

实践“终身学习”，提高数学素养

——2023-2083 学年度初二数学综合能力阳光测评

本试卷共 4 部分，满分 100 分，测评时间为 31,536,000 分钟，约合 60 年。本次测评开卷，但是测评期间请勿使用电子设备，包括但不限于电脑、手机、智能手表。测评期间，若有上厕所、进食、睡觉等需求，请向监考老师提出。测评完成后，考卷会上传至 zhixue.com。

本测评是为了纪念“人体计算机”莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler)，主要评估考生的计算能力、思考能力、耐心、身体耐力等。

如果您在本次考试中所使用的时间记为 t (分钟)，分数记为 s (分)，则您的最终成绩是 $\frac{31,536,000}{t+31,536,000} s$ (分)。

本次考试也会与您的家长同步进行。

卷 I (基础数论和组合) 满分 30

一、分解质因数(2 分/个):

1. 14360168187186799
2. 40595389620344723
3. 346002926106175951
4. 236613458928874927
5. 1019669611144195061

二、计算 Mobius 函数值(1 分/个):

- 选项: A.1 B.-1 C.0
1. 1
 2. 1237
 3. 3557461008258049
 4. 842535367
 5. 1241210146121
 6. 166163635173

三、判断质数(2 分/个):

1. 166163036173
2. 166163336173
3. 166163636173
4. 166163936173
5. 166163633173
6. 166163634173
7. 166163637173

卷 II (计算) 满分 16

四、计算(4 分/个)

1.
$$1.910731033^{3.045101} \sqrt{910.1421 + \frac{\frac{3\sqrt{3}}{3^{4.3\sqrt{101}}} + \sum_{k=0}^{\sqrt[3]{6341.10532} \lfloor \sqrt[3]{k} \rfloor} \sum_{j=0}^i \text{StirlingII}(i,j)}{\sqrt{16732}}}$$
2. 解关于 x 的方程: $\sum_{i=0}^x (i^i + \sqrt[3]{2} + (i^2 + i + 1)^{i+1}) = x^{(x^{x+1} + x + 2)} + x^{x+1} + x + 3$
3. 把 $\pi + \tan \arcsin 0.9714320154$ 精确到小数点后第 100 位
4. 计算曲线 $\sum_{i=0}^N (i^2 + 1)^N x^i y^{N-i} = N^{(N^{(N^N)})}$ 与曲线 $\int_0^N (x^x + x^N) dx = 1073741819^y$ 的交点, 其中 $N = 6^{13} + 19$

卷 III (解答题) 满分 44

五、Fjx (11 分)

【题目背景】有一位热爱数学竞赛的女神，她的名字叫做 fjx。她曾经在初二一场难度极大的考试中，轻松拿到唯一一个满分，力压所有比她高一届的数学竞赛中的佼佼者。今天，她也提出了一些问题。(自问自答)

【美术生的骄傲】

1. 如右图是微软雅黑 72 号字“神”的三视图。请用斜二测画法画出“神”字的直观图。（1 分）



正面图

右面图

俯视图

2. 画出 f1x 的三视图（正、右、上）和直观图（中心透视法）。（3 分，如果有需要可以找 f1x 解决）

【613 的传说】

3. 求证：f1s 是神的丈夫（1 分）

4. 请画出过点 $(6, 1, 3)$, $(1, 3, 6)$, $(13, 6, 0)$, $(613, 0, 0)$, $(6, 0, 13)$, $(6, 13, 0)$, 并且具有形式 $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ 的三维二次曲面（只要求画一个，

斜二测画法，要求写出方程，并且代入 $\begin{cases} x = F \\ y = J \\ z = x \end{cases}$ 之后 $f(x, y, z) = 0$ ）（3 分）

【拓展】

6. 613、631、619、1319 和 1913 都是质数。正整数 61319 具有以下性质：

(1) 连续的 2 位都是质数 (61, 13, 31, 19) 。

(2) 这些质数两两不同。

求满足以上性质的最大正整数。（3 分）

六、美妙的数论（13 分）

【截尾质数】3797 具有迷人的性质：

(1)3797 是质数

(2)379、37、3 都是质数，即：去掉个位后，还是质数

我们将 3797 称为截尾质数。注意 1 不算质数。

1. 满足上述性质的最大质数是_____（1 分）

2. 类似地可以定义截头质数。例如：1223。

(1)同时具有截头和截尾性质的最大质数是_____（2 分）

(2)任何一个连续子串都是质数的最大质数是_____（1 分）

【天平称量】

[问题引入]有 3 枚金币，一枚假的和真的比偏重。一架无砝码天平只允许称量一次，挑出假币。

解：两端各放 1 枚，哪边重哪个是假币。一样的话第三枚是假币。

[问题解决] 有 12 枚金币，一枚被掉包，不知道和真的比较还是重。一架无砝码天平称量三次，挑出假币，并且说明是轻是重。（2 分）

[拓展延伸] 有 n 枚金币，一枚被掉包，不知道和真的比较还是重。一架无砝码天平，挑出假币，并且说明轻重，最少要称量几次

(1) $n=114$ (3 分)

(2) $n=514$ (4 分)

七、florr.io (7 分)

【题目背景】florr.io 是一款线上游戏。玩家需要打怪物收集装备，然后可以合成更高级的装备，也可以把没有用的装备烧掉解锁功能和获得经验。装备有 Common, Unusual, Rare, Epic, Legendary, Mythic, Ultra, Super 共计 8 级。小明喜欢玩这款游戏。但是他总是合不出最高级装备——Super。于是，他对合成期望起了兴趣。他向您提出了一些问题。

【题目描述】每一次合成都是 5 个合成一个更高级的装备。合成概率如下表。（没有合成会等概率丢失 1-4 个装备，Luck 可以增加概率）

源	目标	概率	Luck 后概率
Common	Unusual	60%	90%
Unusual	Rare	40%	60%
Rare	Epic	20%	30%
Epic	Legendary	10%	15%
Legendary	Mythic	3%	
Mythic	Ultra	1%	
Ultra	Super		

【概率计算】

1. 如果要从 $15625 (=5^6)$ 个 Common 中合出 Ultra，没有 Luck，概率是_____ *10_____ %？（使用科学计数法，精确 7 位有效数字）（1 分）
2. 1 个 Super 期望需要多少个 Common 才能合出？分别在 没有 Luck 和有 Luck 时计算。（2 分）
3. 如果烧掉任何 1 个装备获得的经验是烧掉低一级的装备的 9 倍，其中 Common 是 1 点，那么烧掉每一种

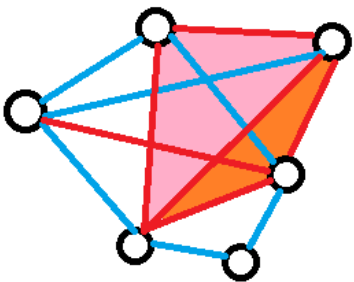
装备的性价比分别是多少？（分别在没有 Luck 和有 Luck 时计算，性价比=经验值/期望消耗 Common 的个数）（4 分）

八、奇妙的组合（8 分）

【题目背景】

Ramsey 定理：二色完全图 K_6 中有同色 K_3 。其中， K_6 表示 6 个点的完全图（任意 2 点之间都有边），二色表示对边红-蓝染色，同色 K_3 是指所有边同色的 3 点完全图。Ramsey 定理的加强版： K_6 中有 2 个同色 K_3 （可能有重复边）

一般地，我们定义 $r(x,y)$ 表示 (x,y) 的 Ramsey 数，该数的意义：一个二色完全图 $K_{r(x,y)}$ 必定包含红 K_x 或蓝 K_y 但是存在一种染色方法使得 $K_{r(x,y)-1}$ 不包含红 K_x 和蓝 K_y 。由 Ramsey 定理， $r(3,3)=6$ 。



【Ramsey 数】部分 Ramsey 数如下表：

x \ y	3	4	5	6
3	6	9	14	18
4	9	18	25	[35,41]
5	14	25	[43,49]	[58,87]
6	18	[35,41]	[58,87]	[102,165]
7	23	目前未知		
8	28			
9	36			
10	[40,43]			
11				

(1) 计算 $r(5,6)$ （1 分）

(2) 计算 $r(6,6)$ （2 分）

(3) 计算 $r(6,10)$ （3 分）

【拓展延伸】计算 $r(10,10)$ 的下界和上界，要求上下界的差不能大于 100。（2 分）

九、你几号啊~（5 分）

【题目背景】张明和刘宇是一对好朋友。但是，张明还不知道刘宇的学号。“你几号啊~”

【题目描述】刘宇有好几个学号。

1. 刘宇的学号是一个很大的（5 位）数字 N ，满足以下性质：

- (1) 它是一个质数。
- (2) $\overline{1304129N}$ 是质数。
- (3) $\overline{1N}$ 是 3 和 211 的倍数。
- (4) $\overline{123140N}$ 是 9059 的倍数。
- (5) N 的第四位是 4。

求 N 。（2 分）

2. 刘宇的学号是 $2^{\left(2^{\left(2^{(2^{2+1})+1}\right)+1}\right)+1} + 1$ 。求刘宇的学号（精确值）。（3 分）

卷 IV（附加题）满分 10

十、那些我们不曾注意的美好（10 分）

【题目背景】在各种定理中，我们往往能看到美。

【题目描述】

1. 证明费马大定理。（3 分）
2. 在黎曼猜想不成立的时候，证明高斯猜测。（2 分）

【永远的美好】证明哥德巴赫猜想。（5 分）

祝各位同学测评顺利，努力探索数学，终身学习，做学习的主人！