Inferencia Estadística

Marisol García Peña

Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana

Bogotá, 2022

Estimación puntual (cont.)

Información de Fisher para una muestra aleatoria

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad o de probabilidad $f(x;\theta)$, la información de Fisher en este caso está dada por

$$I_F(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_{\mathbf{x}}(X;\theta)\right]^2\right\}$$

Se existe $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{\mathbf{x}}(X;\theta), \forall\theta$, entonces

$$I_F(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f_{\mathbf{x}}(X;\theta)\right]$$

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución Poisson con parámetro $\theta > 0$. Encuentre la información de Fisher. $P[X = x] = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \forall x = 0, 1, \ldots$

Estadística suficente

- Concepto introducido por Fisher 1922.
- Facilitar la búsqueda de un buen estimador.
- Resumir la información dada por los datos sin pérdida de información.
- Encontrar una función de la muestra que proporcione tanta información sobre θ como la misma muestra.
- Esa función $\Longrightarrow$ suficiente para propósitos de estimación $\Longrightarrow$ estadística suficiente.

Estimación puntual (cont.)

Estadística suficiente

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(\bullet; \theta)$, donde θ puede ser un vector. La estadística $S(X_1, \ldots, X_n)$ es una estadística suficiente si y sólo si la distribución condicional de $X_1, \ldots, X_n$ dado $S = s$ no depende de θ. Es decir, si

$$f_{x|S}(x|S = s) \text{ no depende de } \theta$$

Un estimador de θ que es función de una estadística suficiente para θ es un estimador suficiente de θ.

Ejemplo

Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro θ, muestre que $S(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo

Sea X_1, X_2 una muestra aleatoria de una Poisson con parámetro θ, muestre que $S(X_1, X_2) = X_1 + 2X_2$ no es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una Bernoulli con parámetro θ, muestre que $S(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística suficiente para θ.

Estimación puntual (cont.)

Estadística suficiente

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una densidad $f(\bullet, \theta)$. Una estadística $S(X_1, \ldots, X_n)$ es estadística suficiente si y sólo si la distribución condicional de T dado S no depende de θ, para cualquier estadística $T(X_1, \ldots, X_n)$.

- Definición equivalente a la anterior.
- Útil para mostrar que una estadística en particular no es suficiente.
- Para mostrar que T' no es suficiente $\Longrightarrow$ encontrar otra estadística T para la cual la distribución condicional de T dado T' depende de θ.

Estadísticas conjuntamente suficientes

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de densidad $f(\bullet, \theta)$. Las estadísticas $S_1, \ldots, S_r$ son definidas como conjuntamente suficientes si y sólo si la distribución condicional de $X_1, \ldots, X_n$ dado $S_1 = s_1, \ldots, S_r = s_r$ no depende de θ.

θ puede ser un vector de parámetros.

Teorema

Si $S_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, S_r(X_1, \ldots, X_n)$ *es un conjunto de estadísticas conjuntamente suficientes, entonces cualquier conjunto de funciones uno a uno o transformaciones de* $S_1, \ldots, S_r$ *también es conjuntamente suficiente.*

Ejemplo

- Si $\sum X_i$ y $\sum X_i^2$ son conjuntamente suficientes.
- Entonces $\overline{X}$ y $\sum (X_i - \overline{X})^2 = \sum X_i^2 - n\overline{X}^2$ también son conjuntamente suficientes.

Criterio de factorización (Neyman-Fisher)

Teorema

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una densidad $f(\bullet, \theta)$, donde el parámetro θ puede ser un vector. La estadística $S(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente si y sólo si la densidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, $\prod_{i=1}^{n} f(\bullet, \theta)$, puede factorizarse como

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = g(s(x_1, \ldots, x_n), \theta)h(x_1, \ldots, x_n) = g(s, \theta)h(\boldsymbol{x})$$

donde la función $h(x_1, \ldots, x_n)$ es no negativa y no depende de θ y la función $g(s(x_1, \ldots, x_n), \theta)$ es no negativa y depende de θ y del valor de la estadística s.

Estimación puntual (cont.)

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Poisson con parámetro $\theta > 0$. Encuentre una estadística suficiente para θ.

$$X \sim Pois(\theta) \Longrightarrow P[X = x] = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$$

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = x_i] = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!}$$

$$= \underbrace{e^{-n\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{g(s,\theta)} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}}_{h(x)}$$

Entonces $S(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística suficiente para θ.

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre una estadística suficiente para θ.

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con función de densidad

$$f(x, \theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \theta < x < \infty \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre una estadística suficiente para θ.

Estimación puntual (cont.)

Ejemplo

Sea $Y_1, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria con $f(y_i, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y_i}{\theta}}$, $0 \leq y_i \leq \infty, \theta > 0$. Muestre que $\overline{Y}$ es una estadística suficiente para θ.

Estimación puntual (cont.)

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población geométrica con parámetro π. Muestre que $\overline{X}$ es una estadística suficiente para π. $P[X_i = x_i] = \pi(1-\pi)^{x-1}, x_i \geq 1$

Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población $U(0, \theta)$. $f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x < \theta, \theta > 0$. Muestre que $X_{(n)} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ es una estadística suficiente para θ.