1) $f(x) = x + \log(|x^2-3|)$

a) <u>DOMINIO</u>:

$|x^2-3| > 0 \Rightarrow x^2-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$

ASINTOTI:

PER $x \to \pm\infty$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \log(x^2-3)}{x} \sim 1 + \frac{\log(x^2)}{x} =$$

$$= 1 + \underbrace{2\frac{\log(x)}{x}}_{\to 0} = 1$$

QUINDI

$$f(x) - x = \cancel{x} + \log(x^2-3) - \cancel{x} \to +\infty$$

NON CI SONO ASINTOTI A $\pm\infty$

INOLTRE

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \to \pm\sqrt{3}} x + \lg(3-3) = \pm\sqrt{3} - \infty = -\infty$$

MONOTONIA

$\mathbb{R} = \mathbb{R}$ $\quad x \in D$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-3} = \frac{x^2-3+2x}{x^2-3} = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-3}$$

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow \frac{(x-1)(x+3)}{x^2-3} \geq 0 \rightarrow$$

$N1: \ x \geq 1 \quad , \quad N2: \ x \geq -3$

$D: \ x < -\sqrt{3} \ \cup \ x > \sqrt{3}$

		-3		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	
N1:	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
N2:	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
D:	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f'

f è crescente in $(-\infty, -3]$, $(-\sqrt{3}, 1]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$

mentre è decrescente in $[-3, -\sqrt{3})$ e $[1, \sqrt{3})$

Massimi e minimi

$f(-3) = -3 + \log(6)$

$f(1) = 1 + \log(2)$

$x = -3$ e $x = 1$ sono punti di massimo relativo

non ci sono punti di minimo relativo, e

massimo e minimo assoluto

Convessità / concavità

Per $x \in D$

$$f''(x) = \frac{\left((x-1)(x+3)\right)' \cdot (x^2-3) - (x-1)(x+3) \cdot (x^2-3)'}{(x^2-3)^2} =$$

$$\left(x^2+2x-3\right)'(x^2-3) - \left(x^2+2x-3\right) \cdot (2x)$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2-3) - (x^2+2x-3)(2x)}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2-3) - 2x^3 - 4x^2 + 6x}{(x^2-3)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{6x} + 2x^2 - 6 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + \cancel{6x}}{(x^2-3)^2} =$$

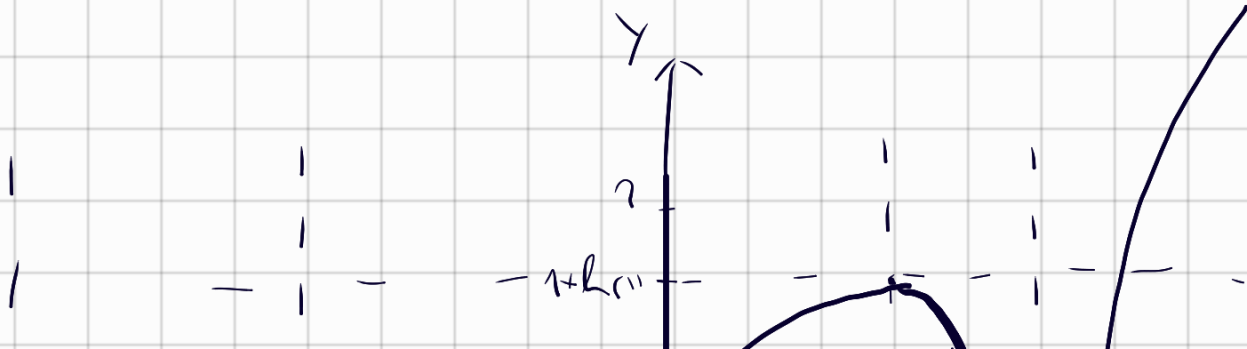
$$= \frac{-2x^2-6}{(x^2-3)^2} = -\frac{2(x^2+3)}{(x^2-3)}$$

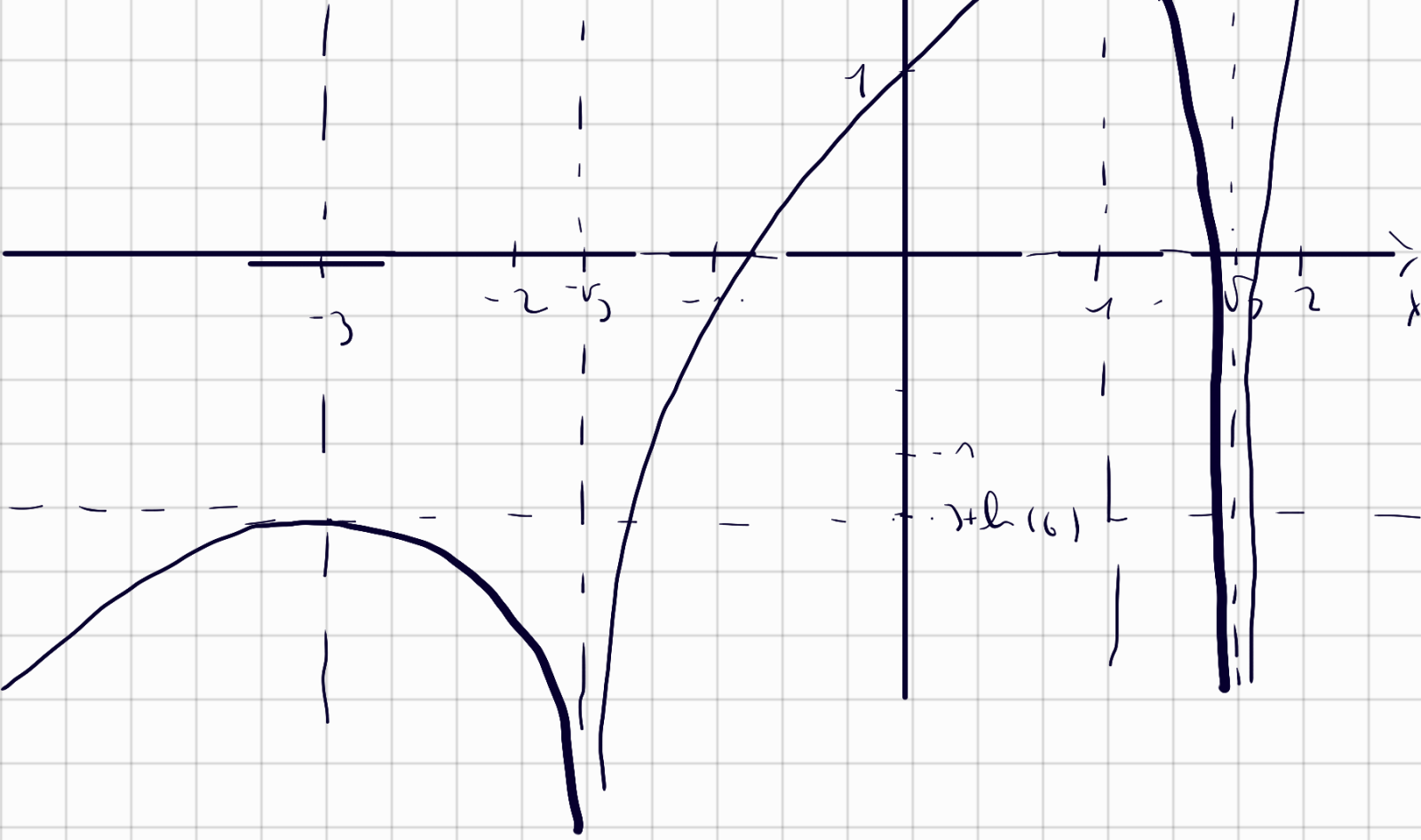
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow -\frac{2(x^2+3)}{(x^2-3)} \geq 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

QUINDI LA FUNZIONE È SEMPRE CONCAVA,

E NON CI SONO PUNTI DI FLESSO

<u>GRAFICO</u>





b) DATO CHE:

$$f(2) = 1 + \lg(2) > f(-3) = -3 \lg(6)$$

APPLICANDO IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

SI HA CHE L'EQUAZIONE $f(x) = c$ HA

1 SOLUZIONE SE $c > 1 + \ln(2)$

2 SOLUZIONI SE $c = 1 + \ln(2)$

3 SOLUZIONI SE $-3 + \ln(6) < c < 1 + \ln(2)$

4 solutions if $c = -3 + \ln(6)$

5 solutions if $c < -3 + \ln(6)$

---

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+4\log(x)} - \dfrac{4}{x^{2x} + \sin(x^2 - x)}$

a) פולינום טיילור מס' 2 ב $x_0 = 1$

Sia $t = x_0 - 1 \Rightarrow x_0 = 1 + t$ allora

$$f(x) = \frac{1}{1+4\log(1+t)} - \frac{4}{(1+t)^{2(1+t)} + \sin\left((1+t)^2 - (1+t)\right)}$$

ora

$$\frac{1}{1+4\log(1+t)} = \frac{1}{1+4\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+4t-2t^2+o(t^2)} = \left(1+4t-2t^2+o(t^2)\right)^{-1} =$$

$$= 1 - \left(4t - 2t^2 + o(t^2)\right) + \left(4t + o(t)\right)^2 =$$

$$= 1 - 4t + 2t^2 + o(t^2) + 16t^2 + o(t^2) =$$

$$= 1 - 4t + 18t^2 + o(t^2)$$

inoltre

$$\frac{4}{(1+t)^{2(1+t)} \sin\left((1+t)^2 - (1+t)\right)} =$$

$$= \frac{4}{\exp\left(2(1+t)\cdot \ln(1+t)\right) + \sin\left(\cancel{1} + t^2 + 2t - \cancel{1} - t\right)} =$$

$$= \frac{4}{\exp\left(2(1+t)\cdot \ln(1+t)\right) + \sin\left(t^2 + t\right)} =$$

$$= \frac{4}{\exp\left((1+2t)\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) + \left(t^2 + t + o(t^2)\right)} =$$

$$= \frac{4}{\exp\left(2t - t^2 + 2t^2 + o(t^2)\right) + \left(t^2 + t + o(t^2)\right)} =$$

$$= \frac{4}{\left(1+2t+t^2+o(t^2)+\frac{(2t+o(t))^2}{2}\right)+\left(t^2+t+o(t^2)\right)} =$$

$$= \frac{4}{\left(1+2t+t^2+o(t^2)+\frac{4t^2+o(t^2)}{2}\right)+\left(t^2+t+o(t^2)\right)}$$

$$= \frac{4}{\left(1+2t+3t^2+o(t^2)\right)+\left(t^2+t+o(t^2)\right)} =$$

$$= \frac{4}{1+3t+4t^2+o(t^2)} = 4\left(1+3t+4t^2+o(t^2)\right)^{-1} =$$

$$= 4\left(1-\left(3t+4t^2+o(t^2)\right)+\frac{\left(3t+o(t^2)\right)^2}{2}\right) =$$

$$= 4\left(1-3t-4t^2+o(t^2)+9t^2+o(t^2)\right) =$$

$$= 4\left(1-3t+5t^2+o(t^2)\right) = 4\left(1-3t+5t^2+o(t^2)\right) =$$

$= 1 - 12t + 20t^2 + o(t^2)$

FACCIAMO LA DIFFERENZA:

$f(x) = 1 - 4t + 18t^2 + o(t^2) - (1 - 12t - 20t^2 + o(t^2))$

$= -3 + 8t - 2t^2 + o(t^2)$

COSÌ IL POLINOMIO DI TAYLOR CERCATO È

$T_2(x) = -3 + 8(x-1) - 2(x-1)^2$

b) PER $x \to +\infty$

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{4}{x-3} = 1 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

QUINDI, PER LA PARTE a) POSTO $t = \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$$x f\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = x\left(-3 + 8\left(\frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= x\left(-3 + \frac{32}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -3x + 32 + o(1)$$

x

COSÌ L'ASINTOTO È $y = -2x + 32$

---

3) $f(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}$

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x}) \cdot x^{\alpha}}{x\sqrt{x} \cdot (\lg(3+x^8))^2}$

SIA

$g(x) = \dfrac{\arctan(\sqrt{6x}) \cdot x^{\alpha}}{x\sqrt{x} \cdot (\lg(3+x^8))^2}$

LA FUNZIONE È POSITIVA IN $(0, +\infty)$, QUINDI I PUNTI DA INDAGARE SONO 0^+ E $+\infty$

PER $x \to 0^+$

$g(x) \sim \dfrac{\sqrt{6} \cdot \cancel{\sqrt{x}} \cdot x^{\alpha}}{x \cdot \cancel{\sqrt{x}} \cdot \lg^2(3)} = \dfrac{C}{x^{1-\alpha}}$

QUINDI PER LA CONVERGENZA $1 - \alpha < 1$

$\alpha > 0$

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2} \cdot x^{\alpha}}{x\sqrt{x} \cdot (\lg(x))^2} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot x^{\alpha}}{x^{1+\frac{1}{2}} \cdot \lg^2(x)} =$$

$$= \frac{C}{x^{1+\frac{1}{2}-\alpha} \cdot \lg^2(x)} = \frac{C}{x^{\frac{3}{2}-\alpha} \cdot \lg^2(x)}$$

Quindi per la convergenza

$\frac{3}{2} - \alpha \geq 1$ ossia $\alpha \leq \frac{1}{2}$

Così l'integrale improprio converge

solo e solamente se $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

b) $$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}} \, dx$$

Sia $t = \sqrt{6}\,x \to x = \frac{t}{6} \to dx = \frac{t}{3}\,dt$:

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6}x)}{x\sqrt{x}} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{\frac{t^2}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{t}}{\sqrt{6}}} \cdot \frac{\cancel{t}}{\cancel{3}_{1}}\,dt =$$

$$= \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{\frac{t^2}{3\sqrt{6}}}\,dt = 2\sqrt{6}\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt =$$

INTEGRO PER PARTI

$$= 2\sqrt{6}\left(\left[-\frac{1}{t}\cdot\arctan(t)\right]_{1}^{+\infty} + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt\right)$$

ora

$$\frac{1}{t\cdot(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2+A+Bt^2+Ct}{t(t^2+1)}$$

quindi

$$1 = (A+B)t^2 + Ct + A = 1$$

ALLORA

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} B &= -1 \\ C &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

QUINDI

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \left[\ln(t)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

SE $s = t^2+1$, $ds = 2t\, dt \Rightarrow \frac{ds}{2s} = dt$ E

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{1}{s}\, ds = \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_1^{+\infty}$$

QUINDI CONCLUDENDO

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{6}\left[-\frac{\arctan(t)}{t} + \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_1^{+\infty} =$$

$$2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{4} + \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\right]_1^{+\infty}\right) = 2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\ln(2)}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{\pi}{2} + \ln(2)\right)$$

---

4)

$$\begin{cases} -\cos(x)\,y'(x) = \sin(x)\,y(x) + e^{2x}(x-3) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

[illegible] 1 [illegible]

$$-\cos(x)\,y'(x) - \sin(x)\,y(x) = e^{2x}(x-3)$$

$$y'(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,y(x) = \frac{e^{2x}(x-3)}{\cos(x)}$$

Quindi

$$a(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

ci

$$A(x) = -\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} =$$

Se $t = -\cos(x) \rightarrow dt = -\sin(x)\,dx$ ci

$$-\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = +\int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \log(t) = \lg(-\cos(x))$$

Il fattore integrante ci

$$e^{A(x)} = -\cos(x)$$

L'integrale completo ci

$$\int e^{A(x)} b(x)\,dx = \int \cancel{\cos(x)}\, e^{2x}(x-2)\,dx =$$

$$\int e^{\cdot} \cdot f(x)\, dx = \int \cancel{\cos(x)} \cdot \frac{\cdot}{\cancel{\cos(x)}}\, dx =$$

$$= \int e^{2x} (x-3)\, dx$$

INTEGRO PER PARTI

$$= (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, dx = (x-3)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c =$$

$$= \frac{e^{2x}}{4}\left(2(x-3) - 1\right) + c = \frac{e^{2x}}{4}(2x-7) + c$$

LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y'(x) = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot f(x) = \frac{1}{e^{2}(x)} \cdot \frac{e^{2x}}{4}(2x-7) + c$$

IMPONENDO LA CONDIZIONE $y(0) = 2$ SI HA

$$2 = y(0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}(-7) + c = -\frac{7}{4} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -C = -\frac{7}{4} - 2 \Rightarrow C = \frac{15}{4}$$

La soluzione diventa:

$$y'(x) = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{e^{2x}}{4} \cdot (2x-7) + \frac{15}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x}(2x-7) + 15}{4\cos(x)}$$

Dalla equazione di differenziale valutata in $x=0$

si ha che:

$$-\cos(0)y'(0) = \sin(0)y(0) + e^0(0-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(0) = -3$$

è la retta tangente al grafico

di $y(x)$ nel punto $(0,2)$ è

$$y = y'(0)(x-0) + y(0)$$

$$= -3(x) + ((0-7)e^0 + 15$$

$$= -3(x) + \frac{(-7+15)}{4 \cdot 2(0)}$$

$$= -3x + \frac{-7+15}{4}$$

$$= -3x + \frac{8}{4}$$

$$= -3x + 2$$

$$f(x) = \arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$$

<u>Dominio</u>

$1+x^2 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq -1 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi

$D = \mathbb{R}$

<u>ASINTOTI</u>

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

Quindi l'asintoto per $x \to +\infty$ è $y = \frac{\pi}{2}$

mentre l'asintoto per $x \to -\infty$ è $y = -\frac{\pi}{2}$

<u>Monotonia</u>

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2+2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \to \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$$

N: $3-x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 3 \to -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

D: $(1+x^2)^2 > 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi

f è crescente in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, mentre

è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{3}]$ e $[\sqrt{3}, +\infty)$

MASSIMI E MINIMI

$$f(-\sqrt{3}) = \arctan(-\sqrt{3}) + \frac{2(-\sqrt{3})}{1+(-\sqrt{3})^2} =$$

$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{4}$$

$$f(\sqrt{3}) = \arctan(\sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} =$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{4}$$

$x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo

$x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo

CONVESSITÀ / CONCAVITÀ

$$f''(x) = \frac{(3-x^2)'(1+x^2)^2 - (3-x^2)\left((1+x^2)^2\right)'}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(1+x^2)^2 - (3-x^2)\,2\cancel{(1+x^2)}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 12x + 4x^3}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^3 - 14x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-7)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x) \geq 0 \rightarrow$ N1: $2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

N2: $x^2 - 7 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{7} \cup x \geq \sqrt{7}$

D: $(1+x^2)^3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

		$-\sqrt{7}$		0		$\sqrt{7}$	
N1.	$-$		$-$		$+$		$+$
N2.	$+$		$-$		$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

La funzione è convessa in

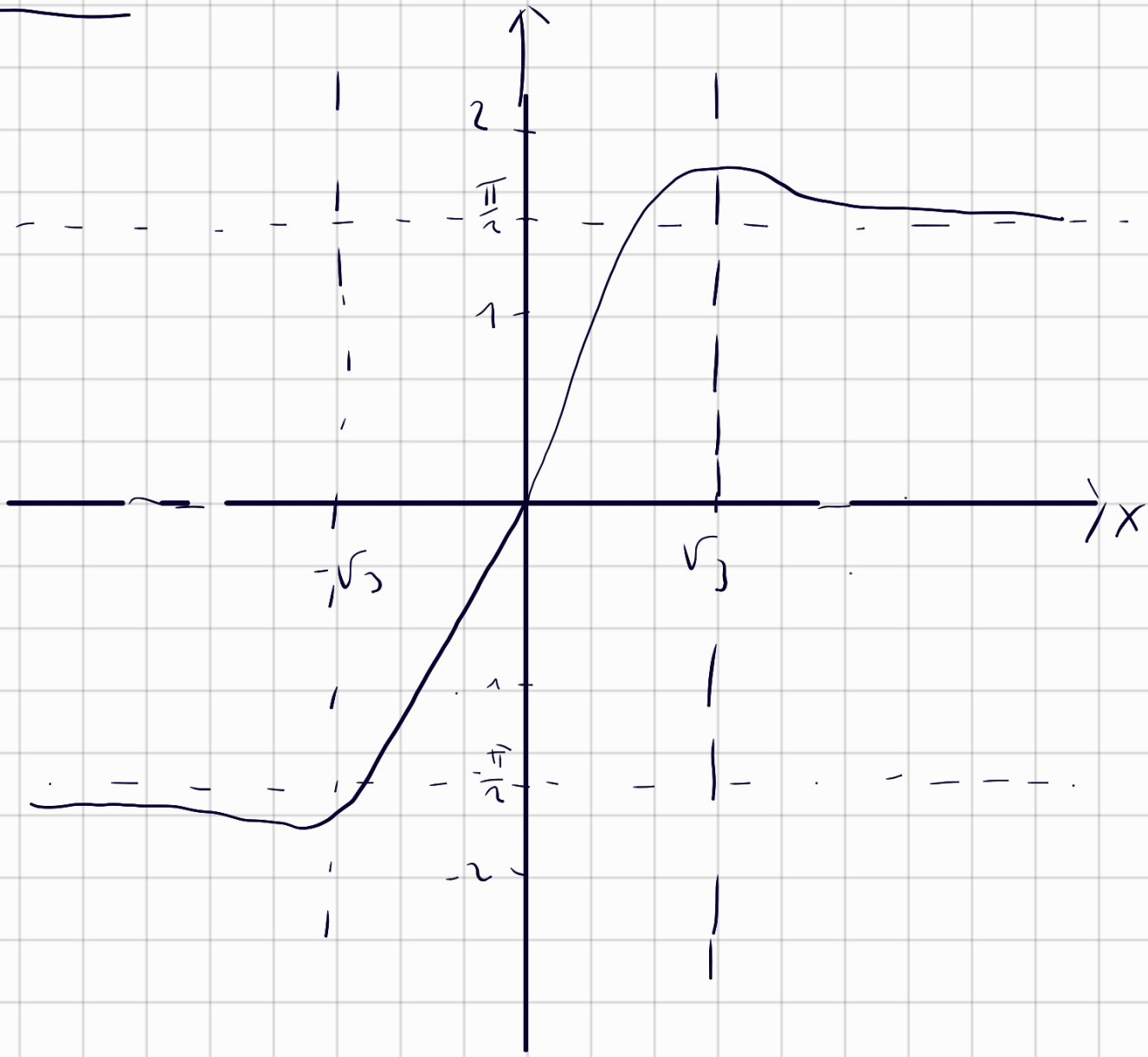
$[-\sqrt{7}, 0]$ e $[\sqrt{7}, 0)$, mentre è concava in

$(-\infty, -\sqrt{7}]$ e $[0, \sqrt{7}]$

PUNTI DI FLESSO

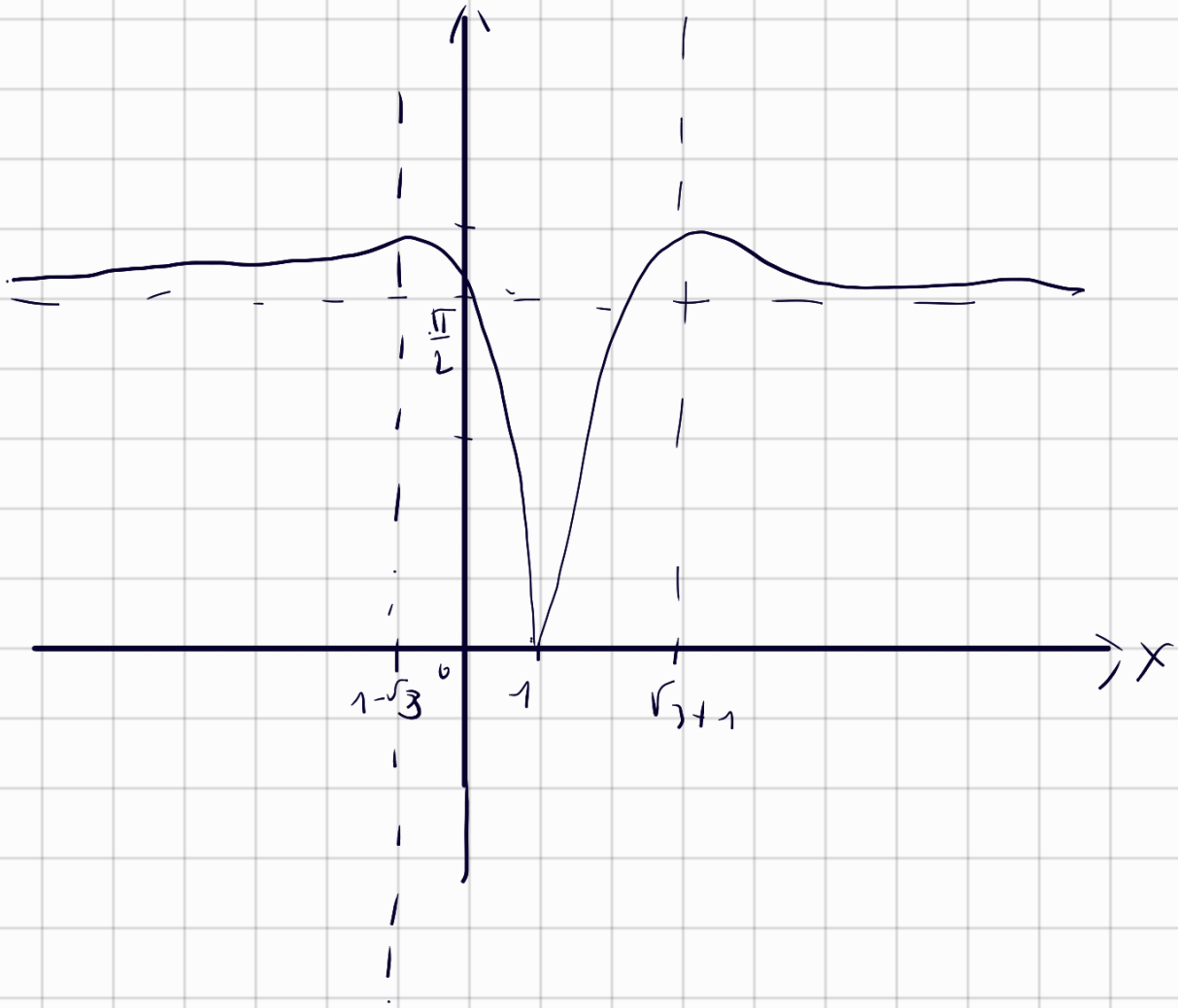
$x = -\sqrt{7}$ e $x = \sqrt{7}$ sono punti di flesso

GRAFICO



b) $f(|x-1|)$

y



2) $f(x) = \sqrt{\cos(2x+x^2) + \frac{x\sin(x)}{1+x^2}}$

a) $n=4 \qquad x_0=0$

sia $x_0=0$ allora

$$\cos(2x+x^2) = 1 - \frac{(2x+x^2)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} =$$

$$= 1 - \frac{(4x^2+x^4+4x^3+o(x^4))}{2} + \frac{\overset{4\cdot 4}{16}x^4}{4\cdot 3\cdot 2} + o(x^4) \qquad \frac{-3\,4}{6}$$

$$= 1 - \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{-3+4}{6}x^4 - 2x^3 + o(x^4) =$$

$$= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

ii

$$\frac{x\sin(x)}{1+x^2} = \frac{x\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{1+x^2} =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \cdot (1+x^2)^{-1} =$$

$$= \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)\left(1 - x^2 + o(x^2)\right) =$$

$$= x^2 - x^4 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^4)$$

Quindi

$$f(x) = \left(1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) + x^2 - \frac{7}{6}x^4 + o(x^4)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1 - x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1 + \left(-x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4)\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-x^2 - 2x^3 - x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \frac{x^4}{8} + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)$$

COSÌ IL POLINOMIO DI TAYLOR CERCATO È

$$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{5}{8}x^4$$

b) DAL $T_4(x)$ CALCOLATO IN a)

$$P'(x) = -x - 3x^2 - \frac{5}{2}x^3$$

E

$P'(0) = 0$, QUINDI $x_0 = 0$ È UN PUNTO STAZIONARIO, MA

OR

$f''(x) = -1 - 6x - \frac{15}{2}x^2$

ו

$f''(0) = -1 < 0$ אבל אין נקודת פיתול ב $x_0 = 0$

הפונקציה היא שלילית מוחלט קעורה.

אבל $x_0 = 0$ היא עדיין נקודת מקסימום מקומית.

---

3) עבור $x > 0$, $x + |x| = 2x$, לכן הנגזרת

הראשונה של $f(x)$ היא

$$f'(x) = \left(e^{-2x}\right)' \cdot \ln(3+e^{2x}) + e^{-2x} \cdot \left(\ln(3+e^{2x})\right)' =$$

$$= -2e^{-2x} \cdot \ln(3+e^{2x}) + e^{-2x} \cdot \frac{2e^{2x}}{3+e^{2x}} =$$

$$= 2e^{-2x}\left(-\ln(3+e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\right)$$

מאחר ש $2e^{-2x} > 0$ היא שלילית

מעל ל 0, נבדוק מתי הנגזרת היא

שלילית

Se $\cos\alpha$ fatto che sia differenziabile

negativo per $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\log(2+e^{2x}) + \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{-2x}_{\to-\infty}\underbrace{\log(e^{\cdot})}_{\to 1} + \underbrace{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}}_{\to 1}\right) = -\infty$$

b) $$\int_{-\log(2)}^{+\infty} e^{-2x}\cdot\log(3+e^{x+|x|})\,dx$$

Se $x \le 0$ $x+|x|=0$ mentre se $x \ge 0$ $x+|x| = 2x$

quindi l'integrale diventa

$$\int_{-\log(2)}^{0} e^{-2x}\cdot\log(3+1)\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\log(3+e^{2x})\,dx =$$

il primo integrale vale

$$\log(4)\cdot\int_{0}^{0} e^{-2x}\,dx = \log(4)\cdot\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_{-\log(2)}^{0} =$$

$= \lg(4)$

$$= \lg(4) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) = \lg(4) \cdot \left(\frac{1-4}{2}\right) =$$

$$= \lg(4) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} \lg(2) = 3 \lg(2)$$

PER IL SECONDO INTEGRALE, POSTO

$$t = e^{2x}, \quad x = \frac{\lg(t)}{2}, \quad dx = \frac{dt}{2t} \quad ;$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} \lg(3+e^{2x})\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \lg(3+t) \cdot \frac{dt}{2t} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \lg(3+t) \cdot \frac{1}{t^2}\, dt =$$

INTEGRO PER PARTI

$$= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \lg(3+t) \cdot d\left(-\frac{1}{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{\lg(3+t)}{t} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, d(\lg(3+t)) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log(4) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3+t}\, dt\right) =$$

$$\frac{1}{t\cdot(t+3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+3} = \frac{A(t+3) + Bt}{t(t+3)}$$

DONC

$$1 = (A+B)t + 3A$$

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

ALLONS

$$\frac{1}{2}\left(\log(4) + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3+t}\, dt\right) =$$

$$= \frac{\log(4)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right) dt =$$

$$= \frac{\log(2^2)}{2} + \frac{1}{6}\left[\ln\left(\frac{t}{t+3}\right)\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{x\log(2)}{x} + \frac{1}{6}\left[0 - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \log(2) + \frac{2\ln(2)}{6} = \log(2) + \frac{\log(2)}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\log(2)$$

Cvgi

$$\int_{-\log(2)}^{+\infty} f(x) = 3\log(2) + \frac{4}{3}\log(2) = \frac{13}{3}\log(2)$$

---

4)

a) $\bar{z}(|z|^2 - 5) = 6$

$$(x - iy)^2 (x^2 + y^2 - 5) = 6$$

$$(x^2 - y^2 - 2ixy)(x^2 + y^2 - 5) = 6$$

$$\begin{cases} (x^2-y^2)(x^2+y^2-5)=6 \\ -2ixy(x^2+y^2-5)=0 \end{cases}$$

מכפלה שווה אפס אם ורק אם אחד מהגורמים שווה אפס

$$\begin{cases} -y^2(y^2-5)=6 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2(x^2-5)=6 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} (x^2-y^2)\cdot 0=6 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

אם כן

$$\begin{cases} -y^4+5y^2-6=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^4-5x^2-6=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4-5y^2+6=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^4-5x^2-6=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$t=y^2 \qquad\qquad u=x^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$t^2-5t+6=0 \qquad\qquad u^2-5u-6=0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(6)}}{2}= \qquad u_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(-6)}}{2}=$$

$$=\frac{5\pm 1}{2}\nearrow^{3} \qquad\qquad =\frac{5\pm 7}{2}\nearrow^{6}$$

$= \frac{\quad}{2} \Rightarrow 2$

$t_1 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

$t_2 = 2 \rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

$= \frac{\quad}{2} = y = -1$

$\downarrow$

$u_1 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

$u_2 = -1 \rightarrow x = \pm i$

Così le soluzioni sono:

$\pm\sqrt{2}\,i \;,\; \pm\sqrt{3}\,i \;,\; \pm\sqrt{6}$

b) Ponendo $w = z^3$, l'equazione diventa

$\bar{w}^2 \left(|w|^2 - 5 \right) = 6$

Che, come visto per punto a), ha 6 soluzioni. Per trovare le altre è sufficiente trovare le 3 radici cubiche di ciascuna delle 6 soluzioni. Quindi ci sono $6 \cdot 3 = 18$ soluzioni