Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ definita da

$$f(n) \overset{def}{=} n + \ln(n) + \ln(n)^2$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

$f = \Theta(2^{n \ln(n)})$, $f = \Theta(n)$, $f = \Theta(n^2)$,

$f = \Theta(2^n)$, $f = \Theta(n^2 \cdot \log_{..}(n))$?

Sappiamo dalla teoria che $f = \Theta(g)$ solo se vale $f = O(g)$ e $g = O(f)$. Quindi verifichiamo ogni opzione.

- $f = \Theta(2^{n \ln(n)})$

Se $f = \Theta(2^{n \ln(n)})$ allora $2^{n \ln(n)} = O(f)$

e quindi $\exists\, c > 0$ e $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tale che

$$2^{n \ln(n)} \leq c\,(n + \ln(n) + \ln(n)^2)$$

se $n > M$. Ma $n < n \cdot \ln(n)$ se $n \geq 3$

Quindi

$2^n \leq c(n + \ln(n) + \ln(n))$

Sia $n \geq n_0$ che è assurdo perché

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{f(n)} = +\infty$$

Quindi

$$f \neq \Theta(2^{n \ln(n)})$$

- $f = \Theta(n)$?

Poiché

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{f(n)} = 1$$

$\Rightarrow f \cong n \Rightarrow f = O(n)$ e $n = O(f) \Rightarrow$

$f = \Theta(n)$

- $f = \Theta(n^2)$?

Sia $f = \Theta(n^2) \Rightarrow n^2 = O(f) \Rightarrow \exists\, c > 0$

e $\exists\, N > 0$ tale che:

$n^2 \leq C(n + \ln(n) + \ln(n)^2)$

$\forall n > N$. ASSURDO. QUINDI $f \neq \Theta(n^2)$

- $f = \Theta(2^n)$?

POICHÉ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{f(n)} = +\infty$$

CONCLUDIAMO COME PRIMA CHE $f \neq \Theta(2^n)$

- $f = \Theta(n^2 \cdot \log_{10}(n))$?

POICHÉ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 \cdot \log_{10}(n)}{f(n)} = +\infty$$

$\Rightarrow f \neq \Theta(n^2 \cdot \log_{10}(n))$

CONCLUDIAMO

$f = \Theta(n)$

È VERO CHE

$\ldots \; O((n+1)!)$?

ABBIAMO CHE:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}} = 0$$

QUINDI

$$n! = o((n+1)!) \implies n! = O((n+1)!)$$

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ DEFINITE PONENDO

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \log_2(n) \quad , \quad g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \log_{10}(n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. DECIDERE QUALI RELAZIONI, $o, O, \Omega, \Theta, \approx$ VALGONO TRA f E g

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \quad , \quad g(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$$

QUINDI

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\frac{\cancel{\ln(n)}}{\ln(2)}}{\dots} = \frac{\ln(10)}{\dots} \to \frac{\ln(10)}{\dots}$$

$$\frac{\frac{h(n)}{h(10)}}{} \quad h(2) \quad h(2)$$

QUINDI

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 1 \quad \text{QUINDI} \quad f(n) \not\sim g(n)$$

SIMILMENTE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq 0 \quad \text{QUINDI} \quad f \neq o(g) \text{ e } g \neq o(f)$$

INOLTRE

$$f(n) \leq \frac{h(10)}{h(2)} \cdot g(n)$$

$$\frac{h(n)}{g(n)} \leq \frac{h(10)}{h(2)}$$

QUINDI $f = O(g)$ e SIMILMENTE $g = O(f)$

$\Rightarrow f = \Omega(g)$ e $g = \Omega(f)$

$\Rightarrow f = \Theta(g)$

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ DEFINITE PONENDO

$f(n) \stackrel{def}{=} 4^n$, $g(n) \stackrel{def}{=} 2^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$. DECIDERE QUALI RELAZIONI, $o, O, \Omega, \Theta, \approx$ VALGONO TRA f E g?

ABBIAMO CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^{2n-n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

QUINDI $f \not\approx g$ E $f \neq o(g)$. SIMILMENTE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

QUINDI $g \not\approx f$ MA $g = o(f) \Rightarrow g = O(f) \Rightarrow$

$g = \Omega(f)$

MA $f = O(g)$? QUINDI $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $N_{>0}$

TALI CHE

$$|f(n)| \leq c \cdot g(n)$$

QUINDI

$$\frac{4^n}{2^n} \le c$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. ASSURDO, QUINDI $f \neq O(g)$

$\Rightarrow f \neq \Omega(g) \Rightarrow f \neq \Theta(g) \Rightarrow$

$g \neq \Theta(f)$

QUALE RELAZIONE HANNO

$f(n) = \sqrt{n+\sqrt{n}}$, $g(n) = \sqrt{n^3} - n^{\frac{2}{3}}$?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3} - n^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^3}}}{\frac{\cancel{\sqrt{n^3}}}{\cancel{\sqrt{n^3}}} - \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^3}}}{1 - \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{n^3}}} =$$

$$= \sqrt{n^{-2} + n^{-\frac{5}{2}}} = 0 \Rightarrow f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$$

$$1 - n^{-\frac{s}{5}}$$

è ANCHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = +\infty \Rightarrow g \neq o(f) \Rightarrow g \neq O(f)$$