ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 29

ESEMPI

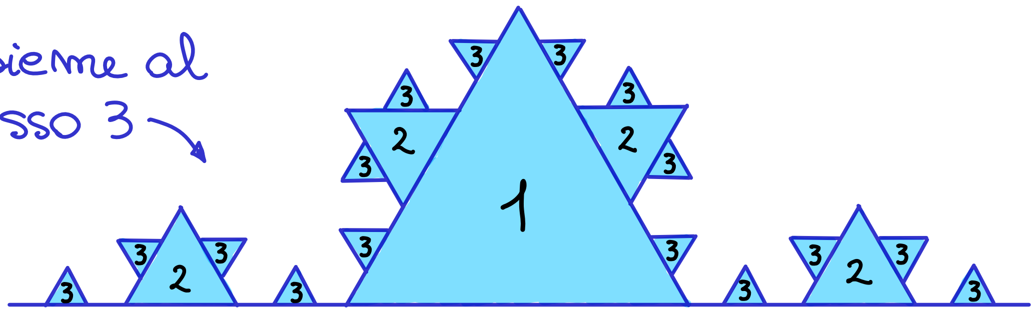
- Il FRATTALE DI KOCH è un insieme ottenuto con la seguente costruzione ricorsiva.

Passo base $n=0$: si traccia un segmento di lunghezza 1.

Passo ricorsivo $n\geq 1$: si divide ogni lato dell'insieme ottenuto al passo $n-1$ in 3 parti uguali e si "incolla" sulla parte centrale un triangolo equilatero.

Quanto vale $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ dove S_n è l'area dell'insieme al passo n?

insieme al passo 3



$n=0$, segmento, $S_0=0$

area triangolo equilatero di lato 1

$n=1$, 1 triangolo di lato $\frac{1}{3}$, $S_1=S_0+1\cdot T\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$n=2$, 4 triangoli di lato $\frac{1}{3^2}$, $S_1=S_0+4\cdot T\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^2$

$n=3$, 4^2 triangoli di lato $\frac{1}{3^3}$, $S_2=S_1+4^2\cdot T\cdot\left(\frac{1}{3^3}\right)^2$

$\vdots$

n, 4^{n-1} triangoli di lato $\frac{1}{3^n}$, $S_n=S_{n-1}+4^{n-1}\cdot T\cdot\left(\frac{1}{3^n}\right)^2$

Quindi per $n \to \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3^k}\right)^2 = \frac{T}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k \to \frac{T}{4} \cdot \frac{4/9}{1-4/9} = \frac{T}{5} .$$

dato che $T = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ si conclude che il limite vale $\frac{T}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20}$.

- Convertire in frazione il numero decimale

$$0.6\overline{81} = 0.6818181\ldots$$

Abbiamo che

$$0.\overline{81} = \frac{81}{100} + \frac{81}{100^2} + \frac{81}{100^3} + \cdots$$

$$= 81 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k} = 81 \cdot \frac{1/100}{1-1/100} = \frac{\cancel{81}^{\,9}}{\cancel{99}_{\,11}} = \frac{9}{11} .$$

Così

$$0.6\overline{81} = \frac{1}{10}\left(6 + 0.\overline{81}\right) = \frac{1}{10}\left(6 + \frac{9}{11}\right) = \frac{\cancel{75}^{\,15}}{\cancel{110}_{\,22}} = \frac{15}{22} .$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(k))|^k$ converge? sì

Notiamo che $|\operatorname{arctg}(\overbrace{\operatorname{sen}(k)}^{\in[-1,1]})| \leq \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ e quindi

$$|\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(k))|^k \leq (\pi/4)^k .$$

Dato che $\pi/4 \in (-1,1)$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\pi/4)^k$ converge e per confronto converge anche la serie data.

• $\sum_{k=0}^{\infty} (\pi - 2\,\mathrm{arctg}(k))$ converge? NO

Ricordando che per $x>0$, $\mathrm{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ si ha che per $k \geq 1$

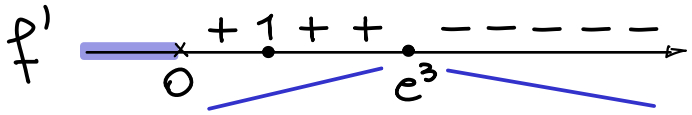
$$0 < (\pi - 2\,\mathrm{arctg}(k)) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{k}\right) \sim \frac{2}{k}$$

Dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ per confronto asintotico diverge anche la serie data.

• $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\log(k))^3}{k}$ converge? SÌ

Sia $f(x) = \frac{(\log(x))^3}{x}$ allora $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 3(\log(x))^2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot (\log(x))^3 = \frac{(\log(x))^2}{x^2}(3 - \log(x))$$



Quindi $a_k = f(k) = \frac{(\log(k))^3}{k}$ tende a 0 ed è definitivamente decrescente. Allora la serie data $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge per il criterio di Leibniz.

OSSERVAZIONE

Si noti che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log(k))^3}{k} = +\infty \quad (\alpha = 1, \beta = -3 \leq 1)$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,4^k}{k^k}$ converge? NO

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\overset{k+1}{\cancel{(k+1)!}}\,4^{\cancel{k}+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{\cancel{k!}\,\cancel{4^k}} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{4}{e}$$

$\frac{4}{e} > 1$ e quindi la serie diverge a $+\infty$.

- Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9^x - 1}{\sqrt{9^x + 1}} \right)^k \text{ è convergente?}$$

La serie data è geometrica e la condizione di convergenza è

$$\left| \frac{9^x-1}{\sqrt{9^x+1}} \right| < 1 \iff \underset{\geq 0}{|9^x - 1|} < \underset{\geq 0}{\sqrt{9^x+1}} \iff (9^x-1)^2 < 9^x + 1$$

$$\iff 9^{2x} - 2\cdot 9^x + \cancel{1} < 9^x + \cancel{1} \iff 9^x(9^x - 3) < 0$$

$$\iff 9^x < 3 \iff x \log(\overset{3^2}{9}) < \overset{>0}{\log(3)} \iff x < \frac{1}{2}.$$

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^a}{(\sqrt[k]{k} - 1)^4} \text{ è convergente?}$$

Si ha che $\sqrt[k]{k} - 1 = \exp\left(\overset{\to 0}{\frac{\log(k)}{k}}\right) - 1 \sim \frac{\log(k)}{k}$ e

$$\frac{k^a}{(\sqrt[k]{k} - 1)^4} \sim \frac{1}{k^{-4-a} \log^4(k)}$$

così per il confronto asintotico la serie converge se $-4-a \geq 1$ ossia $a \leq -5$ ($\alpha = -4-a$, $\beta = 4 > 1$).

• Per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie

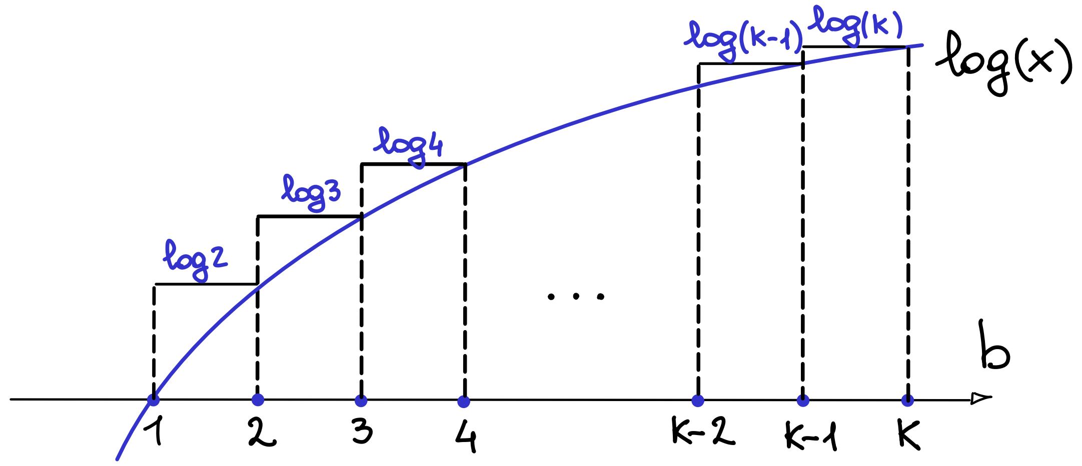
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^a} \quad \text{è convergente?}$$

Studiamo l'andamento asintotico di $\log(k!)$.

Stima dall'alto:

$$k! = \overbrace{k \cdot (k-1) \cdots 1}^{k \text{ fattori}} \leq \overbrace{k \cdot k \cdots k}^{k \text{ fattori}} = k^k \implies \log(k!) \leq k \log(k) \quad \text{(A)}$$

Stima dal basso: notiamo che



$$\log(\underset{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{k!}) = \sum_{j=2}^{k} \log(j) \geq \int_1^k \log(x)\,dx = \Big[x\log(x) - x\Big]_1^k = k\log(k) - k + 1 \quad \text{(B)}$$

Così usando le stime (A) e (B) abbiamo che

$$1 - \underbrace{\left(\frac{k-1}{k\log(k)}\right)}_{\to 0} \overset{(B)}{\leq} \frac{\log(k!)}{k\log(k)} \overset{(A)}{\leq} 1 \implies \log(k!) \sim k\log(k)$$

Infine

$$0 \leq \frac{\log(k!)}{k^a} \sim \frac{k\log(k)}{k^a} = \frac{\log(k)}{k^{a-1}}$$

e per il confronto asintotico la serie data converge se e solo se $a-1>1$ ossia per $a>2$.

OSSERVAZIONE

Con un metodo simile al confronto integrale dell'esempio precedente si dimostra l'approssimazione di STIRLING:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n \cdot e^{-n}$$

- Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right).$$

Abbiamo che

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \log\left(\frac{k^2}{\underbrace{k^2-1}_{(k-1)(k+1)}}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(2\log(k) - \log(k+1) - \log(k-1)\right)$$

$$= \overbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\log(k) - \log(k+1)\right)}^{\text{SOMMA TELESCOPICA}} + \overbrace{\sum_{k=2}^{n}\left(\log(k) - \log(k-1)\right)}^{\text{SOMMA TELESCOPICA}}$$

$$= \log(2) - \log(n+1) + \log(n) - \overbrace{\log(1)}^{=0}$$

$$= \log(2) - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \log(2)$$

Infine

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n = \log(2).$$