Pontificia Universidad
JAVERIANA
Bogotá

VIGILADA MINEDUCACIÓN

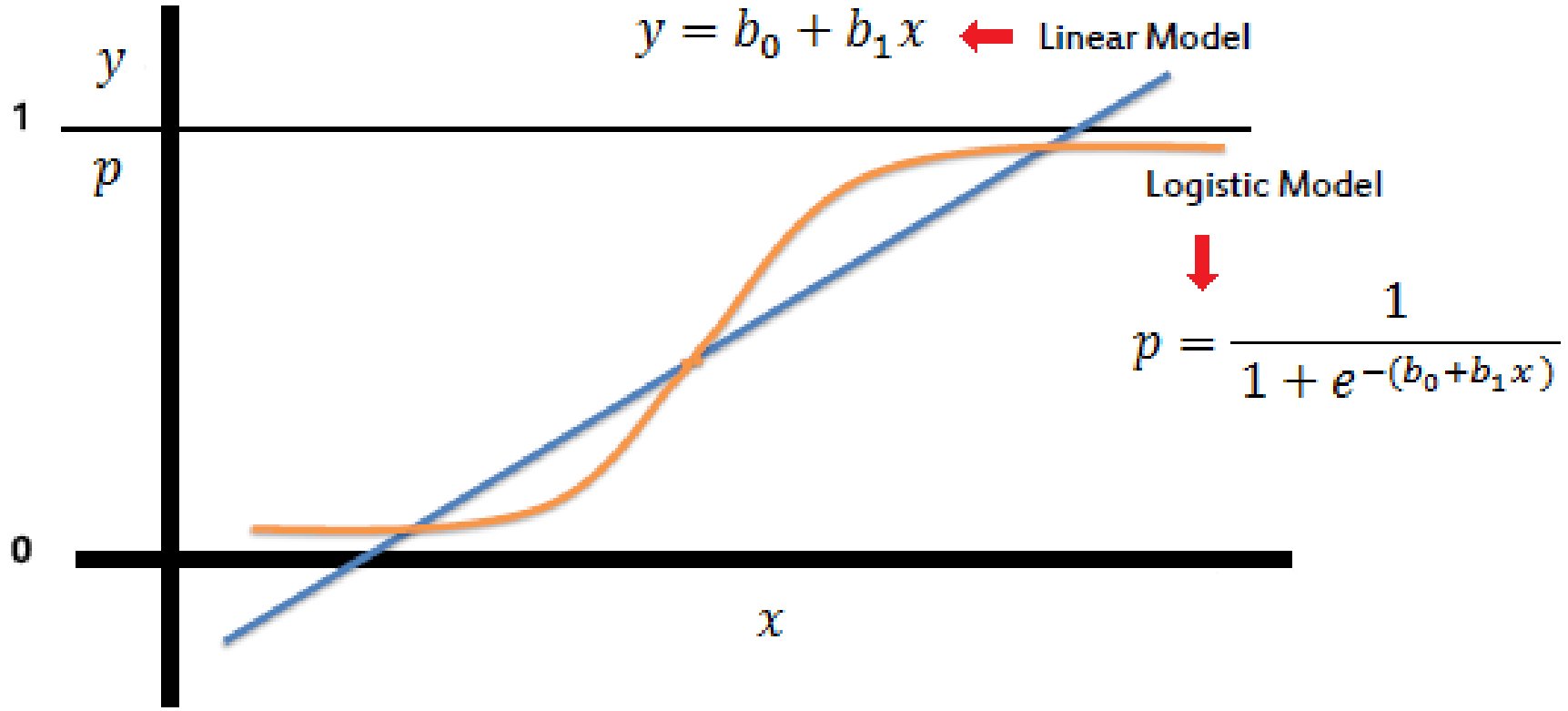
Regresión Logística

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Colombia

Regresión Logística

A partir de un conjunto de variables escalares (o dummies) se busca predecir una respuesta tipo binomial

- ¿Qué tan probable es que se acepte una oferta?
- ¿Puedo acercarme a la predicción de una falla?


$y = b_0 + b_1 x$
Linear Model
y
1
p
Logistic Model
$p = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x)}}$
0
x

Regresión lineal múltiple

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n$$

Modelo de Regresión Logística

$$Prob(Y = 1) = p = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_1 X_1)}}$$

$$\text{Log}\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n$$

Odds

- Odd (ejemplo 1): Las apuestas están 4:1 -> Odd es 4

- Odd (ejemplo 2): Probabilidad de compra: 0.6

$$Odd = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

Odd Ratio

El odd ratio es una medida de asociación entre dos variables que indica la fortaleza de la relación entre dos variables

Ejemplo: qué tan probable es votar al partido liberal teniendo en cuenta si las personas son creyentes o no.

Odd Ratio

	Creer en Dios	No creer en Dios	Total
Sí vota al partido liberal	100	250	350
No vota al partido liberal	300	350	650
Total	400	600	1000

No cree en Dios

Prob(SI vota Liberal) = 0.42

Prob(NO vota Liberal) = 0.58

$$ODD = \frac{0.42}{0.58} = 0.72$$

Sí cree en Dios

Prob(SI vota Liberal) = 0.25

Prob(NO vota Liberal) = 0.75

$$ODD = \frac{0.25}{0.75} = 0.33$$

$$ODD\ RATIO = \frac{0.72}{0.33} = 2.17$$

Para una persona no creyente los *odds* de sí votar al partido liberal son 2,17 veces más grandes que los *odds* de una persona que sí cree en Dios, de sí votar al partido liberal.

Odd Ratio

¿Cómo se interpretan los odd ratio?

- Los *odd ratio* oscilan entre 0 e infinito.
- Cuando el *odd ratio* es 1 indica ausencia de asociación entre las variables.
- Los **valores menores de 1** señalan una **asociación negativa** entre las variables y los **valores mayores de 1** indican **asociación positiva** entre las variables.
- Cuanto más se aleje el *odd ratio* de 1, más fuerte es la relación

Odd Ratio

Aumento porcentual del Odd

Si Odd ratio > 1: Se incrementa la probabilidad de lo que se definió como objetivo

Si Odd ratio < 1: Se disminuye la probabilidad de lo que se definió como objetivo

Odd Ratio

Ejemplo 1

Odd ratio=2, con Odd de 1.5 significa que la probabilidad aumentó de 60% a 75%.

$$Odd1 = \frac{0.6}{0.4} = 1.5$$

$$Odd2 = \frac{0.75}{0.25} = 3$$

Odd Ratio

Ejemplo 2

Odd ratio=2.25, pero Odd inicial de 0.11 significa que la probabilidad aumentó de 10% a 20%.

$$Odd1 = \frac{0.1}{0.9} = 0.11$$

$$Odd2 = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

Odd Ratio

Ejemplo 3

Odd ratio = 0.9 con Odd inicial de 0.25 entonces la probabilidad disminuyó de 20% a 18.37%.

$$Odd\ 1 = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$Odd\ 2 = \frac{0.1837}{0.8163} = 0.225$$

Luego, el Odd ratio debe ser interpretado sobre la probabilidad base

Odd Ratio

- Los *odd ratios* son usados en modelos de **regresión logística** para comparar la influencia de las variables explicativas (o independientes) sobre la variable dependiente.
- Al realizar regresiones logísticas, los *odd ratios* se denominan **exponencial de b** y se expresan así: **Exp(b)**.

Odd Ratio

El odd ratio es una medida de asociación entre dos variables que indica la fortaleza de la relación entre dos variables

Ejemplo: qué tan probable es votar al partido liberal teniendo en cuenta si las personas creen en Dios o no.

Variable dependiente: **Votar por el partido liberal: 1 (SI), 0 (NO)**

Variables independientes:

- **Creer en Dios: 1(SI), 0 (NO)**
- **Edad: # años**
- **Nivel de Ingresos: Escala de 1 a 10.**

Interpretación de efectos en la regresión logística

Resultados del procesamiento del modelo de RL

	Coeficiente b	Sig.	Exp(b)
Creer en Dios	-0,550	0,000	0,577
Edad	0,010	0,001	1,010
Ingresos	0,415	0,000	1,508
Constante	1,214	0,000	3,366

Variable dependiente: Votar al partido liberal

- Los exponenciales de b, **Exp(b)**, son *odd ratios* y pueden comparase entre sí para saber qué variable es más explicativa de la variable dependiente o está asociada de manera más fuerte.
- Cuando el **Exp(b)** es mayor de 1 señala que un aumento de la variable independiente, aumenta los *odds* que ocurra el evento (es decir, la variable dependiente).
- Cuando el **Exp(b)** es menor de 1 indica que un aumento de la variable independiente, reduce los odds que ocurra el evento (variable dependiente).

Interpretación de efectos en la regresión logística

- Cuando el *odd ratio* es menor de 1 es conveniente calcular su inversa para poder comparar más fácilmente todos los Exp(b).
- El aumento de una unidad de nivel de ingresos, y si el resto de variables se mantuvieran constantes, aumenta los odds de votar al partido liberal en 1,508 veces más que si no se aumentara esa unidad del nivel de ingresos.
- Si se aumenta la edad en una unidad, y todos los valores de las otras variables del modelo permanecen constantes, los odds de votar al partido liberal aumentan 1,01 veces más que los odds de si no se aumentara la edad en esa unidad.
- Los no creyentes tienen más odds de votar al partido liberal en 1,73 que los creyentes

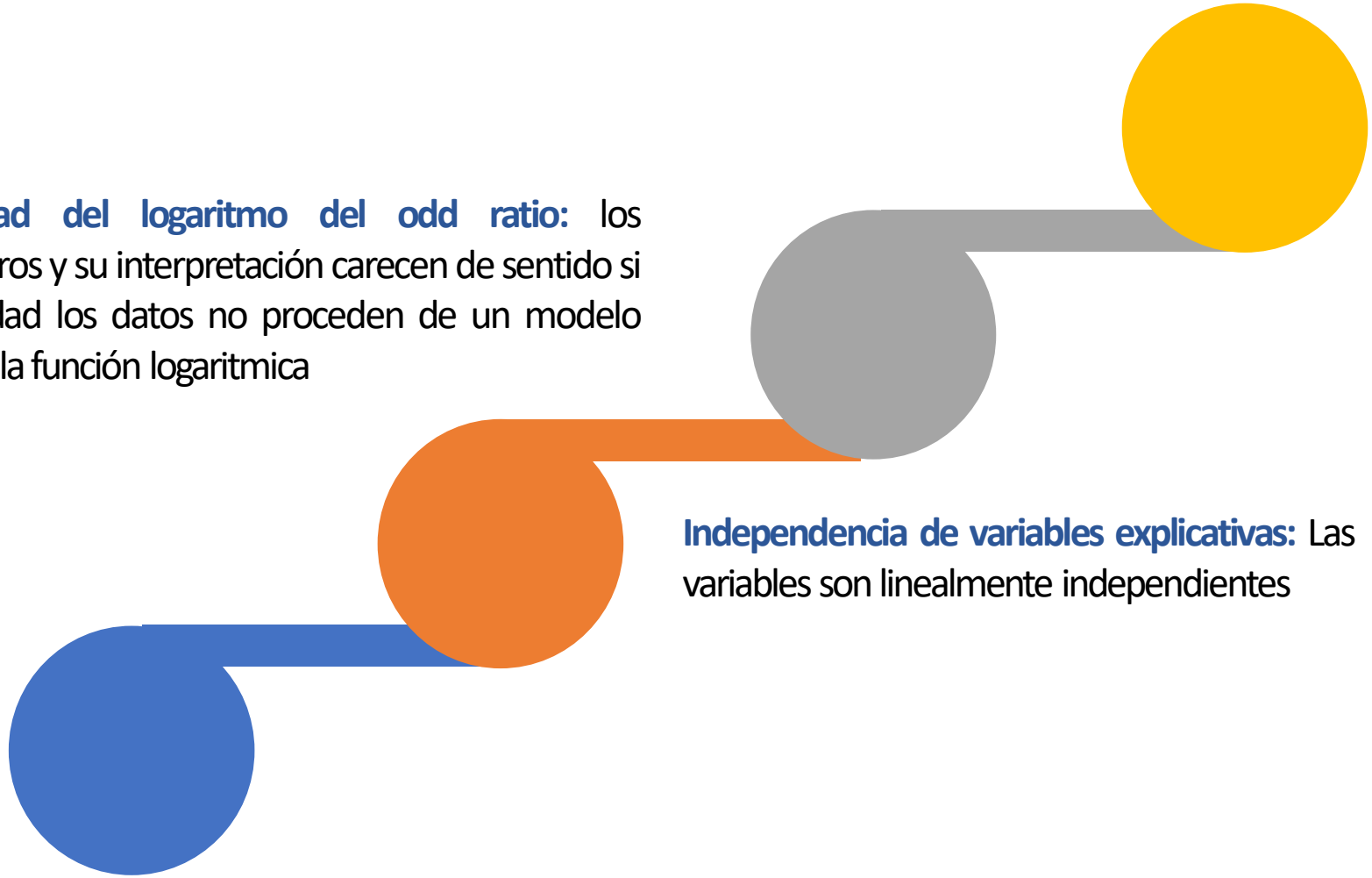
Calidad – Prueba de hipótesis para los parámetros

Esta prueba examina cada una de las variables independientes e indica si tienen o no significado en el modelo.

H_0: La variable no tiene significado o no está asociada ($\beta = 0$)
H_1: La variable tiene significado y está asociada ($\beta \neq 0$)

Supuestos del modelo de Regresión Logística

Linealidad del logaritmo del odd ratio: los parámetros y su interpretación carecen de sentido si en realidad los datos no proceden de un modelo lineal de la función logaritmica



Independencia de variables explicativas: Las variables son linealmente independientes

Métricas de evaluación en Clasificación

Validación

Métricas de Clasificación

F-Score

Lift chart

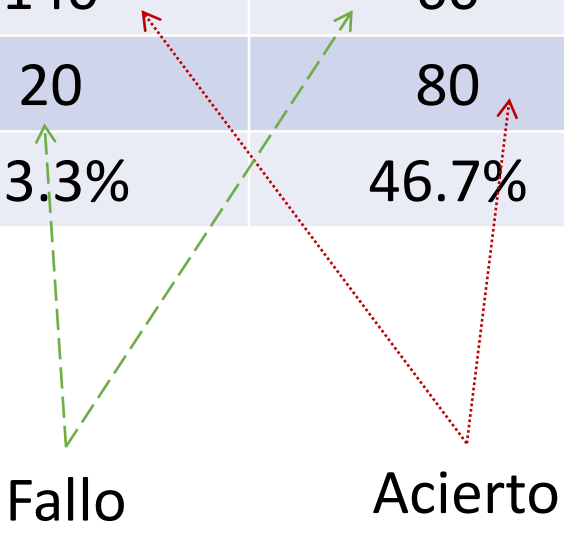
Precisión y Exhaustividad
(Precision and recall)

Tasa de error total
(overall error rate)

KPI: Ganancia Neta

Matriz de Confusión

Observado	Pronosticado	Pronosticado	Pronosticado
	Sí	No	% correcto
Sí	140	60	70%
No	20	80	80%
Global	53.3%	46.7%	73.3%



Matriz de Confusión

Observado	Pronosticado	Pronosticado	Pronosticado
	Sí	No	% correcto
Sí	140	60	70%
No	20	80	80%
Global	53.3%	46.7%	73.3%

Verdaderos positivos (TP)

Falso positivo (FP)

Falso negativo (FN)

Verdaderos negativos (TN)

Precisión y Exhaustividad

- **Precisión / Especificidad (precision):** Verdaderos positivos de todas las predicciones positivas.

- **Exhaustividad / Sensibilidad (recall):** Verdaderos Positivos de todos los que son realmente positivos.

Precisión y Exhaustividad

Observado	Pronosticado	Pronosticado	Pronosticado
	Sí	No	% correcto
Sí	140	60	70%
No	20	80	80%
Global	53.3%	46.7%	73.3%

Verdaderos positivos (TP)

Falso positivo (FP)

Falso negativo (FN)

Verdaderos negativos (TN)

$$Precisión = \frac{TP}{TP + FP} = \frac{140}{140 + 20} = 87.5\%$$

$$Exhaustividad = \frac{TP}{TP + FN} = \frac{140}{140 + 60} = 70\%$$

F-Score

Media Armónica de precisión y exhaustividad

$$F - Score = 2 * \frac{precisión \ * exhaustividad}{precisión + exhaustividad} = \ 77.7\%$$

F_β-Score

Es una generalización del F-Score en la que un valor β pondera el peso (importancia) de la precisión y la exhaustividad.

$$F_\beta - Score = (1 + \beta^2) \times \frac{precisión \times exhaustividad}{(\beta^2 \times precisión) + exhaustividad}$$

- $\beta < 1$ le da mayor importancia a la precisión (más interés en reducir falsos positivos).
- $\beta > 1$ le da mayor peso a la exhaustividad (más interés en reducir falsos negativos).
- Si $\beta = 1$ se obtiene la media armónica de la precisión y la exhaustividad: F1-Score.

Overall Error Rate

Total de falsos positivos y falsos negativos dentro de las predicciones hechas.

$$OER = \frac{FP + FN}{FP + FN + TP + TN} = 26.7\%$$

Métricas para comparar modelos

Matriz de Confusión - Precisión

Limitaciones de la precisión ("accuracy") :

Supongamos un problema con 2 clases:

- 9990 ejemplos de la clase 1
- 10 ejemplos de la clase 2

Si el modelo de clasificación siempre dice que los ejemplos son de la clase 1, su precisión es

9990/10000 = 99.9%

Totalmente engañosa, ya que nunca detectaremos ningún ejemplo de la clase 2.

Métricas para comparar modelos

Curva ROC

- Desarrolladas en los años 50 para analizar señales con ruido: caracterizar el compromiso entre aciertos y falsas alarmas.
- Permiten comparar visualmente distintos modelos de clasificación.
- El área que queda bajo la curva es una medida de la precisión (accuracy) del clasificador:
  - Cuanto más cerca estemos de la diagonal (área cercana a 0.5), menos preciso será el modelo.
  - Un modelo "perfecto" tendrá área 1.

El espacio ROC

- Se normaliza la matriz de confusión por columnas: TPR, FNR TNR, FPR.

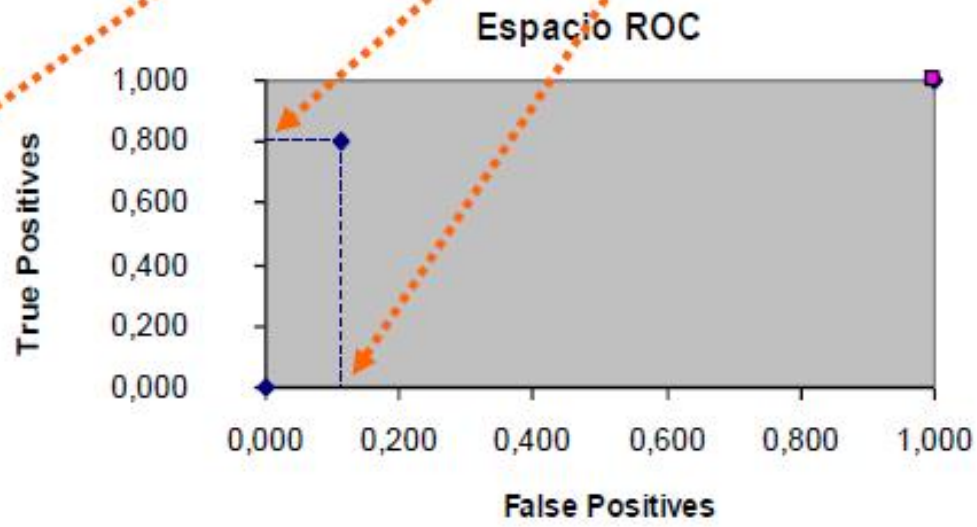
Real

Pred	abrir	cerrar
ABRIR	400	12000
CERRAR	100	87500

TPR= 400 / 500 = 80%
FNR= 100 / 500 = 20%
TNR= 87500 / 99500 = 87,9%
FPR= 12000 / 99500 = 12,1%

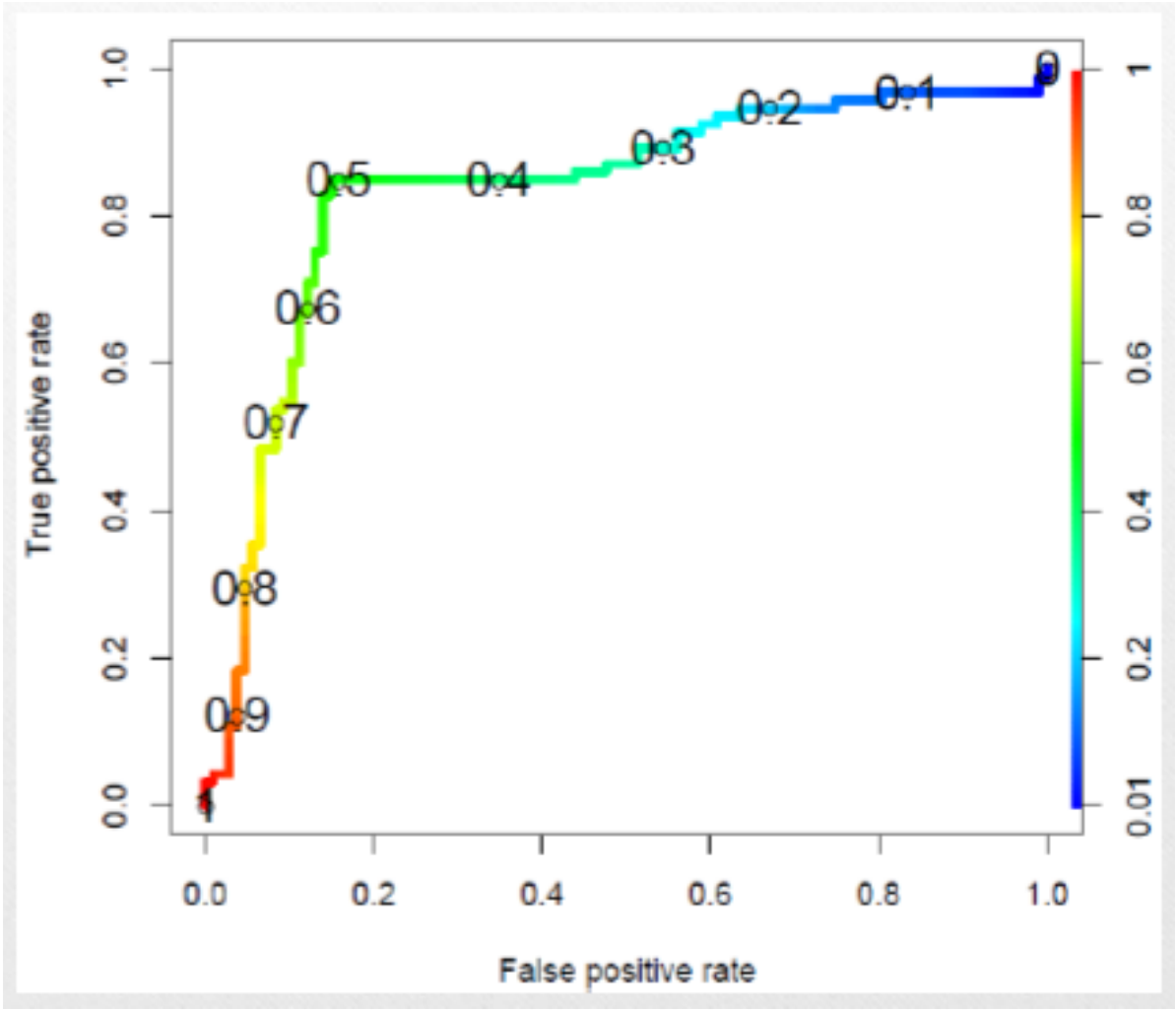
Real

Pred	abrir	cerrar
ABRIR	0,8	0,121
CERRAR	0,2	0,879



Curva ROC

- **Discretización:**
  Seleccionando un valor de corte:
  $f(x) \geq c \rightarrow$ clase = 1
  $f(x) < c \rightarrow$ clase = -1



KPI: Ganancia Neta

Es demostrable que la ganancia neta de un modelo de predicción binaria está dada por:

$$B * E * (\$I - \frac{\$C}{P})$$

B = Número total de posibles éxitos
E = Exhaustividad
P = Precisión
$I = Ingreso por el éxito (descontando otros costos que no sean de contacto)
$C = Costo (o ganancia perdida) por el fracaso

KPI: Ganancia Neta

De la anterior ecuación se puede deducir que para obtener una ganancia neta es necesario y suficiente que:

$$P > \frac{\$C}{\$I}$$

- Aumentar la exhaustividad (con la precisión constante) implica ampliar el volumen de éxitos.
- Aumentar la precisión (con exhaustividad constante) implica lograr una ganancia marginal mayor por reducción de costos.
- La evaluación de costos/beneficios con frecuencia no tiene en cuenta el tiempo (Customer lifetime value) o un posible crecimiento en portafolio de productos.

Otro modelos: https://towardsdatascience.com/model-performance-cost-functions-for-classification-models-a7b1b00ba60

Regresión Logística y temas previos

Para mejorar un proceso de regresión logística se puede pensar en:

- **Feature Selection:** otros métodos para seleccionar las variables.
- **Feature Engineering:** ¿Hay posibilidad de relaciones no lineales? ¿Interacciones? ¿Otras variables?
- **Regularización:** Efectivamente se pueden aplicar Redes elásticas, Lasso o Ridge.

Datos desbalanceados

Datos desbalanceados

Se dice que los datos están desbalanceados si la clase a predecir tiene un bajo porcentaje dentro de los datos (< 10%). La clase a predecir es entonces la menor, y la clase con más casos es la mayor.

¿Cómo balancear?

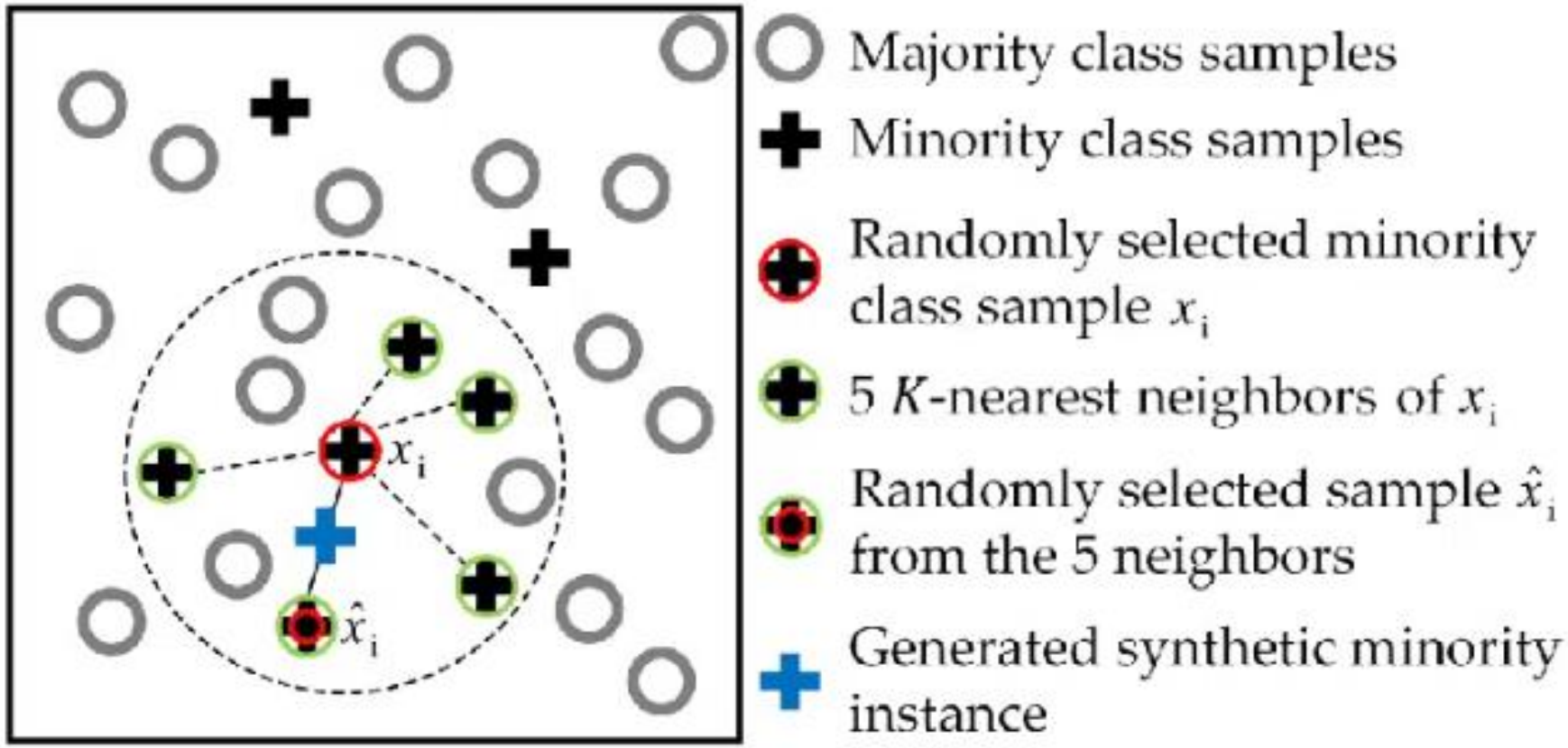
- **Undersampling:** El riesgo es la pérdida de datos.
- **Oversampling:** El riesgo es overfitting.
- **Under or Over mejorado:** Trata de superar las dificultades dadas por estos iniciales.

SMOTE

SMOTE (Synthetic Minority Over-sampling Technique): técnica de sobremuestreo utilizada para equilibrar la distribución de clases de un conjunto de datos mediante la creación de muestras sintéticas de clases minoritarias, interpolando entre las muestras de clases minoritarias existentes.

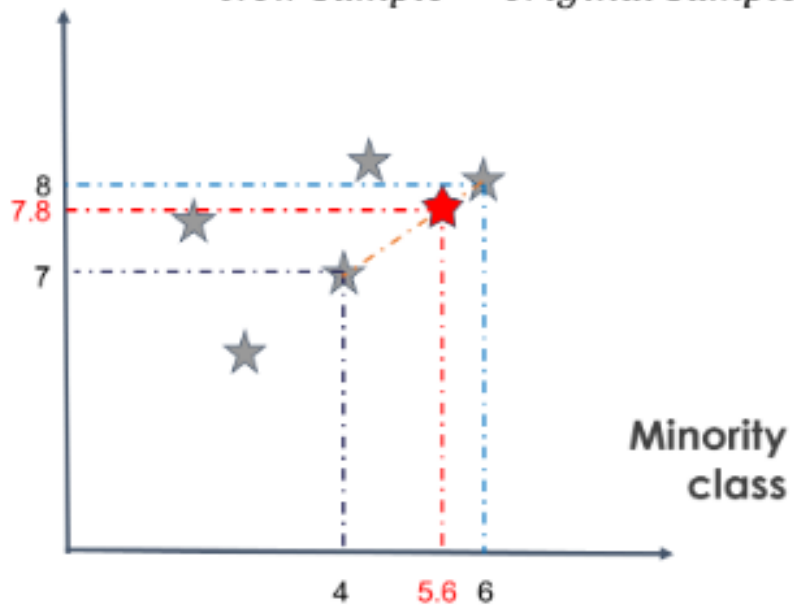
SMOTE funciona creando muestras sintéticas a lo largo de las líneas que unen a los vecinos más cercanos en el espacio de características. La idea básica de SMOTE es crear nuevas muestras de clase minoritaria dando pequeños pasos desde una de las muestras de clase minoritaria hasta uno de sus k vecinos más cercanos en el espacio de características, donde k es un parámetro del algoritmo.

SMOTE


Majority class samples
Minority class samples
Randomly selected minority class sample x_i
5 K-nearest neighbors of x_i
Randomly selected sample $\hat{x}_i$ from the 5 neighbors
Generated synthetic minority instance
x_i
$\hat{x}_i$

SMOTE: numerical example

$$New\ sample = original\ sample - factor * (original\ sample - neighbour)$$



$X_{ori} = (4,7)$

$X_{neig} = (6, 8)$

$$New\ sample = (4,7) - 0.8 * ((4,7) - (6,8))$$

$$New\ sample = (4,7) - 0.8 * ((-2,-1))$$

$$New\ sample = (4,7) - ((-1.6, -0.8))$$

$$New\ sample = (5.6, 7.8)$$

SMOTE – Algoritmo

1. Seleccione una muestra de clase minoritaria del conjunto de datos original.
2. Busque sus k vecinos de clase minoritaria más cercanos en el espacio de características.
3. Seleccione aleatoriamente uno de los k vecinos más cercanos.
4. Genere una nueva muestra sintética interpolando entre la muestra de clase minoritaria seleccionada y el vecino seleccionado aleatoriamente.
5. Repita los pasos 1-4 hasta generar el número deseado de muestras sintéticas.

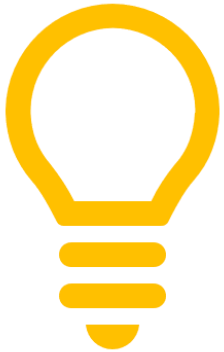
Smote (Over)

Herrera (2013) Imbalanced classification: Common approaches and open problems. 2013 International School on Trends in Computing

Otras técnicas

- https://machinelearningmastery.com/data-sampling-methods-for-imbalanced-classification/

Recomendaciones



Recuerde: Se está cambiando la estructura de los datos.

No es claro a priori qué estrategia es mejor.