1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a) PER CALCOLARE GLI AUTOVALORI DI A BISOGNA PRIMA TROVARE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

$$\det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \left((1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-\lambda)\right) + \lambda = \left((1-2\lambda+\lambda^2)\cdot(-\lambda)\right) + \lambda =$$

$$= \cancel{-\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{+\lambda} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 = \lambda^2(-\lambda+2)$$

QUINDI $P_A(\lambda) = \lambda^2(-\lambda+2)$

E POICHÉ GLI AUTOVALORI DI A SONO LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO DI A,

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$

Quindi

$$S_p(A) = \{0, 2\}$$

b) Ogni autospazio è dato da

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$$

ovvero risolvendo il sistema lineare omogeneo $\circledast : (A - \lambda I_3)x = 0$

Riduco a scala la matrice dei coefficienti

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$(A - 0 \cdot I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_0$$

$\circledast'_0 : S_0 \underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a

$\circledast_0 : (A - 0 \cdot I_3)\underline{x} = \underline{0}$ quindi hanno lo

STESSO INSIEME DI SOLUZIONI

$$\circledast_0' : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

QUINDI

$$V_0 = \{(-a-b, a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_2$$

$\circledast_2' : S_2 \underline{x} = \underline{0}$ È EQUIVALENTE A

$\circledast_2 : (A - 2I_3)\underline{x} = \underline{0}$ QUINDI HANNO LO

STESSO INSIEME DI SOLUZIONI

$$\circledast_2' : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = c \end{cases} \quad (c \in \mathbb{Q})$$

QUINDI

$$V_2 = \{(-c, 0, -c) \mid c \in \mathbb{Q}\}$$

c) PER VERIFICARE SE A È DIAGONALIZZABILE

SI PUÒ VERIFICARE SE LA SOMMA DELLE

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICHE DEGLI AUTOVALORI SIA

UGUALE ALLA DIMENSIONE DI $\mathbb{Q}^3$

QUINDI

A È DIAGONALIZZABILE $\Longleftrightarrow m_0^G + m_2^G = \dim(\mathbb{Q}^3) = 3$

DOVE $m_\lambda^G = \dim(V_\lambda)$

DATO CHE

$$m_0^G = \dim(V_0) = 2$$

$$m_2^G = \dim(V_2) = 1$$

ALLORA

$$m_0^G + m_2^G = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{Q}^3)$$

PERCIÒ A È DIAGONALIZZABILE

d) $L_A^n(\underline{v}) := A^n v \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+$

QUINDI VERIFICHIAMO QUANTO VALE $A^n$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 2^3 \end{pmatrix}$$

QUINDI IPOTIZZANDO

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$L_A^n(v) = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \cdot (7-1+3) \\ 0 \\ 2^{n-1} \cdot (7-1+3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-1} \cdot 9 \\ 0 \\ 2^{n-1} \cdot 9 \end{pmatrix}$$

---

3)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$$

a) Per determinare se $A$ sia invertibile è necessario che $\det(A) \neq 0$. Quindi

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -2 - 2 + 4 - 3 = -3 \neq 0$$

Quindi $A$ è invertibile

Per calcolare $A^{-1}$ bisogna considerare la matrice 3x6 $(A \mid I_3)$, ma si può svolgere in contemporanea anche il quesito (b) considerando la matrice $(A \mid I_3 \mid b)$, e risolvendo a scala, prima in avanti e poi all'indietro tramite eliminazione di Gauss

$$(A \mid I_3 \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 & 10 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -5 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right) =: \left( I_3 \,|\, A^{-1} \,|\, \underline{x} \right)$$

QUINDI

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

b) COME VISTO NEL PUNTO a)

IL SISTEMA LINEARE $(*): A\underline{x} = \underline{b}$ CON $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

HA COME SOLUZIONE:

$$(*): \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 5 \end{cases} \rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) IL TEOREMA DI BINET DICE CHE:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

DATO CHE IL $\det(A) \neq 0$ ALLORA

$$\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) \neq 0$$

È QUINDI

$$\det(A^2) = \det(A^2) \cdot \det(A) \neq 0$$

IN CONCLUSIONE

$A^3$ È INVERTIBILE

---

4)

$$\underline{u}(t) := \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix}, \quad \underline{w}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{x}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

2) PER DETERMINARE IL $\dim(\mathrm{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)))$

DOBBIAMO TROVARE IL rg DELLA MATRICE CHE

HA PER COLONNE I 4 VETTORI. QUINDI PER

TROVARLO RIDUCIAMO A SCALA

$$A_t = \left(\underline{u}(t) \,|\, \underline{v}(t) \,|\, \underline{w}(t) \,|\, \underline{x}(t)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+t & 1+t & 1 & t-1 \\ t & t & 0 & 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$2+2t \quad 1+2t \quad , \quad t^2 )$

Posso posizionare la 3ª colonna in 1ª colonna dato che

$$\mathrm{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)) = \mathrm{Span}(\underline{w}(t), \underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{x}(t))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 1 & 2+2t & 1+2t & t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 0 & t & t & t^2-t+1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-t \end{pmatrix}$$

ora ...

- se $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ allora ci sono 3 pivot e

$$rg(A) = 3 = \dim(\mathrm{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)))$$

- se $t = 0$ allora

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CI SONO 2 PIVOT QUINDI

$$rg(A) = 2 = \dim(Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)))$$

• SE $t = 1$ ALLORA

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CI SONO 2 PIVOT, PERCIÒ

$$rg(A) = 2 = \dim(Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)))$$

RIASSUMENDO

• SE $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \Rightarrow \dim(Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = 3$

• SE $t \in \{0, 1\} \Rightarrow \dim(Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = 2$

b) CONSIDERIAMO LA MATRICE $A'_t(\underline{w}(t), \underline{x}(1), \underline{v}(1))$

E RIDUCIAMOLA IN SCALA

$$A'_t = \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t \\ 0 & t & t \\ 1 & 2+2t & 1+2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t \\ 0 & t & t \\ 0 & t & t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora

- si $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$

$rg(A'_{0 \setminus \{0,1\}}) = 2 < 3 = rg(A_{0 \setminus \{0,1\}})$

quindi

$\underline{x}(t) \notin Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t)) \quad (t \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\})$

si $t = 1$

$rg(A'_1) = 2 = rg(A_1) \quad (t = 1)$

quindi

$x(t) \in Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), w(t))$

si $t = 0$

$rg(A'_0) = 1 < 2 = rg(A_0) \quad (t = 0)$

quindi

$x(t) \notin Span(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t))$

2) $A := (1,0,1)$, $B := (3,1,1)$, $C: (0,1,-2)$

r passa per A e per B

$$s: \begin{cases} x-3y+z=4 \\ y+z=1 \end{cases}$$

$\pi$ passa per C ed è parallelo a r e s

a) La retta r ha come vettore direttore

$$\underline{v}_r = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,1,1) - (1,0,1) = (2,1,0)$$

perciò

$$r: \overrightarrow{OA} + t\,\underline{v}_r \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = \overset{A}{1} + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 0 \cdot t \end{cases}$$

b) Il piano $\pi$ può essere descritto tramite

$$\pi: \overrightarrow{OC} + h\,\underline{v}_r + k\,\underline{v}_s$$

DOVE $\underline{v}_r$ È UN VETTORE DIRETTORE DI r

E $v_s$ È UN VETTORE DIRETTORE DI s

$\underline{v}_r$ PUÒ ESSERE UGUALE AL PUNTO a).

PER $v_s$ DOBBIAMO OTTENERE LE EQ. PARAMETRICHE DA QUELLE CARTESIANE

$$s: \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - z + 4 \\ y = 1 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3y - t + 4 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3t - t + 4 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

QUINDI $\underline{v}_s = (-4, -1, 1)$. QUINDI

L'EQ. PARAMETRICHE DI $\pi$ SONO

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + 2h - 4k \\ y = 1 + h - k \\ z = -2 + 0h + k \end{cases} \quad (\forall h, k \in \mathbb{R})$$

c)

PER TROVARE LE EQ. CARTESIANE DI $\pi$ RISCRIVIAMO LE EQ. PARAMETRICHE

$$\pi : \begin{cases} 2h - 4k = x \\ h - k = y - 1 \\ 0h + k = z + 2 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO QUESTO SISTEMA COME UNA MATRICE COMPLETA A, E RIDUCIAMOLA IN SCALA

$$A := \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 2 & -4 & x \\ 0 & 1 & z+2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & -2 & -2y+2+x \\ 0 & 1 & z+2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \\ 0 & -2 & -2y+2+x \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \\ 0 & 0 & x-2y+2z+6 \end{array}\right)$$

OTTENIAMO COSÌ CHE DI FATTO C'È UN

UNICA EQ. CARTESIANA DI $\pi$

$(*)_\pi : x - 2y + 2z + 6 = 0$

d) INIZIO CON IL DETERMINARE SE LE RETTE

r ED s SONO PARALLELE. I LORO VETTORI DIRETTORI SONO

$\underline{v}_r = (2,1,0)$, $\underline{v}_s = (-4,-1,1)$

MA QUESTI DUE VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, INFATTI

$$rg\begin{pmatrix} \underline{v}_r \\ \underline{v}_s \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

QUINDI LE 2 RETTE <u>NON SONO PARALLELE</u>

RESTA DA CONTROLLARE SE:

r ED s SONO INCIDENTI $\iff r \cap s \neq \emptyset$

r ED s SONO SGHEMBE $\iff r \cap s = \emptyset$

INIZIO CON IL VERIFICARE SE SONO INCIDENTI.

SOSTITUISCO ALLE INCOGNITE DI s I

VALORI DEGLI EQ. PARAMETRICHE DI r
PER TROVARE UN PUNTO $P \in r$ E $P \in S$

$$P: \begin{cases} 1+2t-3t+1=4 \\ t=1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} -t=2 \\ t=1 \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t=-2 \\ t=1 \end{cases} \quad \nexists t.$$

QUINDI LE 2 RETTE NON SONO INCIDENTI.

ALLORA r E S SONO SGHEMBE.