Tarjan

進階教學組

August 7, 2022

目錄

1 DFS tree 1
1.1 概念 1

2 **連通** 3

3 **連通圖** 3

4 **連通分量** 3
4.1 邊雙連通分量/橋 3
4.2 點雙連通分量/割點 3

5 Tarjan 4
5.1 無向圖/BCC 4
5.2 有向圖/SCC 6

6 Korasaju's algorithm 6

1 DFS tree

1.1 概念

這並不是真正的一個 tree，DFS tree 是一個在有向或無向圖中，把有成功進行到 DFS 的邊當成樹邊，然後變成一棵樹 + 其他邊的形式，所以依據選的根結點的不同、DFS 順序不同，DFS tree 也會跟著改變。

在實作上，我們也不會特別的把他求出來，只是剛好在 DFS 的過程中他會出現而已，而且他的特性會比較方便之後的講解

```
func DFS_tree(node current) {
    if current.isvisited :
        return;

    //edge.from = a, edge.to = b
    for edge in edge_from_current :
        if not edge.to.isvisited :
            edge.to.is_tree_node <- true
            DFS_tree( edge.to )
        else
            edge.to.is_tree_node <- false
}
```

上文的虛擬碼是找出 DFS tree 的邊，因為實作不複雜而且概念也十分基本就不放完整程式碼。

可以發現，圖上其實會有些邊沒有被選到，於是為了方便分類，人們幫這些沒有被選到的邊分了類並取了名字

1. 樹邊 (Tree Edge): 在 DFS tree 上的邊
2. 回邊 (Back Edge): 從**子節點**連到**父節點**的邊

3. 前向邊 (Forward Edge): 從**父節點**連到**子結點的子樹結點**的邊

4. 交錯邊(Cross Edge)：連到兩個非祖孫關係的邊

如果是無向圖的話就只會有 Tree Edge 跟 Back Edge

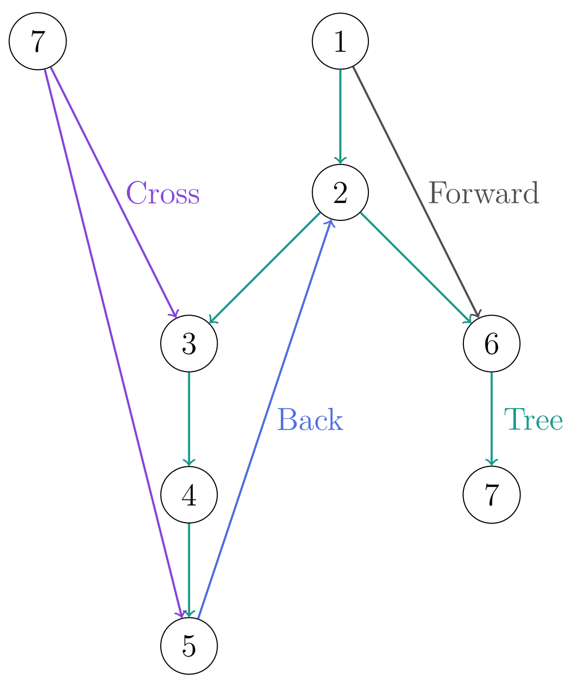
換個說法，你可以把 DFS tree 想像成一個族譜圖，把邊想像成認識的關係圖 (有向邊就是你認識他，但他不認識你，可能過年的時候很常出現)，以自身為節點的話如下。

1. 樹邊: 我認識我的孩子

2. 回邊: 我認識輩分比我大的直系血親

3. 前向邊: 我認識輩分比我低兩輩以上的血親

4. 交錯邊: 我認識我的旁系血親



(圖片原形 by 建中)

2 連通

嚴格定義

在一個無向圖中，若從點 u 到點 v 間有路徑，則稱他們是連通的。

在一個有向圖中，若從點 u 到點 v 間有路徑，**且邊皆同向**，則稱他們是連通的。

3 連通圖

定義

如果圖中任兩個點都是連通的我們稱他為連通圖，而有向圖還有分「強連通」跟「弱連通」，強連通是需保證 $u->v$ 跟 $v->u$ 皆有路徑且邊為同向，而弱連通只要滿足其一即可。不過弱連通圖好像較少討論，所以接下來講的都是強連通圖。

4 連通分量

4.1 邊雙連通分量/橋

橋的定義

如果刪除一條邊時導致圖從**連通** $\implies$ **不連通**我們則把這條邊稱為橋。亦即每刪除一個橋，連通塊的數量都會增加。在把所有的橋都移去之後，我們就可以得到邊雙連通分量。為什麼他要叫邊雙連通呢? 因為想要讓圖的連通塊增加就必須刪除兩個邊以上。

4.2 點雙連通分量/割點

大致上和邊雙連通分量差不多，只是由刪除邊變成刪除點而已，而那個點稱為割點，如果把所有的割點都去掉之後我們就可以得到點雙連通分量。

5 Tarjan

5.1 **無向圖**/BCC

Tarjan 的無向圖比較簡單理解一些，因為無向圖有如下幾種性質

1. 沒有 Cross Edge 和 Forward Edge

性質解釋

1. 因為無向圖在 DFS 時，任兩個相鄰的點 u v 的 t_in 差距應該為 1 顯然 Cross Edge 並不符合。

如果知道了以上的性質，我們要如何找出所有的橋呢? 首先，我們可以發現，

對於無向圖，我們只需要去考慮 Tree Edge 跟 Back Edge。先不要一次想太多，那我們不妨從只有 Tree Edge 開始，之後再一個個的把 Back Edge 加回去。

一開始，對於每一個 Tree Edge 都是橋，只要刪掉任何一個邊都會多出一個連通塊，此時，你會發現其實對於無向圖來說，最終有大小大於 2 的連通塊 = 有環。因為沒有環就等於只有 Tree Edge。而對於一個 Tree 來說，增加 Back Edge 就會出現**環**，讓我們來觀察一下**環**的性質，你可以發現，**環**會是 Back Edge 中間的那一條練。

那要如何去維護呢，我們可以對每個點 u 紀錄一個 low 值，即他「從 u 或 u 的子孫最多走一次回邊 (可以不走)，最高可以到達的點」。接下來講結論: 「對於一條 Tree Edge $e = (a, b)$ 而言，如果 $low(b) = b$ 則代表 e 是橋」。

因為把 e 移除掉之後。因為 $low(b) = b$，代表其 a 的子孫最高只能走回 b，所以如果這時把 e 移除掉的話，其子孫就沒有其他的方式可以走回 a 和其祖先了，表示 a 的子孫和原圖變得不連通了。

實作時主要是用 DFS+ **進入戳記**。在實作時需要知道幾個觀念

1. DFS 會先把所有子孫處理完才會繼續處理當前節點
2. DFS 中，在沒有遇到分岔的情況下，遍歷的順序總是一條條練。
3. 只有互為直系親屬 才可以使用進入戳記來判斷層樹高低，不然如果先遞迴到的子樹其進入戳記會比後遞迴到的子樹小。

這部分可以自行隨意劃一個 DFS tree 實際手做遞迴一次。

Algorithm: Tarjan BCC

```
Time_count = 0;
Stack node_save;
func Tarjan(node current) {
    current.time_in, current.low <- Time_count
    Time_count <- Time_count+1
    node_save.push( current)

    for edge in current.edge
        if( not edge.to.isvisited )
            Tarjan( edge.to )
        else
            current.low = min( current.low, edge.low)

    if( current.time_in == current.low )
        node temp;
        do {
            temp = node_save.top()
            bcc[ temp.id ] = current.id
            node_save.pop()
        }
        while(temp != current);
}
```

上面的 code 是球邊雙連通分量的，如果想要求點雙連通分量的話還需要多紀錄一個 fater 值。和球邊雙連通分量的程式碼差不多，只不過在對於 $e=(a,b)$ 且 $low(b)=b$ 時，這時的割點會是 a。

```
func Tarjan( node current, node father)
```

5.2 **有向圖**/SCC

有向圖大部分都和無向圖差不多，不過有向邊多了 Cross Edge，所以**概念**3的部分可能會出現錯誤，因為 Cross Edge 會碰到沒有直系親屬關係的節點。那我們要如何去解決呢?

十分的簡潔，在從結點 u 走到 low 函數更低的節點 v 時，我們可以先判斷 v 在不在 Stack 內。因為根據**觀念**1如果 v 是祖先，他一定還沒被踢出 Stack，而且根據**觀念**2，如果 v 在別的子樹且還未被踢出 Stack 外的話，代表 $[v, LCA(u,v))$ 以下的節點都已經被拜訪完了，也就是 u, v 會有共同的連通塊

Tarjan 的複雜度只需要一次 DFS ，所以為 $O(V+E)$，V 是點的個數，E 是邊的個數。

6 Korasaju's algorithm

這個演算法相對簡單一些，他妥善的使用了強連通圖的定義「從 $u->v$ 和 $v->u$ 都有一條路徑且邊皆同向」。可以發現對於 SCC 來說，把邊翻轉並不會影響他的答案，所以如果我們有一個圖 G，我們只需要把所有邊翻轉變成 G'。然後對 G 和 G' 都做一次 DFS 判斷連通性，最後取交集即可。

那無向圖呢? 無向圖的邊沒有辦法翻轉啊? 其實也是一樣的，只要把 Back Edge 當成有向的即可，反轉的時候會變成 Forward Edge，之後的作法就和有向圖相同