$$A := \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 5 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

a) PER DETERMINARE SE GLI ELEMENTI DELL'INSIEME $\{-4, 1, 0, 3, -2, 7\}$ SONO AUTOVALORI DI A, DOBBIAMO CALCOLARE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A, QUINDI RISPONDERE AL PUNTO C)

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -3 & -6 \\ 5 & -2-\lambda & -5 \\ 4 & -3 & -3-\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{PER IL METODO DI SARRUS}}{=}$$

$$= +((7-\lambda)\cdot(-2-\lambda)\cdot(-3-\lambda)) + ((-3)\cdot(-5)\cdot 4) + ((-6)\cdot 5\cdot(-3)) -$$

$$- ((6)\cdot(-2-\lambda)\cdot 4) - ((-3)\cdot 5\cdot(-3-\lambda)) - ((7-\lambda)\cdot(-5)\cdot(-3))$$

$$= \left((-14 - 7\lambda + 3\lambda + \lambda^2)\cdot(-3-\lambda)\right) + 60 + 90 - \left((-24)(-2-\lambda)\right) -$$

$$- \left((-15)(-3-\lambda)\right) - \left((7-\lambda)\cdot 15\right) =$$

$$= 42 + 14\lambda + 21\lambda + 7\lambda^2 - 9\lambda - \cancel{3\lambda^2} + \cancel{3\lambda^2} - \lambda^3 + 150 - 48 - 24\lambda$$

$$- 45 - \cancel{15\lambda} - 105 + \cancel{15\lambda} =$$

DA RIVEDERE I CALCOLI

$$= -\lambda^3 + 7\lambda^2 + 2\lambda - 6$$

PER VERIFICARE SE GLI ELEMENTI DELL'INSIEME SONO AUTOVALORI DI A, BISOGNA VERIFICARE SE SONO RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO, QUINDI

$$P_A(-4) = -64 + 4\cdot(16) + 2(-4) - 6 = 64 + 12 - 8 - 6 = 162 \neq 0$$

$$P_A(1) = -1 + 7 + 2 - 6 = 2 \neq 0$$

$\vdots$

b) A è DIAGONALIZZABILE SE IL NUMERO DI AUTOVALORI È UGUALE A $\dim(A)$

2) $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K})$

a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

A È INVERTIBILE SOLO E SOLTANTO SE IL SUO $\det(A) \neq 0$. QUINDI CALCOLIAMOLO USANDO IL METODO DI SARRUS

$$\det(A) = (1 \cdot 1 \cdot 4) + ((-1) \cdot 1 \cdot 1) + ((-2) \cdot 3 \cdot (-4)) -$$
$$- ((-2) \cdot 1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 3 \cdot 4) - (1 \cdot 1 \cdot (-4)) =$$

$$= 4 - 1 + 24 + 2 + 12 + 4 = 66 \neq 0$$

$= 1 + 12 + 12 + 12 = 36 \neq 0$

QUINDI A È INVERTIBILE.

PER CALCOLARE L'INVERSA CONSIDERIAMO LA MATRICE 3×6 $(A \mid I_3)$, SU CUI OPERIAMO CON GAUSS PRIMA IN AVANTI E POI ALL'INDIETRO.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{11} & \frac{4}{33} \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{11} & -\frac{14}{33} \\ 0 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{11} & \frac{1}{66} \\ 0 & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{11} & -\frac{14}{33} \\ 0 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{11} & \frac{1}{66} \\ & & & & & \end{array}\right) \qquad (I \mid A^{-1})$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{66} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{11} & \frac{2}{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & A \end{array}\right)$$

QUINDI

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{11} & \frac{1}{66} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{66} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{11} & \frac{2}{33} \end{pmatrix}$$

b) PER $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$

IL $\det(A) = 66 = 1 \neq 0$ PER IL MODULO 5

QUINDI ANCHE PER $\mathbb{Z}_5$ $\exists A^{-1}$

---

3) $v_1 := (1, 3, -1, 1)$, $v_2 := (-1, 1, -1, 1)$

$w_1 := (3, 1, 1, -1)$, $w_2 := (1, 1, -1, -1)$

$V := \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, $W := \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

a) CONSIDERIAMO LA MATRICE $A := (v_1 | v_2 | w_1 | w_2)$

OTTENUTA PER COLONNE I SUOI VETTORI. PER TANTO

CHE HA PER COLONNE I VETTORI. PER TROVARE UNA BASE DI $V+W$ RIDUCIAMO A SCALA LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE I PIVOT DELLA MATRICE SI TROVANO SULLE COLONNE 1, 2, 4 UNA BASE DI $V+W$ È $B: \{v_1, v_2, w_2\}$

b) PER DETERMINARE SE IL VETTORE

$u := (3, 3, -1, -1)$ DOBBIAMO VERIFICARE

SE È LINEARMENTE DIPENDENTE RISPETTO A v_1, v_2.

QUINDI RIDUCIAMO A SCALA LA MATRICE

$$A' = (v_1 | v_2 | u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE HA $rg(A') = 3$ NON È LIN. INDIPENDENTE $u \in V$

ORA VERIFICHIAMO SE APPARTIENE A W

CONSIDERIAMO LA MATRICE $A'' = (w_1 | w_2 | u)$, E RIDUCIAMOLA A SCALA

$$A'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE IL $rg(A') = 3$ $u \notin W$.

<u>ORA</u> VIA VERIFICARE SE u APPARTIENE A AL SOTTOSPAZIO $V+W$ DOBBIAMO VERIFICARE SE È LIN. DIP. RISPETTO AI VETTORI DELLA BASE DI $V+W$. CONSIDERIAMO LA MATRICE $A''' := (v_1 | v_2 | v_2 | u)$ E RIDUCIAMOLA A SCALA

$$A''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ & & & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE I PIVOT SONO NELLA 1°, 2° E 3° COLONNA, u È LIN. DIPENDENTE DAL SOTTOSPAZIO $V+W$ E QUINDI $u \in Span(v_1, v_2, v_2)$

PER TROVARE LE COORDINATE DI u RISPETTO A $B = \{v_1, v_2, w_2\}$, BISOGNA TROVARE UNA TERNA $\{x, y, z\} \in \mathbb{Q}^3$ TALE CHE

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \cdot z \cdot w_3 = u$$

CHE EQUIVALE A RISOLVERE IL SISTEMA

A'''

A QUINDI PROCEDIAMO PER E. G.

$$A'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

PROCEDIAMO PER E. G. ALL'INDIETRO

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

QUINDI LA TERNA DI SOLUZIONI È

$$(x, y, z) = (1, -1, 1).$$

PERCIÒ

$u = v_1 - v_2 + w_2$

---

4)

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{Q})$$

a) PER VERIFICARE SE A È INVERTIBILE CALCOLIAMO IL DETERMINANTE DI A, LO SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA PRIMA RIGA CI DÀ:

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \cancel{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

È NULLO POICHÉ LA SECONDA RIGA È FORMATA

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ DA TUTTI ZERO

EFFETTUIAMO UNO SVILUPPO DI LAPLACE

SULLA 4° COLONNA SULLA 1° COLONNA AI

PRIMI 2 DETT.