20180131《概率统计》试卷答案

一．　选择题　　3 ，2 ，4 ，3，4 ，2 ，2 ，1 ，1 ，3

二．　填空题

1. $C_4^2 p^3(1-p)^2$　　2. $\frac{1}{3}$　　3. $\frac{2}{3}$

4. “小概率事件”　　5. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$　　6. $t(12)$

三．解：设 A 表示“所取的 2 件产品中至少有一件不合格品”，B 表示“所取的 2 件产品中有一件是不合格品的条件下，另一件也是不合格品”，C 表示“所取的 2 件产品都是不合格品”，则

（1）$P(A)=\frac{C_4^2+C_4^1\times C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{2}{3}$

（2）$P(B)=P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{P(C)}{P(A)}$　　$P(C)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$

$P(B)=\frac{2}{15}/\frac{2}{3}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

四．　解：（1）　$\int_{-1}^{1}\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}dx=C\arcsin(x)\Big|_{-1}^{1}=\pi C=1\Rightarrow C=\frac{1}{\pi}$

（2）$F(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ \int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin(x), -1<x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}$

五．解：由正态分布的可加性，则 $X-Y$ 服从 $N(0,1)$，其概率密度为 $f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$，

令 $M=|Z|$，$F_M(x)=P(M\le x)=P(|z|\le x)$

当 $x\le 0$ 时，$F_M(x)=0$；当 $x>0$ 时，

$F_M(x)=P(M\le x)=P(|Z|\le x)=P(-x\le Z\le x)$
$=F_Z(x)-F_Z(-x)$

因此 Y 的概率密度 $f_M(x)=f_Z(x)+f_Z(-x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$（x>0),当 x<0 时，则为 0

六．(1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},-2<x<0,y<0<x+2\\ 0,其他\end{cases}$

(2) P(Y>X²)= $\frac{\int_{-1}^{0}x+2-x^2dx}{2}=\frac{7}{12}$;

(3) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2-y}{2},0<y<2\\ 0,其他\end{cases}$

已 知 Y=y(0<y<2) 的 条 件 下 X 的 条 件 密 度 函 数 为

$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2-y},y-2<x<0\\ 0,其他\end{cases}$

七.解以$X_i(i=1,2,\cdots,5000)$记第i个零件的重量，设$W=\sum_{i=1}^{5000}X_i$, $E(X_i)=0.5$, $D(X_i)=0$

由中心极限定理，W近似地服从$N(2500,50)$,

$P(W>2510)=1-P(W\le 2510)\approx 1-\Phi(\frac{2510-2500}{5\sqrt{2}})=1-\Phi(\sqrt{2})$

$=1-0.9213=0.0787$

八． 解$E(X)=\int_0^\theta x\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$ 令$\frac{2}{3}\theta\triangleq\overline{X}$，得$\theta$的矩估计$\hat{\theta}=\frac{3}{2}\overline{X}$.

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{-2n}2^n\prod_{i=1}^{n}x_i,0\le x_i\le\theta,\\ 0,其它.\end{cases}$$

由于对数似然方程：

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(-2n\ln\theta+n\ln 2+\ln\prod_{i=1}^{n}x_i)=\frac{-2n}{\theta}=0$$

无解，则直接由L(θ)表达式可以看出θ越小，L(θ)越大，同时$\theta\ge x_i, i=1,2,...,n,$

故θ的极大似然估计$\hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}=X_{(n)}$.

20180709《概率统计》试卷答案

二． 选择题

3 2 4 2 3 3 4 3 1 1

二． 填空题

2. $5/11$ 2. $45(\frac{\pi}{4})^2(1-\frac{\pi}{4})^8$ 3. $e^{-3}+3(1-e^{-1})e^{-2}$ 4. $1/4$ 5. $a+b=1$

6. (3.002, 3.198)

三． 解： **1.设 B_1 为通讯录中的某人是家人，B_2 为通讯录中的某人是亲戚，B_3 为通讯录中的某人是朋友，**

A 为小张收到节日祝福

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.2\times0.9+0.3\times0.6+0.5\times0.8$$
$$=0.76$$

四． 解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Aye^{-x}dydx=\int_0^{+\infty}\int_0^1 Aye^{-x}dydx=\frac{A}{2}=1,\therefore A=2$

（2）当$x\le 0$或$y\le 0$时$,F(x,y)=0$

当$x>0,0<y<1$时,

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 2ve^{-u}dvdu=\left[-e^{-u}\right]_0^x\left[v^2\right]_0^y=(1-e^{-x})y^2$$

当$x>0,y\ge 1$时,

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^1 2ve^{-u}dvdu=\left[-e^{-u}\right]_0^x\left[v^2\right]_0^1=1-e^{-x}$$

$$\therefore F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})y^2 & x>0,0<y<1\\ 1-e^{-x} & x>0,y\ge 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $P(X<1)=F(1,+\infty)=1-e^{-1}$

(4) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 2ye^{-x}dy=e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

已知 $X=x$ $(x>0)$ 的条件下，

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{2ye^{-x}}{e^{-x}}=2y & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

五． 解：$D(X) = D(Y) = \sigma^2$,

$$\operatorname{cov}(U,V) = \operatorname{cov}(X+Y, X-Y) = \operatorname{cov}(X,X) - \operatorname{cov}(X,Y)$$
$$+ \operatorname{cov}(Y,X) - \operatorname{cov}(Y,Y) = D(X) - D(Y) = 0$$

$\rho_{UV} = 0$，U 与 V 不相关，

（U,V）为二维正态分布，所以 U 与 V 独立

六． $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & (x,y) \in G \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$F_Z(z) = P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \le z\right) = P\left(X^2+Y^2 \le z^2\right) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le z^2} f(x,y)dxdy$$

$$\text{当}0 \le z < R\text{时}, F_Z(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^z \frac{1}{\pi R^2} r dr d\theta = \frac{z^2}{R^2}$$

$$\text{当}z < 0\text{时}, F_Z(z) = 0; \text{当}z \ge R\text{时}, F_Z(z) = 1$$

$$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{R^2} & 0 \le z < R \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

当 R=10， $f_Z(z) = \begin{cases} z/50, & 0 < z < 10, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

七． $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，所以 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 独立同分布

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) = 2$$

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[E(X_i^4) - \left(E(X_i^2)\right)^2\right] = \frac{4}{n}$$

由独立同分布中心极限定理， 当 n 充分大时，$Y_n \sim N(2, \dfrac{4}{n})$ （近似）

若 $n=100, P(Y_n \le 3.2) = \Phi(\dfrac{3.2-2}{\frac{2}{10}}) = \Phi(6)$

八． 解：（1）**矩估计**

法 1：$E(X)=0=\bar{X}$，$E(X^2)=D(X)=\frac{\theta^2}{3}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$，

估计值为 3.4380

法 2：$D(X)=\frac{\theta^2}{3}=\frac{n-1}{n}S^2 \Rightarrow \hat{\theta}=\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}}S$ =3.4380

（2）极大似然估计量 $-\theta \le \min_{1\le i\le n} x_i < \cdots < \max_{1\le i\le n} x_i \le \theta$

$\hat{\theta}=\max\{\left|\min_{1\le i\le n} x_i\right|,\left|\max_{1\le i\le n} x_i\right|\}$，$-\theta \le -2.9 < -2.2 < \cdots < 2.3 < 2.7 \le \theta$，

估计值为 2.9

《20190116 概率论与数理统计 A 卷》试卷参考答案

三． 选择题

1，2，2，，1，4，3，3，2，1，2

二． 填空题

1. $\frac{b}{a+b}$ 2. 1 3. 3 4. 0.75 5. $\frac{1}{3}$ 6. **(75.39，80.61)**

（8 分）三． 解：设 A 表示“会解这道题”，B 表示“选出正确答案” （**---2 分**）

$P(A)=0.6$，$P(\bar{A})=0.4$，$P(B|A)=1$，$P(B|\bar{A})=\frac{1}{4}$，

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.7$ （**---3 分**）

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{6}{7}$ （**---3 分**）

（10 分）四．解：$P(X>20)=1-F(20)=e^{-20\times 0.1}=e^{-2}$ （**---4 分**）

设 Y 为 10 次微信聊天中超过 20 分钟的次数，则 $Y\sim B(10,e^{-2})$ （**---3 分**）

$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^{10}$ （**---3 分**）

（**10** 分）五.

解：$P(X=i)=\sum_{j=0}^{\infty}e^{-7}\frac{3^i\cdot 4^j}{i!\cdot j!}=e^{-3}\frac{3^i}{i!}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-4}\frac{4^j}{j!}=e^{-3}\frac{3^i}{i!},i=0,1,\cdots$ （ **---4** 分）

$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{P}(3)$,同理 $P(Y=j)=e^{-4}\frac{4^j}{j!},j=0,1,\cdots$, $\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{P}(4)$ （ **---2** 分）

$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j),i=0,1,\cdots,j=0,1,\cdots$, X 与 Y 的相互独立

$P(X=i\,|\,Y=1)=P(X=i)=\frac{e^{-3}3^i}{i!},i=0,1,\cdots$ （ **---4** 分）

（**10** 分）六. 因为 (X,Y) 是二维正态变量，而 W 与 V 分别是 X,Y 的线性组合，故由二维正态随机变量的性质知 (W,V) 也是二维正态变量。 （ **---2** 分）

现在 $a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$，

故 $Cov(W,V)=Cov(X-aY,X+aY)=\sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2=0$ （ **---4** 分）

即知 W 与 V 不相关 （ **---2** 分）

又因 (W,V) 是二维正态变量，故知 W 与 V 是相互独立的。 （ **---2** 分）

（**10** 分）七. 设第 i 只蛋糕的价格为 $\boldsymbol{x_i}$，$i=1,2,\cdots,300$,

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x_i})=1\times0.3+1.2\times0.2+1.5\times0.5=1.29$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x_i^2})=1^2\times0.3+1.2^2\times0.2+1.5^2\times0.5=1.713$ （ **---1** 分）

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x_i})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x_i^2})-\mathrm{E}(\boldsymbol{x_i})=0.0489$ （ **---1** 分）

设$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{300}\boldsymbol{x_i}$, 由独立同分布中心极限定理，

$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{N}(300\times1.29,300\times0.0489)$（近似） （ **---2** 分）

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}\geq400)=1-\Phi(3.39)=1-0.997=0.003$ （ **---1** 分）

(2)设 Y 为 300 只蛋糕中售出价格为 1.2 元的蛋糕的个数，则$\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{B}(300,0.2)$,

（ **---2** 分）

由中心极限定理， $\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{N}(300\times0.2,300\times0.2\times0.8)$（近似） （ **---2** 分）

$$P(Y>60)=1-P(Y\le 60)=1-\Phi(0)=0.5$$ （ **---1 分**）

（10 分）八． 解：

（1）矩估计 $E(X)=\int_0^1(\theta+3)x^{\theta+3}dx=\dfrac{\theta+3}{\theta+4}=\bar{X}$ （ **---2 分**）

$$\hat{\theta}=\frac{4\bar{X}-3}{1-\bar{X}}$$ （ **---2 分**）

$\bar{x}=0.5$， $\hat{\theta}=\dfrac{4\bar{x}-3}{1-\bar{x}}=-2$ （ **---1 分**）

（2）极大似然估计 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta+3)x_i^{\theta+2}=(\theta+3)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta+2}$ （ **---2 分**）

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+3)+(\theta+2)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+3}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，$\hat{\theta}=-3-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ （ **---2 分**）

$$\hat{\theta}=-3-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}=-1.94$$ （ **--1 分**）

20190702 数理统计 A 卷参考答案

一． 选择题 1,3,3,4,1,1,3,2,1,1

二． 填空题

1. $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$ 2. $\dfrac{36}{125}=0.288$ 3. 12 4. 独立同分布 5. $\dfrac{1}{2}$

6. 小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的

（8 分）三． 解：当 $y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$

当$y<2$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(2-|X|\le y)=P(|X|\ge 2-y)=1-P(|X|<2-y)$

$=1-P(y-2<X<2-y)=1-F_X(2-y)+F_X(y-2)$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(2-y)+f_X(y-2)=\dfrac{2}{\pi(5-4y+y^2)}, y<2 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

（**10** 分）四． 解：（1） $E(W)=E[(aX+3Y)^2]=a^2E(X^2)+6aE(XY)+9E(Y^2)$

$E(X^2)=4, E(Y^2)=16, E(XY)=-4$，

故 $E(W)=4a^2-24a+144=4(a-3)^2+108.$

故当 $a=3$ 时 $E(W)$ 取最小值， $\min E(W)=108.$

（**10** 分）五．(1) 当 $0<x<1$ 时 $f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x)$ 故

$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 当 X=x($0<x<1$)时， $f_Y(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{6x}{6x(1-x)}=\dfrac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

(2) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{1/2}6xdx\int_x^{1-x}dy=\int_0^{1/2}6x(1-2x)dx=\dfrac{1}{4}$

（**10** 分）六.一年内第 i 天售的汽车数为 X_i， $i=1,2,\cdots,365$，一年内销售汽车的数目设为

$$X=\sum_{i=1}^{365}X_i,$$

$E(X_i)=D(X_i)=2$

由独立同分布中心极限定理， $X\sim N(365\times 2, 365\times 2)$（近似）

$$P(X\ge 700)=1-F(700)\approx 1-\Phi\left(\frac{700-365\times 2}{\sqrt{365\times 2}}\right)=1-\Phi(-1.11)=\Phi(1.11)=0.8665$$

（**10** 分）七．（1） $E(X)=-\theta^2+(1-\theta)^2=1-2\theta=\bar{X}$， $\hat{\theta}=\dfrac{1-\bar{X}}{2}$，估计值为 0.35

（2）极大似然估计 $L(\eta)=\prod_{i=1}^{n}(1-\mu)^{-1}=(1-\eta)^{-n}$ （$\eta<\min\limits_{1\le i\le n}x_i\le x_i\le\max\limits_{1\le i\le n}x_i<1$）

$\ln L(\eta)=-n\ln(1-\eta)$

$\dfrac{d\ln L(\eta)}{d\eta}=\dfrac{-n}{1-\eta}=0$，方程无解，直接对 η 的边界点进行分析，得 $\hat{\eta}=\min\limits_{1\le i\le n}x_i$

（10 分）八．解: $\because P(A)=\frac{1}{2}, P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(AB)=\frac{1}{8}, P(B)=\frac{1}{2}$

$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{8}$

$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{3}{8}$

$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{8}$

$P(X=0,Y=0)=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{1}{8}$

即

$$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{8},\quad P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}$$

$P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)P(Y=0)$，$X$与$Y$不独立

20200813 参考答案

1.设B_1为乘坐地铁自驾，B_2为乘坐公交，B_3为骑共享单车，B_4为自驾

A 为参赛迟到

$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.05\times0.5+0.25\times0.1+0.1\times0.2+0.2\times0.2=0.11$

$P(B_1|A)=P(B_2|A)=0.05\times0.5/0.11=5/22$,

$P(B_3|A)=0.1\times0.2/0.11=2/11$

$P(B_4|A)=0.2\times0.2/0.11=4/11$

最应该共享单车，最不应该自驾

2. 解： $P(-1<x<\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}x^3dx=\frac{1}{256}$，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, x<0,\\ \int_0^x\frac{1}{4}t^3dt=\frac{1}{16}x^4, 0\le x<2,\\ 1, x\ge 2.\end{cases}$$

3. 解：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^2 (x^2+\frac{xy}{3})dy=2x(x+\frac{1}{3}) & 当\ 0<x<1 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^1 (x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}(1+\frac{y}{2}) & 当 0<y<2 \\ 0 & 其他\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$ ，故不相互独立

4.

X \ Y	1	2	3	行和
1	1/4	1/6	1/12	1/2
2	1/8	1/12	1/24	1/4
3	1/8	1/12	1/24	1/4
列和	1/2	1/3	1/6	1

Z=X+Y	2	3	4	5	6
P	1/4	7/24	7/24	1/8	1/24

5. 解： $Y\sim B(8,p),\quad p=P(X>1)=\int_1^2\frac{1}{4}(x+1)dx=\frac{5}{8}$， $D(Y)=8\times\frac{5}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{8}$

6. 参加活动的员工数量为 $\boldsymbol{X}$，准备的礼物数为 $\boldsymbol{m}$ 件。

由题可知， $\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{B}(400,0.8)$，再由中心极限定理，近似有 $\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{N}(320,8^2)$

则 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}\le\boldsymbol{m})\approx\Phi(\frac{\boldsymbol{m}-320}{8})\ge 0.975$，即 $\frac{\boldsymbol{m}-320}{8}\ge 1.96\Rightarrow\boldsymbol{m}\ge 335.68$

所以至少准备 336 件礼物

（用独立同分布中心极限定理也可以）

7. 解：设分布函数 F(y)，　　　　　F(y)=P(Y≤y)=P(X^2 ≤y)

1）当$y\le 0$时，$F(y)=0$

2）当$y>0$时，$F_Y(y)=P(\mathrm{X}^2\le y)=P(-\sqrt{\mathrm{y}}\le\mathrm{X}\le\sqrt{\mathrm{y}})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

所以，$f(\mathrm{y})=\mathrm{F}_Y'(\mathrm{y})=\begin{cases}(2\pi y)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, \mathrm{y}>0\\ 0\quad\text{，其它}\end{cases}$

$\boldsymbol{X}\sim\mathrm{N}(0,1)$，则 $\mathrm{Y}\sim\chi^2(1)$，$E(Y)=1, D(Y)=2$

$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=2+1=3$

8. $X\sim E(\lambda)$, $E(X)=1/\lambda, D(X)=1/\lambda^2, E(\bar{X})=1/\lambda, D(\bar{X})=1/n\lambda^2$

$D(\bar{X})=1/n\lambda^2$，$E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})=1/n\lambda^2+1/\lambda^2=(1+n)/n\lambda^2$

$E(S^2)=D(X)=1/\lambda^2, E(\bar{X}^2-S^2)=\frac{1+n}{n\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{n\lambda^2}$

当$n>1$时，$\bar{X}^2-S^2$不是$\frac{1}{\lambda^2}$的无偏估计。

9. 解：样本中有 3 个 0, 3 个 1, 4 个 3.

$EX=1-\theta+3\times\frac{2\theta}{3}=1+\theta$, 则有 $\bar{X}=1+\theta$, 即θ的矩估计θ=0.5.

θ的似然函数为 $L(\theta)=\left(\frac{\theta}{3}\right)^3(1-\theta)^3\left(\frac{2\theta}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^7}\theta^7(1-\theta)^3$,

$\ln L(\theta)=\ln\frac{2^4}{3^7}+7\ln\theta+3\ln(1-\theta)$, 令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{7}{\theta}-\frac{3}{1-\theta}=0$, 可得$\hat{\theta}$=0.7.

20210619 参考答案

一， 选择题

1.B 2.A 3.A 4.C 5.D 6.D 7.C 8.B 9. C 10.D

二．解：$A_i=\{$甲、乙、丙厂生产的$\}$ $i=1,2,3$， $B=\{$取的一件产品是正品$\}$

$$P(A_1)=\frac{1}{2}，P(A_2)=\frac{1}{3}，P(A_3)=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{14}{15}+\frac{1}{6}\times\frac{19}{20}=\frac{331}{360}$$

三．解：设 X 为等待时间，$X\sim U(0,5)$，$P(X\geq 4)=\frac{1}{5}$，

设 Y 为 10 位乘客中等待时间超过 4 分钟的人数，$Y\sim B(10,0.2)$

$$P(Y=1)=C_{10}^{1}\times\mathbf{0.2}\times\mathbf{0.8}^9=2\times\mathbf{0.8}^9$$

四． $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0<x<2,0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=\iint\limits_{x+y\leq z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}0 & z\leq 0\\ \frac{1}{8}z^2 & 0<z\leq 2\\ 1-\frac{1}{8}(4-z)^2 & 2<z\leq 4\\ 1 & z>4\end{cases}$$

所以 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}z, & 0<z<2\\ 1-\frac{1}{4}z & 2\leq z<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

五． $f(x,y)=\begin{cases}2xe^{-y} & 0\leq x\leq 1,y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2xe^{-y}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 2xe^{-y}dx=e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases},$$

对$\forall x,y,\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$， X,Y 的相互独立

六．解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{-|x|}\boldsymbol{dx}=0$$，

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}^2\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{-|x|}\boldsymbol{dx}=2$$

$$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X},|\boldsymbol{X}|)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{X}|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}|\frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{-|x|}\boldsymbol{dx}=0$$

$\rho_{XY}=0$,则 X 与 Y 不相关

$\boldsymbol{X}$与$|\boldsymbol{X}|$不独立.

七 设 X_i 为**第** i **个螺丝钉的重量**，

$E(X_i)=0.1(\mathrm{kg}),\ D(X_i)=0.01^2(\mathrm{kg}^2)\quad(i=1,2,\cdots,100)$，

且 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立，由中心极限定理得：$\sum_{i=1}^{100}X_i$ 近似服从 $N(10,0.01)$，所以所求

概率为：$P(\sum_{i=1}^{100}X_i>10.2)\approx1-\Phi(\frac{10.2-10}{\sqrt{0.01}})=1-\Phi(2)=0.0228$

八．（1） $E(X)=\frac{1}{\theta}(1+2+\cdots+\theta)=\frac{1+\theta}{2}=\bar{X}$， $\hat{\theta}=2\bar{X}-1$，

（2） 似然函数 $\boldsymbol{L}(\theta)=\lambda^{\boldsymbol{n}}\prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e}^{-\lambda x_i}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}>0)$,

故 $\ln\boldsymbol{L}=\boldsymbol{n}\ln\lambda-\lambda\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}$,$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{d}\lambda}\ln\boldsymbol{L}=\boldsymbol{n}/\lambda-\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}=0$

$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$

九．（1） $2t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ **（2）增加样本的容量（3）** 对$\forall x\in R,F_X(x)$=P（X$\le x$）