$\boxed{1}$

$$(*)_k : \begin{cases} x - y = 1 \\ kx + y + z = 1 \\ (k+1)y = 0 \end{cases}$$

(a) PER VERIFICARE SE EFFETTUIAMO UNA RIDUZIONE A SCALA DEL SISTEMA

$$(*)_k \rightsquigarrow (A_k | \underline{b})_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{MATRICE}$$

COMPLETA DEL SISTEMA

$$(A_k | \underline{b})_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{array}\right) = (T_k | \underline{c})_k$$

CON $T_k := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{array}\right)$ UNA MATRICE TRIANGOLARE SUPERIORE

ORA SE $k+1 \neq 0$ IL SISTEMA È COMPATIBILE E AMMETTE 1! SOLUZIONE

SE $k+1=0 \rightarrow k=-1$ SI HA

$$(*)_{k=-1} \longrightarrow (T|c)_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rg(A_{-1}|b_{-1}) = 2 = rg(A_{-1})$$

QUINDI IL SISTEMA È COMPATIBILE E L'INSIEME DELLE SOLUZIONI È UN SOTTOSPAZIO

AFFINI DI $\mathbb{R}^3$ DI DIMENSIONE

$$\dim(\mathbb{R}^3) - rg(A_{*1}) = 3-2 = 1$$

CIOÈ UNA RETTA

b) COME SI È VISTO DAL PUNTO a)
L'INSIEME DELLE SOLUZIONI ℓ_k È
UN'A RETTA SOLO E SOLTANTO SE $k=-1$

c) PER $k=-1$ TROVIAMO LE EQ. PARAMETRICHE
E CARTESIANE DI $\ell_{k=1}$

$\boxed{E.C}$: LA RIDUZIONE A SCALA DI $(*)_{-1}$

$$(*)_{-1} \longrightarrow (T|\underline{c})_{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CI DA

$$(*)_{-1} : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\underline{E.C} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

SONO POSSIBILI LE EQUAZIONI CARTESIANE PER ℓ_{-1}

$\boxed{E.P}$: DALLA RIDUZIONE A SCALA OTTENIAMO

$$(*)_{-1} \longrightarrow (T|\underline{c})_{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

OTTENIAMO

$$(*)_{-1} \longrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

è $(x,y,z) \in \{(1+t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

cioè il sistema $(*)_{-1}$ ha come insieme di soluzioni $S_{-1} := \{(1+t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

ma tale S_{-1} è esattamente la retta ℓ_{-1}, dunque ℓ_{-1} ha E.P.

$$\underline{E.P} \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

d) per la retta ℓ^0_{-1} parallela alla retta ℓ_{-1} e passante per il punto $P_0 := (1,0,0)$ un E.P. si ottengono da quelle di ℓ_{-1} usando lo stesso vettore direttore $\vec{v}_{\ell_{-1}}$ e imponendo il passaggio per P_0, cioè

$$\begin{cases} x = v_x t + x_0 \end{cases}$$

$\underline{E.P}\ (\ell^0_{-1}) : \begin{cases} y = v_y t + y_0 \\ z = v_z t + z_0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Dove $(v_x, v_y, v_z) = \vec{v}_{\ell_{-1}}$ e $(x_0, y_0, z_0) =$

$= P_0 = (1, 0, 0)$

Ma $\underline{E.P}(\ell_{-1}) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 0 \cdot t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Quindi

$$\underline{E.P}(\ell^0_{-1}) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

$\boxed{2}$ $A := \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

d) LA MATRICE È INVERTIBILE SE

$\det(A) \neq 0$, QUINDI

$$\det(A) = 4 \cdot 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) -$$
$$- (1 \cdot 1 \cdot (-2)) - ((-7) \cdot 1 \cdot 1) - (4 \cdot 3 \cdot (-1)) =$$
$$= 4 + 42 - 1 + 2 + 7 + 12 > 0$$

QUINDI A È INVERTIBILE

b)+d) PER CALCOLARE A^{-1} BISOGNA

RISOLVERE 3 SISTEMI CONTEMPORANEAMENTE

$(A \mid \underline{e}_1 \mid \underline{e}_2 \mid \underline{e}_3)$, MA POSSIAMO SVOLGERE

INSIEME ANCHE IL PUNTO d) RISOLVENDO

I SISTEMI CONTEMPORANEAMENTE

$(A \mid \underline{e}_1 \mid \underline{e}_2 \mid \underline{e}_3 \mid \underline{b})$, QUINDI

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 4 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \times$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -11 & 1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \times$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -11 & -11 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} & & 7 & & & & \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{22} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{2} & \frac{27}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{66} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{66} \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{33} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{3} & \frac{27}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{66} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{66} \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \Rightarrow$$

con X che è soluzione di $A\underline{x} = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{33} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{3} & \frac{27}{22} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{66} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} & \frac{17}{66} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{66} & \frac{3}{11} & \frac{1}{6} & -\frac{59}{66} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

QUINDI

b) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{33} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{66} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{66} & \frac{3}{11} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \cdot \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

È L'INVERSA DI A

d) $$X = \begin{pmatrix} \frac{27}{22} \\ \frac{17}{66} \\ \frac{-59}{66} \end{pmatrix}$$ È L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE $A\underline{X} = \underline{b}$

c) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

QUINDI

QUINDI

$$\det(A^2) = \det(A)\cdot\det(A) = \det(A)^2$$

E DATO CHE $\det(A) \neq 0$ ANCHE

$\det(A^2) \neq 0$ E QUINDI ANCHE A^2 È

INVERTIBILE

$\boxed{3}$

$$M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{Q})$$

a) PER CALCOLARE IL RANGO DI A

SI CONTANO IL NUMERO DI PIVOT DOPO

UNA RIDUZIONE A SCALA. QUINDI

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cancel{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & +2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_1 = 1$, $P_2 = -2$

DATO CHE I PIVOT SONO 2 ALLORA

$rg(S) = rg(M) = 2$

b) DATO CHE NELLA RIDUZIONE A SCALA I 2 PIVOT SONO NELLA 1ª E 2ª COLONNA

$\Rightarrow$ PER LA TEORIA $Im(M)$ HA PER BASE $\{M^1, M^2\}$, CIOÈ

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ È UNA BASE DI $Im(M)$

c) $\mathrm{Ker}(M) = \{ \underline{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid M\underline{x} = \underline{0} \}$

QUINDI È L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE $M\underline{x} = \underline{0}$. LO RISOLVIAMO TRAMITE RIDUZIONE A SCALA CHE È EFFETTUATA. QUINDI $M\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow S\underline{x} = \underline{0}$

CIOÈ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Q}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$z = -2t$

$\Rightarrow$ una base di $\mathrm{Ker}(\sim)$ è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

4

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{at_{1\times 1}}(\mathbb{R})$$

a) GLI AUTOVALORI SONO LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA $P_A(x) = 0$ DOVE $P_A(x) := \det(A - xI_n)$ QUINDI PER CALCOLARE IL DETERMINANTE UTILIZZO LO SVILUPPO DI LAPLACE DATO CHE NELLA MATRICE SONO PRESENTI MOLTI ZERI.

$$\det(A - xI_4) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$ SVILUPPO IN PRIMA $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$+(1-x)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} =$$

DATO CHE È UNA MATRICE TRIANG. IL DETERMINANTE È IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE

$$= +(1-x)\cdot\left((1-x)\cdot(2-x)\cdot(2-x)\right) = (1-x)^2\cdot(2-x)^2$$

QUINDI L'EQ DA RISOLVERE È

$$(1-x)^2\cdot(2-x)^2 = 0$$

CON CUI RADICI SONO $\lambda_1 = 1$ E $\lambda_2 = 2$

CHE SONO PROPRIO GLI AUTOVALORI

b) GLI AUTOSPAZI DI A SONO DATI DA

$$V_\lambda = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = \lambda v \}$$ PER TUTTI

GLI AUTOVALORI, CHE IN QUESTO CASO

SONO $\lambda_1 = 1$ E $\lambda_2 = 2$. QUINDI

$$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = v \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R} \mid (A - \underline{I}_4)\underline{x} = \underline{0} \}$$

ci

$$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = 2v \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R} \mid (A - 2\underline{I}_4)\underline{x} = \underline{0} \}$$

PER CALCOLARLI BISOGNA RISOLVERE I RELATIVI SISTEMI OMOGENEI

$$\boxed{V_1} \to (A - I_4)\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - \underline{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Th}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Rg}(A - \underline{I}_4) = 2$$

SCRIVENDO $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ SI HA

$$S \cdot \underline{X} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$\begin{cases} -3X + Z + M = 0 \\ -\frac{2}{3} Z + \frac{1}{3} M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3X + Z + M = 0 \\ -2Z + M = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3X + 3Z = 0 \\ M = 2Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z = X \\ M = 2X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z - X = 0 \\ M - 2X = 0 \end{cases}$$

E.Q. CARTESIANA DI V_1

$$\boxed{V_2} \rightarrow (A - 2\underline{I}_4)\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$A - 2I_4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(A - \lambda I_4) = 3$$

QUINDI

SCRIVENDO $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

SI HA

$$S \cdot \underline{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$\begin{cases} -x = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ u = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CARTESIANE DI V_2

c)

E.Q. PARAMETRICHE DI V_2 $\rightarrow$

$$\begin{cases} z - x = 0 \\ u - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = l \\ z = t \\ u = 2t \end{cases} \quad (\forall t, l \in \mathbb{R})$$

E.Q. PARAMETRICHE DI V_2 $\rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ u = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

d) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\sum_{i=1}^{n} (V_i)$

$$\sum_{\lambda \text{ autovalore di } A} \dim(V_\lambda) = n$$

DOVE $n = 4$ E $\lambda \in \{1, 2\}$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

- $\dim(V_1) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_4)) =$

$= \dim(\mathbb{R}^4) - rg(A - I_4) = 4 - 2 = 2$

da l)

- $\dim(V_2) = \dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_4)) =$

$= \dim(\mathbb{R}^4) - rg(A - 2I_4) = 4 - 3 = 1$

QUINDI

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2 + 1 = 3 \neq 4$$

QUINDI A NON È DIAGONALIZZABILE

POICHÉ LA SOMMA DELLE DIMENSIONI DI OGNI AUTOSPAZIO RELATIVO AD OGNI VALORE NON È UGUALE AD n