$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} 1\!\!1_{]t;\infty[}\left(T_x\right)$$

ressources-actuarielles.net

Construire un générateur de scénarios économiques en assurance

Introduction

Version 2.9

Mars 2015

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

Préambule

Pour calculer les *best estimate* des contrats d'épargne et le SCR dans le cadre du modèle standard de Solvabilité 2 il faut être capable :

- de projeter les prix des différents actifs dans le futur ;

- de recalculer la variation de prix d'un actif à la date 0 lors d'un choc appliqué à un facteur de risque sous-jacent (valeur des actions, niveau des taux, *etc*.).

Pour les actifs de base (actions, obligations souveraines et privées essentiellement) le générateur de scénarios économiques (GSE) apporte la réponse au premier point et les calculs du second point sont immédiats.

Pour les actifs dérivés (obligations convertibles, options diverses, *etc*.) il faut en toute rigueur disposer de formules fermées pour recalculer des prix en fonction du niveau des facteurs de risque sous-jacent (action, taux, crédit, liquidité) à toute date (en 0 et dans le futur).

Préambule

Dans le cadre du modèle interne, une fois déterminées les provisions, il convient de projeter le bilan à un an pour évaluer le niveau de la marge de solvabilité minimale requise pour assurer la suffisance des fonds propres à un an avec une probabilité au moins égale à 99,5 % (ou à des seuils plus faibles dans le cadre de l'ORSA).

Un modèle actif / passif utilisé en assurance vie doit être en mesure de prendre en compte ces deux aspects, ce qui implique en particulier :

- de devoir calculer des prix (actifs et provisions) ;
- de devoir calculer des quantiles de la distribution de la NAV (SCR).

La prise en compte conjointe de ces deux éléments dans le cadre d'un modèle interne ou de l'ORSA est complexe car elle conduit à manipuler les facteurs de risque pour deux usages très différents.

Cela conduit à devoir construire des générateurs de scénarios économiques (GSE).

Préambule

Dans le cadre d'une modélisation globale dont l'ambition est de fournir des distributions de valeur économique, on est donc formellement conduit à utiliser une approche à deux niveaux :

- la construction d'une fonctionnelle *g* fournissant le vecteur des prix en fonction des variables d'état *Y* à la date du calcul, $\pi_0 = g\left(Y_0\right)$

- la construction d'une dynamique pour les facteurs de risque, Y_t

On peut alors déterminer des prix à n'importe quelle date *via* :

$$\pi_t = g\left(Y_t\right)$$

La construction de la fonctionnelle *g* s'appuie sur les hypothèses classiques de la finance de marché et notamment l'AOA qui conduit à construire des probabilités « risque neutre » qui rendent les processus de prix actualisés martingales.

La construction de la dynamique de *Y* est un problème d'économétrie.

Préambule

Par exemple dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel de type Vasicek, on a les modèles suivants pour le facteur :

Projections

$$dY_t = dr_t = a\left(b - r_t\right)dt + \sigma\, dW_t$$

Calculs de prix

$$dr_t = a\left(b_\lambda - r_t\right)dt + \sigma\, dW_t^Q$$

$$b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a} \qquad W_t^Q = W_t + \lambda \times t$$

et la fonctionnelle d'évaluation est :

$$g\left(r_t\right) = P\left(r_t, T-t\right) = \mathbf{exp}\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\left(r_\infty - r_t\right) - \left(T-t\right)r_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)$$

avec $r_\infty = b_\lambda - \dfrac{\sigma^2}{2a^2}$.

On observe ici que le lien entre les 2 représentations s'effectue *via* le paramètre λ.
NB : le paramètre σ est théoriquement invariant.

Préambule

Qu'est-ce qu'un générateur de scénarios économique (GSE) ?

Un GSE est un outil qui permet de projeter des facteurs de risque économiques et financiers.

Il faut noter que le lien entre les facteurs de risque et les prix d'actifs peut être plus ou moins direct :

- pour les actions et l'immobilier, le facteur modélisé est directement le prix de l'actif ;

- pour les obligations, on modélise en général un nombre limité de facteurs explicatifs, typiquement le taux court.

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'usage qui va être fait du GSE et conduira à définir les notions de probabilité historique et probabilité risque neutre.

Préambule

Les facteurs de risque typiquement intégrés sont les suivants :

- prix des actions ;
- taux court ;
- processus de défaut des contreparties obligataires ;
- processus de liquidité ;
- prix des actifs immobiliers ;
- inflation.

D'autres facteurs économiques peuvent être pris en compte, par exemple le chômage.

Les choix de modélisation sont adaptés à l'objectif poursuivi : calcul de prix ou analyse de la distribution du facteur.

Préambule

Construire un GSE est une tâche délicate car les prix d'actifs financiers sont structurellement instables, comme le montre une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur. D'après l'analyse classique de la valeur fondamentale, on a en fixant un horizon *n* :

$$P_{t,n} = \sum_{h=1}^{n} \frac{E_t\left(D_{t+h}\right)}{\left(1+r\right)^h} + \frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}$$

La valeur de la société est alors obtenue en faisant tendre *n* vers l'infini, sous l'hypothèse que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n} = 0$$

et on trouve le résultat usuel définissant la valeur comme la somme actualisée des bénéfices futurs :

$$P_t = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{E_t\left(D_{t+h}\right)}{\left(1+r\right)^h}$$

Préambule

Mais l'hypothèse que l'espérance du prix actualisé tend vers 0 peut apparaître discutable après une analyse du comportement des investisseurs. En effet, on observe de nombreuses grandeurs économiques (richesse, chiffres d'affaires, volumes de ventes, *etc*.) dont la distribution est proche d'une distribution de Pareto (*cf*. Zajdenweber [2000]). Dans ce cas on a une relation de la forme :

$$E_t\left(P_{t+1}\right)=\frac{\alpha}{\alpha-1}P_t$$

et :

$$\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{\alpha-1}}{1+r}\right)^n P_t$$

Le comportement de la valeur va alors être très différent en fonction de la position de la raison de la progression géométrique par rapport à 1.

Préambule

Trois cas sont possibles :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=P_t \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{E_t\left(P_{t+n}\right)}{\left(1+r\right)^n}=+\infty$$

Ainsi, lorsque les distributions sont parétiennes, l'incertitude sur la valeur devient très grande.

En pratique les modèles doivent donc intégrer cette incertitude sous peine de sous-estimer les risques (*cf*. Walter et *al*. [2008]).

Par ailleurs, plus les marchés sont interconnectés plus ils seront globalement instables (on peut sur ce sujet se reporter aux travaux d'A. Orléan) : cela conduit à la présence de dépendance accrue en situation de crise.

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Schématiquement, le calcul d'un *best estimate* en assurance vie (plus généralement en présence d'interactions actif / passif) conduit à devoir évaluer :

$$\Lambda = \sum_{j \geq 0} \frac{F_j}{\left(1 + R_j\right)^j} \longrightarrow BEL = E^{P^A \otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

ce qui en pratique s'effectue (souvent) par simulation :

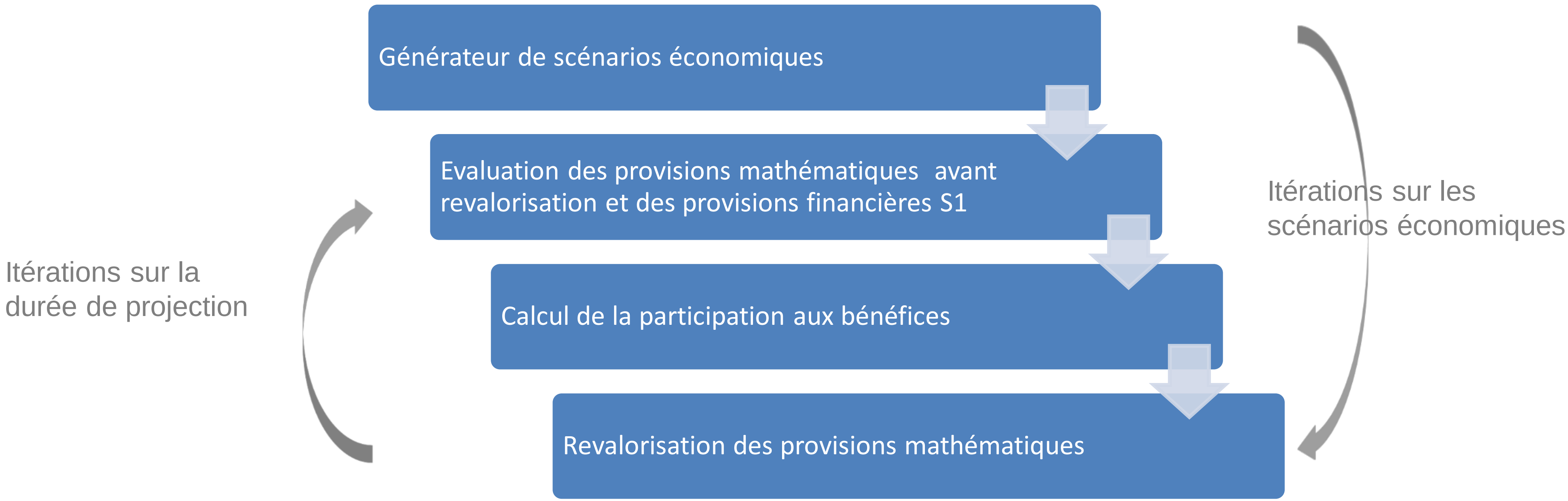
$$BEL = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sum_{a=1}^{A} \frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1 + R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

La difficulté principale est le calcul du terme $Flux_{t,n,a}$ du fait des interactions entre le rendement brut de l'actif et les comptes sociaux.

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Le calcul des flux, puis du *best estimate* qui s’en déduit, est effectué dans le cadre suivant :



Dans ce cadre le générateur est utilisé pour calculer des prix d’actifs en AOA et fournir une évaluation du passif cohérente avec des prix de marché.

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Une remarque

Les règles incluses dans le modèle de projection s'appuient souvent sur des comparaisons de taux pour, par exemple, décider de la réalisation de plus ou moins-values latentes.

Mais dans la construction de ces règles de décision, des niveaux de taux extrêmes n'ont en général pas été pris en compte, car considérés comme impossibles. Il s'agit donc d'adapter le modèle pour prendre en compte des situations très hypothétiques dont la probabilité réelle d'occurrence est négligeable.

On conçoit que la crédibilité d'une telle règle soit inévitablement discutable.

Pour un plus ample développement sur ce point, voir

http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2013/05/engagement-best-estimate-dun-contrat-d%C3%A9pargne-en-.html

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Les expressions précédentes se simplifient en l'absence d'interactions actif / passif :

$$BEL = E^{P^A \otimes Q^F}\left(\sum_{j\geq 0}\frac{F_j}{\left(1+R_j\right)^j}\right) = \sum_{j\geq 0} E^{Q^F}\left(\frac{1}{\left(1+R_j\right)^j}\right) E^{P^A}\left(F_j\right) = \sum_{j\geq 0} P(0,j) E^{P^A}\left(F_j\right)$$

avec $P(0,t) = E^{Q^f}\left(\mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)\right)$ le prix d'un ZC sans risque.

NB : on ne peut actualiser avec le ZC qu'en l'absence d'interactions actif / passif.

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

Le schéma de calcul d'un *best estimate* requiert *a priori* la simulation d'un nombre élevé de trajectoires pour voir converger les estimateurs empiriques vers leurs valeurs théoriques.

$$BEL = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{a=1}^{A}\frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1+R_n(0,t)\right)^t}$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} E^{P^A \otimes Q^F}(\Lambda)$$

Soit alors un contrat UC avec un sous-jacent modélisé par un processus log-normal et des taux modélisés par un modèle de Vasicek, de sorte que :

$$S(t) = S_0 \,\mathbf{exp}\left(\int_0^t \left(r(u) - \frac{\sigma^2}{2}\right)du + \sigma B(t)\right) \qquad dr(t) = k\left(\theta - r(t)\right)dt + \sigma_r dB_r(t)$$

Le contrat est de durée 10 ans, entièrement racheté au terme. Dans l'intervalle, le taux de rachat structurel est de 2 % et des rachats conjoncturels à hauteur de 5 % viennent s'ajouter lorsque la valeur de la part est inférieure à la valeur initiale.

1. *Best estimate* et SCR

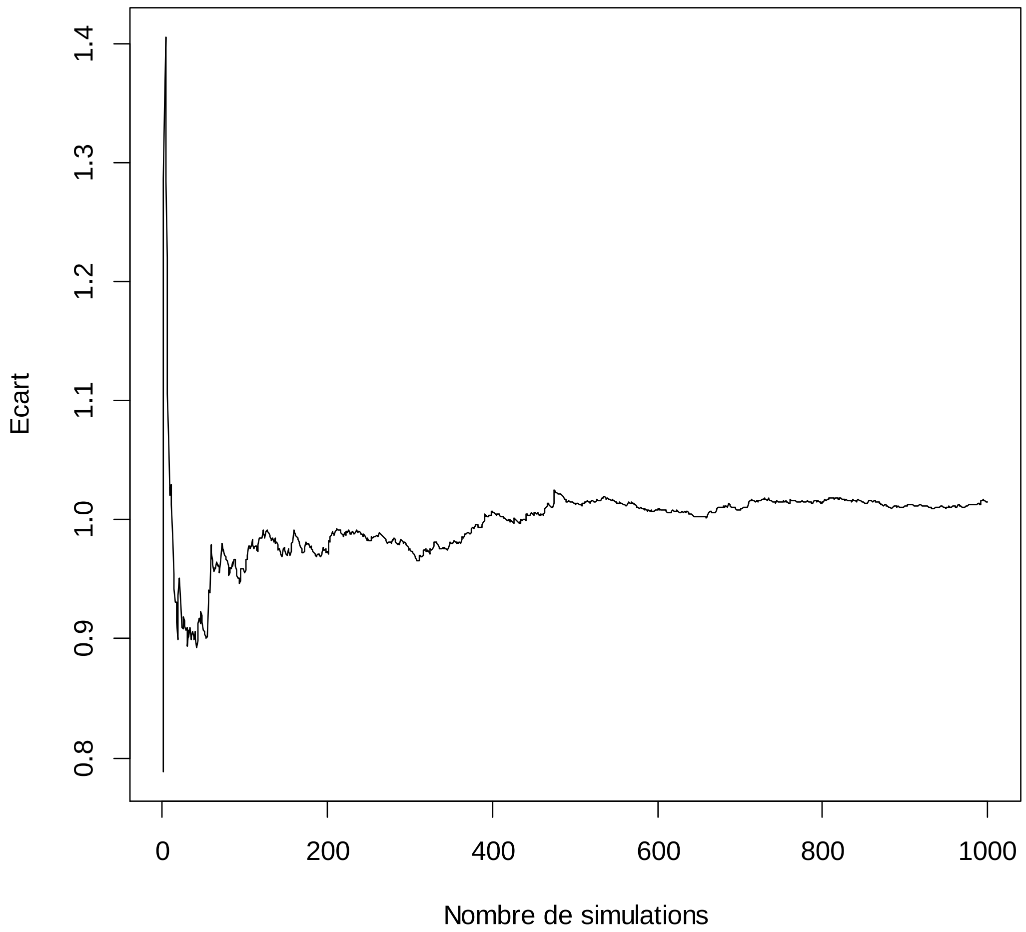
1.1. Le calcul du *best estimate*

La convergence du *best estimate* empirique vers sa valeur théorique est lente et, après 1000 tirages, un écart d'environ 1,5 % subsiste. Cet écart conduit à un écart de l'ordre de 15 % sur les fonds propres…

Pour diviser cet écart par 10 il faut multiplier le nombre de tirages par 100.

Dès lors il peut être utile (indispensable) d'optimiser ce schéma (*cf*. par exemple Nteukam et Planchet [2012]).

Ecart de convergence en fonction du nombre de simulations



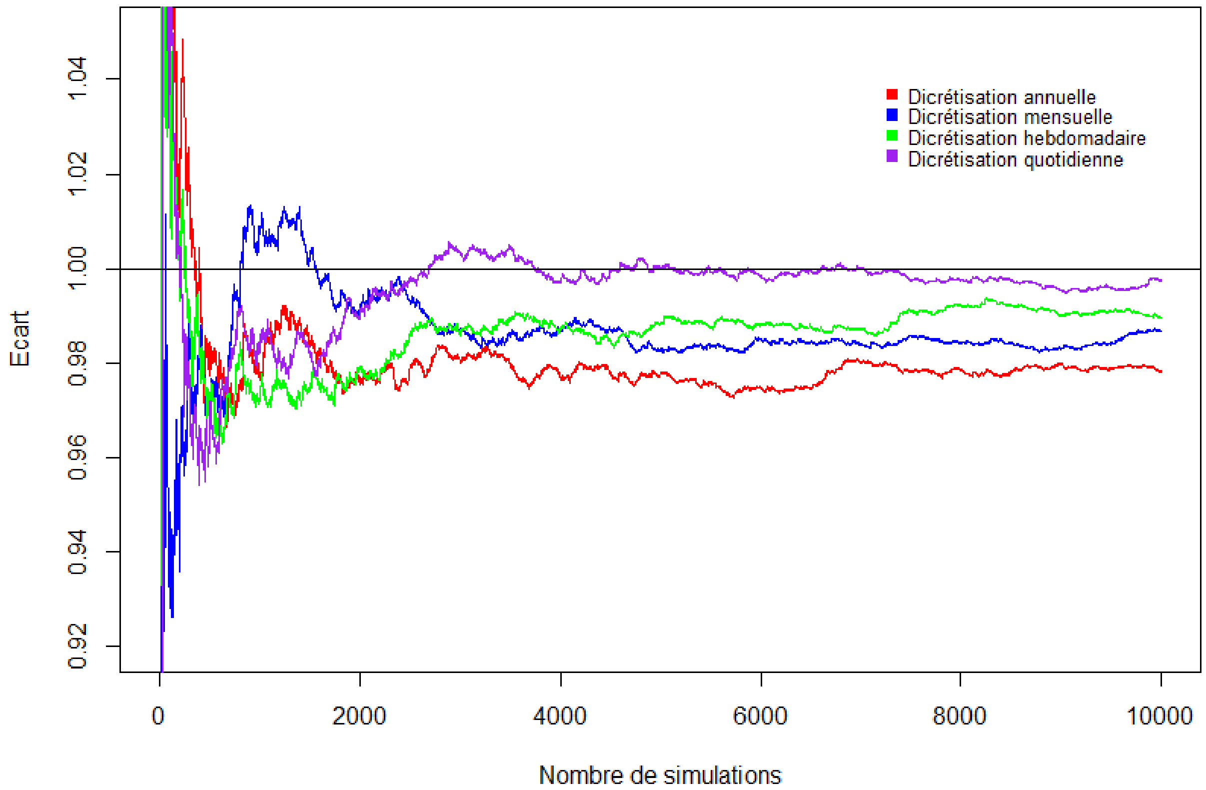
<u>Remarque</u> : *cf*. Bauer et *al*. [2010] sur la question des budgets de simulation.

1. *Best estimate* et SCR

1.1. Le calcul du *best estimate*

La convergence est également impactée par le choix de la discrétisation des processus sous-jacents.

Il faut distinguer le pas de projection pour les flux (en général annuel) et le pas de discrétisation utilisé pour approcher les facteurs d'actualisation (*cf*. Ifergan [2013]).

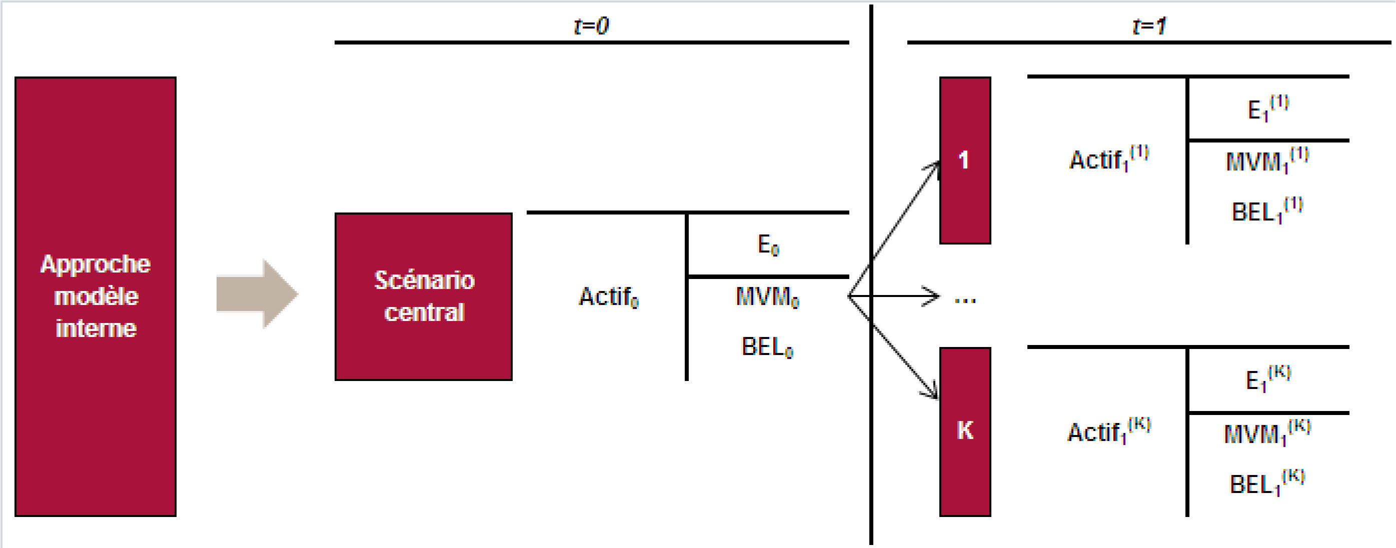


En pratique dans les modèles de projection utilisés pour calculer un *best estimate*, on peut considérer que l'erreur d'échantillonnage est de l'ordre de 0,50 %.

1. *Best estimate* et SCR

1.2. Le calcul du SCR

Le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (*cf*. Guibert et *al*. [2010]) :



La projection des facteurs de risque sur un an est effectuée en probabilité historique et le SCR est solution de $P\left(E_1 < 0 \middle| E_0 = x\right) \leq 0{,}5\%$

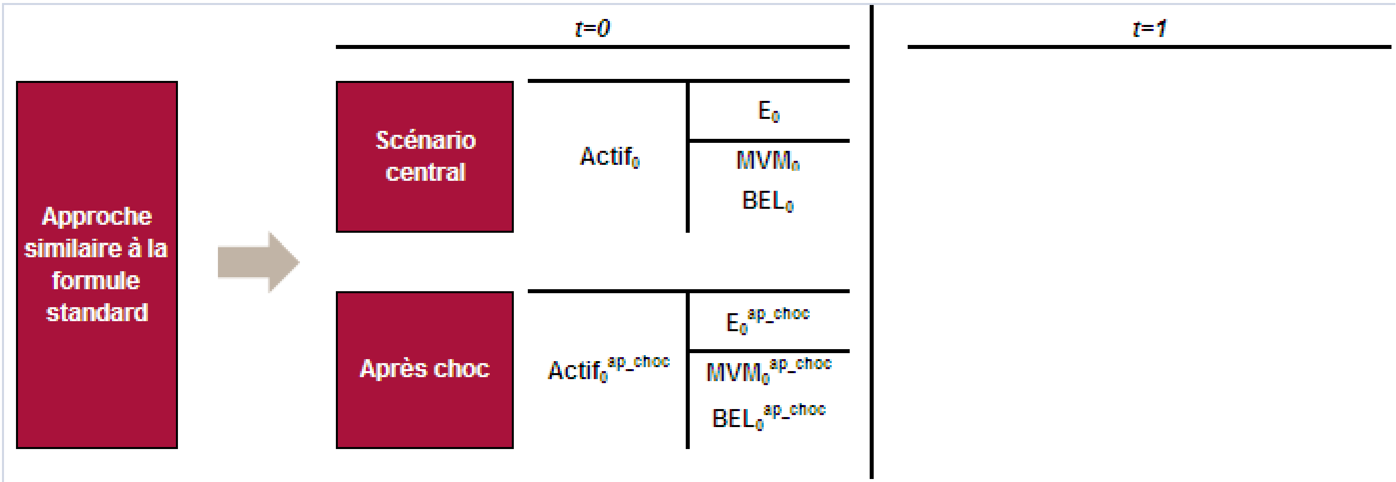
souvent approché en pratique par

$$SCR \approx E_0 - VaR_{0,5\%}\left(\delta(1) \times E_1\right) \approx E_0 - P(0{,}1) \times VaR_{0,5\%}\left(E_1\right)$$

1. *Best estimate* et SCR

1.2. Le calcul du SCR

La démarche est simplifiée dans le cadre du modèle standard :



Toutefois on perd alors le lien, et donc la cohérence, entre le comportement du GSE utilisé pour le calcul du BEL et le niveau des chocs (sensés être associés au quantile à 99,5 % de la distribution du facteur de risque). Cette restriction doit toutefois être relativisée, les deux visions étant sous des probabilités différentes.

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

2. Le GSE minimal

On effectue ici une rapide revue des composants de base d'un GSE le plus simple possible respectant les contraintes de base imposées par le cadre Solvabilité 2.

Compte tenu de son importance dans l'allocation d'actif, ce sont *a priori* les risques associés aux produits obligataires qui nécessitent le plus d'attention.

L'utilisation première du GSE décrit ici est, à titre d'illustration, le calcul des provisions dans un cadre *best estimate* pour des contrats d'épargne.

Le GSE présenté ici est implémenté dans le *package* ESG de R :

http://cran.r-project.org/web/packages/ESG/index.html

Des exemple d'utilisation sont proposés ici.

2. Le GSE minimal

Les contraintes de base que doit satisfaire un tel GSE sont les suivantes :

- utiliser la courbe des taux ZC initiale comme paramètre (ex. : Hull & White à un facteur, plus généralement HJM) ;

- permettre la prise en compte du risque de taux, du risque de *spread*, du risque action et du risque immobilier ;

- le cas échéant, prendre en compte l'inflation ;

- être cohérent avec les prix observés ; pour la volatilité cela conduit à utiliser une volatilité implicite, mais avec quelle formule ? (B&S ou une formule cohérente avec le modèle retenu : *cf*. les ONC) ;

- être justifiable au regard de la description d'une situation économique.

2. Le GSE minimal

Exemple

Sur la base d'une allocation d'actifs classique en assurance-vie et en retenant le démembrement des produits structurés (qui fait typiquement intervenir des actions, des produits de taux ainsi que des dérivés actions et taux), 6 facteurs de risques sont à modéliser :

- la rentabilité du portefeuille action et des dérivés à sous-jacent action ;
- la rentabilité du portefeuille immobilier ;
- le taux court nominal ;
- la structure par termes des taux d'intérêts ;
- le taux d'inflation ;
- le risque de défaut.

2. Le GSE minimal

2.1. Le risque action

Le modèle de B&S reste le plus utilisé malgré ses lacunes. Par ailleurs la *VaR* sur longue période estimée dans le cadre de ce modèle, *via*

$$SCR_{\alpha} = 1 - \mathbf{exp}\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times u_{\alpha} \right)$$

fournit des résultats cohérents avec le calibrage « long terme » du QIS 5 (39 %) :

	Moyenne	Volatilité	SCR 0,5%
23/09/2011	2,00%	22,8%	44,7%
31/12/2010	3,54%	22,7%	43,7%

NB : Cette *VaR* sous-estime sensiblement la *VaR* « réelle » et l'écart entre la norme du QIS et une mesure objective mesure la part de risque systématique intégrée *via* le seuil de 0,5 % (*cf*. Leroy et Planchet [2010]).

2. Le GSE minimal

2.1. Le risque action

Il existe de nombreuses alternatives proposées dans la littérature pour pallier aux principaux inconvénients de B&S. On peut citer les modèles d'Heston (1993), de Hardy (2001), Merton (1976), les modèles GARCH, les processus de Lévy, *etc*.

<u>Exemple</u> : le modèle de Merton

$$S(t) = S(0)\mathbf{exp}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\}$$

Ce modèle est intéressant en ce qu'il permet de conserver de nombreuses « bonnes propriétés » de B&S et notamment la simplicité d'utilisation et qu'il est interprétable économiquement. Il permet dans le cadre d'une approche ORSA ou MI de limiter la sous-estimation des scénarios les plus adverses.

2. Le GSE minimal

2.1. Le risque action

Exemple : Supposons qu'au bout d'une année, la société doive avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 1. L'assureur dispose en 0 de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le taux majoration du capital γ tel que :

$$P\left[(1+\gamma)\mathbf{exp}\left\{\mu-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma B_1+\sum_{k=1}^{N_1}U_k\right\}\leq 1\right]\leq 0{,}5\,\%$$

NB : γ est lié au SCR des transparents précédents *via* :

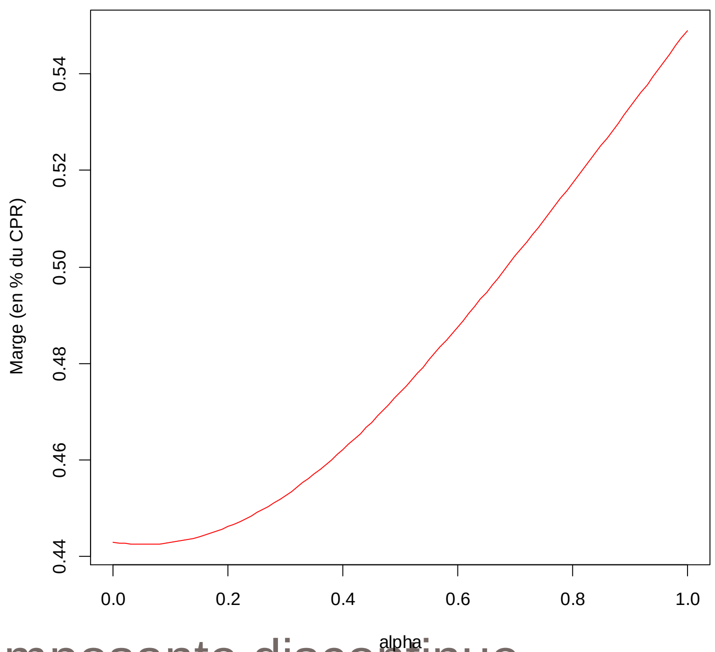
$$SCR=\frac{\gamma}{1+\gamma}$$

2. Le GSE minimal

2.1. Le risque action

A volatilité du sous-jacent fixé, le montant de capital à immobiliser au-delà du *best estimate* passe de 44,3 % de la provision dans le cas de B&S à 47,4 % pour une part de variance de 50 % pour la composante à sauts (ce qui est ce que l'on constate en pratique), soit une augmentation de 7 %.

Marge en fonction de la part de variance expliquée par les sauts



$$\mu = \ln(1{,}06)$$

$$\lambda = 1{,}5$$

$$\sqrt{\sigma^2 + \lambda \sigma_u^2} = 0{,}16$$

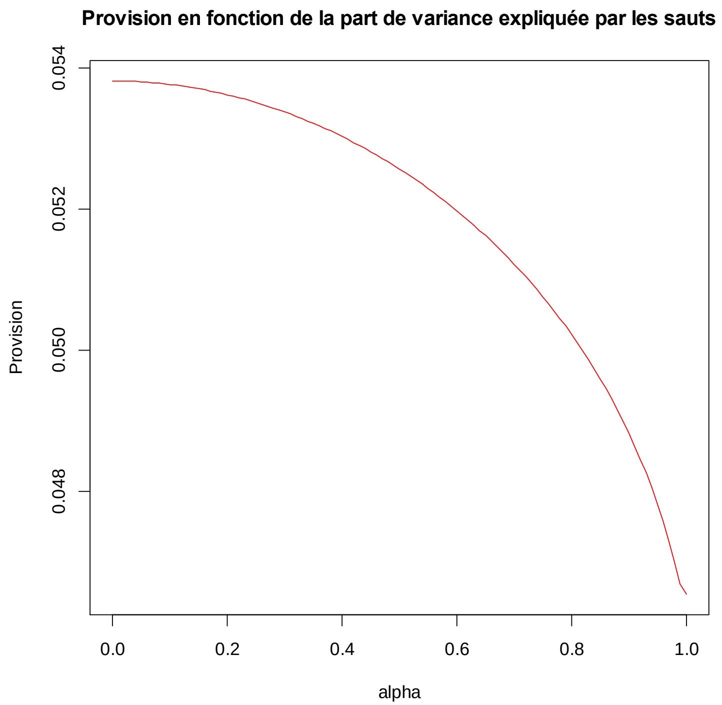
$$\alpha = \frac{\sigma_U^2 \lambda}{\sigma^2 + \lambda \sigma_U^2}$$

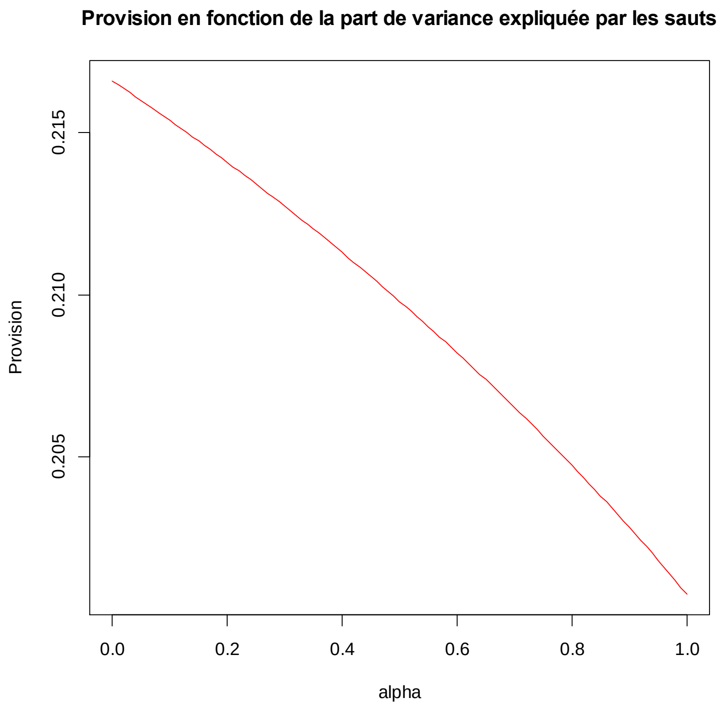
NB : α désigne la part de variance affectée à la composante discontinue.

2. Le GSE minimal

2.1. Le risque action

L'impact du changement de modèle sur les provisions est plus limité et de sens opposé ; par exemple en considérant le prix d'une option de vente à la monnaie pour un taux sans risque de 2 % on trouve un écart de -2,3 % à un an et -3,1 % à 5 ans :





2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Le modèle factoriel le plus simple permettant d'utiliser en entrée la courbe des taux initiale est le modèle de Hull et White [1990], qui est une spécification particulière du cadre proposée par HJM (Heath et *al*. [1990]) et repose sur :

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{-k(T-t)}$$

On conserve dans ce modèle un taux court markovien et des prix de ZC log-normaux. En pratique les points suivants doivent être considérés :

- le lien avec le modèle « actions » ;
- l'estimation des paramètres ;
- la mise en œuvre par simulation.

La courbe des taux initiale doit préalablement être construite et cette étape est complexe.

Cf. : http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/0B9DF464E9543283C1256F130067B2F9/$FILE/Taux.pdf?OpenElement

2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Lien avec le modèle « actions »

Le taux court étant variable, le prix des options dans le modèle de B&S associé s'en trouve affecté.

En théorie, il convient d'adapter les formules d'évaluation des options pour le calcul de la volatilité implicite (ou le provisionnement de garanties plancher) pour en tenir compte :

$$C(0,T) = S \times N(d_1) - K \times P(0,T) \times N(d_2)$$

avec $d_{1/2} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{K \times P(0,T)}\right) \pm \dfrac{\tau}{2}}{\sqrt{\tau}}$ et $\tau = \displaystyle\int_0^T \left(\sigma_P^2(u,T) + 2\rho\sigma_s\sigma_P(u,T) + \sigma_s^2\right) du$

Ceci n'est toutefois que rarement fait.

2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres de ce modèle est délicate (*cf*. Rogers [1995]). Deux approches sont envisageables :

- l'utilisation de dérivés de taux pour lesquels on dispose d'une formule fermée dans le modèle de Vasicek généralisé, en cherchant les paramètres qui minimisent un écart quadratique avec des prix observés pour ces dérivés.

- l'utilisation de la vision historique du modèle. En effet, on peut associer au modèle de Vasicek généralisé une dynamique du taux court dans l'univers historique. Les paramètres peuvent alors en être estimés par régression. De plus les paramètres k et σ sont (théoriquement) identiques sous les deux mesures.

Seule la première approche est toutefois justifiable dans un cadre imposant la cohérence avec des valeurs de marché.

2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Estimation des paramètres

Au surplus, le modèle nécessite le calibrage de la courbe des taux *forward* instantanés, qui ne sont pas observables. On utilise en général le lien avec les taux ZC

$$R(0,t)=\frac{1}{t}\int_0^t f(0,u)du \approx \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} f(0,k)$$

qui conduit à l'approximation

$$f(0,s)\approx -\frac{\ln\left(P\left(0,s^+\right)\right)-\ln\left(P(0,s)\right)}{s^+ - s}$$

Une alternative possible est de construire un ajustement paramétrique de la courbe des taux.

2. Le GSE minimal

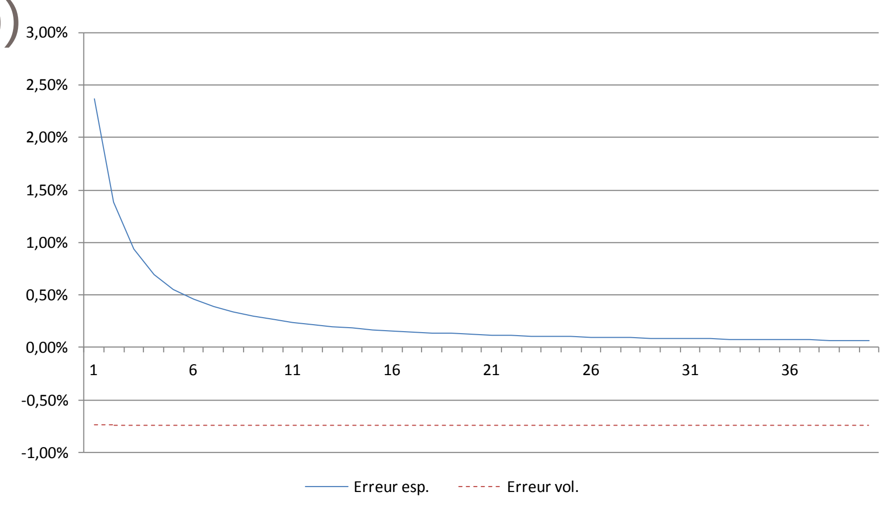
2.2. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

Cette mise en œuvre nécessite un peu d'attention :

- la discrétisation doit être effectuée proprement (discrétisation exacte si possible, ou correction des biais) ;

- le nombre de simulations à réaliser pour retrouver les caractéristiques théoriques de la distribution du prix d'un ZC est élevé ; par exemple avec 10000 réalisations du taux court on a pour **ln**(*P*(1,T))



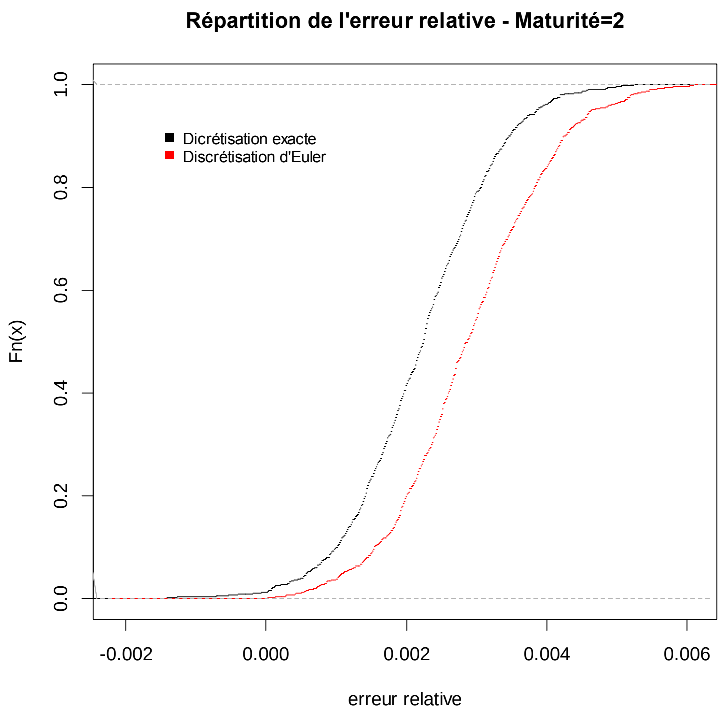
> Un exemple

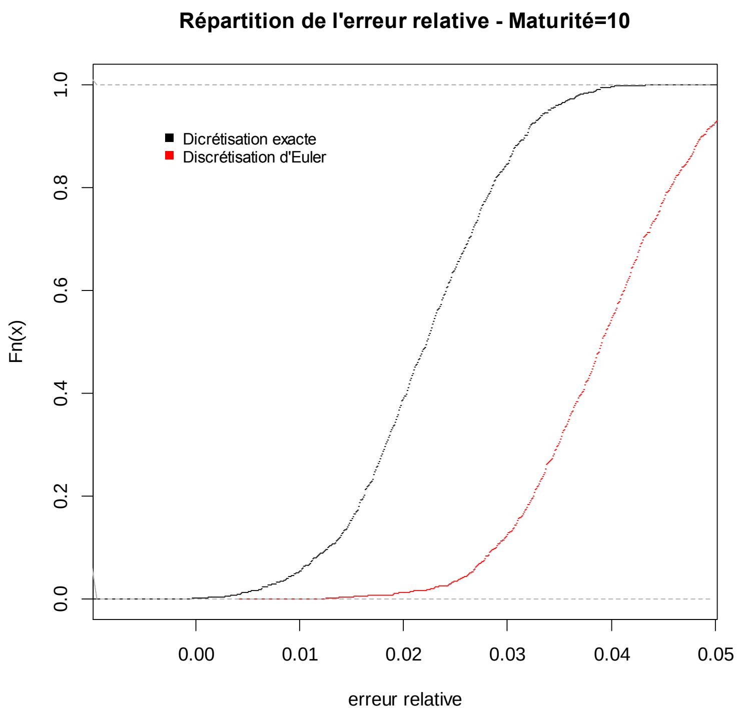
2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

La discrétisation induit des biais et, d'autre part, le nombre de simulations pour obtenir un niveau de précision fixé est croissant en fonction de la maturité du ZC ; en fixant par exemple ce nombre à 10 000 on trouve :





2. Le GSE minimal

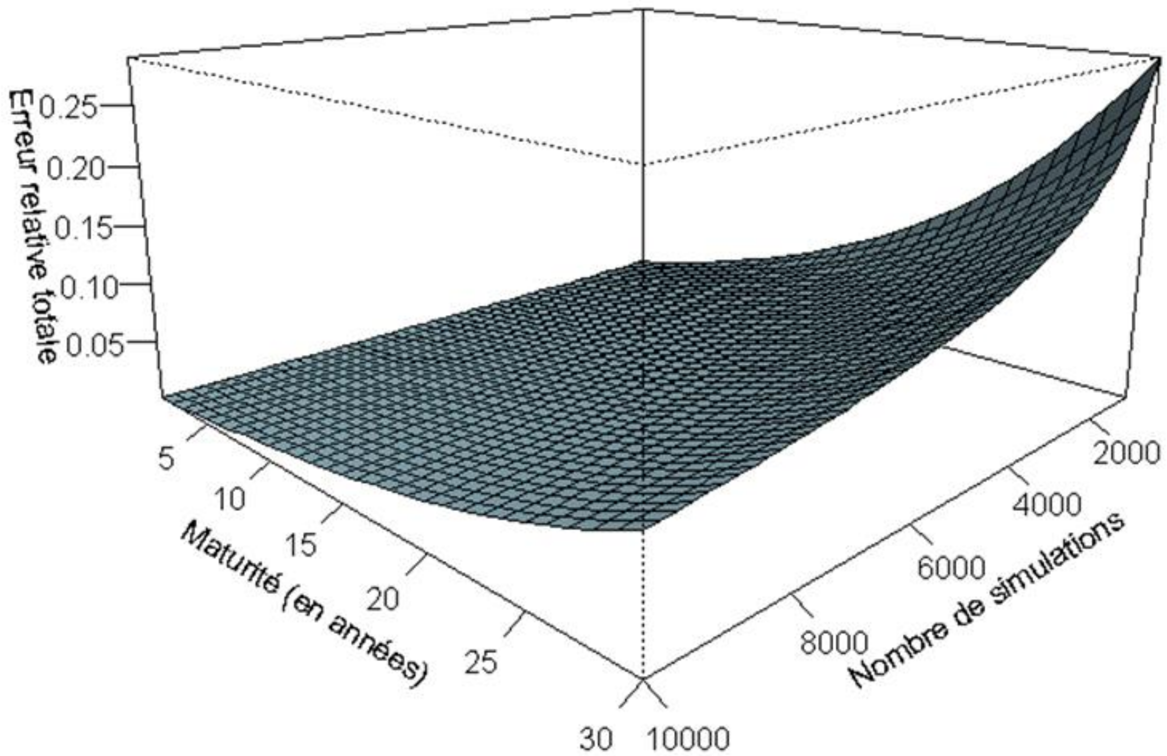
2.2. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

L'erreur d'estimation associée au calcul par simulation du prix d'un ZC a en pratique l'allure suivante :

On peut en retenir qu'approcher le prix d'un unique ZC par simulation n'est pas simple.

La convergence pour ce type d'actif est plus lente que pour des flux plus complexes tels que ceux d'un contrat d'épargne.



2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Mise en œuvre par simulation

La discrétisation d'Euler du processus de taux court dans le modèle H&W conduit ainsi à :

$$r_\delta(n\delta) = f(0, n\delta) + \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(1 - e^{-kn\delta}\right)^2 + \sigma\sqrt{\delta}e^{-kn\delta}\sum_{i=1}^{n} e^{+k(i-1)\delta}\varepsilon_i$$

Cette discrétisation n'introduit pas de biais sur l'espérance, mais :

$$V\left(r_\delta(n\delta)\right) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kn\delta}\right) \times \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1} = V\left(r(n\delta)\right) \times \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1}$$

La constante $c_\delta = \frac{2 \times k \times \delta}{e^{2k\delta} - 1}$ tend vers 1 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, mais peut être en pratique pénalisante avec des pas annuels ou mensuels.

Il est alors nécessaire de corriger le biais (directement, avec un schéma de Milstein, avec une discrétisation exacte, *etc*.).

2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Construction de la courbe initiale

En amont de l'estimation d'un modèle il est nécessaire de construire la courbe des taux ZC initiale. Parmi les nombreux modèles proposés dans la littérature, le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (Nelson et Siegel [1987]) est souvent utilisé de par sa bonne flexibilité et sa facilité de mise en œuvre.

Le taux à terme instantané s'écrit (avec les notations de Roncalli [1998]) dans ce modèle :

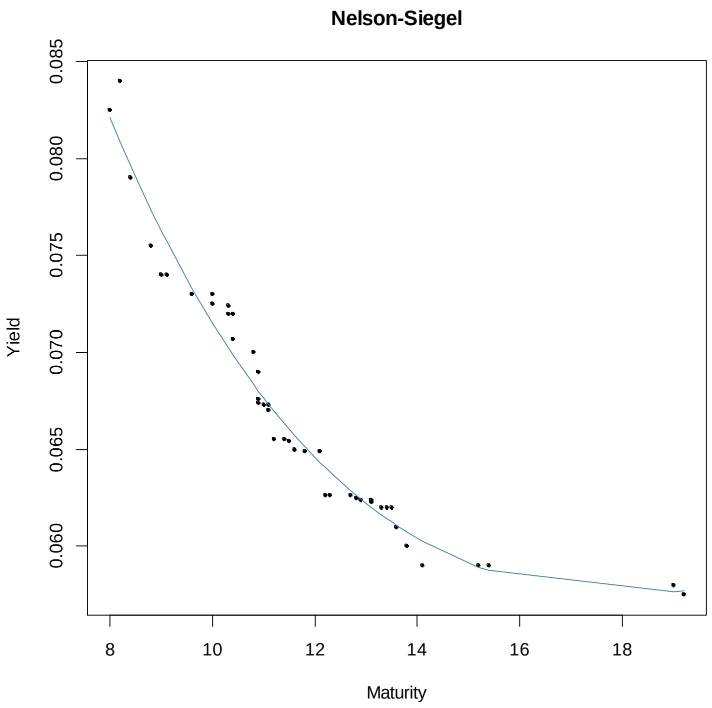
$$f(t,T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{T-t}{\tau_1} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau_1}\right)$$

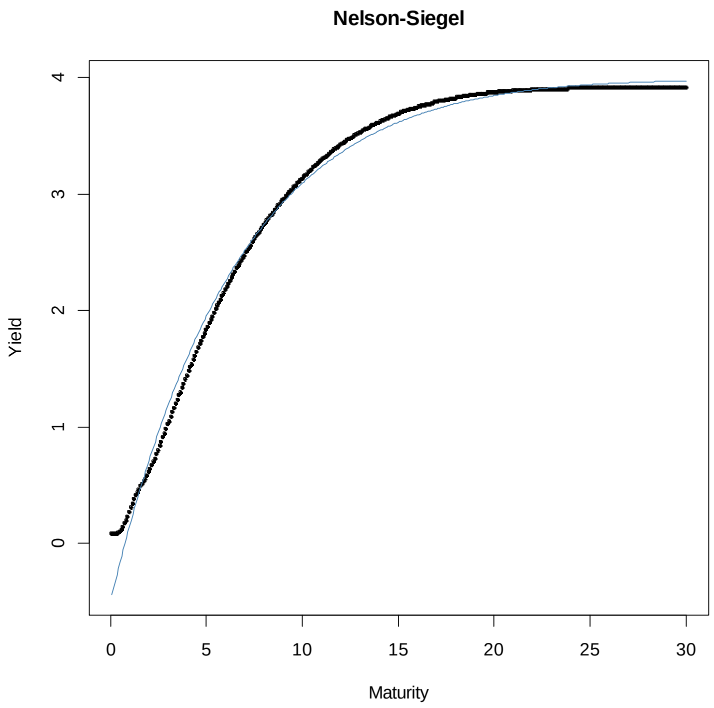
2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

Construction de la courbe initiale

Ce modèle permet la prise en compte de différentes formes de courbes, par exemple ici la courbe des taux de l'Institut des Actuaires au 31/05/2012 (droite) ou des taux d'obligations *corporate* (gauche) :





2. Le GSE minimal

2.2. Le risque de taux

De nombreux autres modèles ont été proposés pour modéliser la courbe des taux. On peut notamment citer ici (*cf*. Racicot et Théorêt [2006]) :

- le modèle CIR étendu, qui empêche l'apparition de taux négatifs, au prix toutefois d'une complexité mathématique significative :

$$dr_t = a(t)\left(b(t) - r_t\right)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

- le modèle de Black & Karasinski :

$$d\,\mathbf{ln}(r_t) = a(t)\left(b(t) - \mathbf{ln}(r_t)\right)dt + \sigma_t\,dW_t$$

- les modèles de marché (BGM), qui s'appuient sur des données observables (et non sur la courbe des taux *forward* instantanée, inobservable).

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Lorsqu'une obligation présente un risque de défaut, pour une maturité donnée, le prix de ZC avec risque de défaut est lié au prix du ZC sans risque par la relation suivante :

$$P_D(0,T) = \left(1-\phi_T^*\right)P(0,T) + \phi_T^* \alpha P(0,T)$$

L'idée est alors de relier la probabilité risque-neutre de défaut ϕ_T^* au *spread* avec le taux sans risque ; ce lien est simple si ce dernier est constant :

$$\phi_T^* = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\exp(sT)}\right)$$

Par ailleurs, l'écart entre le rendement de l'actif et le taux sans risque incorpore *a priori* également une composante relative au risque de liquidité.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

De nombreux modèles utilisés en assurance traitent ce risque de manière simplifiée. En partant de la relation

$$O(T) = N \times \left(\gamma \sum_{i=1}^{T} P_l(0,i) + P_l(0,T) \right)$$

on détermine un coefficient de dépréciation *D* qui permet de recaler le prix de marché observé pour les obligations de maturité *T* avec risque de défaut :

$$O_D(T) = D \times O(T)$$

En pratique, en fonction de la finesse de la modélisation, *D* dépend de la maturité et du *rating* des obligations présentant un risque de *spread* ou est fixé globalement au niveau du portefeuille soumis au risque de *spread*.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Une limite importante de cette approche est qu'elle fige l'effet du risque de *spread* à la date du calcul.

Une première solution est de rendre le coefficient de dépréciation dynamique en posant $O_D(T) = D(T) \times O(T)$ avec

$$D(t) = D(s(t), s_0, \delta) = D_0 \times \mathbf{exp}(-\delta(s(t) - s_0))$$

$$ds(t) = k \times (s_\infty - s(t))dt + \sigma_s dW_s(t)$$

Le mouvement brownien doit être *a priori* corrélé à celui utilisé pour les actions.

La valeur initiale du *spread* est calibrée sur le *spread* moyen du portefeuille obligataire et les paramètres de la diffusion sont calibrés sur une série historique de *spreads* de notation comparable à celle du portefeuille obligataire.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

On peut également se tourner vers des approches plus complexes, et notamment les modèles à intensité comme le modèle LMN (*cf*. Longstaff, et al. [2005]) qui établit un lien entre le *spread*, la probabilité du défaut et le risque de liquidité. Il s'appuie sur les processus d'intensité de défaut et de liquidité suivants :

$$d\lambda(t) = a\left(b - \lambda(t)\right)dt + \sigma_\lambda \sqrt{\lambda(t)}\, dW_\lambda(t) \qquad d\gamma(t) = \eta\, dW_\gamma(t)$$

Le défaut est donc modélisé dans le cadre d'un processus de Cox doublement stochastique. Le point important est, dans ce cas, que la fonction de survie associée est de la forme :

$$Q(\tau > t) = E^Q\left[\mathbf{exp}\left(-\int_0^t \lambda(u)\,du\right)\right]$$

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Le prix de l'obligation est égal à l'espérance des flux actualisés sous la probabilité risque neutre,

$$CB(t,T) = E_t^Q\left(\int_t^T \frac{\delta(u)}{\delta(t)} f_t(u)du + \frac{\delta(T)}{\delta(t)} F_t(T)\right)$$

en notant $\delta(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ le facteur d'actualisation et

$$f_t(u) = \left(c + (1-\omega) \times \lambda(u)\right) \times \mathbf{exp}\left(-\int_t^u (\lambda_s + \gamma_s)ds\right) \qquad F_t(T) = \mathbf{exp}\left(-\int_t^T (\lambda_s + \gamma_s)ds\right)$$

les flux instantané et terminal. Le terme de liquidité reflète ici directement le supplément de rémunération (d'espérance nulle sous *Q*) qu'exige l'investisseur pour investir dans le titre *corporate* (et au-delà de la rémunération du risque de défaut).

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

On en déduit la formule générale suivante :

$$
\begin{aligned}
CB(t,T) &= E_t\left(c \times \int_t^T \mathbf{exp}\left(-\int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) du \right) \\
&+ E_t\left(\mathbf{exp}\left(-\int_t^T (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) \right) \\
&+ E_t\left((1-\omega) \times \int_t^T \lambda_u\, \mathbf{exp}\left(-\int_t^u (r_s + \lambda_s + \gamma_s)\,ds \right) du \right)
\end{aligned}
$$

qui doit être explicitée en fonction des paramètres des dynamiques des facteurs. Des calculs standards dans le cadre des modèles affines permettent d'obtenir des expressions explicites.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Ce modèle conduit ainsi à des formules fermées pour le prix des obligations présentant un risque de *spread* :

$$CB(0,T) = c \times \int_0^T A(t)C(t)P(0,t)e^{\lambda_0 B(t)-\gamma_0 t}dt + A(T)C(T)P(0,T)e^{\lambda_0 B(T)-\gamma_0 T}$$
$$+(1-\omega)\times\int_0^T C(t)P(0,t)\left(G(t)+\lambda_0 H(t)\right)e^{\lambda_0 B(t)-\gamma_0 t}dt$$

les fonctions *A*, *B* *C*, *G* et *H* étant simples. Il présente l'avantage de pouvoir décomposer le *spread* entre la composante liée au défaut et celle liée à la liquidité et peut être utilisé quel que soit le modèle de taux sous-jacent.

Une synthèse très complète des modèles de risque de crédit est proposée dans Duffie et Singleton [2003].

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Le dérivé le plus utilisé, le CDS ou *swap* de défaut, est un produit dérivé qui procure à son acheteur, sur une période définie, une assurance contre la survenance d'aléas de crédit se rapportant à un ou plusieurs émetteurs obligataires de référence (http://fr.wikipedia.org/wiki/Credit_default_swap).

L'acheteur du CDS acquiert le droit de céder au vendeur du swap une obligation particulière à sa valeur nominale en cas de réalisation d'un aléa de crédit de l'émetteur obligataire de référence. En échange, l'acheteur paie au vendeur, jusqu'au terme du contrat, des montants de prime prédéfinis, égaux au produit d'un *spread* de taux relatif au CDS (exprimé en points de base : bp) par le nominal.

On dispose dans le modèle LMN de formules fermées pour les CDS, ce qui est utile pour la calibration et pour les valorisations.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Ainsi on trouve que le *spread* du CDS s'écrit :

$$s = \frac{E\left(\omega \times \int_0^T \lambda_t \,\mathbf{exp}\left(-\int_0^t \left(r_s + \lambda_s\right) ds\right) dt\right)}{E\left(\int_0^T \mathbf{exp}\left(-\int_0^t \left(r_s + \lambda_s\right) ds\right) dt\right)}$$

ce qui conduit aux formules explicites suivantes :

$$s = \omega \frac{\int_0^T \mathbf{exp}\left(B(t)\lambda_0\right) D(t)\left(G(t) + H(t)\lambda_0\right) dt}{\int_0^T A(t)\,\mathbf{exp}\left(B(t)\lambda_0\right) D(t)\, dt}$$

NB : si λ est constant alors $s = \omega \times \lambda$

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Remarque sur la discrétisation

Le discrétisation de la composante crédit est délicate car le processus de Feller n'admet pas de discrétisation exacte. On peut utiliser un schéma de Milstein :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu\left(\tilde{X}_t, t\right)\delta + \sigma\left(\tilde{X}_t, t\right)\sqrt{\delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma_x\left(\tilde{X}_t, t\right)\sigma\left(\tilde{X}_t, t\right)}{2}\delta\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

qui donne ici

$$\tilde{\lambda}_{t+\delta} = \tilde{\lambda}_t + a\left(b - \tilde{\lambda}_t\right)\delta + \sigma_\lambda \sqrt{\tilde{\lambda}_t \times \delta}\,\varepsilon + \frac{\sigma_\lambda^2}{4}\tilde{\lambda}_t \times \delta\left(\varepsilon^2 - 1\right)$$

Comme pour le modèle de taux, la qualité de la discrétisation est un point essentiel dans la mise en œuvre du modèle.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

La principale difficulté associée à ce modèle est l'estimation des paramètres :

- une fois fixé le taux de recouvrement (*1-LGD*), il reste 6 paramètres à calibrer (3+1 pour le défaut et 1+1 pour la liquidité) ; ces paramètres s'ajoutent à ceux du modèle de ZC sans défaut sous-jacent ;

- l'estimation s'effectue en plusieurs étapes complexes, à partir de prix de ZC sans risque, de ZC *corporate* et de CDS.

La cohérence de ces données n'est pas simple à établir.

2. Le GSE minimal

2.3. Le risque de *spread*

Etapes de l'estimation

- estimation des paramètres du modèle de taux sous-jacent à partir d'une courbe de taux swap ;

- estimation des 4 paramètres associés au processus de défaut à partir des prix (théoriques et observés) des CDS ;

- estimation des 2 paramètres du processus de liquidité à partir des prix (théoriques et observés) des obligations *corporate*.

On « empile » donc des programmes d'optimisation non linéaire avec les résultats du programme *N*-1 qui alimentent le programme *N* : le processus est en pratique très instable.

Le paramètre de recouvrement (1-*LGD*) est fixé par avis d'expert. Pour une étude détaillée du calibrage de ce modèle, on peut se reporter par exemple à Laïdi [2013].

2. Le GSE minimal

2.4. Le risque immobilier

Le standard en la matière consiste à utiliser un modèle log-normal comme pour les actions.

Ce risque est en pratique très hétérogène (*cf*. Friggit [2001]) : les marchés résidentiel et des entreprises ont ainsi des comportements différents.

Toutefois, compte tenu du poids de cette classe d'actifs dans l'allocation, une modélisation simplifiée apparaît justifiable.

Ce risque est *a priori* non couvrable.

2. Le GSE minimal

2.5. Le risque inflation

L'inflation concerne *a priori* plusieurs paramètres du modèle :

- l'inflation générale des prix (revalorisation de rentes) ;
- l'inflation des frais de gestion ;
- l'inflation des coûts en général dans les assurances de choses et de responsabilité.

Dans ces deux derniers cas, seule une analyse en probabilité historique doit être menée, ces sources de risque étant non couvrables.

L'inflation générale des prix est potentiellement partiellement couvrable *via* des OATi et le recours à une modélisation en probabilité risque neutre est envisageable.

2. Le GSE minimal

2.5. Le risque inflation

L'indice d'inflation est en général modélisé par un processus autorégressif. En toute rigueur, le calibrage pour le calcul des provisions nécessite de disposer d'un modèle de prix pour des OATi.

Le modèle décrit dans Brennan et Xia [2000] propose un cadre intégrant conjointement le risque de taux et le risque inflation, mais il est peu utilisé en pratique en assurance.

Des travaux empiriques récents (*cf*. Ang et al. [2008]) s'intéressent à la construction d'une structure par terme des taux réels et de l'inflation.

Ce facteur de risque est utile lorsque des OATi sont présentes à l'actif et / ou des garanties inflation au passif. Il est aussi utile (*cf*. *infra*) pour analyser le lien avec une vision économique du scénario.

2. Le GSE minimal

2.5. Le risque inflation

Dans une logique de parcimonie, l'inflation (mesurée par l'écart entre les structures par termes nominale et réelle) peut être intégrée *via* un unique paramètre supposé constant au cours du temps.

$$R_r(t,\tau) = R_r(t-1,\tau) + \beta \times \left(R_n(t,\tau) - R_n(t-1,\tau)\right)$$

Avec l'approximation de Fisher, on en déduit les anticipations d'inflation :

$$\left(1+R_n(t,\tau)\right)^\tau = \left(1+R_r(t,\tau)\right)^\tau \times \left(1+I(t,\tau)\right)^\tau$$

puis la dynamique du taux d'inflation instantané :

$$i_t = \frac{1+r_t}{1+R_r(t,1)} - 1$$

avec $R_r(t,1) = R_r(t-1,1) + \beta \times (r_t - r_{t-1})$

2. Le GSE minimal

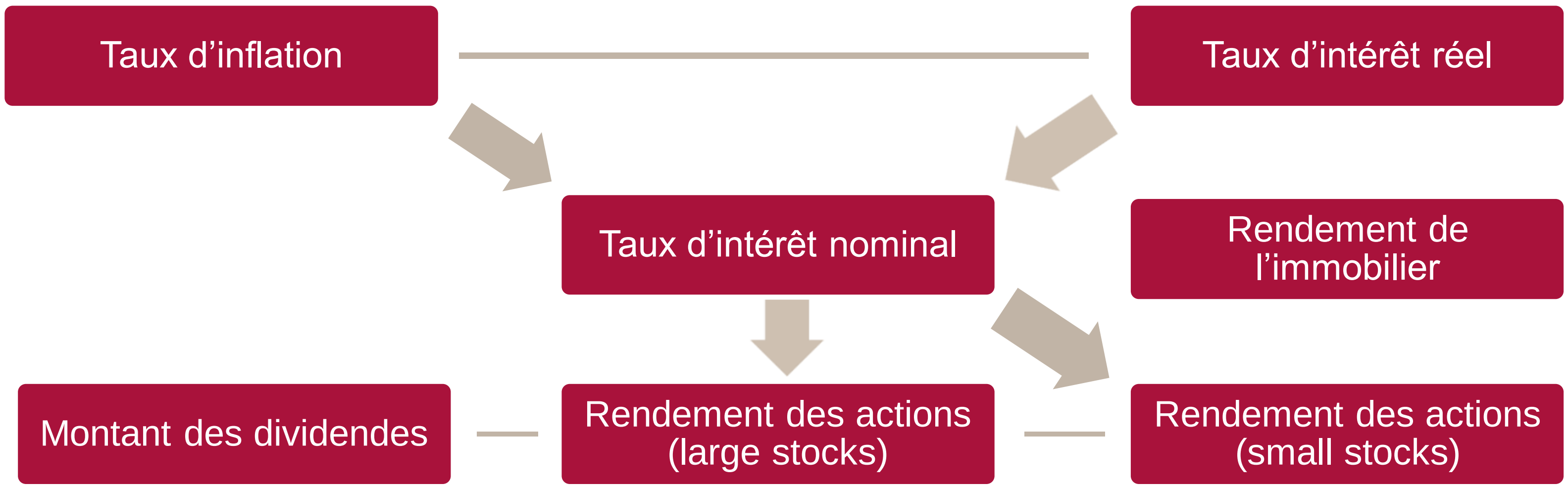
2.6. Un exemple (*cf.* Gauthier [2011])

	Approche Risque Neutre Modèle Composite			Approche « Monde réel » Modèle en cascade (Ahlgrim)		
Classe d'actifs	Modèle	Paramètres	Estimation	Modèle	Paramètres	Estimation
INFLAT°	Vasicek	Moyenne long terme Vitesse de retour à la moyenne Volatilité	Objectif BCE Estimation sur une plage d'historique représentative (MCO) Estimation sur une plage d'historique représentative (MCO)	Vasicek	Moyenne long terme Vitesse de retour à la moyenne Volatilité	Objectif BCE Estimation sur une plage d'historique représentative Estimation sur une plage d'historique représentative Moindres Carrés Ordinaire (MCO)
RENDMNT ACTION	Black & Scholes	Rendement annuel sans risque espéré Volatilité Implicite	Taux sans risque (moyenne long terme) Donnée de marché	Taux réel + Inflation + Primes de Risque **(RSLN)**	Tx réel CT simulé Inflation simulée P(1,2) ; P(2,1) Rdmnt 1, Rdmnt 2 Vol 1, Vol 2	Valeur en t renvoyée par le modèle Valeur en t renvoyée par le modèle Maximum de vraisemblance
OBLIG	HJM (Vasicek Généralisé)	Courbe des taux initiale Volatilité Vitesse de retour à la moyenne	Donnée de marché (Obligations UE - AAA) A partir du prix d'Options sur le marché : En minimisant les écarts quadratiques entre prix de call observé et calculé.	Hull&White2 Facteurs	Taux Long / Court <u>Réels</u> AAA + Risque de spread OU Taux Long / Court <u>Réels</u> (risqués)	Courbe Tx réels = Courbe Tx Nom – Courbe Inflation implicite (swaps) Estimation par minimisation écart quadratique Théorique/Observé OU Double Moindres Carrés sur historiques TL / TC (pb des données, car Taux réels)
IMMO	Black&Scholes	Rendement espéré Volatilité	Taux sans risque Historique	Black&Scholes Vasicek	Moy Vol Moy Vol Retour Moy	1+Rdt Immo=(1+Rdt en Capital)*(1+Rdt locatif) Modèles calibrés sur un historique
MON		Rendement annuel	Taux court sans risque		Rendement	Taux court sans risque simulé

2. Le GSE minimal

2.6. Un exemple (*cf*. Gauthier [2011])

On peut synthétiser la structure du modèle d’Ahlgrim (*cf*. Ahlgrim et *al*. [2005]) par le schéma suivant :



Remarque

http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2012/08/coordonner-les-gse-historique-et-risque-neutre.html

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

3. Estimation et calibrage

L'estimation des paramètres d'un modèle d'actif peut être effectuée de deux manières :

- estimation directe sur des données historiques de la grandeur modélisée (ex. : cours d'un sous-jacent) ;

- estimation à partir de la grandeur d'intérêt (ex. : prix des options) ;

selon que l'on travaille en probabilité historique ou risque neutre

Si l'estimation est effectuée sur des données historiques, le choix de la profondeur de l'historique est délicat.

Si l'estimation est effectuée sur des prix, le choix de la série de prix à retenir est délicat.

Enfin, l'estimation de la structure de dépendance pose des problèmes spécifiques en probabilité risque neutre.

3.1. Les conséquences du risque d'estimation

L'estimation peut induire une perte d'information significative, comme le montrent les travaux de P. Boyle (Windcliff et Boyle [2004]). L'idée est de s'intéresser à la détermination de l'allocation optimale « à la Markowitz » avec 5 supports d'investissement, dont les vraies valeurs des paramètres sont :

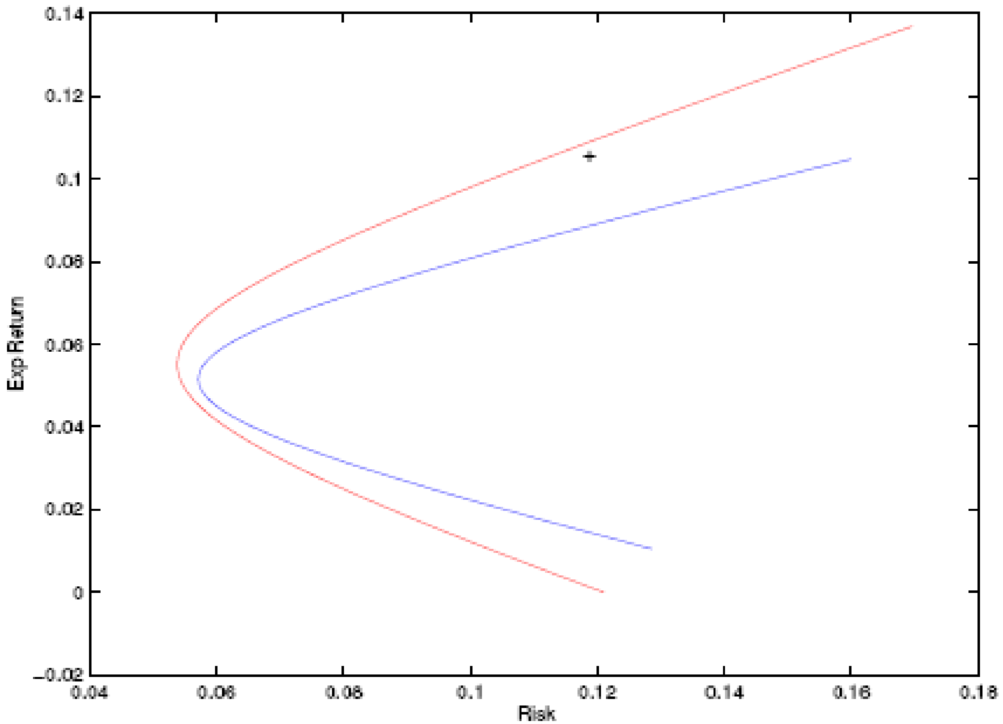
Asset Name	μ	σ	ρ				
Large Cap	.1165	.1449	1.0000	0.9180	0.8341	0.4822	0.3873
Mid Cap	.1288	.1549	0.9180	1.0000	0.9386	0.4562	0.3319
Small Cap	.0968	.1792	0.8341	0.9386	1.0000	0.4206	0.2002
World Index	.0921	.1715	0.4822	0.4562	0.4206	1.0000	0.2278
Long Bond Index	.0547	.0558	0.3873	0.3319	0.2002	0.2278	1.0000

On compare cette allocation estimée avec l'allocation uniforme en « 1/*N* ».

3. Estimation et calibrage

3.1. Les conséquences du risque d'estimation

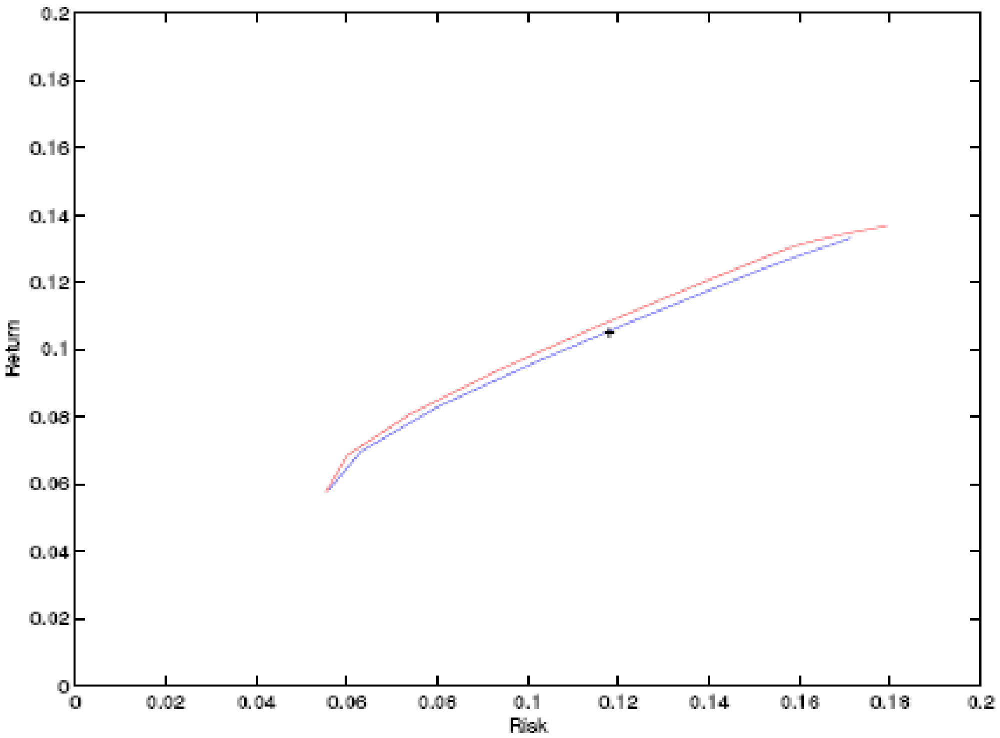
On peut alors comparer la frontière efficiente théorique (en rouge) avec la « frontière réelle » (en bleu) construite sur la base des pondération des supports estimées et de la vraie loi sous-jacente :

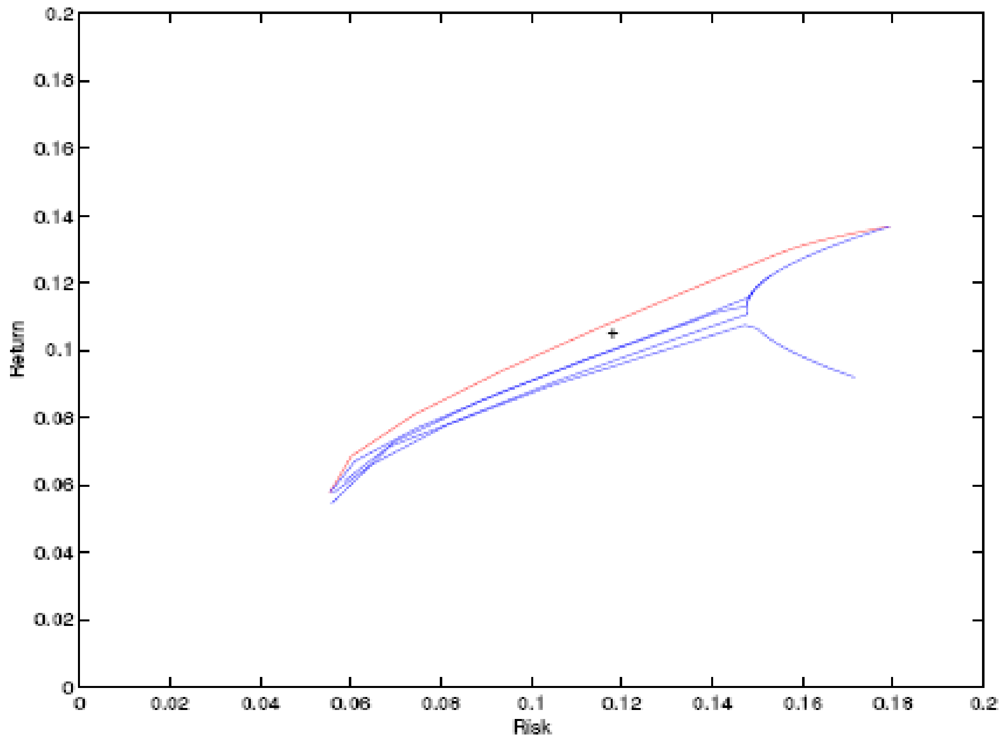


3. Estimation et calibrage

3.1. Les conséquences du risque d'estimation

Dans la réalité toutefois on ne peut avoir de position courte, ce qui modifie le frontière efficiente, qui n'a plus d'expression paramétrique





3. Estimation et calibrage

3.2. Choix de la plage d'estimation

Fixer le niveau des paramètres du modèle est un compromis entre une démarche statistique d'estimation à partir de séries (de prix à un instant donné ou d'évolutions historiques du facteur de risque suivant les cas) et l'opinion que l'on a de l'évolution des facteurs de risque à l'avenir.

Ce point est illustré ci-après par l'exemple de l'inflation.

3. Estimation et calibrage

3.2. Choix de la plage d'estimation

En ajustant l'inflation sur les données disponibles depuis 1950, on obtient une inflation espérée à long terme de 4,84 %.

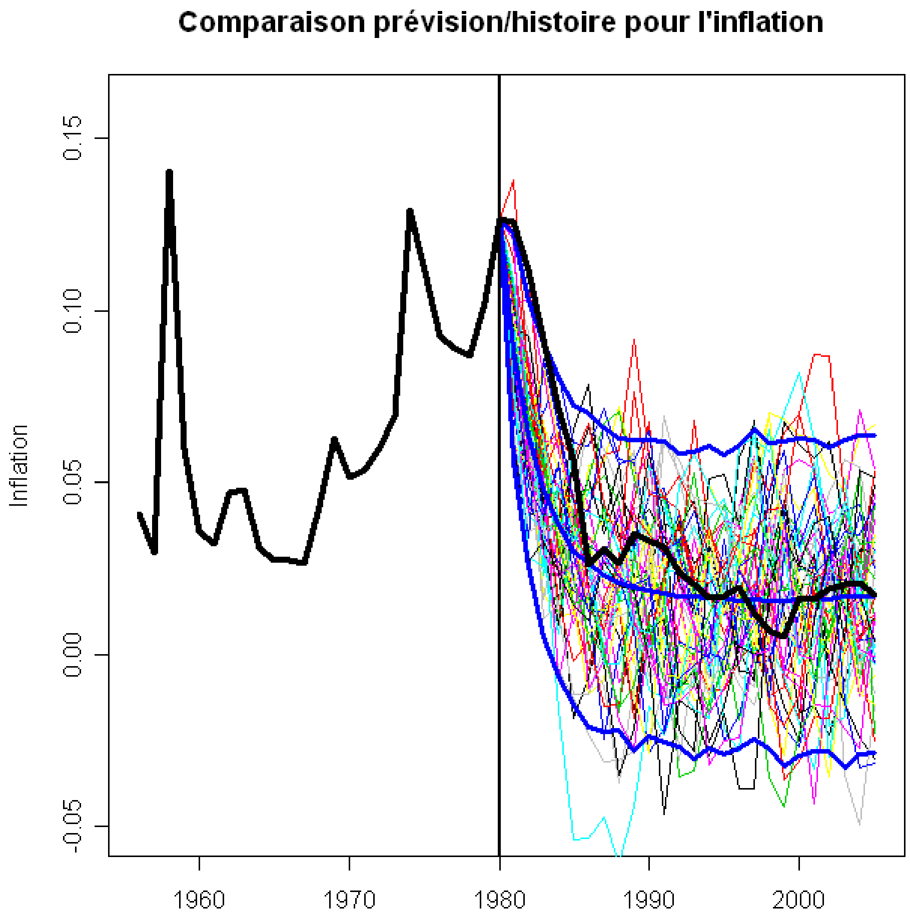
Cela ne correspond pas aux objectifs de croissance à long terme fixée par la Banque Centrale Européenne (BCE) depuis les années 2000.

L'écart est important et à moyen terme il serait plus judicieux de prendre une valeur cohérente avec les dernières années compte tenu de la politique monétaire de la BCE de maintenir l'inflation à un niveau proche et inférieur à 2 %.

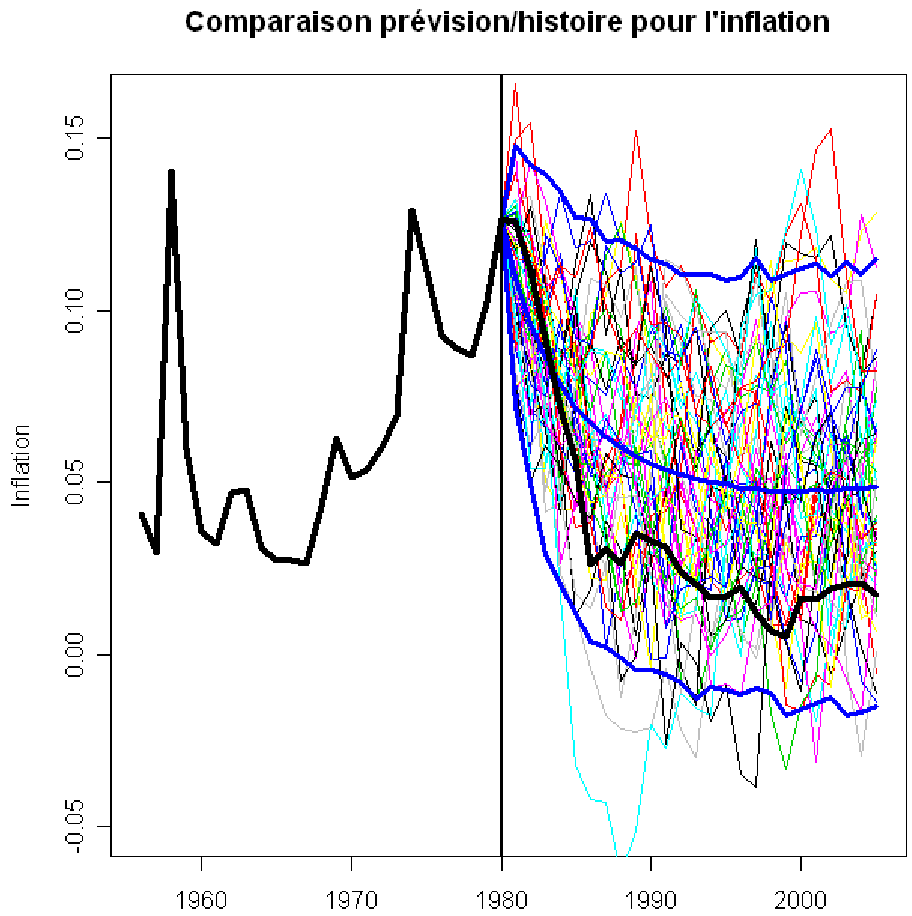
Les conséquences pratiques sont très importantes, comme le montre l'exemple de *backtesting* suivant :

3. Estimation et calibrage

3.2. Choix de la plage d'estimation



si l'inflation à long terme est de 1.69%

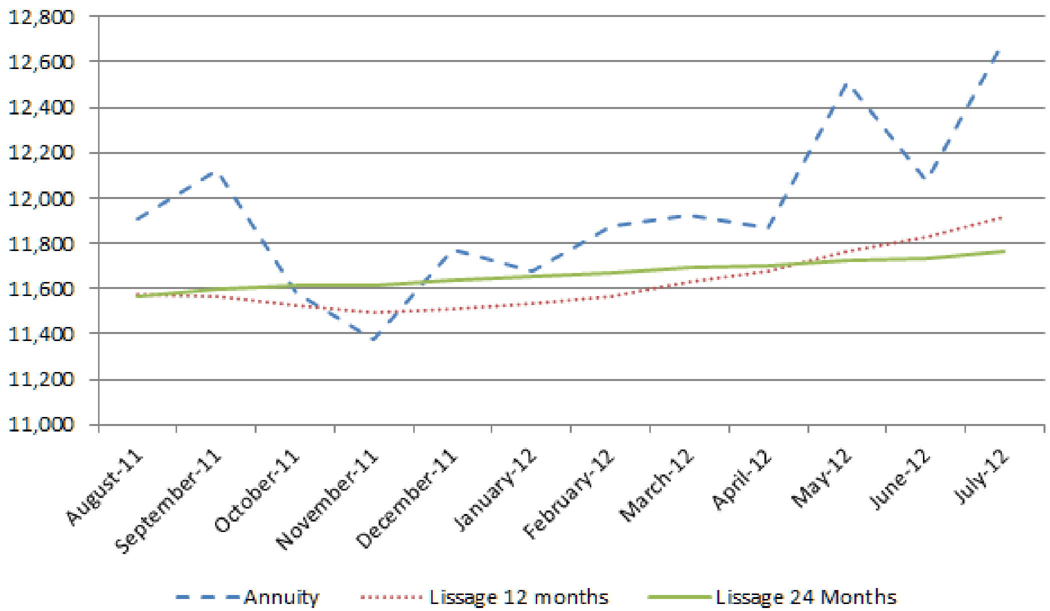


si l'inflation à long terme est de 4.84%

3. Estimation et calibrage

3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

La mise en œuvre des valorisations cohérentes avec des valeurs de marché conduit en pratique à une volatilité importante des évaluations et par voie de conséquence des bilans. Pour illustrer cette situation, on considère ici les taux de marché des emprunts d’État français mois par mois entre août 2011 et juillet 2012 et on calcule le capital constitutif d'une rente viagère immédiate à 65 ans à termes échus avec la TH00-02.



3. Estimation et calibrage

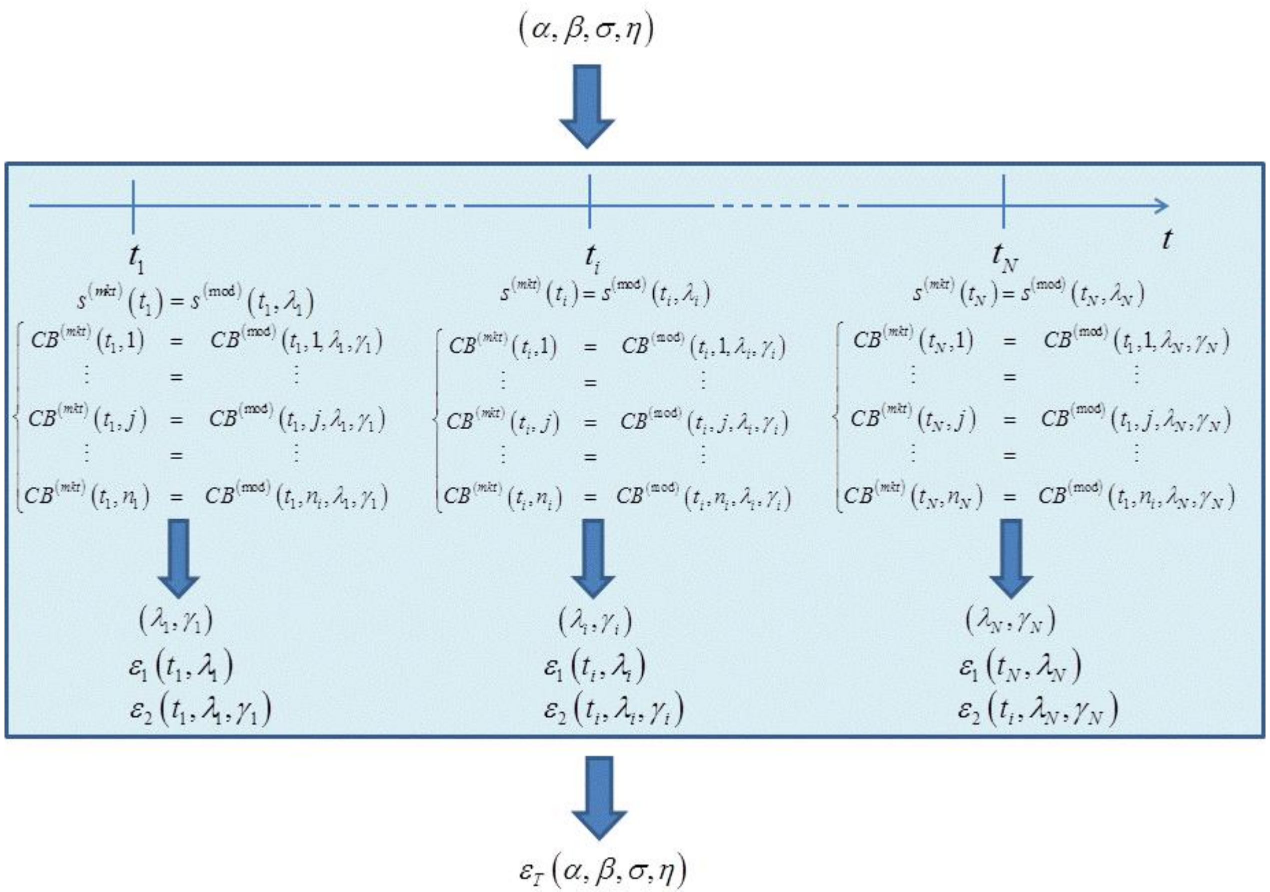
3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

Il est nécessaire de choisir des paramètres cohérents avec les prix observés et l'horizon long terme des projections. Le calibrage doit donc être relativement stable à l'occasion de son actualisation à des dates voisines. Une méthode utilisant uniquement les derniers prix connus, comme celle proposée initialement par Longstaff et *al*. [2005] dans le cas du modèle LMN présenté *supra* n'est évidemment pas pertinente en l'espèce, car elle induit une volatilité des paramètres qui n'est pas représentative des risques réellement encourus, comme l'a montré l'exemple précédent.

3. Estimation et calibrage

3.3. Calibrage « cohérent avec les valeurs de marché » ?

On peut ainsi imaginer (pour le modèle LMN) le schéma suivant (repris de Laidi et Planchet [2014])



SOMMAIRE

Propriétés d’un GSE en assurance

4. Validation

Le processus de validation d'un GSE diffère suivant que l'on se place sous les probabilités historique ou risque-neutre.

Il se décompose en une validation du calibrage et une validation de l'implémentation.

Validation du calibrage

Dans le premier cas, la validation est une combinaison d'éléments de nature statistique et de contrôles *ex-post* (comme par exemple l'analyse précédent de l'inflation). On sollicite également des avis d'experts, notamment pour les corrélations entre les prix des actifs.

La validation sous la probabilité risque neutre consiste à vérifier que les prix sont correctement représentés.

4. Validation

Validation de l'implémentation

Il s'agit de vérifier ici que les trajectoires issues du générateur respectent les propriétés théoriques du modèle sous-jacent.

L'exemple de la discrétisation du modèle de taux présenté *supra* (*cf*. 2.2) en fournit un exemple.

Dans le cas d'un générateur risque-neutre, on lui adjoint un contrôle appelé « test martingale » qui consiste à vérifier que les processus de prix actualisés issus du modèle sont bien des martingales.

Il s'agit en pratique d'identifier des moments calculables des distributions des prix et de vérifier que les moments empiriques correspondants convergent bien vers leurs valeurs théoriques.

Cela est illustré ci-après dans un cas simple.

4. Validation

A titre d’illustration, on propose des tests pour contrôler la bonne qualité de l'implémentation d'un générateur de scénarios économiques comportant des actions modélisées par un processus log-normal et des taux modélisés par un modèle CIR.

On note respectivement *r* et *S* le taux court et la valeur d'une action et le générateur est considéré sous la probabilité risque neutre.

On a donc le cadre général :

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(r(u) - \frac{\sigma^2}{2} \right) du + \sigma B(t) \right)$$

$$dr(t) = k\left(\theta - r(t)\right) dt + \sigma_r \sqrt{r(t)}\, dB_r(t)$$

4. Validation

Le modèle est utilisé pour faire des simulations et on dispose donc de trajectoires de *r* et *S* issues du générateur, soit en pratique d'observations

$$\left\{r_j\left(t_i\right);1\leq i\leq p,1\leq j\leq n\right\} \qquad \left\{S_j\left(t_i\right);1\leq i\leq p,1\leq j\leq n\right\}$$

où *j* désigne le numéro de la trajectoire et *i* l'instant de la discrétisation

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_p=T$$

dont on suppose que le pas est fixe, $d=\frac{T}{p}$.

4. Validation

4.1. Test sur le rendement des actions

On déduit de la forme du prix de l'action que

$$\rho(t) = \ln\left(\frac{\delta(t) \times S(t)}{S_0}\right) = -\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B(t)$$

avec $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$ le facteur d'actualisation est gaussienne. De plus

$$\Delta\rho(t) = \rho(t) - \rho(t-1) = \sigma\left(B(t) - B(t-1)\right) = -\frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times \varepsilon_t$$

où ε est un bruit blanc et $\frac{\delta(t) \times S(t)}{S_0}$ suit une loi log-normale d'espérance 1 et de variance

$$v = \exp\left(\sigma^2 t\right) - 1$$

4. Validation

4.1. Test sur le rendement des actions

On peut alors utiliser les propriétés statistiques des estimateurs suivants

$$\bar{\rho}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{\delta_j(t_i)\times S_j(t_i)}{S_0}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}E\left(\rho(t_i)\right)=-\frac{\sigma^2}{2}t_i$$

$$\bar{e}(t_i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j(t_i)\times S_j(t_i)}{S_0}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}E\left(\frac{\delta(t)\times S(t)}{S_0}\right)=1$$

et en déduire par exemple des intervalles de confiance :

$$I_\alpha\left(\bar{\rho}(t_i)\right)=\left[-\frac{\sigma^2 t_i}{2}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\,;-\frac{\sigma^2 t_i}{2}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]$$

$$I_\alpha\left(\bar{e}(t_i)\right)=\left[1-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{e^{\sigma^2 t_i}-1}\,;1+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{e^{\sigma^2 t_i}-1}\right]$$

4. Validation

4.2. Test sur le modèle de taux

On se sert d'abord de la convergence des estimateurs empiriques des prix de ZC vers les prix théoriques :

$$P_n(0,T) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{exp}\left(-\sum_{i=1}^{p} r_j(t_i)(t_i - t_{i-1}) \right) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} P(0,T) = E\left[\mathbf{exp}\left(-\int_0^T r_s ds \right) \right]$$

Puis on peut utiliser certaines propriétés particulières de la distribution du facteur de risque pour construire des contrôles. Ici la distribution du taux court n'est pas simple (Khi-2 décentré, *cf*. Revuz et Yor [1999]) mais on sait que

$$E(r(t)) = \theta - (\theta - r_0)e^{-kt} \qquad V(r(t)) = \frac{\sigma_r^2}{k}(1-e^{-kt})\left[r_0 e^{-kt} + \frac{\theta}{2}(1-e^{-kt}) \right]$$

4. Validation

4.3. Propriété de conservation

Un modèle ALM risque neutre vérifie une propriété d'absence de création ou destruction de valeur, au sens où l'espérance de la somme des valeurs actualisées des flux servis au cours de la projection doit être égale au montant du capital investi initialement.

Le capital global initial est investi sur des actifs de marché, ce qui revient à supposer qu'il est investi dans une unité de compte S qui est telle que $M = \delta S$ est une martingale. Au fil de la projection, des flux à destination de l'assuré et de l'actionnaire sont servis. On peut en toute généralité supposer que la somme des flux servis à la date t est une fraction $q(t)$ de la valeur de l'unité de compte, le processus q étant adapté.

Afin de s'assurer que le sous-jacent est entièrement distribué au cours de la projection, on doit imposer

$$\sum_{t=1}^{T} q_t = 1$$

4.3. Propriété de conservation

La valeur initiale des flux servis est alors

$$v=\sum_{t=1}^{T-1} E^{Q}\left(q_t\times\delta(t)\times S(t)\right)+E^{Q}\left(\left(1-\sum_{t=1}^{T-1} q_t\right)\times\delta(T)\times S(T)\right)$$
$$=\sum_{t=1}^{T-1} E^{Q}\left(q_t\times\left[\delta(t)S(t)-\delta(T)S(T)\right]\right)+E^{Q}\left(\delta(T)S(T)\right)$$

mais on a

$$E^{Q}\left(q_t\times\left[\delta(t)S(t)-\delta(T)S(T)\right]\right)=E^{Q}\left(E_t^{Q}\left(q_t\times\left[\delta(t)S(t)-\delta(T)S(T)\right]\right)\right)$$
$$=E^{Q}\left(q_t\times\left[\delta(t)S(t)-E_t^{Q}\left(\delta(T)S(T)\right)\right]\right)=0$$

Or $E^{Q}\left(\delta(T)S(T)\right)=S(0)$, donc $v=S(0)$. Cela fournit un moyen simple de vérifier la convergence d'un modèle ALM risque neutre en comparant l'estimateur empirique de la somme des flux actualisés avec le capital initial.

SOMMAIRE

Propriétés d'un GSE en assurance

5. Les améliorations possibles

La mise en place d'un GSE dans le contexte rappelé ci-avant pose quelques difficultés théoriques et pratiques. On en présente ici rapidement quelques-unes :

- la cohérence avec les scénarios macro-économiques ;
- la cohérence entre les visions historique et risque-neutre ;
- la structure des dépendance entre les prix des actifs.

La mise en œuvre pratique du GSE nécessite également un peu d'attention, ce point sera rapidement présenté.

5. Les améliorations possibles

5.1. Les contraintes macro-économiques

A long terme, il existe un lien étroit entre le taux d'intérêt nominal prévalant sur les marchés financiers, le taux d'inflation, c'est-à-dire l'évolution de l'indice des prix, et le taux d'intérêt réel. Plus précisément, le taux d'intérêt nominal est égal à la somme du taux d'intérêt réel et l'anticipation du taux d'inflation :

$$\text{Taux d'intérêt Nominal} = E_t(\text{Taux d'Inflation}) + \text{Taux d'intérêt Réel}$$

5. Les améliorations possibles

5.1. Les contraintes macro-économiques

Simultanément, il existe un lien étroit à long terme entre le taux d'intérêt réel et le taux de croissance réel de l’économie. Le taux d’intérêt réel ne peut être longuement très différent du taux de croissance de l'économie sauf à provoquer des arbitrages entre activité financière et activité réelle d'une part, entre investissement dans un pays et investissement dans d'autres pays d’autre part :

$$\text{Taux d'intérêt réel à long terme} = \text{Taux de croissance réel à long terme}$$

La prise en compte de ces contraintes nécessite la modélisation de l’inflation, qui est rarement modélisée explicitement en pratique.

5. Les améliorations possibles

5.2. Le prix de marché du risque

Le prix de marché du risque fournit le lien entre les représentations risque neutre et historique de la dynamique des facteurs de risque. Il apparaît naturellement dans les modèles à base de processus de diffusion.

On considère un mouvement brownien *B* sous *P* et un processus adapté λ vérifiant la condition de Novikov :

$$E\left[\mathbf{exp}\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right)\right] < \infty$$

On définit alors un processus *W* et une mesure *Q* en posant :

$$W_t = B_t + \int_t^T \lambda(u)du \qquad \frac{dQ}{dP} = \mathbf{exp}\left(-\int_0^T \lambda(u)dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(u)du\right)$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que *W* est un *Q* mouvement brownien.

5. Les améliorations possibles

5.2. Le prix de marché du risque

On déduit de ce théorème général que dans un modèle de taux mono factoriel, en notant x le facteur de risque sous-jacent :

$$dx_t = \mu(t,x_t)dt + \sigma(t,x_t)dW_t \qquad dx_t = \left(\mu(t,x_t) - \lambda(t)\times\sigma(t,x_t)\right)dt + \sigma(t,x_t)dW_t^Q$$

Dans le cas particulier du modèle de Vasicek cela conduit à :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\, dW_t \qquad dr_t = a(b_\lambda - r_t)dt + \sigma\, dW_t^Q$$

avec $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$. On dispose donc d'un cadre théorique *a priori* simple pour relier les deux visions (historique et risque neutre). Ce cadre suppose toutefois que la forme du prix de marché du risque est simple et, en pratique, que celui-ci est constant.

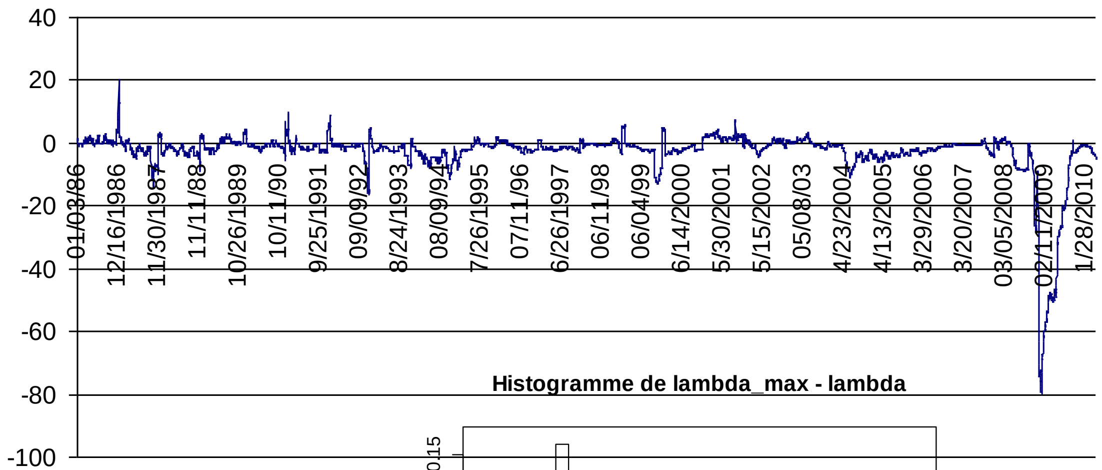
5. Les améliorations possibles

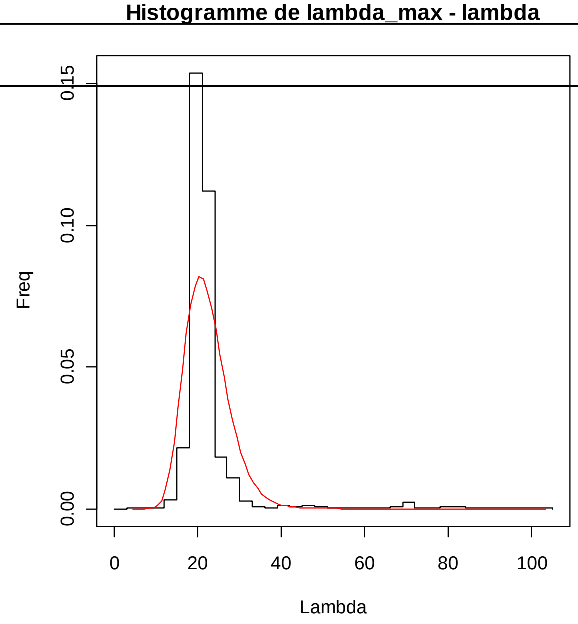
5.2. Le prix de marché du risque

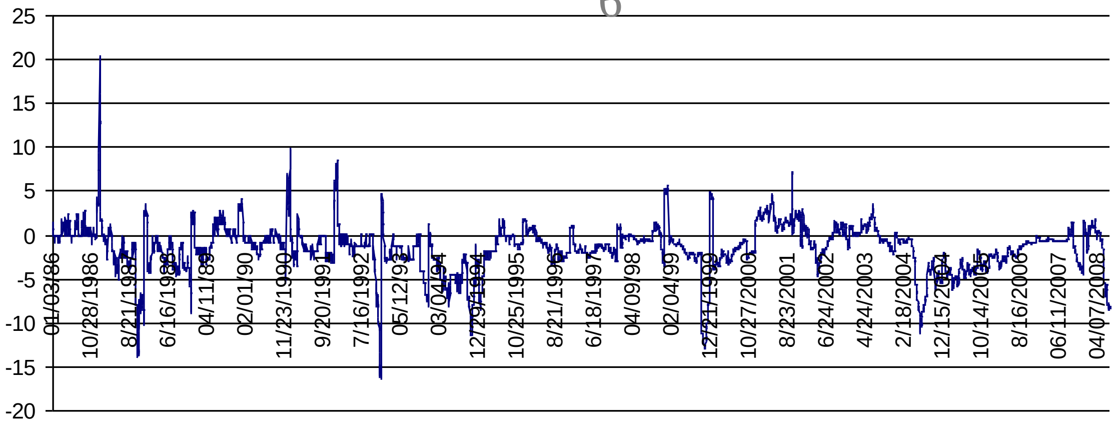
Le prix de marché du risque est très erratique (Ahmad et Willmot [2006]) :

$$-\frac{\ln P}{T-t} = r + \frac{1}{2}(T-t)(u-\lambda w) + o(T-t)$$

$$\lambda_t = \frac{2\left(R_t^1 - R_t^{1,3}\right)}{\frac{1}{6}w} + \frac{u}{w}$$







5. Les améliorations possibles

5.2. Le prix de marché du risque

La mise en œuvre dans le cadre d'un modèle de taux mono factoriel est simple

$$dr_t = \left(u_t - \lambda_t w_t\right) dt + w_t dW_t$$

$$d\lambda_t = \left(p_t + \lambda_t q_t\right) dt + q_t dW_t^2$$

$$\longrightarrow \quad P(t,T) = E_t\left[\mathbf{exp}\left(-\int_t^T r_s ds\right)\right]$$

et on peut ensuite utiliser une approche par simulation :

$$P_K(t,T) = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{exp}\left(-\sum_{i=1}^{n} r_k(t_i)\right)$$

Cela évite la contrainte usuellement imposée de disposer d'un modèle affine sous *P* et *Q* (*cf*. Stanton [1997] qui discute ce point et Caja et Planchet [2010]).

5. Les améliorations possibles

5.2. Le prix de marché du risque

Cette approche présente l'avantage d'utiliser directement les paramètres *u* et *w* du processus de taux court dans l'univers historique qui, complétés par la description de λ, permet de calculer des prix.

La logique de calibrage du modèle est alors « naturelle » :

- calibrage à partir de données historiques du facteur de risque (ici le taux court) ;

- calibrage de λ à partir de prix (ici de ZC).

De la sorte il devient possible de calculer des quantiles et des prix de manière cohérente.

Difficulté : instabilité du calibrage en fonction de l'historique retenu…

Alternative : ne pas rechercher la cohérence entre les 2 approches (*cf*. 2.6)

5. Les améliorations possibles

5.3. La structure de dépendance

Peu importante pour le calcul du *best estimate*, la structure de dépendance devient déterminante pour le calcul du besoin en capital. La copule gaussienne utilisée la plupart du temps n'est pas adaptée (ici on modélise l'inflation, les taux court et long, les rendements des actions et de l'immobilier) :

Copule	La norme	La norme
Gaussienne	1,408	*13,476*
Student	1,916	58,224
Cook Johnson	*0,974*	13,786
Gumbel	0,989	13,865
Franck	0,988	13,857

On est conduit à retenir une copule archimédienne (*cf*. Armel et *al*. [2010]). Plus généralement on peut utiliser des structures de dépendance hiérarchiques en présence d'un nombre élevés de classes d'actif (*cf*. Bouvier [2010]).

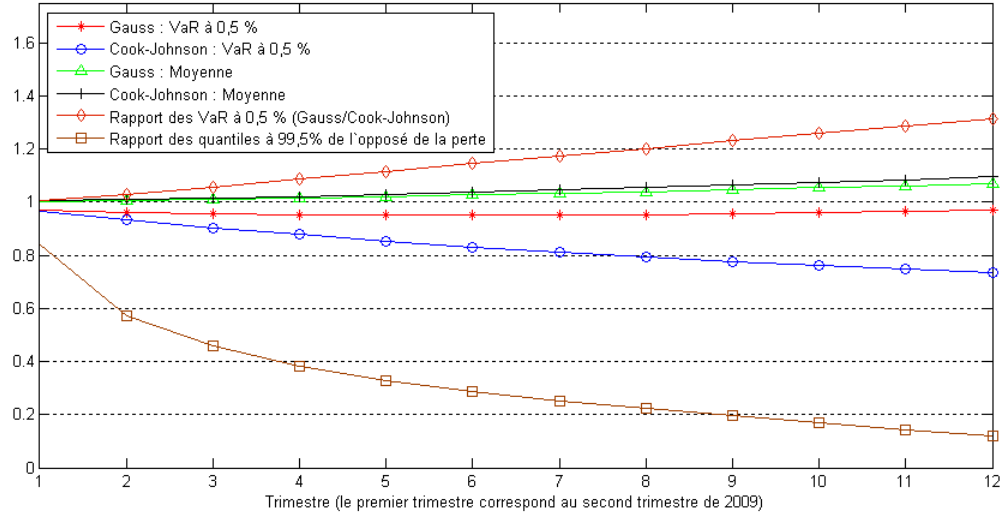
NB : l'existence d'un processus ainsi construit n'est pas simple à prouver.

5. Les améliorations possibles

5.3. La structure de dépendance

Les conséquences du point de vue de l'exigence de marge sont sensibles. On considère un portefeuille composé de 80 % d'obligations d'Etat EEA 5 ans, 10 % d'actions françaises et 10 % d'immobilier, géré de manière à maintenir cette allocation constante.

$$R'(t) = \frac{1 - VaR_{[0,t]}^{Gauss}}{1 - VaR_{[0,t]}^{Cook-Johnson}}$$



Le SCR est égal à 4,7 % avec la structure normale, 12,2 % avec Clayton.

5. Les améliorations possibles

5.4. Modalités d'utilisation du GSE

Une fois le GSE construit, son utilisation peut (doit) parfois être optimisées, notamment au regard de contraintes de temps de calcul.

On a vu en effet que le schéma de calcul d'un *best estimate* présenté en introduction requiert *a priori* la simulation d'un nombre élevé de trajectoires pour voir converger les estimateurs empiriques vers leurs valeurs théoriques.

$$BEL = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{a=1}^{A}\frac{Flux_{t,n,a} - Cotisation_{t,n,a} + Frais_{t,n,a} - Chargement_{t,n,a}}{\left(1+R_n\left(0,t\right)\right)^t}$$

$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} E^{P^A\otimes Q^F}\left(\Lambda\right)$$

Dès lors il est peut être utile (indispensable) d'optimiser ce schéma. On présente ci-après très succinctement la méthode proposée dans Nteukam et Planchet [2012].

5. Les améliorations possibles

5.4. Modalités d'utilisation du GSE

Pour des raisons d'optimisation des temps de calculs, on peut remplacer le faisceau de trajectoires du processus d'actif par un ensemble simplifié construit de la manière suivante :

- on fixe une partition de $[0,+\infty[$, $\left\{\left[s_{j-1},s_j\right[,1\leq j\leq p\right\}$
- on pose $\xi_j(t)=\mathbf{E}\left(S(t)\middle|S(t)\in\left[s_{j-1},s_j\right[\right)$
- on définit un nouveau processus $\xi(t)$ en sélectionnant l'une des *p* trajectoires $\xi_j(t)$ chacune ayant la probabilité :

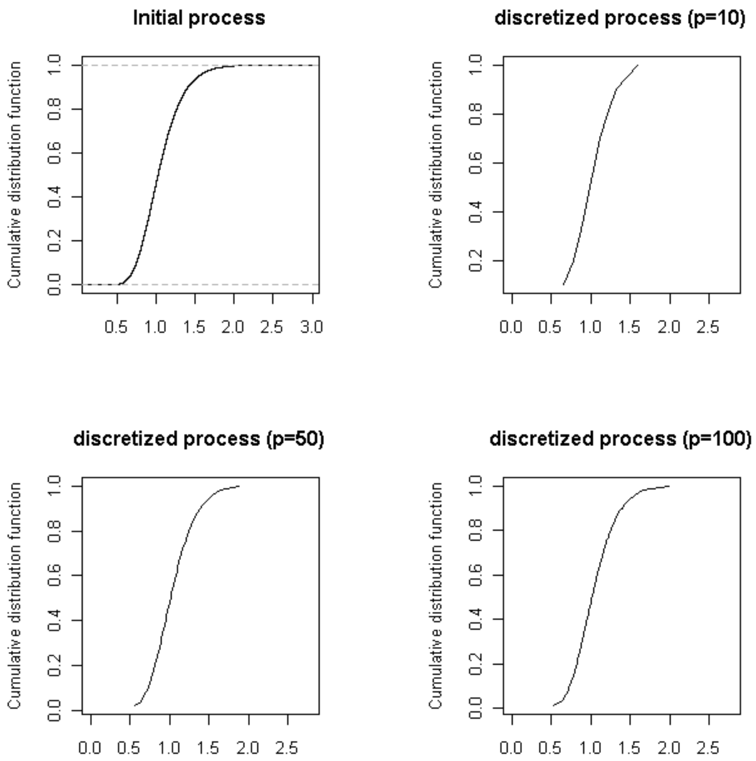
$$\pi_{t,j}=P\left(S(t)\in\left[s_{j-1},s_j\right[\right)$$

En d'autres termes on effectue des regroupements de trajectoires en fonction de la valeur au terme du processus d'origine.

5. Les améliorations possibles

5.4. Modalités d'utilisation du GSE

On trouve typiquement



Le calcul du BEL peut ainsi être effectué de manière plus efficace.

Synthèse

La description des dynamiques sous une probabilité risque-neutre, si elle fournit un cadre simple pour calculer des provisions (des prix) peut, lorsqu'elle est utilisée sans précaution :

- conduire à une vision simpliste du prix de marché du risque, pénalisante dans une perspective de long terme ;

- donner lieu à des incohérences entre la vision « probabilité réelle » et la vision « probabilité risque neutre » de la dynamique des facteurs.

La modélisation explicite des prix de marché du risque, qui n'empêche pas de recourir à la (ou une) probabilité risque neutre pour la commodité des calculs, permet de construire un GSE plus cohérent.

Synthèse

Parallèlement à la prise en compte plus précise de la double vision « risque neutre / réel », il apparaît que les GSE doivent être enrichis sur la modélisation du comportement des obligations, pour intégrer l'ensemble des risques associés : taux, crédit, liquidité (et inflation ?).

Enfin, la mise en œuvre, que ce soit pour l'estimation des paramètres ou la projection des facteurs de risque, nécessite des précautions (trop rarement prises) et dont la négligence peut conduire à des résultats fortement biaisés.

Références bibliographiques

ACP [2010] *Orientations nationales complémentaires*

AHMAD R.; WILMOTT P. [2006] « The Market Price of Interest-rate Risk: Measuring and Modelling Fear and Greed in the Fixed-income Markets », *Wilmott magazine*.

AHLGRIM K. C., D'ARCY S. P., GORVETT R. W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession ». *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92. (http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf).

ANG A., BEKAERT G., WIE M. [2008] « The Term Structure of Real Rates and Expected Inflation », *Journal of Finance*, Volume 63, Issue 2, pp 797–849.

ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.

BAUER D., BERGMANN D., REUSS A. [2010] « Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach », *Proceedings of the 2010 ICA congress*.

BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. », *Bulletin Français d'Actuariat,* vol. 11, n°21.

BOUVIER P. [2010] *Application des copules à la finance de marché*, Thèse de doctorat, UQAM.

BRENNAN M.; XIA Y. [2000] « Dynamic Asset Allocation under Inflation, », UCLA, Working Paper, 24-00.

CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, , Vol.78 (3/4).

CEIOPS [2010] *Technical specifications for QIS 5*

DUFFIE D., SINGLETON K.J. [2003] *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press.

FRIGGIT J. [2001] *Prix des logements, produits financiers immobiliers et gestion des risques*, Paris: Economica

GAUTHIER T. [2011] *Développement d'un générateur de scénarii économiques au sein d'une compagnie d'assurance-vie*, Mémoire d'actuaire, ISFA.

Références bibliographiques

IFERGAN E. [2013] Mise en œuvre d'un calcul de *best estimate*, Mémoire d'actuaire, Dauphine.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

HEATH D., JARROW R., MORTON K. [1990] « Bond pricing and the term structure of interest rate: a discret time approximation », *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 25, 419-440.

HULL J., WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate-Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, (Winter 1990), pp. 573-592.

LAIDI Y., PLANCHET F. [2014] « Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance », Les cahiers de recherche de l'ISFA, n°2014.13.

LAIDI Y. [2013] Problématiques de calibration en vue de l'évaluation des risques de taux, de défaut et de liquidité, Mémoire d'actuaire, CNAM.

LEROY G., PLANCHET F. [2010] « Que signifie la ruine dans Solvabilité 2 ? », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°147 du 01/05/2010.

LONGSTAFF F.A.; MITHAL S.; NEIS E. [2005] « Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market», *Journal of Finance*, Vol. LX, n° 5.

NTEUKAM O., PLANCHET F. [2012] « Stochastic Evaluation of Life Insurance Contract: Model Point on Asset Trajectories & Measurement of the Error Related to Aggregation », *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 51, pp. 624-631.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.

REVUZ D., YOR M. [1999] *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Third edition. Springer Verlag, Berlin.

RACICOT F.E., THEORET R. [2006] « Les modèles HJM et LMM revisités et leurs versions étendues », *Cahier de Recherche* n°08-2006, UQAM.

ROGERS L.C.G. [1995] « Which model for term-structure of interest rates should one use? », *Mathematical Finance*, IMA vol. 65, Springer, 93-116.

RONCALLI T. [1998] *La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique*, Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV

Références bibliographiques

STANTON R. [1997] « A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk », *Journal of Finance* 52: 1973-2002.

WALTER C., BRIAN E. (Dir.) [2008] *Critique de la valeur fondamentale*, Paris : Springer

WINDCLIFF H., BOYLE P. [2004] « The 1/n pension investment puzzle », *North American Actuarial Journal*, vol. 8, n°3, p. 32-45.

ZAJDENWEBER D. [2000] *Économie des extrêmes*, Paris : Flammarion

Contact

Frédéric PLANCHET

frederic@planchet.net

PRIM'ACT
42 avenue de la Grande Armée
75017 Paris
+33-1-42-22-11-00

ISFA
50 avenue Tony Garnier
F - 69007 Lyon
+33-4-37-38-74-37

http://www.primact.fr
http://www.ressources-actuarielles.net
http://blog.ressources-actuarielles.net