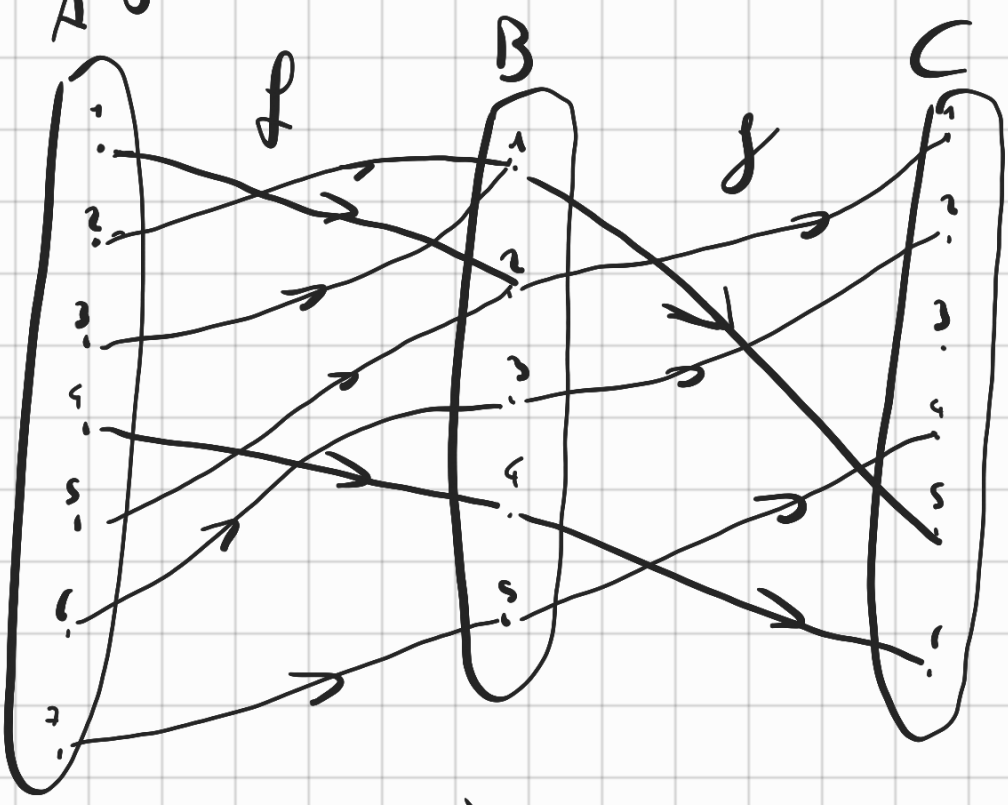
ES: $f: A \to B$, $g: B \to C$, f SURIETTIVA, g INIETTIVA

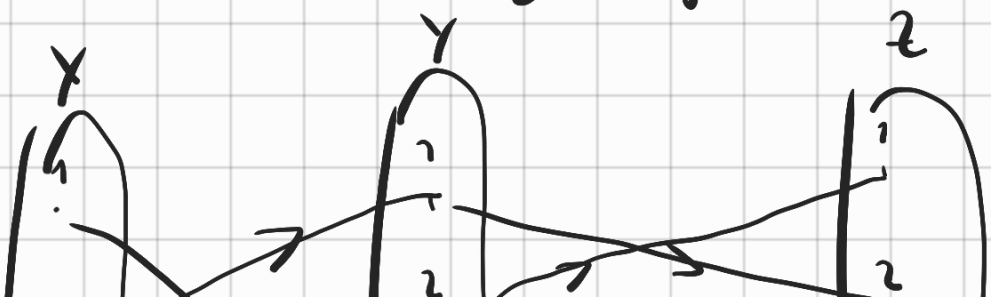
$g \circ f$ È INIETTIVA?

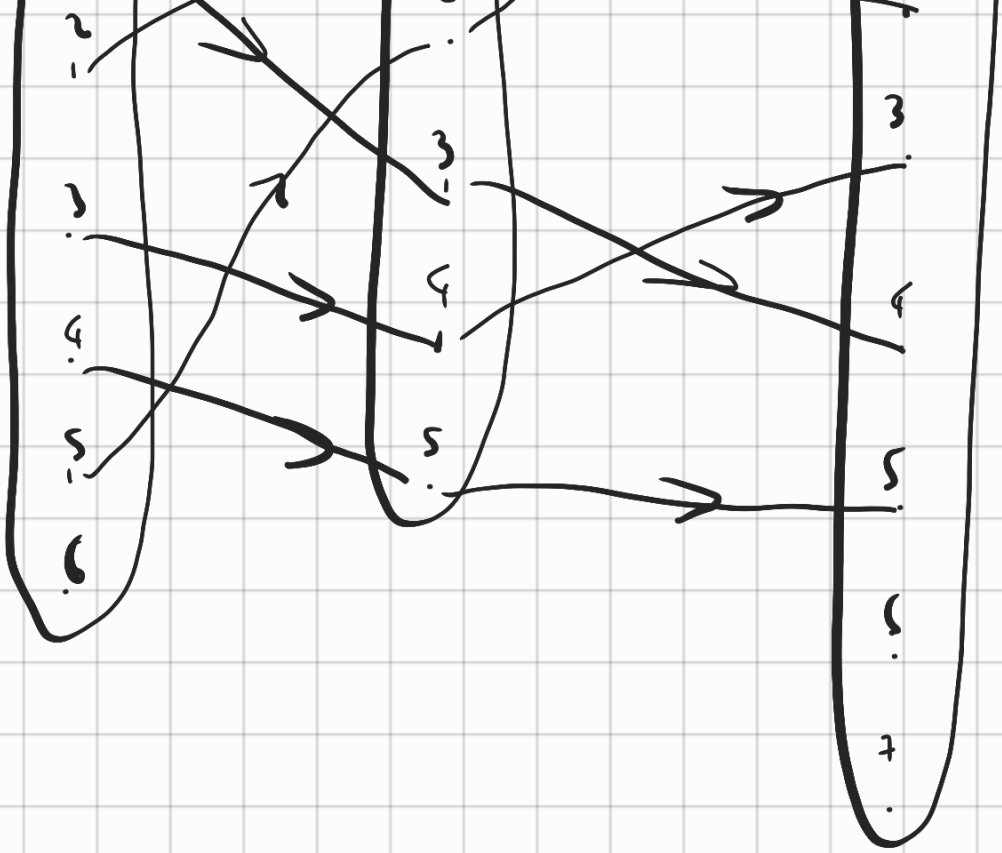


$g \circ f$ NON È INIETTIVA PERCHÉ, PER ESEMPIO $g \circ f(\overset{X}{1}) = g(f(1)) = g(2) = \overset{Y}{1}$

QUINDI $X = Y \Rightarrow$ NON INIETTIVA

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, f e g INIETTIVE. $g \circ f$ INIETTIVA?





$g \circ f$ NON È INIETTIVA POICHÉ, PER ESEMPIO $g \circ f(\overset{x}{2}) = g(f(2)) = g(1) = \overset{y}{2}$, QUINDI $x = y$, PERCIÒ $g \circ f$ NON È INIETTIVA

A, B, C INSIEMI

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)\,?$$

SE $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ E $y \in B \cup C$.

- SE $y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times B \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

Se $y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

Viceversa se $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in B$ oppure $y \in C$.

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in B \cup C$

quindi $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

Siano A, B, C insiemi tali che $C \subseteq A$. È vero che

$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$?

A	B	C	$A \cap B$	$(A \cap B) \cup C$	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0
~~0~~	~~0~~	~~1~~				
0	1	0	0	0	1	0
~~0~~	~~1~~	~~1~~				
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

QUEI SUE CASI
NON POSSONO ESISTERE
POICHÉ $C \subseteq A$

UGUALI

SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

$$mRn \iff \begin{matrix} m = n \\ o \\ m+n=5 \end{matrix}$$

$\forall m, n \in \mathbb{Z}$

EQUIVALENZA?

- **RIFLESSIVA?** SI

SIA $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = m \Rightarrow mRm \Rightarrow$ SI

- **SIMMETRICA?** SI

SIANO $m, n \in \mathbb{Z}$ TALI CHE mRn

$$\left.\begin{matrix} -\text{SE } m = n \Rightarrow n = m \Rightarrow nRm \\ -\text{SE } m+n=5 \Rightarrow n+m=5 \Rightarrow nRm \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{SI}$$

- **TRANSITIVA?** SI

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE aRb E

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE a [illegible]

bRc. ALLORA $a=b$ O $a+b=S$ E

$b=c$ O $b+c=S$.

- SE $a=b$ E $b=c \Rightarrow a=c \Rightarrow aRc \Rightarrow$ ok
- SE $a=b$ E $b+c=S \Rightarrow a+c=S \Rightarrow aRc \Rightarrow$ ok
- SE $a+b=S$ E $b=c \Rightarrow a+c=S \Rightarrow aRc \Rightarrow$ ok
- SE $a+b=S$ E $a+c=S \Rightarrow a=S-b$ E $c=S-b$

$\Rightarrow a=c \Rightarrow aRc \Rightarrow$ ok

$\Rightarrow$ SI

QUINDI È DI EQUIVALENZA.

QUALI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

$$[a]_R = \{b \in \mathbb{Z} : aRb\} = \left\{b \in \mathbb{Z} : \begin{matrix} a=b \\ \text{o} \\ a+b=S \end{matrix}\right\} =$$

$$= \{\overset{b=a}{a}, \overset{b=a-S}{a-S}\} \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ DEFINITA PONENDO

$$(a,b) R (c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

EQUIVALENZA

· RIFLESSIVA? SI

SIA $(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \Rightarrow a \cdot b = a \cdot b$

$\Rightarrow (a,b) R (a,b) \Rightarrow$ SI

· SIMMETRICA? SI

SIANO $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ TALI

CHE $(a,b) R (c,d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

$\Rightarrow c \cdot b = d \cdot a \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$\Rightarrow$ SI

· TRANSITIVA? SI

SIANO $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

TALI CHE $(a,b) R (c,d)$ E $(c,d) R (e,f) \Rightarrow$

$a \cdot d = b \cdot c$ E $c \cdot f = d \cdot e \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

$\Rightarrow a \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f$ e $b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e$

$\Rightarrow a \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e$. ma $d \neq 0$

poiché $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a \cdot f = b \cdot e$

$\Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (f,e) \Rightarrow$ Sì

È DI EQUIVALENZA

$f: A \to B$, $X, Y \subseteq B$.

DIMOSTRARE CHE

$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$$

. SIA $a \in f^{-1}(X \setminus Y) \Rightarrow f(a) \in (X \setminus Y)$

$\Rightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \notin Y \Rightarrow$

$a \in f^{-1}(X)$ e $a \notin f^{-1}(Y) \Rightarrow$

$a \in \boxed{f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)}$.

. VICEVERSA SIA $a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \notin f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \in Y$ =

$\Rightarrow f(a) \in X \setminus Y \Rightarrow a \in \boxed{f^{-1}(X \setminus Y)}$

SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

$$a R b \iff b-a \text{ È PARI}$$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$, EQUIVALENZA?

• RIFLESSIVA?

SIA $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \mid (b-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow (b-a) = 2 \cdot k \Rightarrow -a = (2 \cdot k) - b \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -(2 \cdot k) + b$

A, B, C INSIEMI, ALLORA

$(B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus B$

1) È SEMPRE VERA?
2) È SEMPRE FALSA?
3) È SEMPRE VERA SE $C \subseteq A$?
4) È SEMPRE VERA SE $A \subseteq C$?

A	B	C	$B \cap C$	$C \cap A$	$(B \cap C) \cup (C \cap A)$	$A \cup C$	$(A \cup C) \cap B$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

1) NON È SEMPRE VERA
2) NON È SEMPRE FALSA

3)

A	B	C	$B \cap C$	$C \cap A$	$(B \cap C) \cup (C \cap A)$	$A \cup C$	$(A \cup C) \cap B$
0	0	0	0	0	0	0	0
~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
0	1	0	0	0	0	0	0
~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1			

NON È SEMPRE VERA SE $C \subseteq A$

4)

A	B	C	$B \cap C$	$C \cap A$	$(B \cap C) \cup (C \cap A)$	$A \cup C$	$(A \cup C) \cap B$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

NON È SEMPRE VERA SE $A \subseteq C$

DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{P}$$

P.B. $\frac{1(1-1)}{2} = \frac{(1+1) \cdot 1 \cdot (1-1)}{6}$

$0 = 0$ VERO

P.I. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i-1)}{2} \overset{?}{=} \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{6}$

P.B

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i(i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)\cdot n}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n(n-1)}{6} + \frac{n^2+n}{2} =$$

$$= \frac{n^2+n\cdot(n-1)+3n^2+3n}{6} =$$

$$= \frac{n^3 \cancel{-n^2} \cancel{+n^2} - n + 3n^2 + 3n}{6} =$$

$$= \frac{n^3 - n + 3n^2 + 3n}{6} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{} = \frac{n(n^2+3n+2)}{} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Siano X, Y, Z insiemi e $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ due funzioni iniettive. Dimostrare che la loro composizione $g \circ f$ è iniettiva

Siano $a, b \in X$ $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ poiché f è iniettiva. Ma anche g è iniettiva $\Rightarrow g(f(a)) \neq g(f(b)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$

Decidere se, per ogni $n \in \mathbb{P}$, è vero che

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

PER DIMOSTRARE SE È VERO UTILIZZIAMO LA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

P.B $\quad 1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$

$1 = 1 \quad \checkmark$

P.I $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \quad ?$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \overset{P.B}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(4)}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\downarrow$$

$$(n+2)^2$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{} \quad \checkmark$$

4

$\forall n \in \mathbb{P}$

È VERO CHE PER OGNI $n \in \mathbb{P}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$