

---

# Tomografía Computarizada & Reconstrucción de Imágenes Médicas

---

William A. Gómez Roa

*wa.gomez@javeriana.edu.co*

*Bioingeniería y Ciencia de*

*Datos*

## Abstract

Esta investigación aborda conceptos esenciales en la tomografía computarizada y la obtención de imágenes médicas. Se explora la noción de proyección como una función que cuantifica la radiación X que atraviesa un objeto desde una dirección específica, destacando su relevancia para la reconstrucción tridimensional. La geometría de haz paralelo, donde los rayos X se emiten en líneas paralelas desde una fuente hacia un detector, se analiza como una configuración importante para adquirir información sobre la distribución de atenuación. Se habla sobre el concepto de sinograma, una representación matemática que captura las proyecciones obtenidas, permitiendo visualizar cómo los rayos X interactúan con el objeto desde diferentes ángulos. Finalmente, se explora la transformada de Radón como un puente matemático crucial que relaciona las proyecciones bidimensionales con la estructura interna tridimensional del objeto, subrayando su relación con el sinograma y su papel en la reconstrucción de imágenes médicas.

**Palabras clave:** Tomografía computarizada, Proyección, Geometría de haz paralelo, Sinograma, Transformada de Radón, Imágenes médicas, Reconstrucción .

1. ¿Qué es una proyección (proyección de la distribución del coeficiente de atenuación lineal)? cómo se puede calcular para un ángulo específico?

Cuando los rayos X inciden en el cuerpo humano, parte de la radiación incidente es absorbida o dispersada y una considerable parte se transmite a través del cuerpo [1]. Una **proyección** es una función de la cantidad de radiación X que atraviesa a un objeto desde una dirección específica [2].

La proyección es una representación de cómo la radiación X se debilita al atravesar el objeto desde una dirección determinada. Para obtener una imagen detallada del interior del objeto, se realizan mediciones de proyección desde múltiples ángulos alrededor del objeto. Cada medición proporciona información sobre cómo la radiación X es atenuada por los diferentes materiales dentro del objeto en esa dirección. La información de todas estas mediciones se utiliza luego para reconstruir una imagen tridimensional del objeto, permitiendo vi-

sualizar sus estructuras internas y propiedades de atenuación [2].

El **coeficiente de atenuación** es una función que describe cómo los rayos X, al viajar a lo largo de una línea desde la fuente a través del objeto hasta un detector de rayos X, disminuyen su intensidad debido a la interacción con el material en esa línea [3]. La ley de Beer establece que la cantidad de rayos X en un punto específico se reduce proporcionalmente, y la constante de proporcionalidad se llama *coeficiente de atenuación lineal*. Si los rayos X son monocromáticos, es decir, tienen una única frecuencia, el coeficiente de atenuación está relacionado con la densidad del objeto [3].

Al realizar una variación en la posición de la fuente de rayos X, se pueden medir las **integrales de línea** del coeficiente de atenuación a lo largo de diferentes líneas. Si desplazamos tanto la fuente como el plano de la película alrededor de un círculo que rodea el material absorbente, y llevamos a cabo las mediciones mencionadas para cada posición de la fuente, entonces podemos obtener las integrales de línea del coeficiente de atenuación para todas las líneas que atraviesan el objeto [3].

La integral de línea se refiere a la acumulación de los valores del coeficiente de atenuación a medida que un rayo de rayos X atraviesa un objeto. Cada punto a lo largo de la trayectoria del rayo contribuye con su valor al resultado total de la integral de línea.

En general, se afirma que:

- El conjunto de todas las integrales de línea para una dirección específica del haz de rayos X es una "proyección" unidimensional (1D) de la sección bidimensional del objeto [4].
- El conjunto de todas las proyecciones para todas las direcciones del haz de rayos X es la transformada de Radón bidimensional (2D) del objeto, y la reconstrucción del

objeto a partir de estas proyecciones es una implementación de la transformada de Radón inversa bidimensional (2D) [4].

2. ¿Qué quiere decir "geometría de haz paralelo" (o parallel-beam geometry)? ¿qué representa?

La **geometría de haz paralelo** se refiere a una configuración de escaneo utilizada en la tomografía de rayos X y otras técnicas de imagen médica, que se muestra en la Figura 1. En esta geometría, se emiten múltiples rayos de rayos X desde una fuente en una dirección específica y paralela entre sí. Estos rayos atraviesan el objeto de interés y se detectan en un detector colocado en la misma dirección, pero en el lado opuesto del objeto [5].

En otras palabras, en la geometría de haz paralelo, los rayos de rayos X son emitidos en líneas paralelas desde una fuente hacia un detector, y esta configuración se repite para diferentes direcciones de emisión. Cada dirección de emisión y detección resulta en una *proyección* de cómo los rayos de rayos X interactúan con el objeto en esa dirección específica.

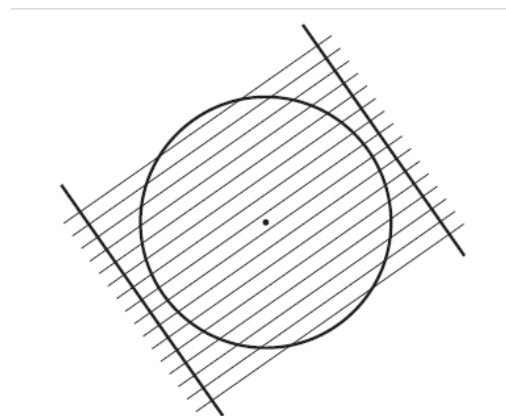


Figure 1. X-ray CT. Parallel beam geometry.

Figure 1: Geometría de haz paralelo para escaneo de imágenes médicas [5].

Es una configuración de muestreo en la transformada de Radón en la que se discretiza dicha transformada en las variables  $(p, s)$  del espacio de coordenadas. El término "geometría de haz paralelo" proviene de la característica de que, al mantener fijo el valor de  $p$  y variar  $s$ , se obtiene una colección de líneas paralelas en el espacio.

En esta configuración, se utiliza una fuente de rayos X que emite rayos en direcciones paralelas y se mide la integral de una función  $f$  a lo largo de las líneas de rayos resultantes. Esta geometría es especialmente utilizada en escáneres médicos que emplean una fuente de rayos X que rodea al objeto en estudio. El término "geometría de haz paralelo" se refiere a la disposición en la que los rayos X se emiten en líneas paralelas desde la fuente hacia el objeto y luego son detectados en el detector.

Esta configuración de muestreo es fundamental para la tomografía computarizada, ya que proporciona información valiosa sobre la distribución de propiedades de atenuación del objeto en diferentes direcciones. En contraste, en la "geometría de haz de abanico" (fan-beam geometry), se utiliza una fuente de rayos X que se mueve alrededor del objeto, lo que da como resultado líneas de rayos divergentes. Para describir este tipo de recolección de datos, se introduce una transformada de rayos X de haz divergente.

En resumen, la geometría de haz paralelo es una configuración de muestreo en la transformada de Radón en la que los rayos X se emiten en líneas paralelas, lo que permite medir las integrales de una función a lo largo de líneas paralelas en diferentes direcciones, siendo un concepto fundamental en la obtención de imágenes tomográficas

3. ¿Qué es un sinograma? ¿Qué representa? ¿cómo se relaciona con los dos conceptos anteriores?

Un **sinograma** es una representación

matemática que captura la información de proyección obtenida en la tomografía computarizada. En esencia, un sinograma es una matriz en la que las filas corresponden a los ángulos de proyección y las columnas a las posiciones a lo largo del detector. Cada entrada en el sinograma representa la suma de las atenuaciones a lo largo de una línea de rayos X en un ángulo específico, lo que proporciona una vista integral de cómo los rayos X interactúan con el objeto [6].

La atenuación sigue una ley exponencial en función de la densidad y el coeficiente de atenuación lineal del material. Dado esto, al medir las atenuaciones en diferentes puntos a lo largo de la línea de rayos X en diferentes ángulos, se obtiene una señal que oscila, creando una apariencia sinusoidal en el sinograma como se representa en la Figura 2.

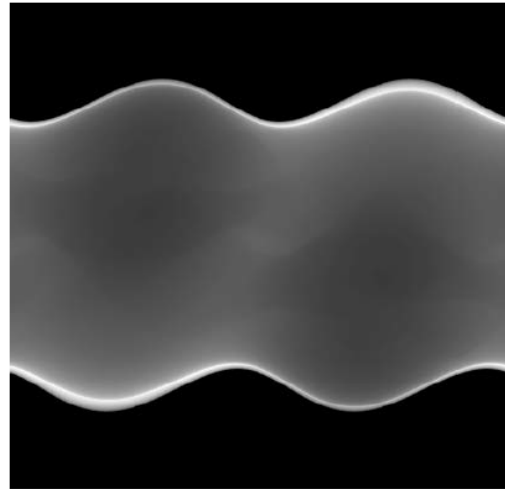


Figure 2: Representación Gráfica del Sinograma Generado por la Transformada de Radon[1] .

En términos más técnicos, es un diagrama en escala de grises en el que la densidad de la imagen en ciertas coordenadas se relaciona con los valores medidos de proyección [5]. En otras palabras, cada punto en el sinograma refleja la respuesta medida de la radiación X al atravesar un objeto desde un ángulo y una dirección es-

pecíficos.

En la geometría de haz paralelo, que es comúnmente utilizada en la TC, se emiten rayos X en direcciones paralelas desde una fuente hacia un detector. Cada curva sinusoidal en el sinograma corresponde a una proyección de rayos X a un ángulo particular [7].

En resumen, un sinograma es una matriz que registra las proyecciones de rayos X en la tomografía de haz paralelo. Representa cómo los rayos X se debilitan al atravesar un objeto desde diferentes ángulos y posiciones en el detector.

4. ¿Qué es la transformada de Radón? ¿Qué propiedades tiene? ¿Cómo se relaciona con los conceptos anteriores?

La transformada de Radón es una herramienta matemática fundamental en el campo de la tomografía y la obtención de imágenes médicas. Su relevancia radica en su capacidad para relacionar la distribución interna de propiedades de un objeto tridimensional con las proyecciones bidimensionales obtenidas mediante la emisión de rayos X desde diferentes ángulos. Estas proyecciones son esenciales para la creación de imágenes detalladas y precisas de las estructuras internas del objeto en estudio [5, 3, 4].

La transformada de Radon, en mis palabras, es la reconstrucción o transformación de un conjunto de datos que están en un espacio determinado a su hiperplano correspondiente, generando una proyección. En el caso de imágenes en 2D, esta proyección ocurre en una línea (1D). En el caso de la tomografía computarizada, los datos tomográficos capturados o el conjunto de proyecciones representan la proyección del hiperplano (la línea) que reconstruye la imagen original, es decir, la reconstrucción completa de la densidad del objeto. De esta forma, la transformada inversa de Radon nos permite llegar a la imagen deseada utilizando los datos de las proyecciones de rayos X. Matemáticamente, se hace uso de la trans-

formada de Fourier para llegar a este resultado porque se hace más sencillo ??.

A través de algoritmos de reconstrucción, como la *retroproyección filtrada*, el sinograma se convierte en una imagen bidimensional que representa la distribución interna de propiedades del objeto [8].

En resumen, la transformada de Radón es la piedra angular para la obtención de imágenes a partir de proyecciones. Su relación con el sinograma subraya cómo las proyecciones bidimensionales contienen la información clave necesaria para la reconstrucción de la estructura interna tridimensional del objeto. Mediante la aplicación de la transformada de Radón y algoritmos de inversión, se logra una poderosa herramienta que ha revolucionado la obtención de imágenes médicas y científicas [5, 3, 4].

## References

- [1] C. L. Epstein, *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Pearson Education, Inc., 2nd ed., 2003. SIAM edition: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [2] K. K. Shung, M. B. Smith, and B. M. W. Tsui, *Principles of Medical Imaging*. Oxford University Press, 2014.
- [3] G. Olafsson and E. T. Quinto, *The Radon Transform, Inverse Problems, and Tomography*, vol. 63 of *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2006. AMS Short Course Lecture Notes.
- [4] H. H. Barrett, "The radon transform and its applications," *Progress in Optics XXI*, vol. 111, pp. E. Wolf, Elsevier Science Publishers B.V., 1984.
- [5] P. Kuchment, *The Radon Transform and Medical Imaging*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics ; 85.

- [6] T. Hansen, E. Y. Sidky, and X. Pan, “Sinogram completion for sparse-view ct,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 62, no. 13, p. 5130, 2017.
- [7] A. Palmer, J. Osmond, D. McNally, and P. Wells, “Filtered backprojection for random and non-random data,” *Physics in Medicine & Biology*, vol. 50, no. 18, p. 4375, 2005.
- [8] R. Chartrand and E. Y. Sidky, “Mathematical foundations of the sinogram,” *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2016, 2016.