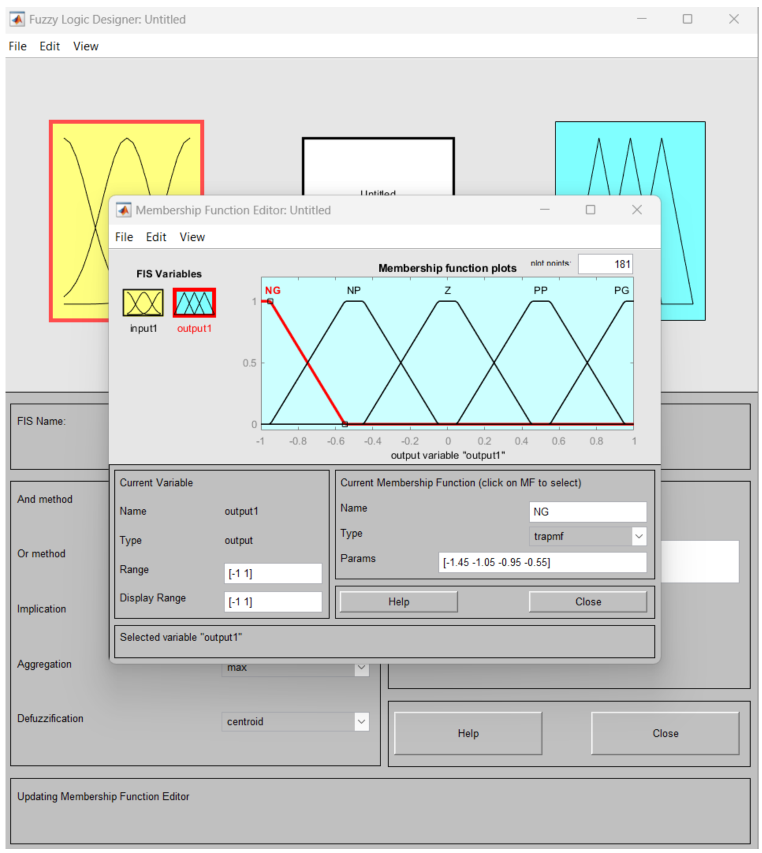

Figure 6: *Funciones de membresia trapezoidales para la variable de salida del controlador difuso.*

Además de seleccionar el tipo de función de membresia y la cantidad, se pueden modificar también sus parametros. Esto permite diseñar las funciones de membresia según el mejor criterio que tengamos.

Por útlimo, para diseñar el controlador Mandani debemos establecer una conjunto de reglas R de la forma "*if-then*", lo cuál podemos ver en la siguiente Figura como se realiza en Matlab:

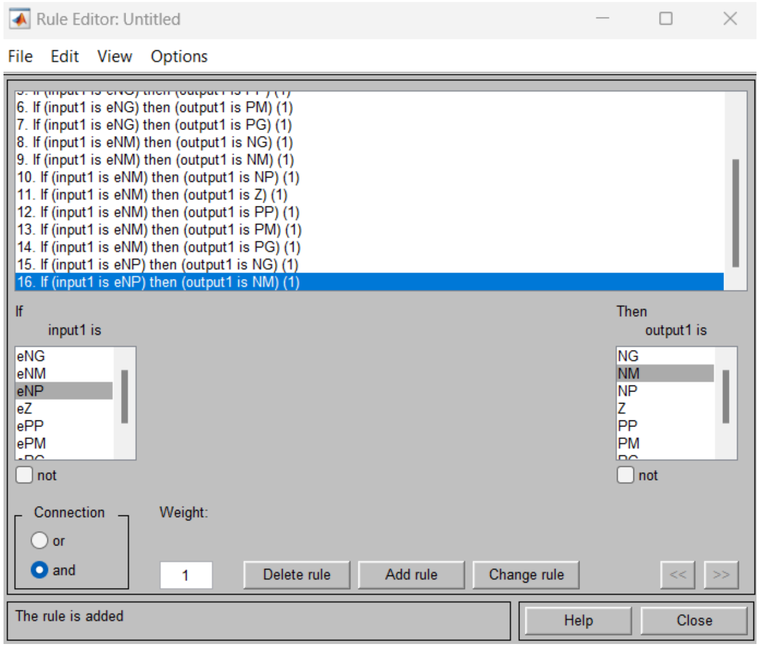

Figure 7: *Conjunto de reglas representando valores lingüísticos.*

Análisis de Resultados

A continuación se muestra la respuesta en el tiempo de los sistemas.El proposito de este trabajo no es verificar la controlabilidad del sistema, más sino entender los fundamentos teóricos de la implementación de un controlador difuso. Por ende, no se hablará de la efectividad del control difuso implementado, pues su correcto funcionamiento esta fuera del alcance de este trabajo.

Observes en las siguientes figuras la señal de color azul corresponde a la referencia de entrada como una señal *paso* que se introdujo en ambos sistemas. La idea del controlador es generar una señal que sea capaz de llevar al sistema al valor de la referencia.

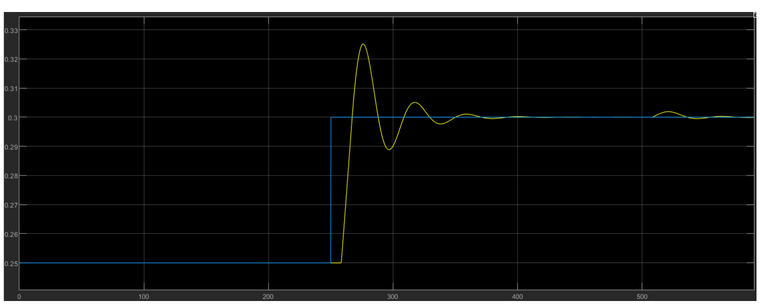

Figure 8: *Conjunto de reglas representando valores lingüísticos.*

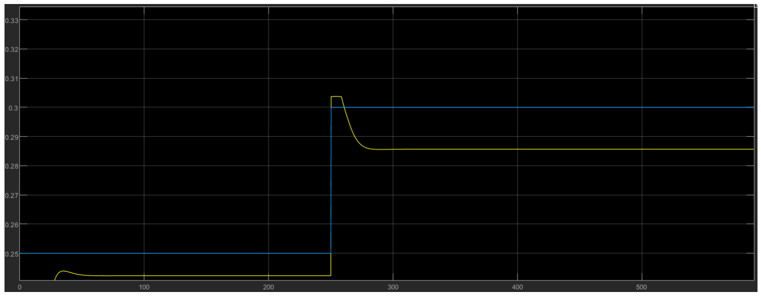

Figure 9: *Conjunto de reglas representando valores lingüísticos.*

Se puede observar como el controlador clásico de la Figura 8 tiene una oscilación inicial y rapidamente se estabiliza en la referencia. Por otro lado se observa la salida del control difuso en la Figura 9 y esta se estabiliza cerca de la referencia pero dejando un error existente.

Conclusiones

- Los conjuntos difusos son una herramienta poderosa para modelar y abordar la incertidumbre en una variedad de aplicaciones. Permiten representar conceptos vagos y ambigüos de manera efectiva, lo que los hace especialmente útiles en sistemas de control. Su capacidad para manejar grados de pertenencia y no limitarse a valores binarios los convierte en una herramienta versátil para la resolución de problemas en el mundo real. Los conjuntos difusos han demostrado ser valiosos en áreas como la inteligencia artificial, la robótica y la gestión de sistemas complejos. Su aplicación sigue siendo un campo de estudio activo y prometedor en matemáticas y ciencias de la computación.

- La función de membresía proporciona una forma de asignar grados de pertenencia a los elementos en un conjunto difuso, lo que permite modelar la incertidumbre y la vaguedad en situaciones del mundo real. Los conjuntos clásicos, operan bajo una lógica binaria en la que los elementos pertenecen o no pertenecen a un conjunto de manera completa. La combinación de la función de membresía y los conjuntos clásicos en la teoría de conjuntos difusos ofrece una herramienta poderosa para representar y resolver problemas complejos que involucran ambigüedad y variabilidad en los datos. Esta capacidad de manejar grados de pertenencia y no limitarse a respuestas binarias permite una modelización más realista y precisa de una amplia gama de aplicaciones en campos como la inteligencia artificial, el control de sistemas y la toma de decisiones.

- El controlador tipo Mamdani basado en conjuntos difusos ofrece la flexibilidad de representar reglas de control en términos de lenguaje natural, lo que facilita la interpretación y ajuste por parte de los expertos en el dominio. Esto lo hace adecuado para una amplia gama de aplicaciones en control de sistemas, especialmente donde es complejo conocer una representación precisa del modelo, como en los sistemas biológicos.

- Matlab ofrece un entorno de programación versátil que permite la implementación de algoritmos de lógica difusa de manera eficiente. El Toolbox de Lógica Difusa proporciona un conjunto de funciones y herramientas que simplifican el diseño de sistemas de control difuso al proporcionar una interfaz intuitiva para definir reglas difusas y funciones de membresía.

References

[1] H. Wu, *Mathematical Foundations of Fuzzy Sets.* Wiley, 2023.

[2] W. Pedrycz, *An Introduction to Computing with Fuzzy Sets: Analysis, Design, and Applications.* Intelligent Systems Reference Library, Springer International Publishing, 2020.

[3] S. N. Sivanandam, S. Sumathi, and S. N. Deepa, *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB.* Springer Berlin, Heidelberg, 2007.

[4] K. Michels, F. Klawonn, R. Kruse, and A. Nürnberger, *Fuzzy Control.* Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer Berlin, Heidelberg, 1 ed., 2006.