QUANTI SOTTOINSIEMI DI $[7]$ CI SONO DI CARDINALITÀ 4?

SAPPIAMO DALLA TEORIA

$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 7\cdot 5 = 35.$$

CALCOLARE

$$|\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A\}|$$

ABBIAMO CHE:

$$\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A\} = X \cup Y$$

DOVE:

$$X = \{A \subseteq [9] : 2 \notin A\}$$

E

$$Y = \{A \subseteq [9] : 8 \notin A\}$$

DEVO CALCOLARE $|X \cup Y|$. ABBIAMO CHE

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

MA

$$|X| = |\{A \subseteq \{1,3,4,5,6,7,8,9\}\}| = 2^8$$

E

$$|Y| = |\{A \subseteq \{1,2,3,4,5,6,7,9\}\}| = 2^8$$

INFINE

$$|X \cap Y| = |\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ e } 8 \notin A\}| =$$
$$= |\{A \subseteq \{1,3,4,5,6,7,9\}\}| = 2^7$$

QUINDI

$$|\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A\}| = 2^8 + 2^8 - 2^7 = 2^9(2+2-1) =$$
$$= 2^7 \cdot 3$$

CALCOLARE

$$|\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ e } f(4) \neq 4\}|$$

ABBIAMO CHE

$$S_9 \setminus \{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ o } f(4) = 4\}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$|\{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ o } f(4) = 4\}|$$

DOBBIAMO CALCOLARE $|X \cup Y|$ DOVE

$$X = \{f \in S_9 : f(2) = 2\}$$

E

$$Y = \{f \in S_9 : f(4) = 4\}$$

APPLICHIAMO I.E. (INCLUSIONI-ESCLUSIONI).

DOBBIAMO CALCOLARE $|X|$, $|Y|$, $|X \cap Y|$

Abbiamo che

$$|X| = |\{f \in S_9 : f(2) = 2\}| = 8!$$

$$f = x_1 \; 2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9$$

8 scelte, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

Similmente

$$|Y| = |\{f \in S_9 : f(4) = 4\}| = 8!$$

$$|X \cap Y| = |\{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ e } f(4) = 4\}| =$$

$$= 7!$$

$$f = x_1 \; 2 \; x_3 \; 4 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9$$

7 scelte, 6, 5, 4, 3, 2, 2

Pertanto

$$|X \cup Y| = 8! + 8! - 7!$$

Concludendo

$$|\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ e } f(4) \neq 4\}| =$$

$$= 9! - (|X \cup Y|) = 9! - (8! + 8! - 7!) =$$

$$= 9! - 8! - 8! + 7! = (9 \cdot 8 - 8 - 8 + 1) \cdot 7! = 57 \cdot 7!$$

CALCOLARE

$$|\{f \in S_8 : f(1) \neq 1, f(7) \neq 7\}|$$

ABBIAMO CHE

$$S_8 \setminus \{f \in S_8 : f(1) \neq 1 \text{ o } f(7) \neq 7\}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$|\{f \in S_8 : f(1) \neq 1 \text{ o } f(7) \neq 7\}|$$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$|X \cup Y|$$

DOVE

$$X = \{f \in S_8 : f(1) \neq 1\}$$

E

$$Y = \{f \in S_8 : f(7) \neq 7\}$$

APPLICHIAMO I.E (INCLUSIONE - ESCLUSIONE).

Calcoliamo $|X|, |Y|, |X \cap Y|$

$$|X| = |\{f \in S_8 : f(1) \neq 1\}| = 7!$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 \\ & \downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & \text{poss.} & & & & & & \end{array}$$

Similmente

$$|Y| = |\{f \in S_8 : f(7) \neq 7\}| = 7!$$

$$|X \cap Y| = |\{f \in S_8 : f(1) \neq 1 \text{ e } f(7) \neq 7\}| = 6!$$

Pertanto

$$|X \cup Y| = 7! + 7! - 6!$$

Concludendo

$$|\{f \in S_8 : f(1) \neq 1, f(7) \neq 7\}| = 8! - (7! + 7! - 6!) =$$

$$= 8! - 7! - 7! + 6! = 6!(8 \cdot 7 - 7 - 7 + 1) =$$

$= 6! \cdot 53$

NELL'ANNO ACCADEMICO 2019-2020 SI SONO LAUREATE 28 PERSONE IN INFORMATICA, 22 IN MATEMATICA E 21 IN FISICA. DI QUESTI 8 SONO LAUREATI SIA IN INFORMATICA CHE IN MATEMATICA, 6 SIA IN MATEMATICA CHE IN FISICA, E IN INFORMATICA E FISICA, 1 IN TUTTE E TRE.

QUANTE PERSONE SI SONO LAUREATE IN ALMENO UNA DI QUESTE.

PONIAMO

$A = \{$ LAUREATI IN INFORMATICA $\}$

$B = \{$ LAUREATI IN MATEMATICA $\}$

$C = \{$ LAUREATI IN FISICA $\}$

DOBBIAMO CALCOLARE $|A \cup B \cup C|$

UTILIZZIAMO I.E

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C|$$

$$- |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 28 + 22 + 21 - 8 - 4 - 6 + 1 =$$

$$= 54$$