$v_1 := (1, 1, -1, -1)$, $v_2 := (1, -1, 1, -1)$,

$v_3 := (-1, 0, 0, 1)$, $v_4 := (0, 1, 1, 0)$

a) CONSIDERIAMO LA MATRICE

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4)$$

E RIDUCIAMOLA A SCALA

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DATO CHE I PIVOT SONO NELLA 1°, 2° E 4° COLONNA, E LE COLONNE DELLA MATRICE SONO I VETTORI INIZIALI, UNA BASE DI W È $B_W = \{v_1, v_2, v_4\}$

b) PER VERIFICARE SE v' E v'' APPARTENGONO A W, BISOGNA FORMA TRIANGOLARE SUPERIORE I SISTEMI $(A|v')$ E $(A|v'')$ PER VERIFICARE SE v' E v'' SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI DAGLI ALTRI 4 VETTORI, QUINDI:

$$(A|v') := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

QUINDI DATO CHE HA 4 PIVOT,

$rg(A|v') = 4 > 3 = rg(A)$ e quindi

v' non è lin. indipendente dagli altri vettori e quindi $v' \notin W := Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$

Poi

$$(A|v'') := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che i pivot sono 3

$rg(A|v'') = 3 = rg(A)$ quindi

$v'' \in W := Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$

d) Per trovare le coordinate di v'

rispetto a B calcolo

... CONSIDERIAMO

$A'' = (v_1, v_2, v_4)$, BISOGNA RISOLVERE

IL SISTEMA $A''(x_1, x_2, x_4) = v'$, IN

QUANTO L'UNICA TERNA x_1, x_2, x_3 SARANNO

PROPRIO LE CORDINATE DI v' RISPETTO A B_W.

QUINDI RISOLVIAMO IL SISTEMA CON L'E.G.

$$(A''|v') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ORA COMPLETIAMO CON L'E.G ALL'INDIETRO

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ \ldots \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$M: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times5}(\mathbb{Q})$$

2) Per verificare se la matrice è invertibile calcoliamo il determinante, utilizzando lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga

$$\det(M) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SVILUPPO 4ª COLONNE E 1ª COLONNA

$$= 1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

IL DETERMINANTE È UGUALE, SI CALCOLA APPLICANDO LA REGOLA DI SARRUS

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - (1 \cdot 1 \cdot 1) - (0 \cdot 0 \cdot (-1)) - (1 \cdot 0 \cdot 0)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

QUINDI

$$\det(M) = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 \neq 0$$

QUINDI LA MATRICE M È INVERTIBILE.

b) PER CALCOLARE L'INVERSA DOBBIAMO RISOLVERE CONTEMPORANEAMENTE 6 SISTEMI, OVVERO $(M \mid e_1 \mid e_2 \mid e_3 \mid e_4 \mid e_5) = (M \mid I_5)$ QUINDI

Una matrice 5x10. Operiamo utilizzando Gauss.

$$(A \mid I_5) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

Ora utilizziamo Gauss all'indietro

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

ORA DIVIDIAMO OGNI RIGA PER IL PIVOT DELLA RIGA STESSA

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_5 \mid M^{-1})$$

CIOÈ ABBIAMO

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

---

3)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ -2k-2 & k^2-2k-7 & k+3 \\ 0 & 27-6k & k-7 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

2) Per calcolare il rango di A si riduce a scala la matrice. Utilizzo Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ -2k-2 & k^2-2k-7 & k+3 \\ 0 & 27-6k & k-7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ 0 & k-3 & 2 \\ 0 & -3k+9 & k-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ 0 & k-3 & 2 \\ 0 & 0 & k-7 \end{pmatrix}$$

$$=: S_k$$

Ora per concludere il calcolo del rango dobbiamo studiare ogni caso di $k \in \mathbb{Q}$.

<u>1° caso</u> $k \neq 3$, allora $p_2 \neq 0$, ci sono poi 2 sottocasi.

1) $k \neq 7 \Rightarrow p_3 \neq 0 \Rightarrow rg(S_k) = rg(A_k) = 3$

2) $k=7 \Rightarrow P_3 = 0 \Rightarrow rg(S_k) = rg(A_k) = 2$

2° CASO $k=3 \Rightarrow P_2 = 0 \Rightarrow$ QUINDI LA MATRICE DIVENTA

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_k$$

QUINDI 2 PIVOT $\Rightarrow rg(S_k) = rg(A_k) = 2$

IN CONCLUSIONE

SE $k \in \{3,7\}$ ALLORA $rg(A) = 2$

SE $k \in \mathbb{Q} \setminus \{3,7\}$ ALLORA $rg(A) = 3$

b) UTILIZZIAMO LA MATRICE S_k DEL PUNTO a)

1) SE $k \in \mathbb{Q} \setminus \{3, 7\} \Rightarrow$ I PIVOT SULLA DIAGONALE SONO TUTTI DIVERSI DA ZERO E SONO $P_1 = 2$, $P_2 = k-3$, $P_3 = k-7$

$\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = k-3, \lambda_3 = k-7,$

QUINDI SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$$\det(A) = 2 \cdot (k-3) \cdot (k-7) = 2 \cdot (k^2 - 7k - 3k + 21) =$$

$$= 2k^2 - 20k + 42 \neq 0$$

2) SE $k = 7 \Rightarrow \det(A) = 2 \cdot 4 \cdot 0 = 0$

3) SE $k = 3$ $\det(A) = 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

c) 1) SE $k \neq 3$ E $k \neq 7$ A È INVERTIBILE

POICHÉ $\det(A) \neq 0$

2) SE $k = 7$ A NON È INVERTIBILE

POICHÉ $\det(A) = 0$

3) SE $k = 3$ A NON È INVERTIBILE

POICHÉ $\det(A) = 0$