TROVARE TUTTI GLI $x, y \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

$$89 \cdot x + 43 \cdot y = 1$$

SAPPIAMO CHE ESISTONO TALI x E y SOLAMENTE SE $MCD(89, 43) \mid 1$. CALCOLIAMO $MCD(89, 43)$ CON L'AE

$$89 = 2 \cdot 43 + 3$$

$$43 = 14 \cdot 3 + 1 \to MCD(89, 43)$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

POICHÉ $1 \mid 1$ CI SONO SOLUZIONI E QUESTE SONO TUTTE DELLA FORMA

$$x = x_0 - \left(\frac{b}{d}\right) \cdot t \quad , \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) t$$

$MCD(a, b)$

CON $t \in \mathbb{Z}$

QUINDI NEL NOSTRO CASO

$$x = x_0 - 43 \cdot t \quad , \quad y = y_0 + 89 t$$

PER TROVARE x_0 E y_0 SVOLGIAMO L'IDENTITÀ DI BÉZOUT

$$1 = 43 + 3 \cdot (-14)$$

$= 43 + (89 + 43(-2))(-14)$

$= 43(29) + 89(-14)$

L'ID. DI BEZOUT È

$1 = 43(29) + 89(-14)$

PERTANTO L' $X_0 = -14$ E $Y_0 = 29$

QUINDI LE SOLUZIONI SONO

$$X = -14 - 43 \cdot t \quad , \quad Y = 29 + 89t$$

CON $t \in \mathbb{Z}$

TROVARE TUTTI GLI $x, y \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

$$875 \cdot x + 235 \cdot y = 10 \quad (*)$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE TALI X E Y ESISTONO SOLO E SOLTANTO SE $MCD(875, 235) \mid 10$

QUINDI CALCOLIAMO MCD CON L'AE

$875 = 3 \cdot 235 + 170$

$235 = 1 \cdot 170 + 65$

$170 = 2 \cdot 65 + 40$

$65 = 1 \cdot 40 + 25$

$40 = 1 \cdot 25 + 15$

$25 = 1 \cdot 15 + 10$

$15 = 1 \cdot 10 + 5 = MCD(875, 235)$

$10 = 2 \cdot 5 + 0$

Poiché $MCD(875, 235) \mid 10$ ci sono soluzioni e sono tutte della forma

$$x = x_0 - \left(\frac{b}{d}\right) \cdot t \quad , \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) \cdot t$$

con $t \in \mathbb{Z}$ e x_0, y_0 sono soluzioni di (*). Per trovare x_0 e y_0 calcoliamo l'id di Bezout

$$5 = 15 + 10 \cdot (-1)$$

$$= 15 + (25 + 15(-1))(-1)$$

$$= 15(2) + 25(-1)$$

$$=(90+25(-1))(2)+25(-1)$$
$$=90(2)+25(-3)$$
$$=90(2)+(65+90(-1))(-3)$$
$$=90(5)+65(-3)$$
$$=(170+65(-2))(5)+65(-3)$$
$$=170(5)+65(-13)$$
$$=170(5)+(235+170(-1))(-13)$$
$$=235(-13)+170(18)$$
$$=235(-13)+(875+235(-3))(18)$$
$$=875(18)+235(-67)$$

QUINDI L'ID DI BEZOUT È

$$5=875(18)+235(-67)$$

MA A NOI INTERESSA 10 QUINDI

MOLTIPLICHIAMO PER 2

$$10 = 875(36) + 235(-134)$$

QUINDI $X_0 = 36$ E $Y_0 = -134$

È SOL. DI (*). PERTANTO LE SOLUZIONI SONO

$$X = 36 - \left(\frac{235}{5}\right) \cdot t \quad , \quad Y = -134 + \left(\frac{875}{5}\right) \cdot t$$

$$X = 36 - 47t \quad , \quad Y = -134 + 175t$$

TROVARE TUTTE LE COPPIE DI NUMERI INTERI $X, Y \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

$$87x + 24y = 15$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE TALI $X, Y \in \mathbb{Z}$ ESISTONO SOLAMENTE SE $\text{MCD}(87, 24) \mid 15$

QUINDI CALCOLIAMO MCD $(87, 24)$

CALCOLIAMO MCD (87, 24)

$87 = 3 \cdot 24 + 15$

$24 = 1 \cdot 15 + 9$

$15 = 1 \cdot 9 + 6$

$9 = 1 \cdot 6 + 3 \Rightarrow MCD(87, 24)$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

3 È UN DIVISORE DI 15,

QUINDI ESISTONO LE X E Y, E

SONO TUTTE DELLA FORMA

$$X = X_0 - \left(\frac{b}{d}\right) \cdot t \quad , \quad Y = Y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) \cdot t$$

QUINDI NEL NOSTRO CASO SONO

$$X = X_0 - \frac{24}{3} \cdot t \quad , \quad Y = Y_0 + \frac{87}{3} \cdot t$$

$$X = X_0 - 8 \cdot t \quad , \quad Y = Y_0 + 29 \cdot t$$

PER TROVARE X_0 E Y_0 CALCOLIAMO

L'ID DI BEZOUT

$$3 = 9 \cdot 1 + 6 \cdot (-1)$$
$$= 9(1) + (15 + 9 \cdot (-1))(-1)$$
$$= 15(-1) + 9(2)$$
$$= 15(-1) + (24 + 15(-1))(2)$$
$$= 24(2) + 15(-3)$$
$$= 24(2) + (87 + 24(-3))(-3)$$
$$= 87(-3) + 24(11)$$

QUINDI L'IDENTITÀ DI BEZOUT È

$$3 = 87(-3) + 24(11)$$

MA A NOI INTERESSA 15, QUINDI MOLTIPLICHIAMO PER 5. OTTENIAMO

$$15 = 87(-15) + 24(55)$$

QUINDI

$$x_0 = -15 \quad e \quad y_0 = 55$$

È SOLUZIONE DELLA FORMULA INIZIALE. PERTANTO LE SOLUZIONI SONO

$$x = -15 - \overset{-23}{8}t \qquad y = 55 + \overset{87}{20}t$$

TROVARE TUTTE LE COPPIE DI NUMERI INTERI $x, y \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

$$87x + 24y = 15$$

DALLA TEORIA SAPPIAMO CHE TALI $x, y \in \mathbb{Z}$ ESISTONO SOLAMENTE SE $(87, 24) \mid 15$.

$$87 = 3 \cdot 24 + 15$$

$$24 = 1 \cdot 15 + 9$$

$15 = 1 \cdot 9 + 6$

$9 = 1 \cdot 6 + 3 \Rightarrow (87, 24)$

$6 = 2 \cdot 3 + 0$

DATO CHE $3 \mid 15$ TALI x E y

ESISTONO, E SONO TUTTI DELLA FORMA

$$x = x_0 - \left(\frac{b}{d}\right) \cdot t \quad , \quad y = y_0 + \frac{a}{d} \cdot t$$

QUINDI NEL NOSTRO CASO SONO

$$x = x_0 - \frac{24}{3} \cdot t \quad , \quad y = y_0 + \frac{87}{3} \cdot t$$

$$x = x_0 - 8 \cdot t \quad , \quad x = y_0 + 29\, t$$

x_0 E y_0 SONO SOLUZIONI PARTICOLARI.

PER TROVARLI CALCOLIAMO L'ID DI BÉZOUT

$$3 = 9(1) + 6(-1)$$

$$= 9(1) + \left(15 + 9(-1)\right)(-1)$$

$$= 15(-1) + 9(2)$$

$$= 15(-1) + (24 + 15(-1))(2)$$

$$= 24(2) + 15(-3)$$

$$= 24(2) + (87 + 24(-3))(-3)$$

$$= 87(-3) + 24(11)$$

QUINDI L'IDENTITÀ DI BÉZOUT È

$$3 = 87(-3) + 24(11)$$

MA A NOI SERVE DI 15, QUINDI MOLTIPLICHIAMO PER 5

$$15 = 87(-15) + 24(55)$$

QUINDI $X_0 = -15$ E $Y_0 = 55$

SONO SOLUZIONI DELLA FORMULA

INIZIALI. PERTANTO LE SOLUZIONI SONO TUTTE DEL TIPO

$x = -15 - 8 \cdot t \quad , \quad y = 55 + 29 \cdot t$

PROVA: $t = 1$

$$87(-15-8) + 29(55+29) = 15$$

$$87(-23) + 29(84) = 15$$

$$2001 + 2016 = 15$$

CALCOLARE, SE ESISTONO, TUTTI I NUMERI $x, y \in \mathbb{Z}$ TALI CHE:

$$97x + 66y = 5$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE TALI $x, y \in \mathbb{Z}$ ESISTONO SOLAMENTE SE $(97, 66) \mid 5$. QUINDI CALCOLIAMO

$(97, 66)$

$97 = 1 \cdot 66 + 31$

$66 = 2 \cdot 31 + 4$

$31 = 7 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1 \Longrightarrow (97, 66)$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

DATO CHE $1 \mid 4$ TALI $x, y \in \mathbb{Z}$ ESISTONO

E SONO TUTTI DELLA FORMA

$$x = x_0 - \frac{b}{d} \cdot t \quad , \quad y = y_0 + \frac{a}{d} \cdot t$$

DOVE d È $(97, 66)$, E x_0, y_0

SONO SOLUZIONI PARTICOLARI.

PER CALCOLARE x_0 E y_0 CALCOLIAMO

L'IDENTITÀ DI BEZOUT

$1 = 4(1) + 3(-1)$

$= 4(1) + (31 + 4(-7))(-1)$

$= 31(-1) + 4(8)$

$= 31(-1) + (66 + 31(-2))(8)$

$= 66(8) + 31(-17)$

$= 66(8) + (97 + 66(-1))(-17)$

$= 97(-17) + 66(25)$

Quindi l'identità di Bézout è

$1 = 97(-17) + 66(25)$

Ma a noi interessa per 4. Quindi

$4 = 97(-68) + 66(100)$

Quindi

$X_0 = -68$ e $Y_0 = 100$

Pertanto

$X = -68 - 66 \cdot t \quad , \quad Y = 100 + 97 \cdot t$

Prova: $t = 1$

$97(-68-66) + 66(100+97) = 4$

$97(-134) + 66(197) = 4$

$-12.998 + 13.002 = 4$

Calcolare, se esistono, tutti gli $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che

$$96x + 86y = 1$$

Sappiamo dalla teoria che tali $x, y \in \mathbb{Z}$ esistono solamente se $(96, 86) \mid 1$. Calcoliamo $(96, 86)$ con l'A.E.

$96 = 1 \cdot 86 + 10$

$86 = 8$

$86 = 8 \cdot 10 + 6$

$10 = 1 \cdot 6 + 4$

$6 = 1 \cdot 4 + 2 \Longrightarrow (96, 86)$

$4 = 2 \cdot 2 + 0$

DATO CHE $2 \nmid 1$ NON ESISTONO TALI $x, y \in \mathbb{Z}$