福州大学概率论与数理统计期末试卷答案（20220529）

一、选择题　1.C　2.A　3.D　4.D　5.C　6.C　7.C　8.D　9.B　10.C

11.D　12.A　13.D　14.B　15.B

二、(10 分)解：

(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\therefore \int_0^a \frac{x}{2}dx = \frac{a^2}{4} = 1$，$\therefore a = 2$

$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \frac{3}{4}$

(2)　显然，$b > 0$.

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(bX^2 \le y) = P(X^2 \le y/b)$

当 $y \le 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，$F_Y(y) = P(-\sqrt{y/b} \le X \le \sqrt{y/b}) = F_X(\sqrt{y/b}) - F_X(-\sqrt{y/b})$

$= F_X(\sqrt{y/b})$

两边求导得，$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{by}} f_X(\sqrt{y/b})$

$\because Y \sim U(0,1)$，$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

所以，当 $0 < \sqrt{y/b} < 2$，即，当 $0 < y < 4b$ 时，$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{by}} \cdot \frac{\sqrt{y/b}}{2} = \frac{1}{4b} = 1$

因此，$b = 1/4$

三、(10 分)解：

(1) $\because P(A) = 1/2$，$P(B|A) = P(A|B) = 1/3$

$\therefore P(B) = 1/2, \qquad P(AB) = 1/6$

依题意可得，

$P(X = 1, Y = 1) = P(AB \cap (A \cup B)) = P(AB) = 1/6$

$P(X = 1, Y = 0) = P(AB \cap \bar{A}\bar{B}) = P(\phi) = 0$

$$P(X=0,Y=1)=P(\overline{AB}\cap(A\cup B))=P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A)+P(B)-2P(AB)=2/3$$

$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{AB}\cap(\bar{A}\bar{B}))=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1/6$$

(2) 显然，Z 可取 0, 1

$$P(Z=0)=P(X=1,Y=1)+P(X=0,Y=0)=1/3$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)=2/3$$

四、**(10 分)**解：

(1) $\because \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} A\exp\left\{-\dfrac{x^2+y^2-2x-4y+5}{2}\right\}dxdy=2\pi A=1$，

$\therefore A=\dfrac{1}{2\pi}$

(2) 可知，$(X,Y)\sim N(1,2,1,1,0)$.

因为$U=2X-Y$，$V=X+2Y$，所以(*U*, *V*)服从二维正态分布.

又，$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(2X-Y,X+2Y)=2D(X)+3\operatorname{cov}(X,Y)-2D(Y)$

而 $D(X)=1, D(Y)=1, \operatorname{cov}(X,Y)=0$

$\therefore \operatorname{cov}(U,V)=0$

故，*U*与 *V*不相关，从而相互独立。

五、**(8 分)**解：

设防疫站准备 n 支疫苗，

设 X 为 1000 个居民中参加疫苗接种的人数，则 $X\sim B(1000,0.6)$

由中心极限定理，近似地，$X\sim N(600,240)$

那么，$P(X\le n)\approx\Phi\left(\dfrac{n-600}{4\sqrt{15}}\right)\ge 0.95$

$\because \Phi(1.65)=0.95, \therefore \dfrac{n-600}{4\sqrt{15}}\ge 1.65$

解得$n\ge 625.74$，所以至少要准备 626 支疫苗。

六、**(10 分)**解：

(1)求最大似然估计：

因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

所以，似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\left(\sigma^2\right)^{-n/2}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$，

取对数，$\ln L(\sigma^2)=-n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

求导数，$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}\triangleq 0$

因此，σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$

(2) 验证无偏性

$$\because \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

$$\therefore E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right)=n,$$

$$\therefore E\left(\hat{\sigma}^2\right)=\frac{E\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)}{n}=\frac{n\sigma^2}{n}=\sigma^2$$

因此，$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}$ 为 σ^2 的无偏估计。

七、**(7 分)**解：

(1) $\because X\sim N(\mu,1), Y\sim N(\mu,2)$，且 X 与 Y 相互独立，

$\therefore \bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,\frac{1}{10})$，那么 $\sqrt{10}(\bar{X}-\bar{Y})\sim N(0,1)$

则 $10(\bar{X}-\bar{Y})^2\sim\chi^2(1)$，

$\therefore D\left[10(\bar{X}-\bar{Y})^2\right]=2$，因此，$D\left[(\bar{X}-\bar{Y})^2\right]=1/50$.

(2) 若显著性水平 α 越大，则检验结果是越可能拒绝 H_0.