

CAPITOLO 4: MODELLI CONTINUI

DEFINIZIONE Una v.a. X è una v.a. continua se esiste una funzione f_X tale che

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx \quad \text{unica}.$$

($\forall t \in \mathbb{R}$). \square

In tal caso la funzione f_X è detta densità continua.

OSSERVAZIONI

- In generale f_X non è unica; periamo avere un'altra g_X che realisse le condizioni (\square) un po' diverse da f . Vediamo queste cose successivamente.
- In generale f_X non è continua (vediamo esempi specifici). Però, se vale la condizione (\square), allora F_X è continua.
- È possibile costruire casi per cui F_X è continua ma le condizioni (\square) non sono verificate; la costruzione va oltre gli scopi di questo corso.

OSSEVAZIONE

In generale F_x è derivabile in "quasi tutti i punti" perché F_x è una funzione non decrescente. L'insieme dei punti dove F_x non è derivabile è un insieme "trasmisibile" (spesso negli esercizi è un insieme finito o numerabile).

Nei punti t dove F_x è derivabile si ha $F'_x(t) = f_x(t)$.

In conclusione si ha $F'_x(t) = f_x(t)$ in "quasi tutti i punti $t \in \mathbb{R}$ ".

Le affermazioni fatte con le virgolette si potrebbero precisare con strumenti matematici che vanno oltre gli scopi del corso.

ANALOGIE E DIFFERENZE TRA DENSITÀ DISCRETE E CONTINUE

ANALOGIE

$$F_X(t) = P(X \leq t) =$$

$$\sum_{\substack{x_k \in S_X \\ x_k \leq t}} P_X(x_k)$$

caso discreto

$$\int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

lettere minuscole

caso continuo

CASO DISCRETO

$$P_X(x) \geq 0$$

$$\sum_{x_k \in S_X} P_X(x_k) = 1$$



CASO CONTINUO

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

lettere minuscole

$$P(X \in A) = \sum_{x_n \in A \cap S_X} P_X(x_n)$$

($A \subset \mathbb{R}$)



$$P(X \in A) = \int_A f_X(x) dx$$

($A \subset \mathbb{R}$ per cui ha senso l'integrale)

DIFERENZE

CASO DISSETTO

$$P(X=x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

False

(non è vere per $x \in S_X$ o un suo sottinsieme non vuoto)

lettere minuscole

CASO CONTINUO

$$P(X=x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

True

lettere minuscole

Quindi: $P(a \leq X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X \leq b)$
e $P(a < X < b)$ possono essere diverse tra loro,

Quindi:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

(sono sempre uguali tra loro)

P_X definite in maniera univoca

f_X non è definita in maniera univoca

→ (vedere prossime slides).

In generale, se f_x è una densità continua, lo è anche una qualsiasi altra funzione g_x per cui si ha che $\{x \in \mathbb{R} : f_x(x) \neq g_x(x)\}$ è finito o numerabile. (Si potrebbe dire una cosa più precisa ma accontentiamoci di questo)

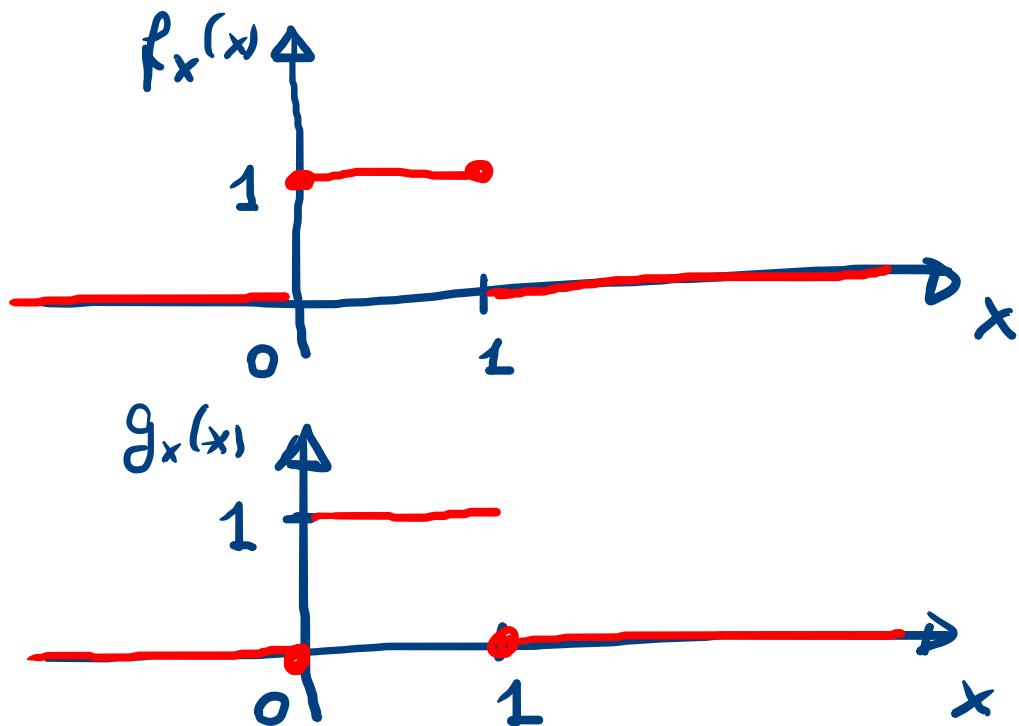
ESEMPPIO:

$$f_x(x) = 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g_x(x) = 1_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

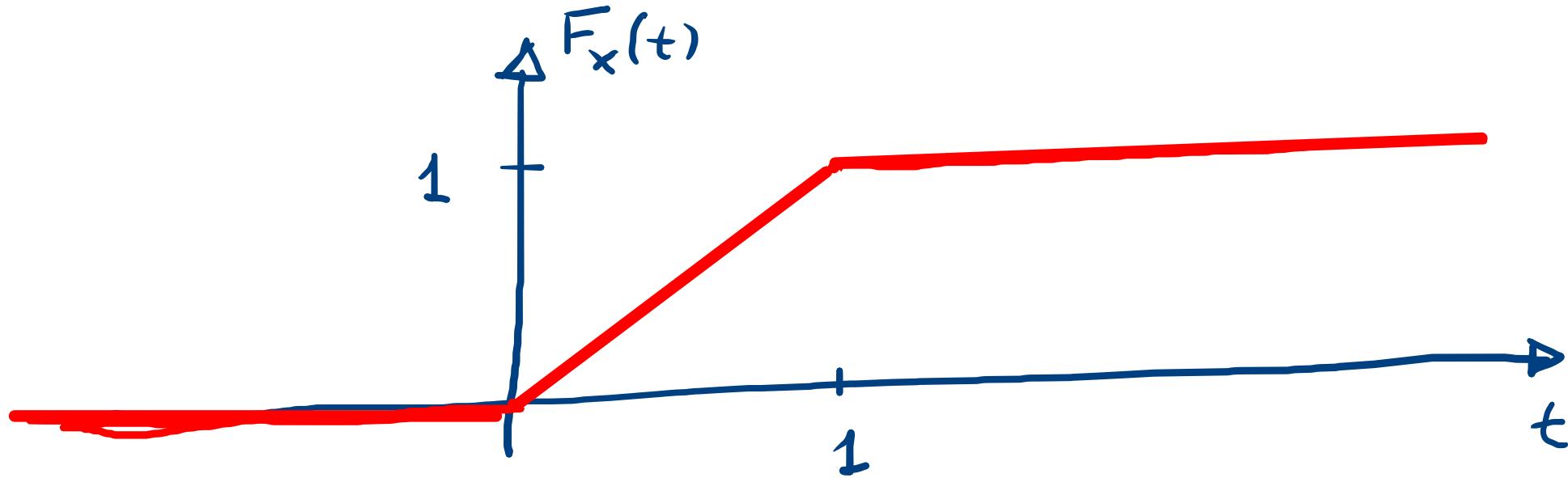
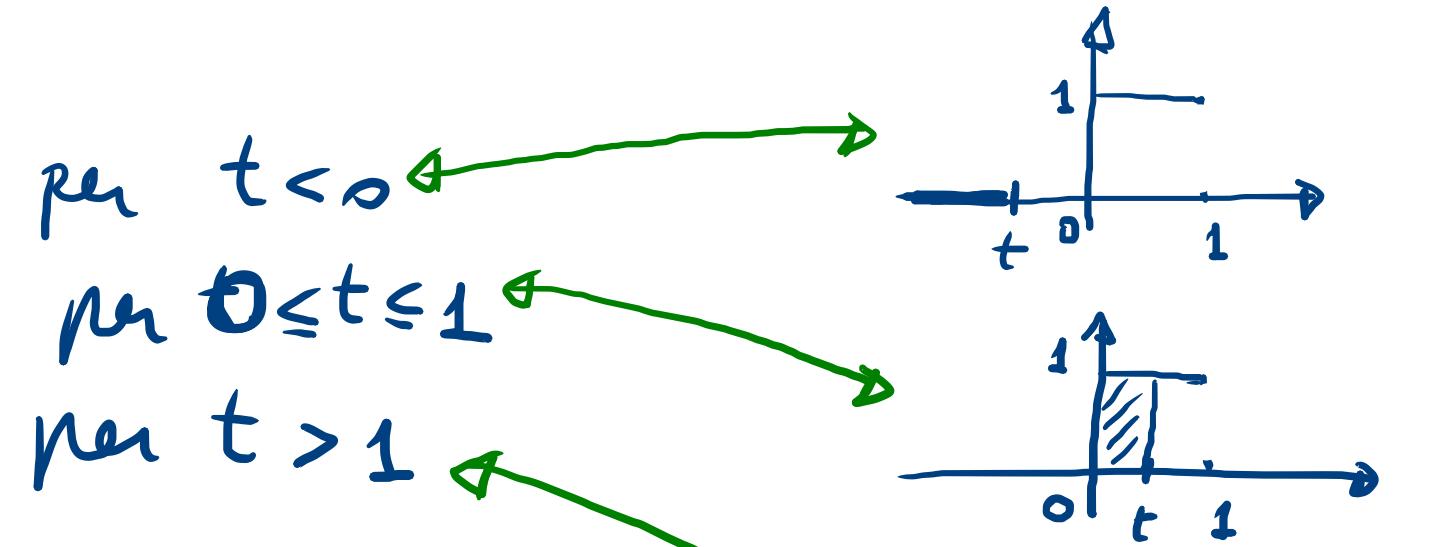
Quindi:

$$\{x : g_x(x) \neq f_x(x)\} = \{0, 1\}.$$



In corrispondenza si vede che

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^t f_x(x) dx = \int_{-\infty}^t g_x(x) dx = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$



In entrambi i casi si ottiene le stesse F_x perché contano le aree disegnate e non i valori di f_x e g_x per $x=0$ e $x=1$.

In effetti F_x è una funzione di distribuzione di una v.a. :

non decrescente, $\begin{cases} F_x(x) \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow +\infty \\ F_x(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$
continua (e quindi continua) a destra

In conclusione si parla di densità continua $f_X(x)$ di una v.a. X continua per "abuso di linguaggio". In realtà ci sono infinite versioni della densità continua (che differiscono in insiemi trascurabili di punti) che definiscono le stesse F_X .

In questo esempio f_X non è continua (discontinuità per $x=0$ e $x=1$); lo stesso si può dire per F_X .

Ora introduciamo i primi esempi di distribuzioni notevoli continue: uniforme ed esponentiale.

Per ne vedremo altri: distribuzione Gamma e distribuzione Normale (o Gaussiana).

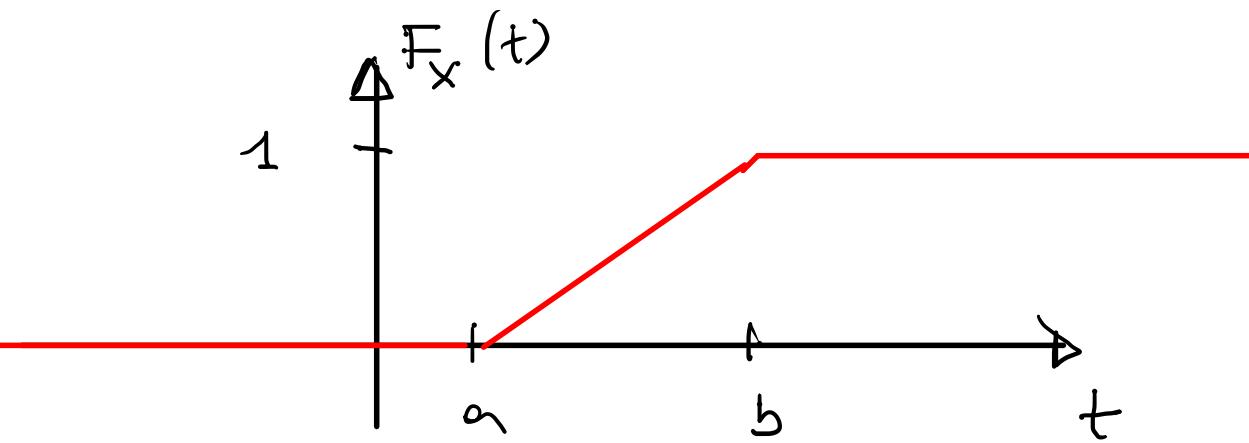
P.S., le distribuzioni notevoli continue vengono definite a partire dalle espressioni di F_X e f_X ; questo è un po' diverso dal caso discreto dove si trova ispirazione da qualche "caso pratico".

DISTRIBUZIONE UNIFORME (CONTINUA)

Una v.a. X ha distribuzione uniforme continua su un intervallo limitato (a, b) se si ha

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{per } a \leq t \leq b \\ 1 & \text{per } t > b \end{cases}$$

In simboli scriviamo $X \sim U(a, b)$.

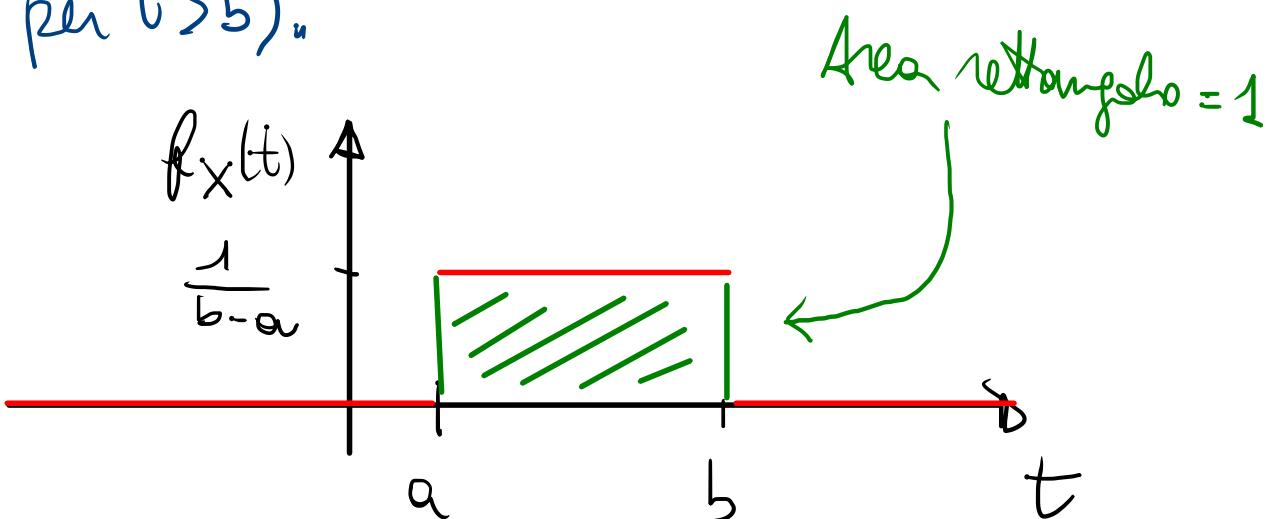


La funzione F_X non è derivabile per $t=a$ e per $t=b$. Negli altri punti lo è e si ha

$$F'_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a < t < b \\ 0 & \text{altrimenti (per } t < a \text{ e per } t > b\text{).} \end{cases}$$

Quindi: Possiamo dire ad esempio che

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a < t < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Se intendiamo la notazione

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (\text{dove } A \subset \mathbb{R})$$

possiamo scrivere in maniera più compatte

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$$

anche

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } t \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PSS. Qui si poteva anche mettere $[a,b]$, oppure $[a,b)$, oppure $(a,b]$, ecc.

PSS. Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ (e quindi $\frac{1}{b-a}$ può essere vista come una costante di normalizzazione)

Si ha

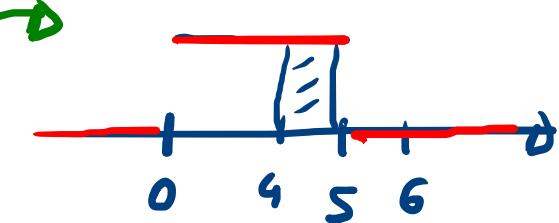
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^a f_X(x) dx}_{=0} + \underbrace{\int_a^b f_X(x) dx}_{=1} + \underbrace{\int_b^{\infty} f_X(x) dx}_{=0} = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x}{b-a} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Questo è in accordo con il fatto che l'area del rettangolo della slide precedente è uguale a 1.

ESERCIZIO

Sia $X \sim U(0,5)$. Calcolare $P(4 \leq X \leq 6)$ e $P(2 \leq X \leq 4 | 1 \leq X \leq 3)$.

SVOLGIMENTO

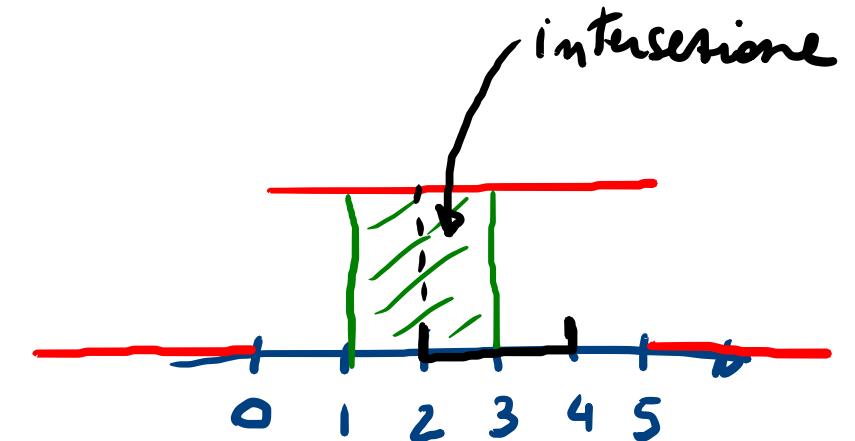
$$P(4 \leq X \leq 6) = \int_4^6 f_X(x) dx = \int_4^6 \frac{1}{5-0} 1_{(0,5)}(x) dx = \int_4^5 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} \left[x \right]_{x=4}^{x=5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$


oppure

$$P(4 \leq X \leq 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - \frac{4-0}{5-0} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$


$$P(2 \leq X \leq 4 | 1 \leq X \leq 3) = \frac{P(\{2 \leq X \leq 4\} \cap \{1 \leq X \leq 3\})}{P(\{1 \leq X \leq 3\})} = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(1 \leq X \leq 3)} =$$

$$= \frac{\int_2^3 \frac{1}{5-0} dx}{\int_1^3 \frac{1}{5-0} dx} = \frac{\frac{1}{5} \int_2^3 dx}{\frac{1}{5} \int_1^3 dx} = \frac{[x]_{x=2}^{x=3}}{[x]_{x=1}^{x=3}} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$



COMMENTO

I risultati dell'esercizio precedente possono essere ottenuti anche senza fare troppi calcoli, con un procedimento che può essere adattato a tutti i casi con distribuzione uniforme.

Infatti:

$$X \sim U(0,5); \quad P(4 \leq X \leq 6) = \frac{\text{lunghezza } ((4,6) \cap (0,5))}{\text{lunghezza } (0,5)} = \frac{1}{5}$$
$$P(2 \leq X \leq 4 \mid 1 \leq X \leq 3) = \frac{\text{lunghezza } ((2,4) \cap (1,3) \cap (0,5)) / \cancel{\text{lunghezza } (0,5)}}{\text{lunghezza } ((1,3) \cap (0,5)) / \cancel{\text{lunghezza } (0,5)}} =$$
$$= \frac{\text{lunghezza } (2,3)}{\text{lunghezza } (1,3)} = \frac{1}{2}.$$

Un altro esercizio / esempio è il seguente.

Sia $X \sim U(3, 10)$. Calcolare $P(6 \leq X \leq 11)$ e $P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9)$.

Allora $P(6 \leq X \leq 11) = \frac{\text{lunghezza } ((6, 11) \cap (3, 10))}{\text{lunghezza } (3, 10)} = \frac{10-6}{10-3} = \frac{4}{7}$

$$\begin{aligned} \text{e } P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9) &= \frac{P(\{6 \leq X \leq 11\} \cap \{5 \leq X \leq 9\})}{P(5 \leq X \leq 9)} = \\ &= \frac{\text{lunghezza } ((6, 11) \cap (5, 9) \cap (3, 10)) / \cancel{\text{lunghezza } (3, 10)}}{\text{lunghezza } ((5, 9) \cap (3, 10)) / \cancel{\text{lunghezza } (3, 10)}} = \frac{\text{lunghezza } (6, 9)}{\text{lunghezza } (5, 9)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Del resto, con il metodo tradizionale si ha:

$$P(6 \leq X \leq 11) = \int_6^{11} \frac{1}{10-3} 1_{(3, 10)}(x) dx = \frac{1}{7} \int_6^{10} dx = \frac{1}{7} \left[x \right]_{x=6}^{x=10} = \frac{10-6}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9) &= \frac{P(\{6 \leq X \leq 11\} \cap \{5 \leq X \leq 9\})}{P(5 \leq X \leq 9)} = \frac{P(6 \leq X \leq 9)}{\int_5^9 \frac{1}{10-3} dx} = \frac{\frac{1}{7} \left[x \right]_{x=6}^{x=9}}{\frac{1}{7} \left[x \right]_{x=5}^{x=9}} = \frac{9-6}{9-5} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Una v.a. X ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ se si ha

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$

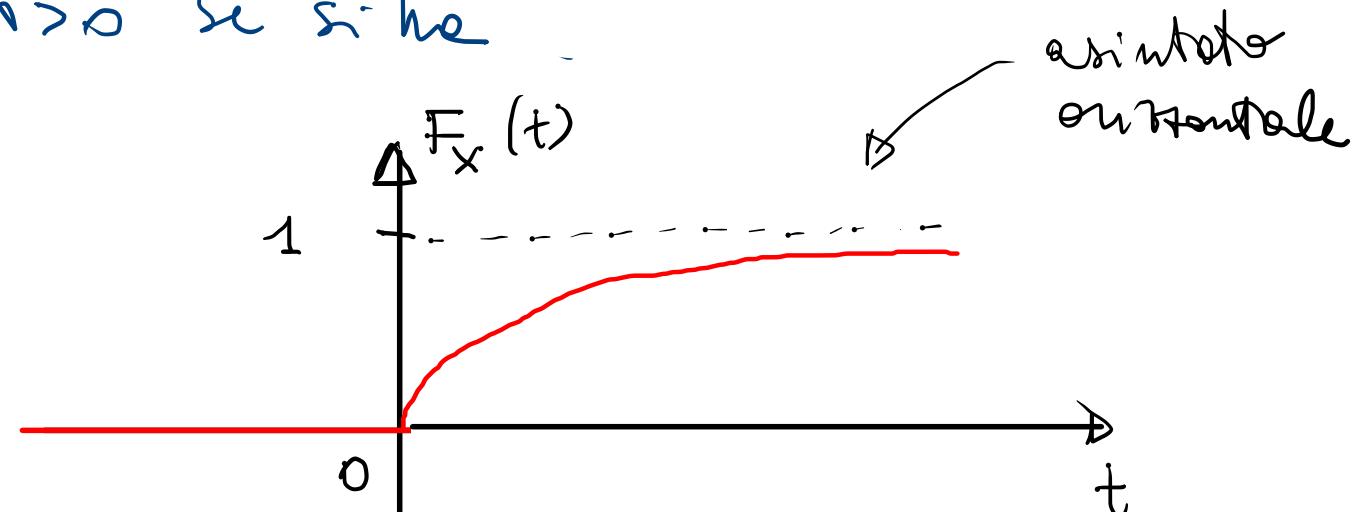
In simboli scriviamo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$,

la funzione F_X non è derivabile per $t=0$. Negli altri punti lo è e si ha

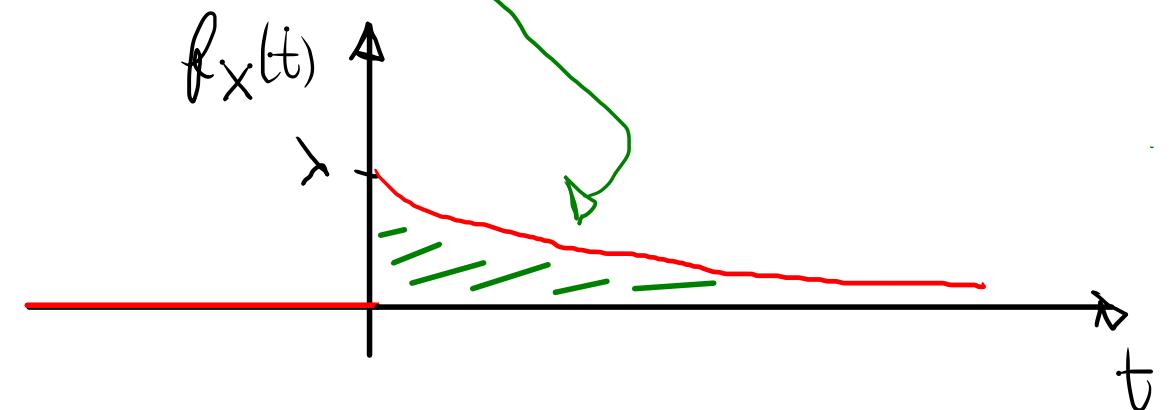
$$F'_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altimenti (per } t < 0) \end{cases}$$

Quindi possiamo dire ad esempio che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altimenti} \end{cases} = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t)$$



area = 1 (vedere dopo)
in accordo con le teorie



OSS. Abbiamo detto che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{eppure } f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(t).$$

Si potrebbe anche dire che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{eppure } R_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t).$$

OSS. Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ (e quindi λ può essere vista come una costante di normalizzazione)

Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f_X(x) dx}_{=0} + \int_0^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_{x=0}^{x=\infty} \xrightarrow{\substack{\text{ABUSO DI NOTAZIONE} \\ X=\infty}} = -e^{-\infty} \xrightarrow{\substack{\text{=} \\ =0}} -(-e^0) = -(-1) = 1.$$

PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA

Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Allora $P(X > t+s | X > s) = P(X > t)$ per ogni $t, s > 0$.

COMMENTO

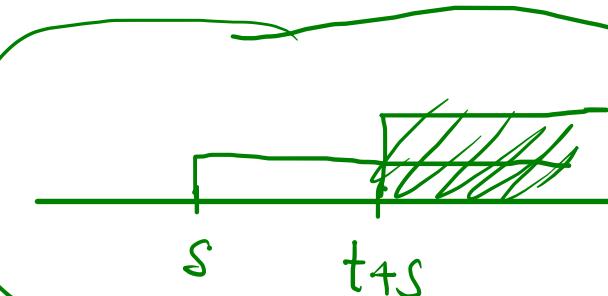
Se X rappresenta un tempo di funzionamento, possiamo dire: se c'è funzionamento al tempo s , la probabilità di funzionare per un ulteriore tempo t è la stessa che si avrebbe all'inizio (contendendo il tempo t da zero). Quindi ci si può dimenticare di sapere che è trascorso il tempo s .

DMOSTRAZIONE

Osserviamo che

$$P(X > r) = 1 - P(X \leq r) = 1 - e^{-\lambda r}$$

per $r > 0$,



Allora

$$P(X > t+s | X > s) = \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t).$$



OSS.

La distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione continua su $(0, \infty)$ che soddisfa le proprietà di mancanza di memoria.

ESERCIZIO

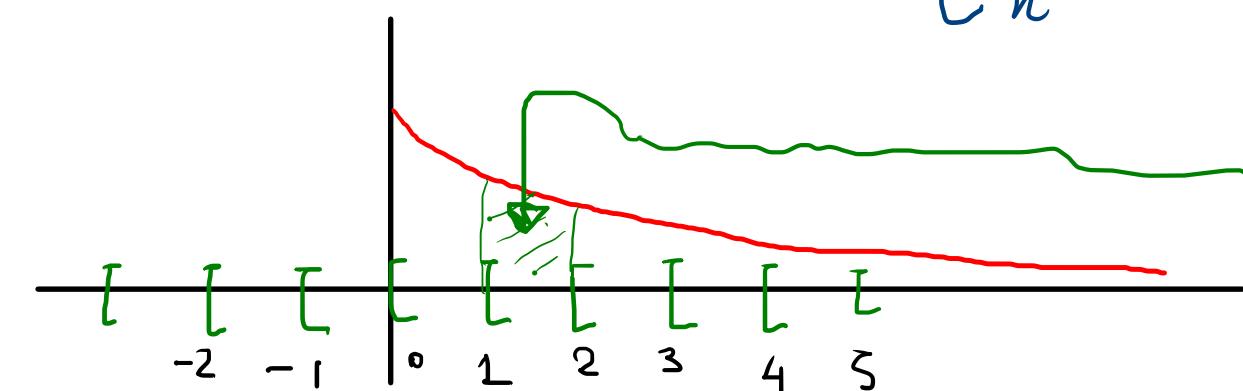
Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e poniamo $Y = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ è la "parte intera di x ". (Pensi: Y assume valori in un insieme al più numerabile). Trovare le densità discrete di Y .

RISPOSTA

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\{Y = k\} = \{k \leq X < k+1\}$ (anche se X avesse una distribuzione diversa),

Allora (per ogni $k \in \mathbb{Z}$)

$$p_Y(k) = P(k \leq X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \leq -1 \\ \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[e^{-\lambda x} \right]_{x=k}^{x=k+1} = -e^{-\lambda(k+1)} - (-e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Area} = p_Y(1) = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

ecc.

In conclusione si ha

$$p_y(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \quad \forall k \geq 0 \text{ inter.}$$

OSS. Se poniamo $p = 1 - e^{-\lambda}$, si ha $1 - p = e^{-\lambda}$; quindi

$$p_y(k) = e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda}) = (1 - p)^k p \quad \forall k \geq 0.$$

Quindi $Y \sim \text{Geo}(p = 1 - e^{-\lambda})$.

In altri termini si ha

$$\begin{array}{ccc} X \sim \text{Exp}(\lambda) & \xrightarrow{\hspace{2cm}} & [X] \sim \text{Geo}(p = 1 - e^{-\lambda}) \end{array}$$

con proprietà di

mancanza di memoria

con proprietà di
mancanza di memoria

ESERCIZIO

Sia X una v.a. continua con densità continua $f_X(x) = c x (1-x) 1_{(0,1)}(x)$, dove $c > 0$ è una costante di normalizzazione. Trovare il valore di c .

RISPOSTA

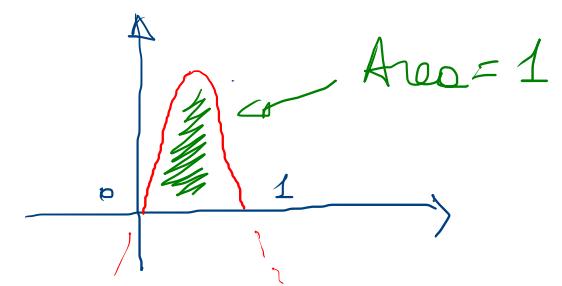
S. deve trovare il valore di c per cui si ha $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Allora $1 = \int_{-\infty}^0 \underbrace{f_X(x) dx}_{=0} + \int_0^1 f_X(x) dx + \int_1^{\infty} \underbrace{f_X(x) dx}_{=0} = \int_0^1 c x (1-x) dx = c \int_0^1 x - x^2 dx$

$$= c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = c \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = c \frac{3-2}{6} = \frac{c}{6}.$$

Quindi si ha $\frac{c}{6} = 1$, da cui segue $c = 6$.

OSS. La densità è una parabola rivolta verso il basso, che si annulla per $x=0$ e $x=1$. Inoltre $c > 0$ è tale che l'area segnata è uguale a 1.



ESERCIZIO

Sia X una v. a. continua con densità $f_X(t) = b|t|1_{(-a,a)}(t)$ per $a, b > 0$.

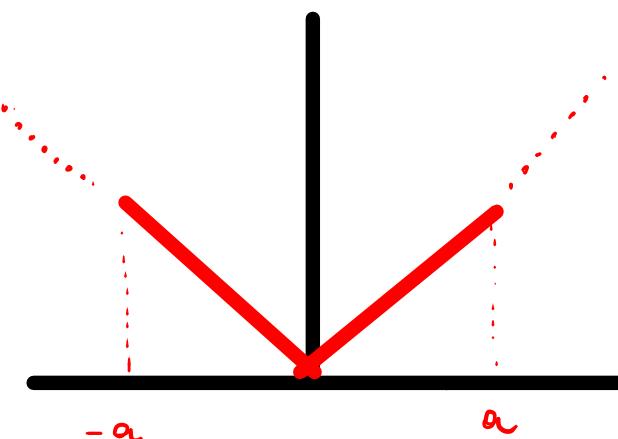
- 1) Dire quanto vale la costante di normalizzazione b come funzione di a .
- 2) Si verifichi che in ogni caso si ha $P(X > 0) = \frac{1}{2}$.
- 3) Calcolare $P(X > \frac{1}{2})$ per $a = 1$.

SOLUZIONE

1) Si deve avere $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$. Allora

$$1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{-a} f_X(t) dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-a}^a f_X(t) dt}_{=0} + \underbrace{\int_a^{+\infty} f_X(t) dt}_{=0} = \int_{-a}^a b|t| dt = b \int_{-a}^a |t| dt =$$

$$= b \left(\int_{-a}^0 |t| dt + \int_0^a |t| dt \right) = b \left(- \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=-a}^{t=0} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=a} \right) = b \left(- \left(\frac{0 - (-a)^2}{2} \right) + \left(\frac{a^2 - 0^2}{2} \right) \right) = b \left(\frac{a^2 + a^2}{2} \right) = b a^2$$



da cui segue $b = \frac{1}{a^2}$

PROCEDIMENTO AUTERNATIVO (da un certo punto in poi)

Abbiamo imposto $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt=1$ e, ad un certo punto, si ottiene $1 = b \int_{-a}^a |t| dt$.

Per abbriemo tenuto conto delle definizione di $|t|$ per $t \geq 0$ e per $t < 0$.

In maniera alternativa si potere tenere conto del fatto che:

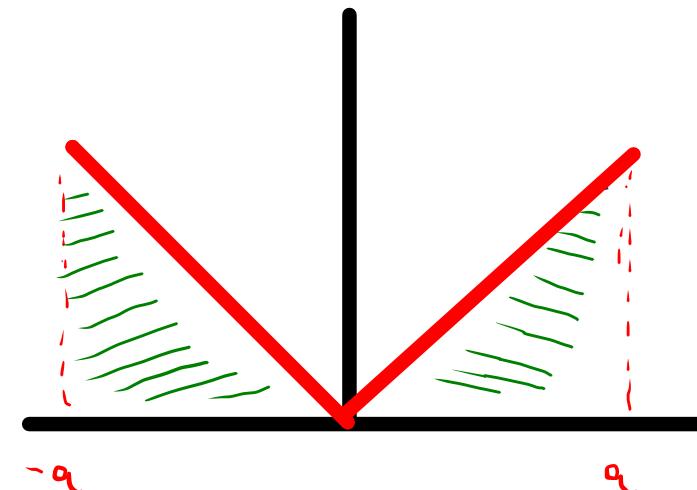
- $|t|$ è una funzione pari ($|t|=|-t|$);
- l'intervallo di integrazione $(-a, a)$ è simmetrico rispetto all'origine.

Allora

area del due triangoli
= 2 · Area triangolo a destra

$$b \int_{-a}^a |t| dt = 2b \int_0^a t dt = 2b \int_0^a t dt = 2b \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=a} = b(a^2 - 0^2) = ba^2$$

e quindi $b \int_{-a}^a |t| dt = 1 \Rightarrow ba^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1/a^2}$



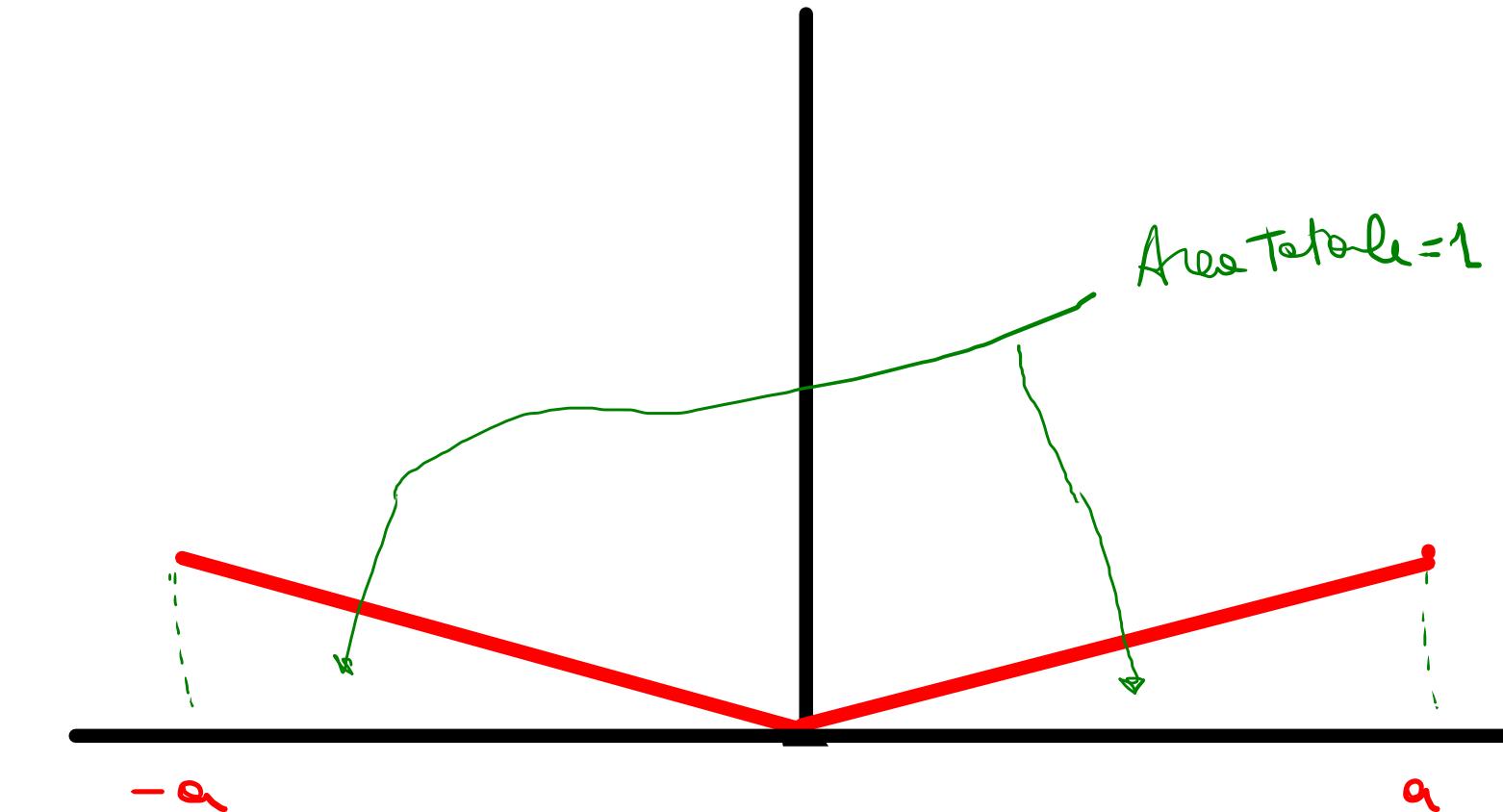
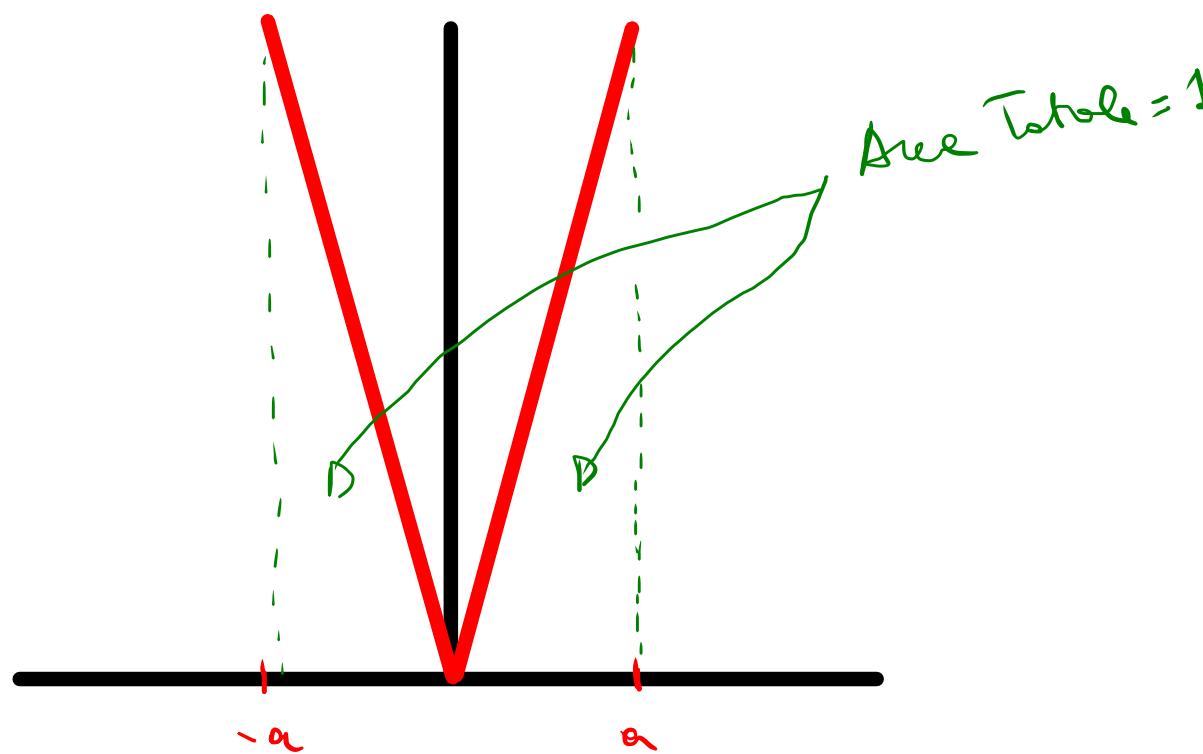
COMMENTO SULL'ESPRESSIONE $b = 1/a^2$

Non sorprende che, secondo le formule ottenute, si ha

b grande per a piccolo

e

b piccolo per a grande

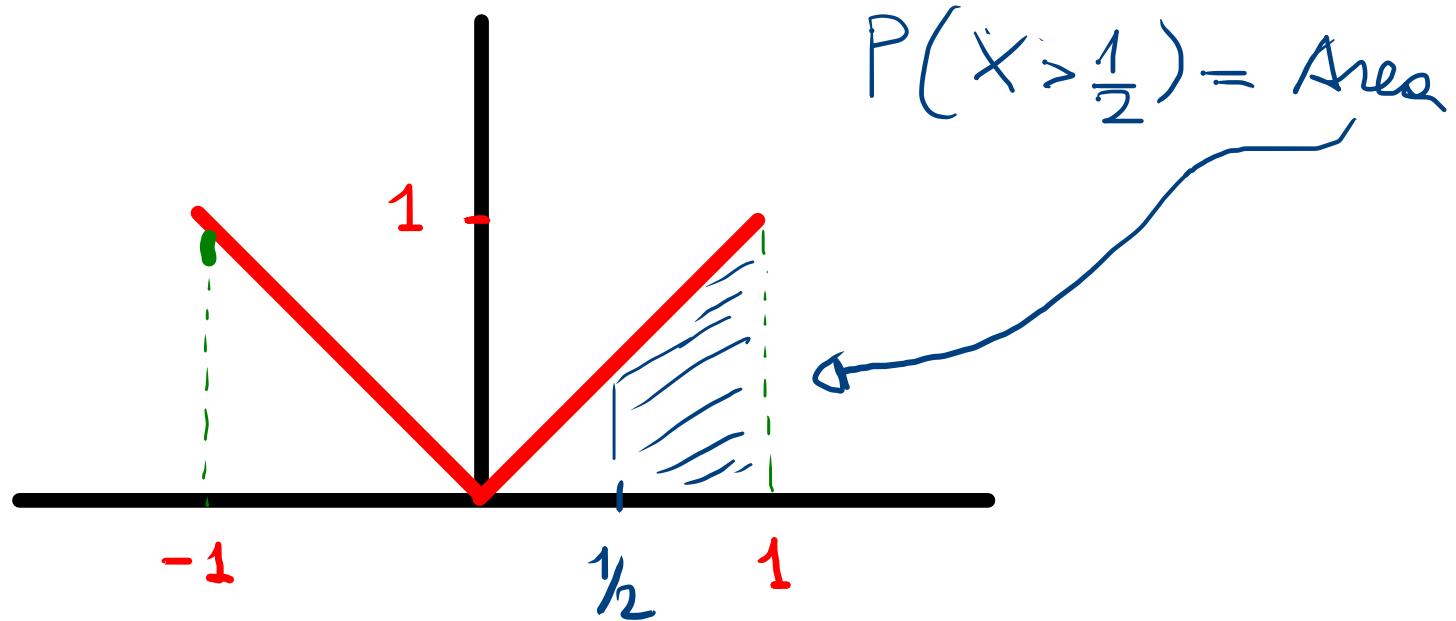


$$2) P(X>a) = \int_a^{\infty} f_X(t) dt = \int_0^a \underbrace{f_X(t)}_{= \frac{1}{a^2} |t| = \frac{t}{a^2}} dt + \int_a^{\infty} \underbrace{f_X(t)}_{=0} dt = \int_0^a \frac{t}{a^2} dt = \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=a} = \frac{1}{a^2} \frac{a^2 - 0^2}{2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Qualunque sia il valore di a , il grafico di f_X è costituito da due triangoli rettangoli con la stessa area, e la somma delle due aree è uguale a 1.

Quindi $P(X>a)$ deve essere uguale a $\frac{1}{2}$ perché è l'area del "triangolo di destra".

3) In questo caso, tenendo $a=1$, si ha $b = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{1^2} = 1$. Quindi i due triangoli di cui abbiamo parlato sono isosceli.



Allow

$$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f_X(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{|t|}_{=t} dt + \int_1^{\infty} 0 dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$