



# Einführung in Matlab

## 6. Differentialgleichungen

Prof. Dr. Christiane Zarfl, Dipl.-Inf. Willi Kappler, Prof. Dr. Olaf  
Cirpka

---



- wie Sie durch Skripte Befehlsfolgen wiederverwertbar machen.
- wie Sie häufig vorkommende Berechnungen in Algorithmen formulieren.
- wie Sie eigene Funktionen zur Wiederverwertung von Berechnungsschritten erstellen.

*Wie kann ich eigene Funktionen zur Lösung von Differentialgleichungen verwenden?*



- können Sie mit Hilfe von selbst definierten Funktionen in Matlab bereits implementierte Lösungsmethoden für Differentialgleichungen verwenden.



- einfache DGL

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot y, \text{ mit } y(0) = y_0 \text{ bei } t=0$$

- System von DGLn

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, \dots, y_n), y_1(t_0) = y_{1,0} \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, \dots, y_n), y_n(t_0) = y_{n,0} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dt} &= f(t, y), y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$



- Matlab stellt Methoden zur DGL-Lösung bereit, z.B. `ode45`, `ode15s`,  
...
- Matlab braucht eine Funktion, in der die Veränderung  $\partial x / \partial t$  in  
Abhängigkeit der Zeit und des gegenwärtigen Wertes  $x$  errechnet wird
  - `function dxdt = velo(t,x)`  
...
  - `dxdt = ...`
  - Input
    - erstes Argument: Zeit  $t$
    - zweites Argument: Zustand  $x$
  - Output: Veränderung des Zustands mit der Zeit
- Matlab hat Funktionen zum Lösen von DGLn, die von einem Script  
(oder einer anderen Funktion) aufgerufen werden müssen
  - `spanne = [tmin tmax]`
  - `x0 = ...`
  - `[t,x]=ode15s(@velo,spanne,x0)`



## Radioaktiver Zerfall mit DGL-Löser

- Schreiben Sie eine Funktion `radio.m` für die DGL zur Beschreibung des radioaktiven Zerfalls eines Isotops A mit 100 Bq als Startwert und einer Zerfallsrate von 0,005 [1/Jahr]:  
`function dxdt=radio(t,x).`
- Schreiben Sie ein aufrufendes Script. Plotten Sie den Zeitverlauf über einen anschaulich gewählten Zeitraum.



## Gekoppelte DGLn: Radioaktive Zerfallskette mit DGL-Löser

- Sie möchten nun nicht nur das Isotop A selbst, sondern auch sein Zerfallsprodukt B betrachten, das wiederum zerfällt. Schreiben Sie eine Funktion `radiokette.m` für die DGLn zur Beschreibung dieser radioaktiven Zerfallskette. Was sind sinnvoll gewählte Startwerte für A und B? Wählen Sie wieder die Zerfallsrate von 0,005 [1/Jahr] für A und 0,003 [1/Jahr] für B. Was ändert sich für Ihre Funktion `function dxdt=radiokette(t,x)` im Vergleich zur vorhergehenden Aufgabe?
- Schreiben Sie wieder ein aufrufendes Script. Plotten Sie den Zeitverlauf von A und B.



## Zusatz: Particle Tracking durch ein Geschwindigkeitsfeld

- Geschwindigkeitsfeld: Brunnen plus Grundströmung

$$v_x(x, y) = \frac{T}{n \cdot m} \cdot I + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot m} \cdot Q \cdot \left( \frac{x - x_b}{r^2} \right)$$

$$v_y(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot n \cdot m} \cdot Q \cdot \left( \frac{y - y_b}{r^2} \right)$$

- m Mächtigkeit des Grundwasserleiters (=10 m)
- n Porosität (25 %)
- I Hydraulischer Gradient ohne Brunnen (=1%)
- Q Förderrate des Brunnens (  $Q = 1000 \text{ m}^3/\text{d}$  )
- T Transmissivität des Grundwasserleiters ( $=5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ )
- r Abstand zum Brunnen
- $x_b, y_b$  Koordinaten des Brunnens (-50,0)





## Zusatz: Particle Tracking durch ein Geschwindigkeitsfeld

- Schreiben Sie eine Funktion `velo.m` für das Geschwindigkeitsfeld  
`function v=velo(t,x)`
- Schreiben Sie ein aufrufendes Script mit Anfangspunkten wie in der Hausübung
  - Integrieren Sie über 14 Tage Laufzeit
  - Plotten Sie die Trajektorien



- Sehr guter Matlab [Online Kurs](#) mit Beispielen.
- Wie in den meisten anderen Dingen auch: Verwendung von Matlab wird “vertrauter”/leichter mit der Übung.