Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Matemáticas
Inferencia Estadística
Taller 3

Marisol García Peña

1. Considere una muestra aleatoria de tamaño n, encuentre las estadísticas suficientes para los parámetros de las siguinetes distribuciones:
   (a) $Beta(\alpha, \beta)$ donde: i. ambos son desconocidos, ii. solamente α desconocido, iii. solamente β desconocido.
   (b) $Gamma(\alpha, \beta)$ bajo las mismas condiciones i., ii. y iii. del item 1a.
   (c) $f(x) = \exp\{-x + \theta\} I_{(x>0)}$.
   (d) $f(x; \mu, \sigma^2) = \left[\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\right] \exp\left\{\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right)[\log(x) - \mu]^2\right\} I_{(x>0)}$.
   (e) $f(x; \theta_1, \theta) = (1-\theta_1)(\theta_1)^{x-\theta} I_{\{\theta,\theta+1,\ldots\}}(x)$.
2. Encuentre las estadísticas suficientes minimales para
   (a) $U(0, \theta)$.
   (b) $BinNeg(1, \theta)$.
3. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes iid con distribución $N(\theta, \theta^2)$. Obtenga una estadística suficiente no trivial para θ.
4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con función de densidad $f(x; \theta) = (1 + \theta)x^\theta$ para $0 \leq x \leq 1$. Obtenga una estadística suficiente minimal para θ.
5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con distribución geométrica cuya función de probabilidad está dada por $f(x; \theta) = (1-\theta)^{x-1}\theta I_{\{1,2,\ldots\}}(x)$. Muestre que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ es una estadística suficiente minimal para θ $(\theta > 0)$.
6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con distribución $G(\alpha, \beta)$ con α y β desconocidos. Muestre que $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)\right)$ es una estadística suficiente y completa para (α, β). La función de densidad de una $G(\alpha, \beta)$ está dada por $f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, x, \alpha, \beta > 0$
7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con distribución $N(\theta, \theta^2), \theta > 0$. Muestre que $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ es una estadística suficiente para θ, pero no es completa. Sugerencia, considere $U(X) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - (n+1)\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

8. Sean X_1, X_2 una muestra aleatoria de tamaño 2 de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Muestre que (X_1, X_2) es una estadística suficiente pero completa.

9. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución Poisson truncada, o sea, $P[X = x] = \dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{x!(1-e^{-\mu})} I_{\{1,2,\ldots\}}(x), \mu > 0$.

   (a) Muestre que la distribución de la Poisson truncada es miembro de la familia exponencial.

   (b) Encuentre una estadística suficiente o completa para μ.

10. Suponga que $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ son variables aleatorias independientes y que $X_i \sim N(\mu, \sigma_1^2), (1 \leq i \leq n)$ y $Y_i \sim N(\mu, \sigma_2^2), (1 \leq i \leq m)$, donde $-\infty < \mu < +\infty, \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$ desconocidos. Muestre que la estadística $T = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{i=1}^{m} Y_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i^2\right)$ es una estadística suficiente, pero no es completa. Sugerencia, considere $U(T) = \overline{X} - \overline{Y}$.

11. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n con función de densidad de probabilidad $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x), \theta > 0$. Encuentre una estadística suficiente y completa para θ.

12. Encuentre las estadísticas suficientes y completas para los parámetros de las siguientes distribuciones:

    (a) $f(x;\theta) = \left(\dfrac{1}{6\theta^4}\right) x^3 \exp\left[-\dfrac{x}{\theta}\right]; x > 0, \theta > 0.$

    (b) $f(x;\theta,\gamma) = \left(\dfrac{\gamma}{\theta}\right) x^{\gamma-1} \exp\left[-\dfrac{x^\gamma}{\theta}\right]; x > 0, \theta > 0, \gamma > 0$ conocido.

13. Muestre que las siguientes distribuciones pertenecen a la familia exponencial de la forma canónica, identificando μ y $V(\mu)$.

    (a) En el caso de $Y \sim Poiss(\mu)$.

    (b) Sea $Y \sim Bin(n, \mu)$ donde $0 < \mu < 1$, $y = 0, 1, 2, \ldots, n$. Hacer el siguiente cambio de variable $Y^* = \frac{Y}{n}$, asuma que $nY^* \sim Bin(n, \mu)$ cuya densidad puede ser escrita como $\binom{n}{ny^*} \mu^{ny^*}(1-\mu)^{n-ny^*}$. Muestre que de esta forma la binomial pertenece a la familia exponencial de forma canónica.

    (c) Sea Y una variable aleatoria con distribución normal inversa de media μ y parámetro de forma ϕ, cuya densidad está dada por: $f(y;\mu,\phi) = \dfrac{\phi^{1/2}}{\sqrt{2\pi y^3}} \exp\left\{-\dfrac{\phi(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right\}$ donde $y > 0, \mu > 0$.