$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{Q}), \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{Q})$$

a) La funzione lineare $L_A \circ L_B$ è descritta da $A \cdot B$, quindi

$L_A \circ L_B = L_{AB}$. Allora

$$\dim(\operatorname{Im}(L_A \circ L_B)) = \dim(\operatorname{Im}(L_{AB})) = rg(AB)$$

Calcolo $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0 & 3+8 & -2-2 \\ -2+0 & 6+0 & -4+0 \\ -3+0 & 9-4 & -6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} := C$$

Ora per trovare il rango di $A \cdot B$ riduco

A SCALA UTILIZZANDO L'ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -9 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & -28 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE I PIVOT SONO 2 ALLORA

$$rg(A \cdot B) = 2 = \dim(Im(L_{AB})) = \dim(Im(L_A \circ L_B))$$

b) COME GIÀ VISTO NEL PUNTO a) LA MATRICE

A·B È

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -9 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

PER DETERMINARE SE È INVERTIBILE CALCOLO IL DETERMINANTE.

$$\det(A \cdot B) = \det\begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -9 \\ \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

$= 30 + 132 + 40 - 72 - 110 - 20 =$

Dato che $\det(A \cdot B) = 0$ la matrice non è invertibile. Calcolo allora il $\operatorname{Ker}(A \cdot B)$, ossia l'insieme di soluzioni del sistema lineare omogeneo $\circledast : (A \cdot B)x = 0$.

Posso ridurre a scala per avere un sistema lineare equivalente $\circledast' : Cx = 0$ così definita nel punto a). Quindi

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\circledast' : \begin{cases} x_1 + 11x_2 - 4x_3 = 0 \\ -16x_2 + 4x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 11x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_3 = 16t \\ x_2 = t \end{cases} (\forall t \in \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -11t + 4(4t) \\ x_3 = 4t \\ x_2 = t \end{cases} (\forall t \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5t \\ x_3 = 4t \\ x_2 = t \end{cases} (\forall t \in \mathbb{Q})$$

Quindi $\operatorname{Ker}(C) = \operatorname{Ker}(A \cdot B) = \{(5t, t, 4t) \mid t \in \mathbb{Q}\}$

c) CALCOLO $B \cdot A$

$$B \cdot A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+6-6 & 2+0-2 \\ 0-8+3 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} =: D$$

CALCOLO $\det(D)$

$$\det(D) = -1 - 0 = -1 \neq 0$$

DATO CHE IL $\det(D) \neq 0$ ESISTE UN'INVERSA D^{-1}. CONSIDERO LA MATRICE $(D \mid I_2)$, E LA RISOLVO UTILIZZANDO L'ELIMINAZIONE DI GAUSS PRIMA IN AVANTI E POI ALL'INDIETRO

$$D = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) =: (I_2 \mid D^{-1})$$

QUINDI

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \end{pmatrix}$$

---

1) $u(t) := (-1,\ t+4,\ t-6)$, $v(t) = (2,\ -2t-4,\ 6)$,

$w(t) := (3-t,\ t^2-8,\ 15-6t)$, $t \in \mathbb{C}$

$V'_t = \mathrm{Span}(u(t), v(t), w(t))\ \forall t \in \mathbb{C}$

2) LA DIMENSIONE DI V'_t È UGUALE AL RANGO DI UNA MATRICE M CHE HA PER COLONNE I 3 VETTORI. QUINDI

$$M = \big(u(t)\,|\,v(t)\,|\,w(t)\big) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ t+4 & -2t-4 & t^2-8 \\ -6 & 6 & 15-6t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times3} \in \mathbb{C}$$

PER DETERMINARE IL RANGO EFFETTUO UNA RIDUZIONE A SCALA ATTRAVERSO L'ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ t+4 & -2t-4 & t^2-8 \\ \ldots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$M_t = \begin{pmatrix} t+4 & -2t-4 & t-8 \\ t-6 & 2t-6 & -t^2+5t+12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & -t+4 \\ 0 & 2t-6 & -(t^2+5t+12) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ 0 & 4 & t+4 \\ 0 & 0 & \frac{t^2-t+18}{2} \end{pmatrix}$$

Ora

· Se $-\frac{t^2-t+18}{2} \neq 0 \Rightarrow t^2-t+18 \neq 0$

allora $rg(M_t) = 3 \Rightarrow dim(V_t) = 3$

· Se $-\frac{t^2-t+18}{2} = 0 \Rightarrow t^2-t+18 = 0$

allora $rg(M_t) = 2 \Rightarrow dim(V_t') = 2$

b) Sappiamo dalla teoria che la base di un sottospazio si può ottenere riducendo a scala la sua matrice associata e considerare le colonne dove si trovano i pivot.

· Se $\frac{-t^2-t+18}{2} \neq 0$ i pivot sono su tutte e tre le colonne, quindi

$B' = \{u(t), v(t), w(t)\}$ è base

DI V_t'

SE $\frac{-t^2-t+18}{2}=0$ I PIVOT SONO 2 E SI TROVANO SULLA 1° E 2° COLONNA, QUINDI

$B_t' := \{\mu(t), v(t)\}$ È BASE DI V_t'

c) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

f_t È INVERTIBILE SE M_t È INVERTIBILE SOLO E SOLTANTO SE $\det(M_t) \neq 0$

CHE SUCCEDE SOLO SE $\frac{-t^2-t+18}{2} \neq 0$

$\forall t \in \mathbb{C}$

---

3) $S: \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

CONSIDERIAMO A LA MATRICE DEI COEFFICIENTI di S, ed b il vettore delle costanti.

quindi

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

2) $\dim(V_S) = \dim(\operatorname{Ker}(A))$ teorema della struttura

$= \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\operatorname{Im}(A)) =$

$= 4 - rg(A)$

calcolo quindi il rango di A, riducendo a scala la matrice A

$$A : \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \leftrightarrows \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(V_S) = 4 - 2 = 2$

b) per determinare le equazioni

parametri che per S considero il sistema

lineare $\circledast$: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\circledast: \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ x_3 + 2x_4 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4t - 4 + 2l = 3 \\ x_2 = t \\ x_3 = 4 - 2l \\ x_4 = l \end{cases} \quad (t, l \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} - 2t - l \\ x_2 = t \\ x_3 = 4 - 2l \\ x_4 = l \end{cases} \quad (t, l \in \mathbb{R})$$

---

4)

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{K})$$

Lo spettro di A è l'insieme degli

AUTOVALORI DI A, OSSIA LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4)$

QUINDI

$$\det(A - \lambda I_4) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

FACCIO UNO SVILUPPO DI LAPLACE SULLA 4° RIGA

$$= (-1-\lambda) \cdot (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot (-1)^{8} (3-\lambda) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot \left(\underbrace{(1-\lambda)^2 - 5^2}_{1+\lambda^2-2\lambda-25} \right)$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 24$

$\lambda = -4$, $\lambda = 6$

QUINDI

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda) \cdot (3-\lambda) \cdot \left((1-\lambda)^2 - 5^2 \right).$$

GLI AUTOVALORI, QUINDI LE RADICI DI $p_A(\lambda)$ SONO

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4, \lambda_4 = 6$

E QUINDI LO SPETTRO DI A È

$S_p(A) = \{-1, 3, -4, 6\}$.

QUANDO $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

b) QUANDO $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ DOBBIAMO VERIFICARE SE ALCUNI AUTOVALORI SONO UGUALI, ED INFATTI -4 E 6 IN $\mathbb{Z}_5$ SONO ENTRAMBI UGUALI A 1. QUINDI

$S_p(A) = \{-1, 3, 1\}$ QUANDO $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$

c) SICCOME IN $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ LO SPETTRO DI A HA 4 ELEMENTI, E $\dim(V) = 4$, SI SA DALLA TEORIA CHE ESSENDO

UGUALI A È CERTAMENTE DIAGONALIZZABILE.

ORA PER TROVARE UNA BASE DI AUTOVETTORI BISOGNA TROVARE UN AUTOVETTORE NON NULLO PER OGNI AUTOVALORE, CIOÈ UN ELEMENTO DI CIASCUN AUTOSPAZIO V_λ.

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_4)$$

DOVE QUINDI BISOGNA RISOLVERE IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO $\circledast : (A - \lambda I_4)\underline{X} = \underline{0}$.

PER TROVARE UNA SOLUZIONE RIDUCO A SCALA LA MATRICE DEI COEFFICIENTI IN OGNI VALORE DI λ

$\boxed{\lambda = -1}$

$$(A - \lambda I_4) = (A + I_4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{-1}$$

QUINDI IL SISTEMA OMOGENEO $\circledast_{-1}$ CORRISPONDE

A $\circledast'_{-1}$: $S\underline{x} = \underline{0}$, CHE ESPLICITAMENTE È

$$\circledast'_{-1}: \begin{cases} 2x_1 - 5x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ -\frac{-1}{2} x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \end{cases} (\forall \alpha \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = -2\alpha \\ x_3 = 0 \\ x_2 = \alpha \end{cases} (\alpha \in \mathbb{Q})$$

QUINDI

$$V_{-1} = \{(0, \alpha, 0, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

UN QUALUNQUE AUTOVETTORE NON NULLO IN TALE AUTOSPAZIO VA BENE COME PARTE DELLA BASE. PER CUI ASSEGNANDO AD $\alpha := 1$

$$v_{-1} = (0, 1, 0, -2)$$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$V_3 = \ker(A - 3I_4)$$

$$(A - 3I_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} =: S_3$$

$$(*)_3 := \begin{cases} -2x_1 - 5x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ \frac{21}{2}x_3 = 0 \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (b \in \mathbb{Q})$$

QUINDI L'AUTOSPAZIO È

$$V_3 = \{(0,b,0,0) \mid b \in \mathbb{Q}\}$$

E QUINDI UN AUTOVETTORE POSSIBILE PER ESSERE PARTE DELLA BASE È $b = 1$

$v_3 \; (0,1,0,0)$

$$\boxed{\lambda = -4}$$

$$V_{-4} = \ker(A + 4I_4)$$

$$(A+4I_4) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_4$$

Quindi

$$(*): S_4 \underline{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_3 = 0 \\ 7x_2 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (c \in \mathbb{Q})$$

Quindi l'autospazio è

$$V_{-4} = \{ (c, 0, c, 0) \mid c \in \mathbb{Q} \}$$

Quindi un vettore possibile per

ESSERE PARTE DELLA BASE E', C=1 :

$$v_4 = (1,0,1,0)$$

$$\boxed{\lambda = 6} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$V_6 = \ker(A - 6I_4)$$

$$(A - 6I_4) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma'_6 : \begin{cases} -5x_1 - 5x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -7x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$$

QUINDI

$$V_6 = \{(-\alpha, 0, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}$$

È QUINDI UN AUTOVETTORE POSSIBILE PER ESSERE PARTE DELLA BASE È

$$v_6 := (-1, 0, 1, 0)$$

IN CONCLUSIONE

$$B_{\mathbb{Q}} : \{v_{-1}, v_3, v_{-1}, v_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

È UNA BASE DI AUTOVETTORI PER A

d) SI SA DALLA TEORIA CHE

A È DIAGONALIZZABILE $\Longleftrightarrow m^g_{-1} + m^g_3 + m^g_6 = \dim(\mathbb{Q}^4) = 4$

DOVE OGNI MULTEPLICITÀ GEOMETRICA È LA DIMENSIONE DELL'AUTOSPAZIO DI UN AUTOVALORE.

CALCOLO I 3 AUTOSPAZI

$\boxed{\lambda = -1}$

$$V_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_4)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$(A + I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & \dots \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := S_4$$

DOVE, ESSENDO $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $-27 = -1$, $2^{-1} = 3$, $-5 = 0$, $-3 = 2$,

QUINDI $(*)'_{-1}: S\underline{x} = \underline{0}$ HA LE STESSE SOLUZIONI DI $(*)_{-1}: (A + I_4)\underline{x} = 0$

$$(*)_{-1} \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_4 = -2a \\ x_3 = 0 \\ x_2 = a \end{cases}$$

QUINDI

$$V_{-1} = \{(0, a, 0, -2a) \mid a \in \mathbb{Z}_5\}$$

DOVE UN VETTORE PER v_{-1}

v_{-1} $(0,1,0,-2)$ È QUINDI

$\mathcal{B}_{-1}\{v_{-1} := (0,1,0,-2)\}$ È BASE DI V_{-1}

$\boxed{\lambda = 3}$

$$(A-3I_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOVE, IN $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, $-2=3$, $-5=0$,

$21=1$, $2^{-1}=3$. $(*)_3 : S\underline{X} = \underline{0}$ È EQUIVALENTE

A $(*)_3 : (A-3I_4)\underline{X} = \underline{0}$. QUINDI

$$\circledast_3 : \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (b \in \mathbb{R}_s)$$

QUINDI UN POSSIBILE AUTOVETTORE È, $b=1$:

$$v_3 := (0, 1, 0, 0)$$

E QUINDI UNA BASE DI V_3 È

$$B_3 = \{ v_3 := (0, 1, 0, 0) \}$$

$$\boxed{\lambda = -4}$$

$$(A + 4I_4) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{-4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per cui $\circledast'_{-4}: S\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a $\circledast_{-4}: (A+4I_4)\underline{x} = \underline{0}$.

$$\circledast'_{-4}: \begin{cases} 2x_2 + 2x_4 = 0 \\ 3x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c \\ x_2 = 0 \\ x_3 = d \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (c, d \in \mathbb{R}_5)$$

Quindi

$$V_{-4} = \{(c, 0, d, 0) \mid c, d \in \mathbb{R}_5\}$$

Ci sono due scelte $(c, d) = (1, 0)$ e $(c, d) = (0, 1)$. Otteniamo 2 autovalori

$$v'_{-4} = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad v''_{-4} = (0, 0, 1, 0)$$

Che formano una base

$$B_{-4} = \{v'_{-4} := (1, 0, 0, 0), v''_{-4} := (0, 0, 1, 0)\}$$

DATO CHE

$$m_{-1}^G = \dim(V_{-1}) = 1$$

$$m_{3}^G = \dim(V_{3}) = 1$$

$$m_{-4}^G = \dim(V_{-4}) = 2$$

ALLORA

$$m_{-1}^G + m_{3}^G + m_{-4}^G = 1+1+2 = 4 = \dim(\mathbb{Z}_5^4)$$

QUINDI A È DIAGONALIZZABILE

E UNA BASI DI $V = \mathbb{Z}_5^4$ È

$$B_{\mathbb{Z}_5} = B_{-1} \cup B_{3} \cup B_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$