ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 3

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Risolvere $|x-1|-3 \leq \sqrt{x+2}$.

$$\left\{\begin{array}{l} -2 \leq x < 1 \\ 1-x-3 \leq \sqrt{x+2} \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} 1 \leq x \\ x-1-3 \leq \sqrt{x+2} \end{array}\right.$$

$\sqrt{\ }$ $\qquad$ $|x-1|$

$$x\in[-2,1) \leftarrow \left\{\begin{array}{l} -2 \leq x < 1 \\ \underbrace{-2-x}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} 1 \leq x \\ \boxed{x-4 \leq \sqrt{x+2}} \end{array}\right.$$

$\cup$

$x\in[-2,-1] \leftarrow$

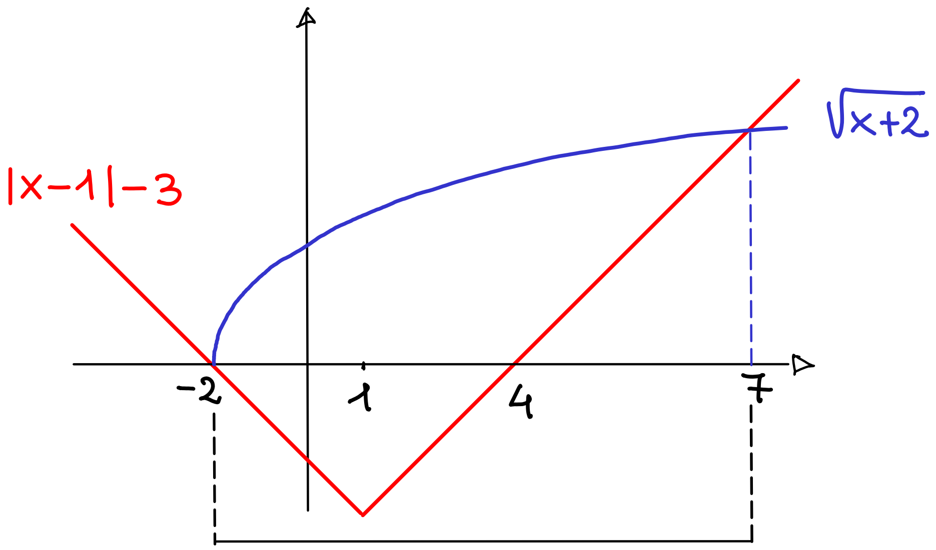
$x \in [-2,1)$ $\qquad$ $x \in [1,7]$

$$(x-4)^2 \leq x+2$$
$$x^2-8x+16-x-2 \leq 0$$
$$x^2-9x+14 \leq 0$$
$$(x-2)(x-7) \leq 0 \qquad x \in [2,7]$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$[-2,1) \cup [1,7] = [-2,7]$$

Interpretazione grafica della disuguaglianza:



$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Disegnare il grafico di $\arcsin(\sin(x))$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Dato che $\arcsin(x)$ è l'inversa di $\sin(x)$ ristretta a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, abbiamo che

1) Se $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ allora $\arcsin(\sin(x)) = x$

2) Se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ allora

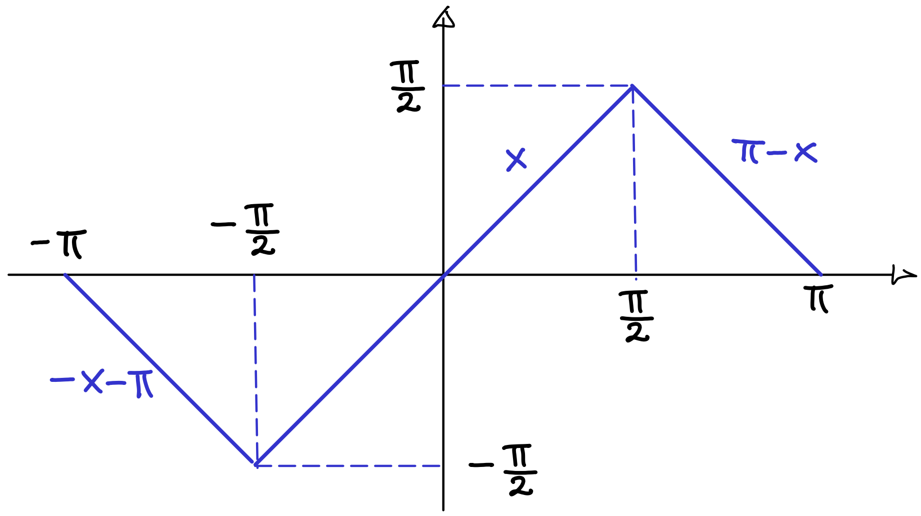
$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\underbrace{\pi - x}_{\in [0, \frac{\pi}{2})})) = \pi - x$$

3) Se $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ allora

$$\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(\underbrace{-x}_{\in (\frac{\pi}{2}, \pi]})) = -(\pi - (-x)) = -x - \pi$$

Così

$$\arcsin(\sin(x)) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \pi - x & \text{se } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ -x - \pi & \text{se } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



$f(x) = \arcsin(\sin(x))$ è periodica con periodo $T = 2\pi$.

f è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x)) = -f(x)$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Determinare il dominio D di

$$f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)}$$ la base di log è e

e $f(D)=\{f(x) : x\in D\}$. immagine di f

La funzione $f: D\to f(D)$ è biunivoca?
Nel caso trovare f^{-1}.

Per individuare D dobbiamo imporre che tutti gli argomenti delle funzioni elementari utilizzate stiano nei rispettivi domini.

$$\begin{cases} x+1\neq 0 & \text{denominatore} \neq 0\\ \frac{2x+1}{x+1}>0 & \text{argomento del logaritmo} >0\\ \log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)\geq 0 & \text{argomento della radice quadrata} \geq 0\end{cases}$$

$e \quad e$

$$\begin{cases} x\neq -1\\ \frac{2x+1}{x+1}\geq 1\end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq -1\\ \frac{\cancel{2}x+\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{x+1}\geq 0\end{cases}$$

$+ + \quad - - - - - \quad + + +$
$-1 \qquad\qquad 0$

e dunque $D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

Per $y\in\mathbb{R}$ provo a risolvere l'equazione $y=f(x)$ rispetto a x:

$$\underset{\uparrow\, y\geq 0}{y^2}=\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right),\quad e^{y^2}=\frac{2x+1}{x+1},\quad \underbrace{e^{y^2}x+e^{y^2}}_{e^{y^2}\cdot(x+1)}=2x+1$$

$$(e^{y^2}-2)x=1-e^{y^2},\quad x=\frac{1-e^{y^2}}{e^{y^2}-2}$$ $y\neq\sqrt{\log(2)}$ soluzione unica

Così per $y\in[0,\sqrt{\log(2)})\cup(\sqrt{\log(2)},+\infty)=f(D)$ l'equazione $y=f(x)$ ha un'unica soluzione.
$f: D\to f(D)$ è biunivoca e $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}-2}$.

$$e^{y^2}x-2x=1-e^{y^2}\rightarrow x(e^{y^2}-2)=1-e^{y^2}$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia $P(n)$ una proposizione che può essere vera o falsa al variare di n.

TEOREMA (PRINCIPIO DI INDUZIONE) Se

1) $P(n_0)$ è vera (PASSO BASE)
2) $\forall n \geq n_0$ $\underbrace{P(n)}_{\text{Ipotesi induttiva}} \Rightarrow P(n+1)$ (PASSO INDUTTIVO)

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

ESEMPIO $1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $P(n)$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

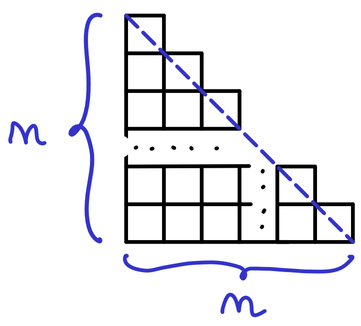
$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

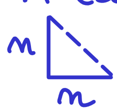
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{VERO}$$

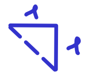
OSSERVAZIONE.



Interpretazione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} k = \underset{\text{Area}}{\frac{n \cdot n}{2}} + \underset{\text{Area}}{n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}$$





$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\forall n \geq 4 \quad 2^n > n+10.$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=4$, $2^4 = 16 \overset{?}{>} 14 = 4+10$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

$$2^{n+1} \overset{?}{>} (n+1)+10 \qquad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{P(n)}{>} 2(n+10) = 2n+20 > n+11 \qquad \text{VERO}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

dim. Per induzione rispetto a n.

Passo base. Per $n=1$, $(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1+1\cdot x$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$

$$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)\cdot x \qquad P(n+1)$$

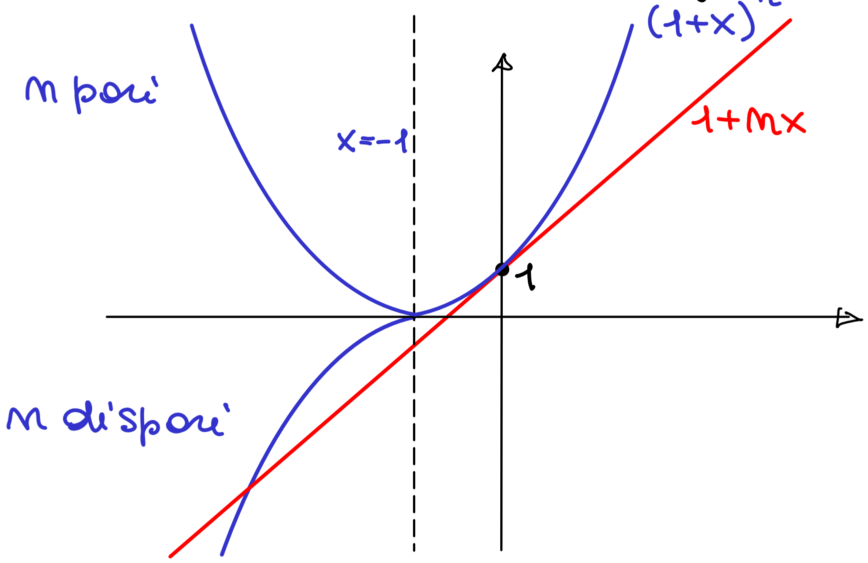
Abbiamo che

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^1}_{\substack{\geq 0 \\ \uparrow \\ x \geq -1}} \cdot (1+x)^n \overset{P(n)}{\geq} (1+x)(1+nx) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$(1+x)(1+nx) = \underbrace{1+x+nx}_{=1+(n+1)x} + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

VERO $\square$

OSSERVAZIONE. Interpretazione grafica



Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdots 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

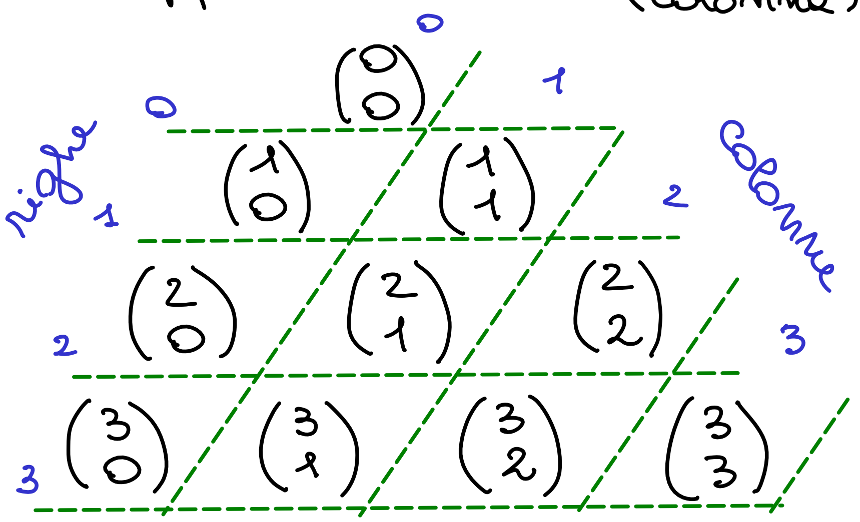
indica il FATTORIALE di n.

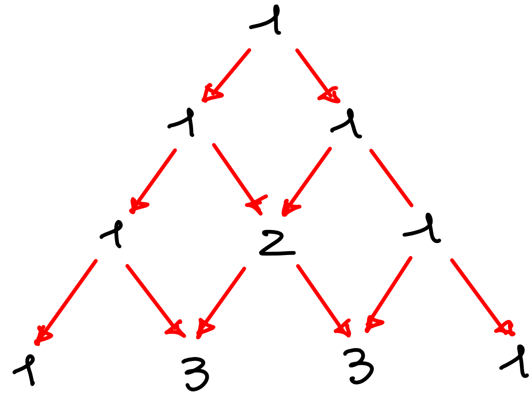
Per k intero tale che $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!}$$

indica il COEFFICIENTE BINOMIALE n su k.

Rappresentazione $\binom{\text{riga}}{\text{colonna}}$





Esempio di calcolo

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{2}} = 10.$$

Proprietà

1) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(\underbrace{n-k+1}_{-(k-1)})!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\big(k + (n-k+1)\big) = \binom{n+1}{k}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (POTENZA DI UN BINOMIO)

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^+\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

dim. Per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $(a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = 1\cdot a^0 b^1 + 1\cdot a^1 b^0 = b+a$

VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \underset{P(n)}{=} (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$\boxed{k=k+1}$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{\binom{n+1}{k}}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}$$

$P(n+1)$ è VERA!

$\square$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Per $n=4$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^0b^4 + \binom{4}{1}a^1b^3 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^3b^1 + \binom{4}{4}a^4b^0$$

$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1