ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 8

LIMITI DI FUNZIONI

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si dice RETTA ESTESA

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $r > 0$ l'INTORNO di centro x_0 e raggio r è definito come

$$I(x_0, r) = \begin{cases} (x_0 - r, x_0 + r) & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ (r, +\infty) & \text{se } x_0 = +\infty \\ (-\infty, -r) & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$ si pone

$$I^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r) \quad \text{INTORNO DESTRO}$$

$$I^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \quad \text{INTORNO SINISTRO}$$

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $D \subseteq \mathbb{R}$ allora x_0 si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE di D se

$$\forall r > 0 \quad (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

OSSERVAZIONE Se D è un intervallo in $\mathbb{R}$ allora i suoi punti di accumulazione sono tutti i punti di D compresi gli estremi

D	punti di accumulazione di D
$\{-1\} \cup (0,2) \cup \{3\}$	$[0,2]$
$[-1, +\infty)$	$[-1, +\infty) \cup \{+\infty\}$
$(-\infty, 3) \cup (3, 4)$	$(-\infty, 4] \cup \{-\infty\}$
$[1,2] \cup [3,4]$	$[1,2] \cup [3,4]$
$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di D, $f: D \to \mathbb{R}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che il LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE A x_0 VALE l e si scrive

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = l$$

\+ LIMITE DESTRO
\- LIMITE SINISTRO

se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (D \cap I^{\pm}(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in I(l, \varepsilon).$$

OSSERVAZIONE Dalla definizione segue che se $x_0 \in D$ allora il valore del limite non dipende da $f(x_0)$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (PONTE)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \{x_n\}_n \subseteq D \setminus \{x_0\} \text{ tale che } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l.$$

limite di funzione — limiti di successioni

PROPRIETÀ DEI LIMITI DI FUNZIONE

Grazie al teorema "ponte" valgono le proprietà analoghe viste per i limiti di successioni.

1) Il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ se esiste è unico.

2) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\exists r > 0$ tale che f è limitata in $(D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$.

3) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ allora $\exists\, r > 0$ tale che $f > 0$ in $(D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$.

4) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ e $\exists\, r > 0$ tale che $\forall x \in (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq g(x)$ allora $\ell_1 \leq \ell_2$.

5) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ e $\exists\, r > 0$ tale che $\forall x \in (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

6) Se f è limitata in un intorno di x_0 e $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

7) Vale l'algebra dei limiti già stabilita per i limiti di successioni.

8) Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

9) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to \ell} g(x) = L$ e $\exists\, r > 0$ tale che $\forall x \in (D_f \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\}$ $f(x) \neq \ell$ allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$.

dominio di f

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$.
Se x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora si dice che f è CONTINUA in x_0.
f si dice continua in $A \subseteq D$ se f è continua in ogni punto $x_0 \in A$.

OSSERVAZIONE
Le funzioni elementari $|x|$, x^a, a^x, $\log_a(x)$, $sen(x)$, $\cos(x)$, $tg(x)$, $arcsen(x)$, $\arccos(x)$ e $arctg(x)$ sono continue nel loro dominio.
Per le proprietà dei limiti se f e g sono continue allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g e $f \circ g$ sono continue nel loro dominio.

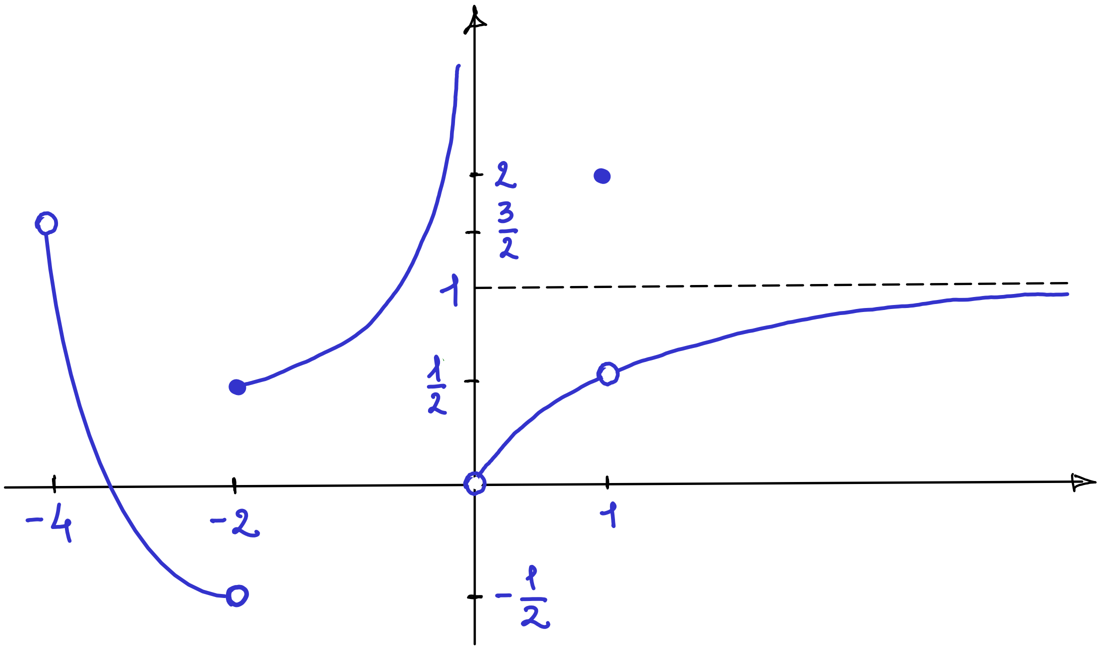
composizione
$f(g(x))$

ESEMPIO

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1} & \text{se } x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2, 0) \\ \frac{(x+2)^2 - 1}{2} & \text{se } x \in (-4,-2) \end{cases}$$

Disegnare il grafico di f in $D = (-4,+\infty) \setminus \{0\}$ e dire in quali punti di D la funzione f è continua.



I punti di accumulazione di D sono
$$[-4,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2} \neq f(1) = 2.$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)^2-1}{2} = -\frac{1}{2} \\ &\qquad\qquad\qquad\neq \\ &\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} -\frac{1}{x} = +\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -2} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \\ &\qquad\qquad\qquad\neq \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4}\frac{(x+2)^2-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = 1$$

f è continua in $D\setminus\{-2,1\}$

↑ punti di discontinuità

LIMITI NOTEVOLI

Per il teorema "ponte" valgono i seguenti limiti:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^b} = 0$ per $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b \cdot \log(x) \overset{y = \frac{1}{x} \to +\infty}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y^b}(-b\log(y)) = 0$ per $b > 0$.

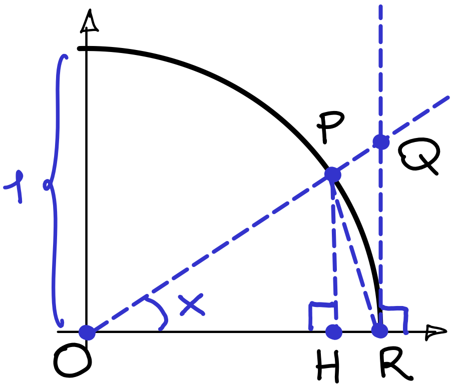
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ per $a > 1$ e $b > 0$.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + a \cdot x)^{1/x} = e^a$ per $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$ per $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$



Dato che $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ è pari basta $x \to 0^+$.

Per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $PH = \text{sen}(x)$, $QR = \text{tg}(x)$

$\triangle OPR \subseteq \triangle OPR \subseteq \triangle OQR$

$$\text{Area}(\triangle OPR) \leq \text{Area}(\triangle OPR) \leq \text{Area}(\triangle OQR)$$

$$\frac{\text{sen}(x)}{2} \overset{(1)}{\leq} \frac{x}{2} \overset{(2)}{\leq} \frac{\text{tg}(x)}{2}$$

da cui, per $x \to 0^+$, $1 \leftarrow \boxed{\cos(x) \overset{(2)}{\leq} \frac{\text{sen}(x)}{x}} \overset{(1)}{\leq} 1 \to 1$.

Allora per doppio confronto $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

$\frac{x}{2} \leq \frac{\text{sin}(x)}{2\cos(x)} \to \cos(x) \cdot x \leq \text{sin}(x) \to \cos(x) \leq$

(x) $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\ldots(x)}{x}}$