4.3 COEFFICIENTI BINOMIALI

RICORDIAMO CHE, SE $n \in \mathbb{P}$, ALLORA

$$[n] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \ldots, n\}.$$

PROP. 4.3.1: SIA $n \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$|\mathcal{P}([n])| = 2^n.$$

DIM. SIA $\varphi : \mathcal{P}([n]) \to \underbrace{[2] \times [2] \times \cdots \times [2]}_{n}$

DEFINITA PONENDO

$$\varphi(A) \stackrel{def}{=} (a_1, \ldots, a_n)$$

DOVE

$$a_i \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1, \text{ SE } i \notin A, \\ 2, \text{ SE } i \in A, \end{cases}$$

PER $i = 1, .., n$, E $A \subseteq [n]$ (PER ES., SE $n = 5$ E $A = \{1, 4\} \Rightarrow \varphi(A) = (2, 1, 1, 2, 1)$).

ALLORA φ È BIUNIVOCA $\Rightarrow$

$$\left|\mathcal{P}([n])\right| = \Big|\underbrace{[2]\times\dots\times[2]}_{n}\Big| \overset{(4.2.1)}{=} \underbrace{\big|[2]\big|\cdot\ldots\cdot\big|[2]\big|}_{n} = 2^n. \quad \square$$

SIA $m \in \mathbb{Z}$.

<u>DEF.</u> IL <u>COEFFICIENTE BINOMIALE</u> DI GRADO m È

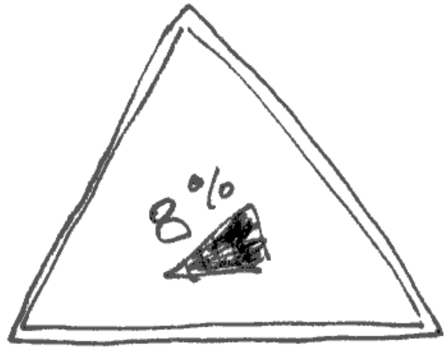
$$\binom{x}{m} \overset{\text{def}}{=} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)}{m!}$$

(LETTO: "x SCEGLIE m")

SE $m \in \mathbb{P}$, $\binom{x}{0} \overset{\text{def}}{=} 1$, $\binom{x}{m} \overset{\text{def}}{=} 0$ SE $m < 0$.

OSS. Quindi $\binom{x}{m} \in \mathbb{Q}[x]$.

(Si dice anche "x binomiale m")



PROP. 4.3.2: Siano $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$.

Allora

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k\}\right| = \binom{n}{k}.$$

DIM. Induzione su $n \in \mathbb{N}$. Facile se $n \le 2$. Sia $n \ge 3$. Se $k = 0 \Rightarrow$ ~~o.k.~~.

$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = 0\}\right| = \left|\{\emptyset\}\right| = 1 = \binom{n}{0} \Rightarrow$ o.k.

SIA $k \geq 1$. ABBIAMO CHE

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k\}\right| \overset{(4.2.1)}{=}$$

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k,\ n \notin A\}\right| +$$

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k,\ n \in A\}\right|.$$

MA

$$\{A \subseteq [n] : |A| = k,\ n \notin A\} = \{A \subseteq [n-1] : |A| = k\}$$

QUINDI, PER INDUZIONE,

$$\left|\{A\subseteq[n] : |A|=k,\ n\notin A\}\right|=\binom{n-1}{k}.$$

SIA $\psi : \{A\subseteq[n] : |A|=k,\ n\in A\}\to$

$\{B\subseteq[n-1] : |B|=k-1\}$ DEFINITA PONENDO

$$\psi(A)\overset{def}{=}A\setminus\{n\}$$

PER $\forall A\subseteq[n]$ TALE CHE $|A|=k$ E $n\in A$.

ALLORA ψ È BIUNIVOCA ($B \mapsto B \cup \{n\}$ È L'INVERSA). QUINDI, PER INDUZIONE,

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k,\ n \in A\}\right| = \binom{n-1}{k-1}.$$

CONCLUDENDO

$$\left|\{A \subseteq [n] : |A| = k\}\right| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

(ALGEBRA LICEALE)

$$= \binom{n}{k}. \square$$

PROP. 4.3.3: SIA $n \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n .$$

DIM. INDUZIONE SU $n \in \mathbb{P}$. FACILE SE $n=1$. SIA VERO PER $n-1$. ALLORA

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot (1+x)^{n-1}$$

$$\text{(INDUZIONE)} = (1+x) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^{k} + x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^{k}$$

$\left(\binom{n-1}{n} = 0 \right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \cdot x^{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot x^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \cdot x^{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k} . \square$$

PROP. 4.3.4: SIA $n \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$|\{A \subseteq [n] : |A| \text{ È PARI}\}| = |\{A \subseteq [n] : |A| \text{ È DISPARI}\}|.$$

DIM. BASTA PORRE $x = -1$ IN 4.3.3. □

ES. [2-]: TROVARE UNA BIEZIONE TRA $\{A \subseteq [n] : |A| \text{ È PARI}\}$ E $\{A \subseteq [n] : |A| \text{ È DISPARI}\}$.

4.4 IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

SAPPIAMO CHE

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (*)$$

(A, B INSIEMI FINITI). SIANO A, B, C INSIEMI FINITI. ALLORA

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| \overset{(*)}{=}$$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$\overset{(*)}{=} |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$$

$$\overset{(*)}{=} |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \Big(|A \cap C| + |B \cap C| -$$

$$- |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \Big)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$

$$+ |A \cap B \cap C|.$$

SIANO $A_1, A_2, \dots, A_n$ INSIEMI FINITI ($n \in \mathbb{P}$).

DATO $T \subseteq [n]$ PONIAMO

$$A_T \stackrel{\text{def}}{=} A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}$$

SE $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ (PER ES., $A_{\{1,3,5\}} = A_1 \cap A_3 \cap A_5$). FACENDO LO STESSO RAGIONAMENTO APPENA FATTO PER $n=3$ SI OTTIENE

TEO. 4.4.1: (IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE):

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ T \neq \emptyset}} (-1)^{|T|-1} \cdot |A_T|.$$

TEO.: SIA $n \in \mathbb{P}$ E SIA $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ LA SUA DECOMPOSIZIONE IN NUMERI PRIMI ($p_1, \dots, p_r, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{P}$, $p_1, \dots, p_r$ PRIMI DISTINTI). ALLORA

$$\Phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

DIM. ABBIAMO CHE

$$\left|\{1\le i\le m : (m,i)=1\}\right| = m - \left|\{1\le i\le m : (m,i)\ge 2\}\right|.$$

MA

$$\{1\le i\le m : (m,i)\ge 2\} = \{1\le i\le m : p_1 \mid i\} \cup$$

$$\{1\le i\le m : p_2 \mid i\} \cup \dots \cup \{1\le i\le m : p_r \mid i\}$$

SiA

$$A_j \overset{def}{=} \{1\le i\le m : p_j \mid i\}$$

$j=1,\dots,r.$

USIAMO IL PRINCIPIO DI I-E. DOBBIAMO CALCOLARE

$$|A_T| = |A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_k}|$$

SE $T = \{t_1, \dots, t_k\}$, $T \subseteq [r]$. ABBIAMO CHE

$$|A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_k}| = |\{1 \leq i \leq n : P_{t_1} | i\} \cap \dots \cap$$

$$\cap \left\{ 1 \leq i \leq m : p_{t_k} \mid i \right\} \Big| =$$

$$= \Big| \left\{ 1 \leq i \leq m : \left(p_{t_1} \cdot p_{t_2} \cdot \ldots \cdot p_{t_k} \right) \Big| \, i \right\} \Big| =$$

$$= \frac{m}{p_{t_1} \cdot p_{t_2} \cdot \ldots \cdot p_{t_k}} .$$

PERTANTO

$$\left|\left\{1 \leq i \leq n : (i, n) \geq 2\right\}\right| = \sum_{\substack{T \subseteq [r] \\ T \neq \emptyset}} (-1)^{|T|-1} \cdot |A_T|$$

$$= \sum_{\substack{T \subseteq [r] \\ T \neq \emptyset \\ T = \{t_1, \dots, t_k\}}} (-1)^{|T|-1} \cdot \frac{n}{p_{t_1} \cdot \ldots \cdot p_{t_k}}$$

(FARE PER $r=3$)

$$= -n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) + n . \square$$

(E.g., $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $p_3 = 13$, $p_4 = 19$, $T \subseteq [4]$

$T = \{1, 3\}$ $(\Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = 3)$ $\Rightarrow$ $p_{t_1} \cdots p_{t_k} = p_1 \cdot p_3 = 2 \cdot 13$).

$(k = 2)$

4.5 COMPOSIZIONI

SIANO $n, k \in \mathbb{P}$.

DEF. UNA COMPOSIZIONE (DI n IN k PARTI) È UNA SEQUENZA $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{P}^k$ TALE CHE

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n.$$

E.g. LE COMPOSIZIONI DI 5 IN 3 PARTI SONO

$$(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3), (2,2,1),$$

$$(2,1,2), (1,2,2)$$

PROP. 4.5.1: SIANO $n, k \in \mathbb{P}$. ALLORA CI SONO

$$\binom{n-1}{k-1}$$

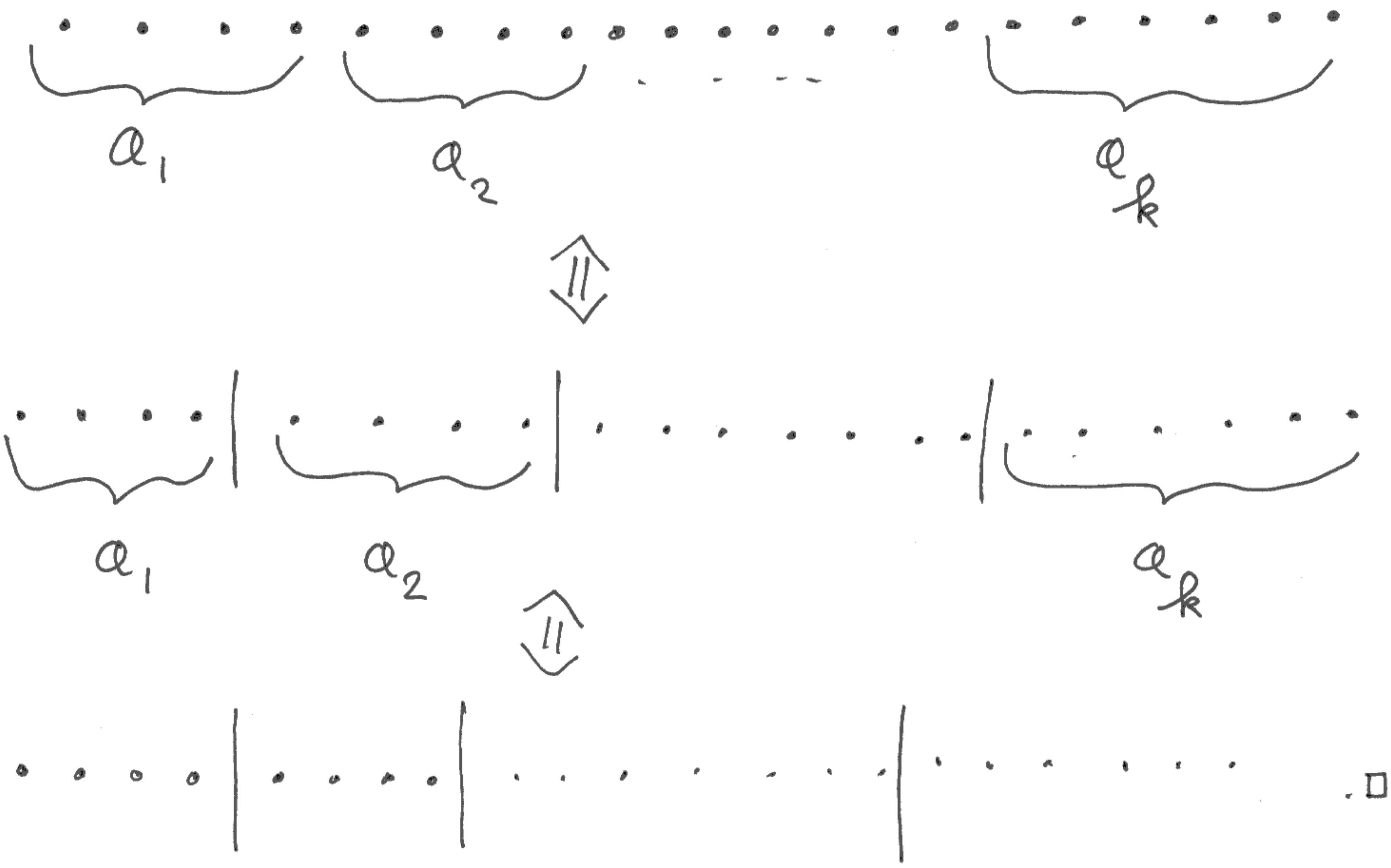
COMPOSIZIONI DI n IN k PARTI.

DIM. C'È UNA BIEZIONE TRA LE COMPOSIZIONI DI n IN k PARTI E

$$\{A \subseteq [n-1] : |A| = k-1\}.$$

SIA $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{P}^k$ TALE CHE

$a_1 + \dots + a_k = n$. GRAFICAMENTE



E.g. $n=19$, $k=5$, $(a_1,\dots,a_k)=(1,7,2,6,3)$

$$(1,7,2,6,3)$$

$$\Updownarrow$$

$$\bullet \mid \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \mid \bullet\ \bullet \mid \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \mid \bullet\ \bullet\ \bullet$$

$$\Updownarrow$$

$$\{1,8,10,16\}\subseteq[18].$$

SIANO $n, k \in \mathbb{P}$.

<u>DEF.</u> UNA <u>COMPOSIZIONE DEBOLE</u> (<u>DI n IN k PARTI</u>) È UNA SEQUENZA $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ (!)
TALE CHE

$$a_1 + \cdots + a_k = n.$$

<u>PROP. 4.5.2</u>: SIANO $n, k \in \mathbb{P}$. ALLORA CI SONO

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

COMPOSIZIONI DEBOLI DI n IN k PARTI.

DIM. C'È UNA BIEZIONE TRA COMPOSIZIONI DEBOLI DI n IN k PARTI E COMPOSIZIONI DI $n+k$ IN k PARTI, DATA DA

$$(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$(a_1+1, \ldots, a_k+1). \quad \square$$

4.6 COEFFICIENTI MULTINOMIALI ($\underbrace{\mathbb{P}\times\mathbb{P}\times\ldots\times\mathbb{P}}_{k} = \mathbb{P}^k$)

SIANO $n, k \in \mathbb{P}$ E SIA $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{P}^k$ UNA COMPOSIZIONE DI n IN k PARTI.

DEF. IL COEFFICIENTE MULTINOMIALE

$\binom{n}{a_1, \ldots, a_k}$ È UGUALE AL NUMERO DI MODI DI ASSEGNARE OGNI $i \in [n]$ (PALLINE NUMERATE) AD UNA DI k CATEGORIE $C_1, \ldots, C_k$ (SCATOLE NUMERATE)

IN MODO CHE a_j NUMERI VENGONO ASSEGNATI ALLA CATEGORIA C_j, PER OGNI $j \in [k]$.

<u>E.g.</u> $n=4$, $k=3$, $(a_1,\dots,a_k)=(1,2,1)$.

$$\underbrace{3}_{1}\quad \underbrace{1,2}_{2}\quad \underbrace{4}_{3} \qquad\qquad \underbrace{4}_{1}\quad \underbrace{1,2}_{2}\quad \underbrace{3}_{3}$$

$$\underbrace{2}_{1}\quad \underbrace{1,3}_{2}\quad \underbrace{4}_{3} \qquad\qquad \underbrace{4}_{1}\quad \underbrace{1,3}_{2}\quad \underbrace{2}_{3}$$

$$\underbrace{2}_{1}\quad \underbrace{1,4}_{2}\quad \underbrace{3}_{3} \qquad\qquad \underbrace{3}_{1}\quad \underbrace{1,4}_{2}\quad \underbrace{2}_{3}$$

$$\underbrace{\;1\;}_{1}\quad\underbrace{\;2,3\;}_{2}\quad\underbrace{\;4\;}_{3}\qquad\qquad\underbrace{\;4\;}_{1}\quad\underbrace{\;2,3\;}_{2}\quad\underbrace{\;1\;}_{3}$$

$$\underbrace{\;1\;}_{1}\quad\underbrace{\;2,4\;}_{2}\quad\underbrace{\;3\;}_{3}\qquad\qquad\underbrace{\;3\;}_{1}\quad\underbrace{\;2,4\;}_{2}\quad\underbrace{\;1\;}_{3}$$

$$\underbrace{\;1\;}_{1}\quad\underbrace{\;3,4\;}_{2}\quad\underbrace{\;2\;}_{3}\qquad\qquad\underbrace{\;2\;}_{1}\quad\underbrace{\;3,4\;}_{2}\quad\underbrace{\;1\;}_{3}$$

$$\Rightarrow \binom{4}{1,\,2,\,1} = 12.$$

PROP. 4.6.1: SIANO $n, k \in \mathbb{P}$ E SIA $(a_1, \dots, a_k)$ UNA COMPOSIZIONE DI n IN k PARTI. ALLORA

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}.$$

DIM. POSSO SCEGLIERE I NUMERI DA METTERE IN C_1 IN $\binom{n}{a_1}$ MODI.

RIMANGONO $n - a_1$ NUMERI. TRA QUESTI

POSSO SCEGLIERE I NUMERI DA METTERE IN C_2 IN $\binom{n-a_1}{a_2}$ MODI. RIMANGONO $n-a_1-a_2$ NUMERI. TRA QUESTI POSSO SCEGLIERE I NUMERI DA METTERE IN C_3 IN $\binom{n-a_1-a_2}{a_3}$ MODI, ETC...

QUINDI

$$\binom{n}{a_1, \ldots, a_k} = \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \binom{n-a_1-a_2}{a_3} \cdot \cdots$$

$$\cdots \binom{n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1}}{a_k}$$

$$= \frac{n!}{(a_1!)(a_2!)\cdots(a_k!)}. \square$$

SIA S UN INSIEME.

INFORMALMENTE, UN MULTINSIEME È UN INSIEME CON RIPETIZIONI.

FORMALMENTE

DEF. UN MULTINSIEME SU S È UNA FUNZIONE $\nu : S \to \mathbb{N}$. SE $x \in S$ ALLORA $\nu(x)$ SI DICE LA MOLTEPLICITÀ DI x. LA CARDINALITÀ DEL MULTINSIEME È $\sum_{x \in S} \nu(x)$.

E.g. $S=\{1,2,3,4\}$, $\nu : S \to \mathbb{N}$ DEFINITA DA $\nu(1)=3$, $\nu(2)=0$, $\nu(3)=1$, $\nu(4)=2$, È UN MULTINSIEME, SCRITTO

$$M=\{1^3, 2^0, 3^1, 4^2\}$$

OPPURE

$$M=\{1,1,1,3,4,4\}.$$

LA CARDINALITÀ DI M È 6.

SIANO $n, k \in \mathbb{P}$.

<u>DEF.</u> IL <u>COEFFICIENTE BINOMIALE STORTO</u> ("TWISTED BINOMIAL COEFFICIENT") È IL NUMERO, SCRITTO $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, DI MULTINSIEMI SU $[n]$ DI CARDINALITÀ k.

<u>PROP. 4.6.2</u>: SIA $n \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$\sum_{k \geq 0} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) \cdot x^k = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

DIM. ABBIAMO CHE

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left((1-x)^{-m}\right)\Big|_{x=0} = (-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)(-1)^k$$

PERTANTO

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left(\frac{1}{(1-x)^m}\right)\Big|_{x=0} = \frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+k-1)}{k!}$$

$$= \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \overset{(4.5.2)}{=} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right). \square$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{MULTINSIEME SU } [n] \text{ DI CARDINALITÀ } k \\ \Updownarrow \\ \text{COMPOSIZIONE DEBOLE DI } k \text{ IN } n \text{ PARTI} \end{array} \right)$$

SIA

$$M = \{1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n}\}$$

UN MULTINSIEME SU $[n]$.

DEF. UNA **PERMUTAZIONE** DI M È UN ORDINAMENTO LINEARE DEGLI ELEMENTI DI M.

INDICHIAMO CON $S(M)$ L'INSIEME DELLE PERMUTAZIONI DI M.

E.g. $M = \{1, 2, 2, 3\}$. ALLORA

$$\{1^1, 2^2, 3^1\} \to \frac{(1+2+1)!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{4!}{2} = 12$$

$S(M) = \{2213, 2231, 2123, 2321, 2132,$

$2312, 1223, 3221, 3212, 1232, 1322,$

$3122\}$.

$\Rightarrow |S(M)| = 12$.

PROP. 4.6.3: SIA $M = \{1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \dots, n^{\nu_n}\}$. ALLORA

$$|S(M)| = \binom{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n}{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}.$$

DIM. C'È UNA BIEZIONE TRA $S(M)$

E IL MODO DI ASSEGNARE OGNI

$i \in [N]$ (DOVE $N \overset{def}{=} \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m$) AD UNA DI m CATEGORIE IN MODO CHE PER OGNI $j \in [m]$, ν_j NUMERI SONO ASSEGNATI A C_j (CATEGORIA C_j). SIA

$$x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_N \in S(M)$$

$$\Updownarrow$$

$\Big($ $\cancel{j}$ i È ASSEGNATO A CATEGORIA C_j $\iff$ $x_i = j \Big)$. $\square$

$\underline{\text{E.g.}}$ $M = \{1^5, 2^3, 3^2, 4^4, 5^5\}$, SIA

$$1\,1\,2\,3\,3\,4\,4\,5\,5\,5\,1\,4\,2\,2\,1\,4\,5\,1\,5 \in S(M)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 17,\ 19 \\
18 & 14 & & 16 & 8, 9, 10, \\
\lfloor 1, 2\ 11, 15 \rfloor & \lfloor 3, 13, \rfloor & \lfloor 4, 5 \rfloor & \lfloor 6, 7, 12 \rfloor & \lfloor \quad \rfloor \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

4.7 ENUMERAZIONE PRATICA: POKER

$4 \times 13 = 52$ CARTE

SEMI (CQFP) — VALORI (2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A)

- QUANTE "MANI" CI SONO NEL POKER?

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50}^{10} \cdot 49 \cdot \cancel{48}^{2}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 2598960$$

- QUANTE DI QUESTE MANI SONO UN FULL ?

FULL = 3 CARTE DI VALORE UGUALE + 2 CARTE DI VALORE UGUALE

FULL $\leftrightarrow$ (VALORE DEL TRIS, SEME MANCANTE, VALORE DELLA COPPIA, SEMI DELLA COPPIA)

E.g.

$\{JC, JQ, JP, 3F, 3P\} \leftrightarrow (J, F, 3, \{F, P\})$

$$13 \times 4 \times 12 \times \binom{4}{2} = 3744.$$

- <u>QUANTE "MANI" SONO UN POKER</u> ?

POKER = 4 CARTE DI VALORE UGUALE

$$\text{POKER} \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{VALORE DEL} \\ \text{POKER} \end{array} , \begin{array}{c} \text{CARTA} \\ \text{RIMANENTE} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad 13 \times 48 = 624$$

- QUANTE "MANI" SONO UN COLORE?

COLORE = 5 CARTE DELLO STESSO SEME

COLORE $\leftrightarrow$ (SEME DELLE 5 CARTE , VALORI DELLE 5 CARTE)

$$4 \times \binom{13}{5} = 5148$$

- QUANTE "MANI" SONO UNA DOPPIA COPPIA ?

DOPPIA COPPIA = 2 CARTE DI VALORE UGUALE +
2 CARTE DI VALORE UGUALE

DOPPIA COPPIA ⟷ (VALORE DELLA PRIMA COPPIA, SEMI DELLA PRIMA COPPIA, VALORE DELLA 2ª COPPIA, SEMI DELLA 2ª COPPIA, VALORE DELLA CARTA RIMANENTE, SEME DELLA CARTA RIMANENTE)

$$\Rightarrow \quad 13 \times \binom{4}{2} \times 12 \times \binom{4}{2} \times 11 \times 4 = 247.104$$

ERRATO!! PERCHÈ?

NON È UNA BIEZIONE!

E.g.

$$\{4F\ 4C\ QC, QP, 8C\} \longleftrightarrow (4, \{F, C\}, Q, \{C, P\}, 8, C)$$

$$\#$$

$$\longleftrightarrow (Q, \{C, P\}, 4, \{F, C\}, 8, C)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{247104}{2} = \cancel{123552}\ 123552$$

<u>ES. [1+]</u>: QUANTE "MANI" SONO UN TRIS?

<u>ES. [1+]</u>: QUANTE "MANI" SONO UNA COPPIA?

4.8 RICORSIONI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

TEO 4.8.1: (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA): SIANO $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ $(d \in \mathbb{P})$ TALI CHE $a_d \neq 0$. ALLORA $\exists$ $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ $(r \in \mathbb{P})$ E $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{P}$, TALI CHE

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d = a_d (x-\alpha_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (x-\alpha_r)^{d_r}$$

E $d = d_1 + \dots + d_r$.

DIM. OMESSA. $\square$

DEF. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ SI DICONO LE RADICI DI $a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d$, $d_1, \dots, d_r$ SI DICONO LE MOLTEPLICITÀ DI $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (RISPETTIVAMENTE).

PROP. 4.8.2: (RUFFINI). SIA $\underline{P}(x) \in \mathbb{R}[x]$ E SIA $\alpha \in \mathbb{C}$. ALLORA

$$\underline{P}(\alpha) = 0 \iff (x - \alpha) \mid \underline{P}(x).$$

DIM. OMESSA. $\square$

(SE $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$ ALLORA SI DICE CHE $A(x)$ DIVIDE $B(x)$ (SCRITTO $A(x) \mid B(x)$) SE $\exists$ $C(x) \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $B(x) = A(x) \cdot C(x)$).

SIA $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

DEF. SI DICE CHE f SODDISFA UNA

RICORSIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

SE $\exists\ a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$f(n+d) = a_{d-1} \cdot f(n+d-1) + \dots + a_1 \cdot f(n+1) + a_0 \cdot f(n) \qquad (*)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>EURISTICA</u>: (E <u>IDEA</u>):

CALCOLANDO UN PO' DI TERMINI ED ESEMPI VEDIAMO CHE $f(n)$ CRESCE ESPONENZIAL=

MENTE IN n. SUPPONIAMO QUINDI CHE $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ TALE CHE

$$f(n) = \lambda^n$$

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$. ALLORA QUESTA È SOL. DI (*) SE E SOLO SE

$$\lambda^{n+d} = a_{d-1} \lambda^{n+d-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda^{n+1} + a_0 \lambda^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI SE E SOLO SE

$$\lambda^{d} - a_{d-1} \cdot \lambda^{d-1} - \dots - a_1 \cdot \lambda - a_0 = 0$$

CIOÈ SE E SOLO SE λ È RADICE DI

$$x^{d} - a_{d-1} \cdot x^{d-1} - \dots - a_1 \cdot x - a_0 = 0. \quad (**)$$

<u>DEF.</u> (**) SI DICE L'<u>EQUAZIONE CARATTERISTICA</u> DELLA RICORSIONE (*)

TEO 4.8.3: SIANO $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ E $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ $(d \in \mathbb{P})$ TALI CHE

$$f(n+d) = a_{d-1} f(n+d-1) + \dots + a_1 \cdot f(n+1) + a_0 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. ALLORA $\exists \, P_1(x), \dots, P_r(x) \in \mathbb{C}[x]$ $(r \in \mathbb{P})$ TALI CHE

$$f(n) = \sum_{i=1}^{r} P_i(n) \cdot (\lambda_i)^n$$

DOVE $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ SONO LE RADICI

DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA E $\cancel{\deg}$ DEG(P_i)

$\leq d_i - 1$ PER $\forall\ i = 1, \dots, r$ DOVE $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{P}$

SONO LE MOLTEPLICITÀ DI $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$.

<u>DIM.</u> OMESSA. $\square$

3.13 NUMERAZIONI IN BASI DIVERSE:

TEO 3.13.1: SIANO $b, n \in \mathbb{P}$, $b \geq 2$. ALLORA $\exists$ $b_0, \dots, b_k \in \mathbb{N}$ (DOVE $k = \max\{i \in \mathbb{P} : b^i \leq n\}$) TALI CHE $0 \leq b_0, \dots, b_k \leq b-1$ E

$$n = b_k \cdot b^k + b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b^1 + b_0 .$$

DIM. INDUZIONE SU $n \in \mathbb{P}$. PER DEF. DI k

$$b^k \leq n < b^{k+1} \qquad (*)$$

QUINDI

$$n = q \cdot b^k + r, \quad 0 \leq r < b^k$$

E $1 \leq q \leq b-1$ (PER (*)). MA $r < n$

$\Rightarrow$ PER INDUZIONE $\Rightarrow \exists\, b_{k-1}, \dots, b_0 \in \mathbb{N}$

TALI CHE $0 \leq b_0, \dots, b_{k-1} \leq b-1$ E

$$r = b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b + b_0$$

QUINDI

$$n = q \cdot b^k + b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b + b_0 .$$

SIANO $b_0, \dots, b_k, c_0, \dots, c_k \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$0 \leq b_0, \dots, b_k, c_0, \dots, c_k \leq b-1$$

E

$$n = b_k \cdot b^k + \dots + b_1 \cdot b + b_0 = c_k \cdot b^k + \dots + c_1 \cdot b + c_0 \quad (\square)$$

ALLORA

$$b_0 - c_0 = c_k b^k + \dots + c_1 \cdot b - \left(b_k \cdot b^k + \dots + b_1 \cdot b \right)$$

$$\Rightarrow \; b \mid (b_0 - c_0) \; \Rightarrow \; \text{MA} \quad b_0 - c_0 \leq b - 1 \; \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad b_0 - c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = c_0$. QUINDI

$$b_k \cdot b^k + \ldots + b_1 \cdot b = c_k \cdot b^k + \ldots + c_1 \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$b_k \cdot b^{k-1} + \ldots + b_2 \cdot b + b_1 = c_k \cdot b^{k-1} + \ldots + c_2 \cdot b + c_1$$

$$\Downarrow$$

$$b \mid (b_1 - c_1)$$

$$\Downarrow$$

$$b_1 - c_1 = 0$$

$\Rightarrow$ ETC..... $\square$

<u>DEF.</u> QUELLA DEL TEO 3.13.1 si DICE LA <u>ESPRESSIONE b-ARIA</u> (o <u>IN BASE b</u>) Di m.

CAPITOLO 4: COMBINATORIA ENUMERATIVA

4.1 IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA COMBINATORIA ENUMERATIVA

PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA C.E.:

DATA UNA SEQUENZA $A_1, A_2, A_3, \ldots$ DI INSIEMI FINITI CALCOLARE

$$\{|A_n|\}_{n=1,2,\ldots}.$$

TRE POSSIBILI SOLUZIONI:

1) UNA FORMULA (E.g., $|A_n| = 2^n$ PER $\forall n \in \mathbb{P}$, OPPURE $|A_n| = \sum_{i=1}^{n} 2^i$)

2) UNA RICORSIONE (E.g., $|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$ PER $\forall n \geq 3$)

3) <u>UNA FUNZIONE GENERATRICE</u>: UNA FUNZIONE $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^\infty$ (CIOÈ INFINITAMENTE DIFFERENZIABILE) IL CUI SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR IN $x=0$ È

$$\sum_{n\geq 0} |A_n|\cdot x^n .$$

$$\left(\text{E.g. } f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}\right)$$

4.2 PROPRIETÀ FONDAMENTALI

SIA A UN INSIEME FINITO. PONIAMO $|A|$ (O $\#A$) (DETTA <u>CARDINALITÀ</u>) IL NUMERO DI ELEMENTI DI A.

SIANO A, B INSIEMI.

<u>DEF.</u> LA <u>POTENZA</u> DI A ALLA B È

$$A^B \overset{\text{def}}{=} \{f : B \to A\}.$$

DEF. L'INSIEME DELLE PARTI DI A È

$$\mathcal{P}(A) \overset{\text{def}}{=} \{S : S \subseteq A\}.$$

PROP. 4.2.1: SIANO A, B INSIEMI FINITI.

ALLORA:

i) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$;

ii) $|A^B| = |A|^{|B|}$;

iii) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

DIM. CHIARO. $\square$

OSS. A, B INSIEMI, $f: A \to B$, f BIUNIVOCA

$\Rightarrow |A| = |B|$.

ES. : LE INDAGINI SIEROLOGICHE SVOLTE DAL GOVERNO SUGGERISCONO CHE CI SONO CIRCA 500.000 ITALIANI ASINTOMATICI. QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE IN UN GRUPPO DI 110 PERSONE CI SIA ALMENO UN ASINTOMATICO.

PONIAMO

$$ITA = \{ITALIANI\}$$

E

$$ASI = \{ITALIANI\ ASINTOMATICI\}.$$

QUINDI $|ITA| = 60.000.000$ E $|ASI| = 500.000$.

LA PROBABILITÀ RICHIESTA È

$$P = \frac{\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON} \geq 1 \text{ ASINTOM.}\}}{\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\}}$$

ABBIAMO CHE

$$\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\} = \{G \subseteq ITA : |G| = 110\}.$$

QUINDI

$$\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\} = \binom{60.000.000}{110},$$

MENTRE

$$\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON } \geq 1 \text{ ASINTOM.}\}$$

$$= \{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\} \setminus \{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI SENZA ASINTOM.}\}$$

$$= \{G \subseteq ITA : |G| = 110\} \setminus \{G \subseteq ITA : |G| = 110, \; G \cap ASI = \emptyset\}$$

$$= \{G \subseteq ITA : |G| = 110\} \setminus \{G \subseteq ITA \setminus ASI : |G| = 110\}.$$

PERTANTO

$$\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON} \geq 1 \text{ ASINTOM.}\}$$

$$= \binom{60.000.000}{110} - \binom{59.500.000}{110}$$

CONCLUDENDO

$$P = \frac{\binom{60.000.000}{110} - \binom{59.500.000}{110}}{\binom{60.000.000}{110}}$$

$$= 1 - \frac{\binom{59,5\ M}{110}}{\binom{60\ M}{110}} = 1 - \frac{\frac{(59,5M)(59,5M-1)\cdots(59,5M-109)}{110!}}{\frac{(60M)(60M-1)\cdots(60M-109)}{110!}}$$

$$= 1 - \frac{(59{,}5M)(59{,}5M-1)\cdots\cdots(59{,}5M-109)}{(60M)(60M-1)\cdots\cdots(60M-109)}$$

$$\cong 1 - 0{,}398 = 0{,}602\,.$$

ES.: NELL'ANNO ACCADEMICO 2019-20 SI SONO LAUREATI, PRESSO LA NOSTRA UNIVERSITÀ, 28 PERSONE IN INFORMATICA, 22 IN MATEMATICA, E 21 IN FISICA. DI QUESTI 8 SONO LAUREATI SIA IN INFORMATICA CHE IN MATEMATICA, 6 SIA IN MATEMATICA CHE IN FISICA, 4 IN INFORMATICA E FISICA, E 1 IN TUTTE E TRE LE DISCIPLINE. QUANTE PERSONE

(ALMENO UNA DI)

SI SONO LAUREATE IN QUESTE

DISCIPLINE NELL' A.A. 19/20 ?

PONIAMO

$A = \{$ LAUREATI IN INFORMATICA $\}$

$B = \{$ " " MATEMATICA $\}$

$C = \{$ " " FISICA $\}$.

DOBBIAMO CALCOLARE $|A \cup B \cup C|$.

USIAMO IL PRINCIPIO DI I.-E.

ABBIAMO

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$

$$+ |A \cap B \cap C| =$$

$$= 28 + 22 + 21 - 8 - 4 - 6 + 1$$

$$= 54.$$

SONDAGGIO: SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $MCD(a,b) \mid c$, E SIA $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ UNA SOLUZ. PARTICOLARE DI

(48)

$$ax + b \cdot y = c. \qquad (*)$$

ALLORA TUTTE LE SOLUZ. DI $(*)$ SONO DATE DA:

a) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot b$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot a$ 60% ✓ (CON $d = MCD(a,b)$ E $t \in \mathbb{Z}$)

b) $x = x_0 + \frac{t}{d} \cdot b$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot a$ 19%

c) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot a$, $y = y_0 - \frac{t}{d} \cdot b$ 2%

d) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot a$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot b$ 4%

e) NDQ 15%

ES.: SIA $n \in \mathbb{P}$ IL PARAMETRO PUBBLICO DI UN CODICE RSA. DIMOSTRARE CHE, SE $\Phi(n)$ È NOTO, ALLORA POSSO ROMPERE RSA.

ABBIAMO CHE

$$n = p \cdot q \quad , \quad \Phi(n) = (p-1)(q-1)$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{q} \quad \Rightarrow \quad \Phi(n) = \left(\frac{n}{q} - 1\right)(q-1)$$

$$\Rightarrow \quad q \cdot \Phi(n) = (n-q)(q-1)$$

$$\Rightarrow \quad q \cdot \Phi(n) = nq - q^2 - n + q$$

$$\Rightarrow \quad q^2 + q\Big(\Phi(n) - n - 1\Big) + n = 0$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{n + 1 - \Phi(n) \pm \sqrt{(\Phi(n) - n - 1)^2 - 4n}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{n}{q}.$$

ES. : QUANTI SOTTOINSIEMI DI [7] CI SONO DI CARDINALITÀ 4?

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE IL NUMERO È

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 7 \cdot 5 = 35.$$

POTREI ANCHE CALCOLARLO CON LA F.G.:

$$(1+x)^7 = (1+x)^3 (1+x)^3 (1+x)$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+3x^2+x^3)(1+x)$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3+3x+9x^2+9x^3+3x^4+$$
$$+3x^2+9x^3+9x^4+3x^5+x^3+3x^4+3x^5+x^6)(1+x)$$

$$= (1+6x+15\cdot x^2+20\cdot x^3+15\cdot x^4+6\cdot x^5+x^6)(1+x)$$

$$= (1+6x+15\cdot x^2+20\cdot x^3+15\cdot x^4+6\cdot x^5+x^6+$$
$$+x+6x^2+15\cdot x^3+20\cdot x^4+15\cdot x^5+6\cdot x^6+x^7)$$

$$= 1 + 7x + 21 \cdot x^2 + 35 \cdot x^3 + \underbrace{35}_{\binom{7}{4}} \cdot x^4 + 21 \cdot x^5 + 7 \cdot x^6 + x^7.$$

ES. : CALCOLARE

$$\left| \{ A \subseteq [9] : \; 2 \notin A \;\; o \;\; 8 \notin A \} \right|.$$

ABBIAMO CHE

$$\{ A \subseteq [9] : \; 2 \notin A \;\; o \;\; 8 \notin A \} = X \cup Y$$

DOVE

$$X = \{A \subseteq [9] : 2 \notin A\}$$

E

$$Y = \{A \subseteq [9] : 8 \notin A\}.$$

DEVO CALCOLARE $|X \cup Y|$ => USO I.E.

ABBIAMO

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

MA

$$|X| = |\{A \subseteq [9] : 2 \notin A\}| = |\{A \subseteq \{1,3,4,5,6,7,8,9\}\}|$$

$$= 2^8$$

E

$$|Y| = \dots = 2^8$$

INFINE

$$|X \cap Y| = |\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ E } 8 \notin A\}|$$

$$= \left| \left\{ A \subseteq \{1,3,4,5,6,7,9\} \right\} \right| = 2^7.$$

QUINDI

$$\left| \left\{ A \subseteq [9] : 2 \notin A \ \text{o} \ 8 \notin A \right\} \right| = |X \cup Y|$$

$$= 2^8 + 2^8 - 2^7 = 2^7(2+2-1)$$

$$= 3 \cdot 2^7.$$

ES.: CALCOLARE

$$\left|\left\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ E } f(4) \neq 4\right\}\right|.$$

RAGIONAMENTO EURISTICO: "E" => INTERSEZIONE. FACILE? NON DIREI. PRINCIPIO DI I-E? IMPOSSIBILE. QUINDI?

DE MORGAN!

ABBIAMO CHE

$$\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ E } f(4) \neq 4\} =$$

$$S_9 \setminus \{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ O } f(4) = 4\}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$|\{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ O } f(4) = 4\}|.$$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$|X \cup Y|$$

DOVE

$$X = \{ f \in S_9 : f(2) = 2 \}$$

E

$$Y = \{ f \in S_9 : f(4) = 4 \}.$$

APPLICHIAMO I.E. DOBBIAMO CALCOLA=
RE

$$|X|, \quad |Y|, \quad |X \cap Y|.$$

ABBIAMO CHE

$$|X| = \left|\{ f \in S_9 : f(2) = 2 \}\right| = 8!$$

$$\Big(f = \underset{\substack{\uparrow \\ 8 \\ \text{SCELTE}}}{x_1}\, 2\, \underset{\substack{\uparrow \\ 7}}{x_3}\, \underset{\substack{\uparrow \\ 6\ \text{ETC...}}}{x_4}\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8\, x_9 \Big)$$

SIMILMENTE $|Y| = \dots = 8!$. INFINE

$$|X \cap Y| = \left|\{ f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ E } f(4) = 4 \}\right|$$

7 SCELTE

$$= 7! \quad \big(x_1\, 2\, x_3\, 4\, x_5\, x_6\, x_7\, x_8\, x_9 = f \big)$$

PERTANTO

$$|X \cup Y| = 8! + 8! - 7!$$

CONCLUDENDO

$$|\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ E } f(4) \neq 4\}| =$$

$$9! - (|X \cup Y|) = 9! - (8! + 8! - 7!)$$

$$= 9! - 8! - 8! + 7!$$

$$= (9 \cdot 8 - 8 - 8 + 1) \cdot 7! = 57 \cdot 7!$$

ES. : QUANTI NUMERI DI CELLULARE CI SONO CHE HANNO TRE CIFRE CONSECUTIVE UGUALI?

VOGLIAMO CALCOLARE

$$\left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : \quad x_i = x_{i+1} = x_{i+2} \text{ PER QUALCHE } 1 \leq i \leq 5 \right\} \right|$$

$$\left([0,9] = \{0, 1, 2, \dots, 9\}. \right)$$

PONIAMO

$$A_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : \quad x_1 = x_2 = x_3 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \quad \text{''} \qquad \text{''} \qquad \text{''} \quad : \quad x_2 = x_3 = x_4 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ \quad \text{''} \qquad \text{''} \qquad \text{''} \quad : \quad x_3 = x_4 = x_5 \right\}$$

$$A_4 = \left\{ \quad \text{''} \qquad \text{''} \qquad \text{''} \quad : \quad x_4 = x_5 = x_6 \right\}$$

$$A_5 = \left\{ \quad \text{''} \qquad \text{''} \qquad \text{''} \quad : \quad x_5 = x_6 = x_7 \right\}$$

DOBBIAMO QUINDI CALCOLARE

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|.$$

APPLICHIAMO I.-E.:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| -$$

$$- |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_4 \cap A_5| -$$

$$- |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_4|$$

$$- |A_2 \cap A_5| - |A_1 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| +$$

$$+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_2\cap A_5|+|A_1\cap A_3\cap A_4|+|A_2\cap A_4\cap A_5|$$

$$+|A_1\cap A_3\cap A_5|+|A_1\cap A_4\cap A_5|+|A_2\cap A_3\cap A_4|+$$

$$+|A_2\cap A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$$

$$-|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_5|-$$

$$-|A_1\cap A_3\cap A_4\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|$$

$$+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5|.$$

ABBIAMO CHE

$$|A_1| = 10^5, \quad |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 10^5$$

$$|A_1 \cap A_2| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}|$$

$$= 10^4$$

SIMILMENTE

$$|A_2 \cap A_3| = 10^4, \quad |A_3 \cap A_4| = 10^4, \quad |A_4 \cap A_5| = 10^4.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_3| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5\}|$$

$$= 10^3$$

SIMIL.

$$|A_2 \cap A_4| = 10^3, \quad |A_3 \cap A_5| = 10^3.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_4| = \{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 \text{ E } \overset{x_4 = x_5 = x_6}{\vee}\}$$

$= 10^3$

E SIMIL.

$$|A_2 \cap A_5| = 10^3.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_5| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 \text{ E } x_5 = x_6 = x_7\}| = 10^3.$$

INOLTRE

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5\}|$$

$$= 10^3$$

E simic.

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0,9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 =$$

$$= x_4 = x_5 = x_6\}| = 10^2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_5| = 10^2$$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 10^2$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 10$

$|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10^3$

$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 10^2$, $|A_2 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2$

$|A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10^3$.

ANCHE

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10^2$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 10$[illegible]

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| = 10 \quad , \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2,$$

INFINE

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10.$$

CONCLUDENDO

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = 5\cdot 10^5 - \Big(4\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3$$

$$+ 2\cdot 10^3 + 10^3\Big) + \Big(10^3 + 2\cdot 10^2 + 4\cdot 10^{\overset{2}{\cancel{3}}} + 2\cdot 10^3 + 10\Big)$$

$$- \Big(3\cdot 10 + 2\cdot 10^2\Big) + 10 =$$

$$= 5\cdot 10^5 - 4\cdot 10^4 - 3\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 - 10$$

$$= 457390$$

ES. : DIECI PERSONE SI DIVIDONO IN 5 GRUPPI, OGNUNO DI 2 PERSONE. IN QUANTI MODI PUÒ AVVENIRE QUESTO?

LE PERSONE SONO TRA LORO DISTINGUIBILI. QUINDI

$$\{\text{PERSONE}\} \leftrightarrow [10]$$

E

$$\{\text{GRUPPI}\} \leftrightarrow \{\text{SCATOLE}\}$$

PERTANTO IL NUMERO È

$$\binom{10}{2,2,2,2,2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot 9 \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 .$$

<u>ES.</u> : QUANTE PAROLE DIVERSE POSSONO ESSERE FORMATE PERMUTANDO (ANAGRAMMANDO) LE LETTERE DELLA PAROLA MISSISSIPPI ?

SI CHIEDE IL NUMERO DI PERMUTAZIONI DEL MULTINSIEME

$$K \stackrel{def}{=} \{M^1, i^4, S^4, P^2\}.$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE QUESTO È

$$\binom{11}{1,\ 4,\ 4,\ 2} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2}$$

ES. : TROVARE UNA RICORSIONE SODDISFATTA DAL NUMERO DI COMPOSIZIONI DI n IN PARTI UGUALI AD 1 O 2.

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO.

ABBIAMO CHE:

$n = 1 \Rightarrow (1) \Rightarrow f(1) = 1.$

$n = 2 \Rightarrow (2), (1,1) \Rightarrow f(2) = 2$

$n = 3 \Rightarrow (2,1), (1,2), (1,1,1) \Rightarrow f(3) = 3$

$n=4 \Rightarrow (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1)$

$\Rightarrow f(4)=5$

$n=5 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(5)=8$.

SEMBRA FIBONACCI. PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

DIMOSTRIAMOLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{\{1,2\}^k}_{\substack{\shortparallel \\ \underbrace{[2] \times \dots \times [2]}_{k}}} : k \in \mathbb{P}, \; a_1 + \dots + a_k = n \right\} \right|$$

MA

$$\left\{ (a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, \; a_1 + \dots + a_k = n \right\}$$

$$\shortparallel$$

$$\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=1\right\}\ \oplus$$

$$\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=2\right\}$$

(DOVE " $C = A \oplus B$ " SIGNIFICA " $C = A \cup B$ E $A \cap B = \emptyset$ ")

MA

$$\left|\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=1\right\}\right|$$

$$=\left|\left\{(a_1,\dots,a_{k-1})\in[2]^{k-1} : k-1\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_{k-1}=n-1\right\}\right|$$

$$=f(n-1)$$

SIMILMENTE

$$\left|\left\{(a_1,\dots,a_k)\in[2]^k : k\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_k=n,\ a_k=2\right\}\right|$$

$$=\left|\left\{(a_1,\dots,a_{k-1})\in[2]^{k-1} : k-1\in\mathbb{P},\ a_1+\dots+a_{k-1}=n-2\right\}\right|$$

$$=f(n-2)$$

CONCLUDENDO

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

PER $\forall n\geq 3$.

ES.: SIA $m \in \mathbb{P}$. CALCOLARE IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI DI $[m]$ CHE NON CONTENGONO DUE INTERI CONSECUTIVI.

PER ESEMPIO:

$m=1 \Rightarrow [1] \Rightarrow \{1\}, \emptyset \Rightarrow 2$

$m=2 \Rightarrow [2] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\} \Rightarrow 3$

$n=3 \Rightarrow [3] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\},$

$\{1,3\} \Rightarrow 5$

$n=4 \Rightarrow [4] \Rightarrow \dots \Longrightarrow 8$

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO

$(\Rightarrow f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=8).$

SEMBRA LA SEQUENZA DI FIBONACCI

PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

CERCHIAMO DI DIMOSTRARLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ S \subseteq [n] : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-1 \\ i \in S \end{array} \Rightarrow i+1 \notin S \right\} \right|$$

MA

$$\left\{ S \subseteq [n] : \begin{array}{c} 1 \leq i \leq n-1 \\ i \in S \end{array} \Rightarrow i+1 \notin S \right\} =$$

$$\{ S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \in S \} \cup$$

$$\{ S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \notin S \}$$

DOVE S È SPARSO SE E SOLO SE $1 \leq i \leq n-1$, $i \in S \Rightarrow i+1 \notin S$

D' ALTRONDE

$$\{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \in S\} =$$

$$= \{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \in S, \ n-1 \notin S\}$$

E

$$\{S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, \ n \notin S\} =$$

$$= \{S \subseteq [n-1] : S \text{ SPARSO}\}$$

QUINDI

$$\left|\{S\subseteq[n] : S \text{ SPARSO}, n\notin S\}\right| =$$

$$= \left|\{S\subseteq[n-1] : S \text{ SPARSO}\}\right| \overset{\text{(DEF.)}}{\underset{(\cancel{\text{INDUZIONE}})}{=}} f(n-1) \quad (*)$$

INOLTRE LA FUNZIONE

$$S \longmapsto S\cup\{n\}$$

È UNA BIEZIONE DA

$$\{S \subseteq [n-2] : S \text{ SPARSO}\}$$

A

$$\{T \subseteq [n] : T \text{ SPARSO}, \ n \in T, \ n-1 \notin T\}.$$

QUINDI

$$\left|\{T \subseteq [n] : T \text{ SPARSO}, \ n \in T, \ n-1 \notin T\}\right| \quad (\cancel{\text{INDUZIONE}})(**)$$

$$= \left|\{S \subseteq [n-2] : S \text{ SPARSO}\}\right| \underset{(\text{DEF. DI } f)}{=} f(n-2)$$

PERTANTO

$$f(n) = \left| \{ S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO} \} \right| =$$

$$= \left| \{ S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO } n \notin S \} \right| +$$

$$+ \left| \{ S \subseteq [n] : S \text{ SPARSO}, n \in S \} \right|$$

$$\underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} f(n-1) + f(n-2).$$

QUINDI

$$f(2)=3\ ,\quad f(1)=2$$

E

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

SE $n \geq 3$. SIA $\{F_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ LA <u>SEQUENZA DI FIBONACCI</u> (QUINDI $F_0=F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ SE $n\geq 2$). ALLORA

$$f(n)=F_{n+1},\qquad \forall\, n\in\mathbb{P}.$$

ES. : RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) \qquad (*)$$

PER $\forall\, n \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI $f(0) = 1$, $f(1) = 3$.

PORTIAMO LA RICORSIONE IN FORMA STANDARD:

$$f(n+2) = 2 \cdot f(n+1) + f(n)$$

PER $\forall n \geq 0$. L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

LE RADICI SONO

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

E QUINDI

$$\gamma_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1}, \qquad \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$ E $d_2 = 1$ (IN EF=FETTI $x^2 - 2x - 1 = \left(x - (1+\sqrt{2})\right)^1 \left(x - (1-\sqrt{2})\right)^1$).

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE $DEG(P_1) \leq d_1 - 1$, $DEG(P_2) \leq d_2 - 1$ E

$$f(n) = P_1(n) \cdot (\gamma_1)^n + P_2(n) \cdot (\gamma_2)^n$$

PER $\forall n \geq 0$. QUINDI $\exists\ a, b \in \mathbb{C}$ TALI

CHE

$$f(n) = a \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + b \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall n \geq 0$. PER TROVARE a E b USIAMO

LE C.I.. ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 = f(0) = a + b \\ 3 = f(1) = a \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) + b \cdot \left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

QUINDI

$$b = 1 - a$$

$$\Downarrow$$

$$3 = a\cdot(1+\sqrt{2}) + (1-a)\cdot(1-\sqrt{2})$$

$$\Downarrow$$

$$3-1+\sqrt{2} = a\left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 1-a = 1-\frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>ES. :</u> RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -2 \cdot f(n+2) - 2 \cdot f(n+1) - 4 \cdot f(n)$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$f(0)=0, \quad f(1)=2, \quad f(2)=0.$

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD. L'EQ. CARAT.

È

$$x^3 = -2x^2 - 2x - 4$$

CIOÈ

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0. \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $x=-2$ È UNA RADICE DI $(*)$

USIAMO RUFFINI

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 2x^2 + 2x + 4 & x + 2 \\
\cline{2-2}
x^3 + 2x^2 \phantom{{}+2x+4} & x^2 + 2 \\
\hline
2x + 4 & \\
2x + 4 & \\
\cline{1-1}
0 \phantom{{}+4} &
\end{array}
$$

QUINDI

$$x^3+2x^2+2x+4=(x^2+2)(x+2)$$

RISOLVIAMO $x^2+2=0$. ABBIAMO

$$x=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{\pm\sqrt{-8}}{2}=\frac{\pm\sqrt{4(-2)}}{2}=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{-2}}{2}=\pm\frac{2\cdot\sqrt{-2}}{2}=\pm\sqrt{-2}$$

$$=\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\pm i\cdot\sqrt{2}.$$

PERTANTO LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = i\sqrt{2}, \quad \gamma_3 = -i\cdot\sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, E $d_3 = 1$. SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x), P_3(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE $DEG(P_1) \leq d_1 - 1$, $DEG(P_2) \leq d_2 - 1$, $DEG(P_3) \leq d_3 - 1$ E

$$f(n) = P_1(n)\cdot(\gamma_1)^n + P_2(n)\cdot(\gamma_2)^n + P_3(n)\cdot(\gamma_3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\ a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = a\cdot(-2)^n + b\cdot(i\sqrt{2})^n + c\cdot(-i\sqrt{2})^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE $a, b, c \in \mathbb{C}$ USIAMO LE C.I.. ABBIAMO

$$0 = f(0) = a + b + c$$

$$2 = f(1) = a\cdot(-2) + b\,(i\sqrt{2}) + c\,(-i\sqrt{2})$$

$$0 = f(2) = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(i\sqrt{2})^2 + c\,(-i\sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -2a+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot c\cdot\sqrt{2}=2 \\ 4\cdot a+(-2)\cdot b+c(-2)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a=-b-c$$

$$\begin{cases} -2(-b-c)+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot\sqrt{2}\cdot c=2 \\ 4(-b-c)+(-2b)-2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \\ b(-6)+c(-6)=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \\ b+c=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b=-c$$

$$\left\{ -c\left(2+i\sqrt{2}\right)+c\left(2-i\sqrt{2}\right)=2 \right.$$

$$\Downarrow$$

$$c\left(-2i\sqrt{2}\right)=2$$

$$\Downarrow$$

$$c=\frac{2}{-2i\sqrt{2}}=\frac{1}{-i\sqrt{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{-i}{\sqrt{2}},$$

$$a = -b - c = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0.$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left(i\sqrt{2}\right)^n + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \left(-i\sqrt{2}\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8 \cdot f(n+1) + 12 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, CON LE C.I. $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=0$.

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ. CARATT. È

$$x^3 = -x^2 + 8 \cdot x + 12$$

CIOÈ

$$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = 0 . \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $X = -2$ È SOLUZ. DI (*). USIAMO RUFFINI. ABBIAMO

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 & x+2 \\
\cline{2-2}
x^3 + 2x^2 & x^2 - x - 6 \\
\cline{1-1}
\quad -x^2 - 8 \cdot x - 12 & \\
\quad -x^2 - 2x & \\
\cline{1-1}
\qquad -6 \cdot x - 12 & \\
\qquad -6 \cdot x - 12 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

PERTANTO

$$x^3+x^2-8\cdot x-12=(x^2-x-6)(x+2)$$

RISOLVIAMO $x^2-x-6=0$. ABBIAMO

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}.$$

QUINDI LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1=-2,\quad \gamma_2=3,\quad \gamma_3=-2$$

MA $\gamma_1 = \gamma_3$, QUINDI LE RADICI DISTINTE SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = 3$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 2$ E $d_2 = 1$

(IN EFFETTI $x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = (x-(-2))^2 \cdot (x-3)^1$). SAPPIAMO DALLA TEORIA

CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\mathrm{DEG}\big(P_1(x)\big) \leq d_1 - 1$, $\mathrm{DEG}\big(P_2(x)\big) \leq d_2 - 1$, E

$$f(n) = P_1(n)\cdot(\gamma_1)^n + P_2(n)\cdot(\gamma_2)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b\cdot n)\cdot(-2)^n + c\cdot(3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE a, b, c USIAMO LE C.I.:

$$\begin{cases} 0 = f(0) = a + c \\ 5 = f(1) = (a+b)\cdot(-2)^1 + c\cdot(3)^1 \\ 0 = f(2) = (a+2\cdot b)\cdot(-2)^2 + c\cdot(3)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - 2b + 3\cdot c = 5 \\ 4\cdot a + 8\cdot b + 9\cdot c = 0 \end{cases}$$

$$c = -a$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 3 \cdot (-a) = 5 \\ 4 \cdot a + 8 \cdot b + 9 \cdot (-a) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -5a - 2b = 5 \\ -5 \cdot a + 8 \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot a = 8 \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$-8 \cdot b - 2b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$-10 \cdot b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot a = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 5 \cdot a = -4$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}.$$ CONCLUDENDO

$$f(n) = \left(-\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot n\right) \cdot (-2)^n + \frac{4}{5} \cdot (3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.