# Inferencia Estadística

Marisol García Peña

Departamento de Matemáticas
Pontificia Universidad Javeriana

Bogotá, 2022

### Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$, donde $\Theta = \{\theta; \theta > 0\}$. Probar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

## Prueba uniformemente más potente

Una prueba $\Upsilon^*$ de $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta - \Theta_0$ se define como la prueba uniformemente más potente de tamaño $\alpha$ si y sólo si:

1. $\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} \pi_{\Upsilon^*}(\theta) = \alpha$.
2. $\pi_{\Upsilon^*}(\theta) \geq \pi_{\Upsilon}(\theta)$ para todo $\theta \in \Theta - \Theta_0$ y para cualquier prueba $\Upsilon$ con tamaño menor o igual a $\alpha$.

# Pruebas de hipótesis (cont.)

- La prueba $\Upsilon^*$ es uniformemente más potente de tamaño $\alpha$ si tiene tamaño $\alpha$ y si entre todas las pruebas de tamaño menor o igual a $\alpha$ tiene la mayor potencia para todos los valores alternativos de $\theta$.
- "Uniformemente" $\Longrightarrow$ "todos" los valores alternativos de $\theta$.
- No siempre existe una prueba uniformemente más potente para todos los problemas de prueba.

### Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\theta)}$ donde $\Theta = \{\theta : \theta \geq \theta_0\}$. Encontrar una prueba uniformemente más potente de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

### Teorema

*Sea* $X_1, \ldots, X_n$ *una muestra aleatoria de* $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$ *donde* $\Theta$ *es algún intervalo. Suponiendo que* $f(x;\theta) = a(\theta)b(x)\exp[c(\theta)d(x)]$ *y siendo* $t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i)$.

1. *Si* $c(\theta)$ *es una función monótona creciente en* $\theta$ *y si existe* $k^*$ *tal que* $P[t(X_1, \ldots, X_n) > k^*] = \alpha$, *entonces la prueba* $\Upsilon^*$ *con región crítica* $C^* = \{(x_1, \ldots, x_n) : t(x_1, \ldots, x_n) > k^*\}$ *es una prueba uniformemente más potente de tamaño* $\alpha$ *de* $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *vs* $H_1 : \theta > \theta_0$ *o* $H_0 : \theta = \theta_0$ *vs* $H_1 : \theta > \theta_0$.

2. *Si* $c(\theta)$ *es una función monótona decreciente en* $\theta$ *y si existe* $k^*$ *tal que* $P[t(X_1, \ldots, X_n) < k^*] = \alpha$, *entonces la prueba* $\Upsilon^*$ *con región crítica* $C^* = \{(x_1, \ldots, x_n) : t(x_1, \ldots, x_n) < k^*\}$ *es una prueba uniformemente más potente de tamaño* $\alpha$ *de* $H_0 : \theta \leq \theta_0$ *vs* $H_1 : \theta > \theta_0$ *o* $H_0 : \theta = \theta_0$ *vs* $H_1 : \theta > \theta_0$.

**Ejemplo**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$, donde $\Theta = \{\theta : \theta > 0\}$. Probar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

$$\begin{aligned} f(x;\theta) &= \theta e^{-\theta x} \\ &= \theta I_{(0,\infty)}(x) \exp(-\theta x) \\ &= a(\theta) b(x) \exp[c(\theta) d(x)] \end{aligned}$$

entonces $t(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ y $c(\theta) = -\theta$. $c(\theta)$ es una función monótona decreciente, luego por (2) del teorema anterior, una prueba uniformemente más potente es: Rechazar $H_0$ si y sólo si $\sum x_i < k^*$, donde $k^*$ se obtiene de la solución de

$$\alpha = P[\sum X_i < k^*] = \int_0^{k^*} \frac{1}{\Gamma(n)} \theta_0^n u^{n-1} e^{-\theta_0 u} du$$

# Pruebas de hipótesis (cont.)

## Razón de verosimilitud monótona

La familia de densidades $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta, \Theta \text{ un intervalo}\}$ tiene una razón de verosimilitud monótona si existe una estadística $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ tal que la razón $\frac{L(\theta';x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta'';x_1,\ldots,x_n)}$ es una función no creciente de $t(x_1, \ldots, x_n)$ para cada $\theta' < \theta''$ o una función no decreciente de $t(x_1, \ldots, x_n)$ para cada $\theta' < \theta''$.

La razón de verosimilitud monótona no es una razón de verosimilitud generalizada, es una razón de dos funciones de verosimilitud.

### Ejemplo

Si $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\} = \{\theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x) : \theta > 0\}$, entonces

$$\frac{L(\theta'; x_1, \ldots, x_n)}{L(\theta''; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{(\theta')^n \exp(-\theta' \sum x_i)}{(\theta'')^n \exp(-\theta'' \sum x_i)} = \left(\frac{\theta'}{\theta''}\right)^n \exp\left[-(\theta' - \theta'') \sum x_i\right]$$

que es una función monótona creciente en $\sum x_i$.

## Ejemplo

Si $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\} = \{(1/\theta) I_{(0,\theta)}(x) : \theta > 0\}$, entonces

$$\frac{L(\theta'; x_1, \ldots, x_n)}{L(\theta''; x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\theta'}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta')}(x_i)}{\left(\frac{1}{\theta''}\right)^n \prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta'')}(x_i)} = \frac{(1/\theta')^n I_{(0,\theta')}(y_n)}{(1/\theta'')^n I_{(0,\theta'')}(y_n)}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)^n, & 0 < y_n < \theta' \\ 0, & \theta' \leq y_n \leq \theta'' \end{cases}$$

que es una función monótona no creciente en $y_n = \text{máx}[x_1, \ldots, x_n]$. $y_n$ no puede estar por fuera del intervalo $(0, \theta'')$ cuando $\theta$ es $\theta'$ o $\theta''$.

### Teorema

*Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\theta)$, donde $\Theta$ es un intervalo. Se asume que la familia de de densidades $\{f(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$ tiene razón de verosimilitud monótona en la estadística $t(X_1, \ldots, X_n)$:*

1. *Si la razón de verosimilitud monótona es no decreciente en $t(x_1, \ldots, x_n)$ y si $k^*$ es tal que $P[t(X_1, \ldots, X_n) < k^*] = \alpha$ entonces la prueba correspondiente a la región crítica $C^* = \{(x_1, \ldots, x_n) : t(x_1, \ldots, x_n) < k^*\}$ es una prueba uniformemente más potente de tamaño $\alpha$ de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.*

2. *Si la razón de verosimilitud monótona es no creciente en $t(x_1, \ldots, x_n)$ y si $k^*$ es tal que $P[t(X_1, \ldots, X_n) > k^*] = \alpha$ entonces la prueba correspondiente a la región crítica $C^* = \{(x_1, \ldots, x_n) : t(x_1, \ldots, x_n) > k^*\}$ es una prueba uniformemente más potente de tamaño $\alpha$ de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.*

### Ejemplo

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $f(x;\theta) = (1/\theta)I_{(0,\theta)}(x)$, donde $\theta > 0$. Pruebe $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$.

# Pruebas de hipótesis (cont.)

- La hipótesis nula se planteó $\theta \leq \theta_0$ en ambos teoremas, si se plantea $\theta \geq \theta_0$, los teoremas continuan válidos proporcionando las desigualdades que definen la regiones críticas.
- Los teoremas solo consideran hipótesis unilaterales.
- La prueba uniformemente más potente existe para hipótesis unilaterales si la densidad muestreada tiene una razón de verosimilitud monótona en alguna estadística.
- En muchos problemas de pruebas puede no existir la prueba uniformemente más potente.
- Un método de restingir la clase de pruebas es encontrar una prueba óptima entre la pruebas insesgadas.

# Pruebas de hipótesis (cont.)

## Pruebas insesgadas

Una prueba $\Upsilon$ de la hipótesis nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ vs $H_1 : \theta \in \Theta_1$ es una prueba insesgada si y sólo si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \pi_T(\theta) \leq \inf_{\theta \in \Theta_1} \pi_T(\theta)$$

- En una prueba insesgada la probabilidad de rechazar $H_0$ cuando es falsa es al menos tan grande como la probabilidad de rechazar $H_0$ cuando es verdadera.
- Esta restricción es razonable en una prueba.
- Si entre la clase restringida de pruebas, existe una prueba uniformemente más potente, será la prueba insesgada uniformemente más potente.

# Pruebas de hipótesis (cont.)

- Principio de la razón de verosimilitud generalizada.
- Método del intervalo de confianza.
- Por ejemplo, $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$, se calcula el IC para $\theta$ y si el IC contiene a $\theta_0$, no rechazar $H_0$ y sino lo contiene, rechazar $H_0$.
- Si el IC tiene un coeficiente de confianza $\gamma = 1 - \alpha \Longrightarrow$ prueba tendrá tamaño $1 - \gamma = \alpha$.

## Técnica intuitiva para obtener pruebas

- Encuentre una estadística que se comporte diferente bajo las dos hipótesis y utilice esa diferencia de comportamiento para diseñar la prueba.
- Por ejemplo, considere probar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$, donde la muestra proviene de una $N(\theta, 1)$.
- $\overline{X} \sim N(\theta, 1/n)$, $\overline{X}$ será más pequeña cuando $H_0$ es verdadera que cuando $H_0$ es falsa. Comportamiento diferente bajo as dos hipótesis.
- Una prueba razonable será: Rechazar $H_0$ para $\overline{X}$ grande, es decir, rechazar $H_0$ si $\overline{X} > k$, donde $k$ es determinada al fijar el tamaño de la prueba, $\alpha$.
- ¿Cuál estadística? $\Longrightarrow$ estadística suficiente, un buen estimador (máxima verosimilitud).

**Ejemplo**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución Poisson con media $\theta$. Encontrar una prueba de que la media es un valor fijo $\theta_0$, es decir, probar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

- Si $f(x;\theta)$ es una densidad con solo un parámetro $\Longrightarrow$ estimador de máxima verosimilitud puede ser usado para para construir una prueba y la potencia de la prueba comparada con la función potencia ideal para una prueba de tamaño $\alpha$.

- La siguiente forma de la prueba puede ser usada en algunas densidades, rechazar $H_0$ si $\widehat{\theta}$ no está en un intervalo, $(c_1, c_2)$ y no rechazar $H_0$ si $\widehat{\theta}$ está en el intervalo.

- $c_1$ y $c_2$ se escogen de tal manera que la prueba tenga tamaño $\alpha$.

$$\int_{c_1}^{c_2} f(\widehat{\theta};\theta_1)d\widehat{\theta} = \int_{c_1}^{c_2} f(\widehat{\theta};\theta_2)d\widehat{\theta} = 1-\alpha$$

- $f(\widehat{\theta};\theta_1)$ es la densidad de $\widehat{\Theta}$ cuando $\theta$ es el parámetro.

# Pruebas de hipótesis (cont.)

- La función potencia de la prueba es

$$\pi(\theta) = 1 - \int_{c_1}^{c_2} f(\widehat{\theta}; \theta) d\widehat{\theta} \qquad \theta \in \Theta$$

  Está función se compara con la función potencia ideal, si no se desvia "mucho" de la ideal, se puede tolerar, la prueba es útil aun sin ser la prueba uniformemente más potente.

**Ejemplo**

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de $\phi_{\theta,1}(x)$. Pruebe $H_0 : 1 \leq \theta \leq 2$ vs $H_1 : \theta < 1$ o $\theta > 2$.