

ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 32

ESEMPI

- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{z} = 2+i.$$

Si ha che

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2}(1+2i+i^2) = i \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = i^2 = -1$$

e così l'equazione diventa

$$\frac{1}{z} = 3+i, \quad \bar{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{|3+i|^2} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3-i}{10}$$

e quindi la soluzione è $z = \frac{3+i}{10}$.

- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$z(\bar{z}+2) = 2(z+|3-4i|).$$

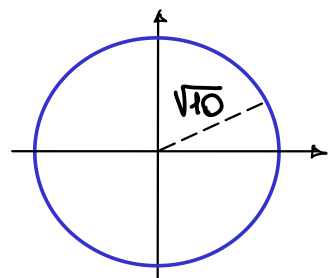
Intanto

$$|3-4i| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

e ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ si ha

$$|z|^2 + 2z = 2z + 10, \quad |z|^2 = 10, \quad |z| = \sqrt{10}$$

da cui ci sono infinite soluzioni: i punti della circonferenza $|z| = \sqrt{10}$



- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$\operatorname{Im}(z^2) + |z|^2 = 0.$$

Poniamo $z = x + iy$. Allora $|z|^2 = x^2 + y^2$ e

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \Rightarrow \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

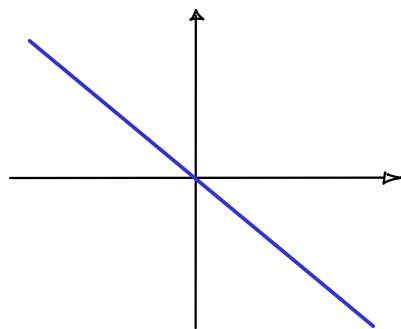
Così l'equazione diventa

$$2xy + x^2 + y^2 = 0, \quad (x + y)^2 = 0, \quad y = -x$$

Ci sono infinite soluzioni:

$$z = x - ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ossia i punti della retta $y = -x$.



- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$|z| = |z - 2i|.$$

Poniamo $z = x + iy$. Allora $z - 2i = x + i(y - 2)$ e l'equazione diventa

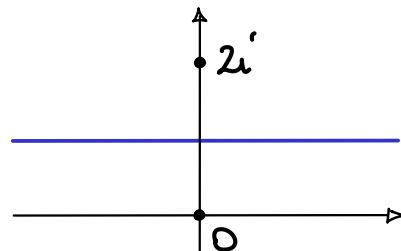
$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2},$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4, \quad y = 1$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z = x + i \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tutti i punti della retta $y = 1$.



Sono i punti z che hanno la stessa distanza da 0 e $2i$, ossia $|z| = |z - 2i|$.

OSSERVAZIONE

Per l'equazione di secondo grado

$$\underbrace{a}_{\neq 0} z^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{C}$$

continua a valere la formula risolutiva

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac$$

dove, se $\Delta \neq 0$, $\pm \sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate complesse di Δ .

- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$2z(z+4i) = 8-i.$$

L'equazione si riscrive come

$$\overset{a}{2}z^2 + \overset{b}{8i}z + \overset{c}{(-8+i)} = 0$$

Allora

$$\Delta = (8i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8+i) = -64 + 64 - 8i = -8i = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

le cui radici quadrate sono

$$\pm \sqrt{8} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \pm 2\sqrt{2} \left(\overset{-1/\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} + i \overset{1/\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right) = \pm 2(-1+i).$$

Così

$$z_{1,2} = \frac{1}{4}(-8i \pm 2(-1+i)) \begin{cases} z_1 = -\frac{1+3i}{2} \\ z_2 = \frac{1-5i}{2} \end{cases}$$

$$-8i \pm \sqrt{-64 - 4(2)(-8+i)} = -8i \pm \sqrt{-64 - 8(-8+i)} = \frac{-8i \pm \sqrt{-8i}}{4}$$

$$= \frac{-8i \pm 2\sqrt{-2}i}{4} = \frac{-8i \pm 2(1-i)}{4} = \frac{-8i \pm (2-2i)}{4} \rightarrow \begin{aligned} &\frac{-8i+2-2i}{4} = \frac{-10i+2}{4} = \frac{5i-1}{2} \\ &\frac{-8i-2+2i}{4} = \frac{-6i-2}{4} = \frac{-3i-1}{2} = -\frac{3i+1}{2} \end{aligned}$$

- Risolvere in \mathbb{C} l'equazione

$$|z|^8 = 16z^4$$

Applicando il modulo ad entrambi i membri

$$\text{si ha } |z|^8 = |16z^4| = 16|z|^4, |z|^4(|z|^4 - 16) = 0$$

da cui $|z|=0$ e $|z|=2$.

1) Se $|z|=0$ allora $z=0$ che è soluzione.

2) Se $|z|=2$ allora l'equazione diventa $2^8 = 16z^4$ ossia $z^4 = 16$ che è risolta dalle radici quarte di $16 = 16e^{i0}$

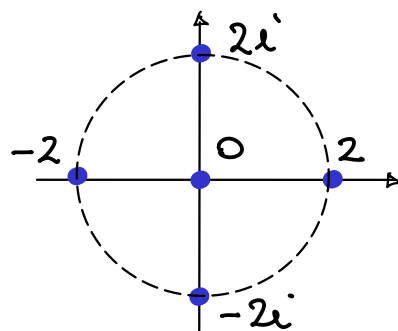
$$z_k = \sqrt[4]{16} \exp\left(i \frac{0+2k\pi}{4}\right) \text{ con } k=0,1,2,3$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0=2, z_1=2i, z_2=-2, z_3=-2i$$

In conclusione le soluzioni sono 5:

$$0, 2, 2i, -2, -2i$$



$z^4=16$ si può anche risolvere così

$$0 = z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$$

e le soluzioni sono $2, -2, 2i, -2i$.

OSSERVAZIONE

Dalla formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \frac{1}{2} (\cos(x) + i \sin(x) + \cos(-x) + i \sin(-x)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(x) + i \cancel{\sin(x)} + \cos(x) - i \cancel{\sin(x)}) \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} &= \frac{1}{2i} (\cos(x) + i \sin(x) - \cos(-x) - i \sin(-x)) \\ &= \frac{1}{2i} (\cancel{\cos(x)} + i \sin(x) - \cancel{\cos(x)} + i \sin(x)) \\ &= \sin(x).\end{aligned}$$

• $\int \cos^2(x) dx$?

Dato che

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(2x) + 1)\end{aligned}$$

si trova che

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x) dx &= \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{1}{2} \int 1 dx \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

- $\int \sin^4(x) dx$?

Dato che $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$$\sin^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{8} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$$

si ha

$$\int \sin^4(x) dx = \frac{1}{8} \int \cos(4x) dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx + \frac{3}{8} \int dx$$

$$= \frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8} x + C$$

- $\int e^x \cos(x) dx$? $\int e^x \sin(x) dx$?

Invece che integrare per parti usiamo la formula di Eulero: $\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}$

$$\int e^x \cos(x) dx + i \int e^x \sin(x) dx = \int e^x e^{ix} dx$$

$$= \int e^{x(1+i)} dx = \frac{e^{x(1+i)}}{1+i} + (C_1 + iC_2)$$

$$= \frac{1-i}{|1+i|^2} e^x (\cos(x) + i \sin(x)) + (C_1 + iC_2)$$

$$= \frac{e^x}{2} (\cos(x) + i \sin(x) - i \cos(x) + \sin(x)) + (C_1 + iC_2)$$

e separando parte reale e immaginaria si ha

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x)) + C_1$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + C_2$$

