ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 13

ASINTOTI

Sia $f: D \to \mathbb{R}$.

La retta $x = x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE di f se x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

La retta $y = mx + q$ è l'ASINTOTO (OBLIQUO se $m \neq 0$, ORIZZONTALE se $m = 0$) di f per $x \to +\infty$ se $+\infty$ è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx + q)\right) = 0.$$

Analoga definizione vale per $-\infty$.

OSSERVAZIONE Se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \quad e \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (-\infty)}} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

allora l'asintoto per $x \to \underset{(-\infty)}{+\infty}$ è $y = mx + q$.

ESEMPI

- $f(x) = \dfrac{6x^2 + 1}{2x + 3}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

$$\lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to \left(-\frac{3}{2}\right)^{\pm}} \frac{\overbrace{6x^2 + 1}^{\to \frac{29}{2}}}{\underbrace{2x + 3}_{\to 0^{\pm}}} = \pm\infty \implies x = -\frac{3}{2} \text{ asintoto verticale}$$

$$\frac{\cancel{x^2}\left(6+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2+1}{2x^2+3x} = 3$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-3x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{6x^2+1}{2x+3} - 3x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2+1-3x(2x+3)}{2x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-9x+1}{2x+3} = -\frac{9}{2}.$$

Quindi $y = 3x - \frac{9}{2}$ è l'asintoto obliquo sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$.

Allo stesso risultato si arriva con la divisione tra polinomi

$$\begin{array}{rr|l}
6x^2 & +1 & 2x+3 \\ \cline{3-3}
6x^2+9x & & 3x-\frac{9}{2} \\ \cline{1-1}
/ \quad -9x & +1 & \\
-9x & -\frac{27}{2} & \\ \cline{1-2}
/ & \frac{29}{2} &
\end{array}$$

Così per $x\to\pm\infty$

$$f(x) = \frac{6x^2+1}{2x+3} = \underbrace{3x-\frac{9}{2}}_{\text{asintoto}} + \left(\frac{\frac{29}{2}}{2x+3}\right)_{\to 0}$$

OSSERVAZIONE Si dimostra che se $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi e $\text{grado}(A) - \text{grado}(B) \in \{0,1\}$ allora $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ ha come asintoto $y = mx+q$ per $x\to\pm\infty$, dove $mx+q$ è il quoziente della divisione tra A e B.

$x^2+x \geq 0$

$x(x+1) \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

• $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x \qquad D=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

f non ha asintoti verticali. Per $x\in D\setminus\{0\}$

$$f(x)=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x=\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\substack{+1 \text{ se } x>0\\ -1 \text{ se } x<0}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)}_{\to\frac{1}{2} \text{ per } x\to\pm\infty}+\underbrace{|x|-x}_{\substack{=0 \text{ se } x\geq 0\\ =-2x \text{ se } x\leq 0}}$$

Così

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \quad \text{asintoto per } x\to+\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{1}{2}-2x\right)\right)=0 \Rightarrow y=-2x-\frac{1}{2} \quad \text{asintoto per } x\to-\infty$$

• $f(x)=x+\log(x-1) \qquad D=(1,+\infty)$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+\log(\underbrace{x-1}_{0^+}))=-\infty \Rightarrow x=1 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\log(x-1)}{x}\right)=1=m?$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\log(x-1)=+\infty\notin\mathbb{R}$$

f non ha un asintoto per $x\to+\infty$.

• $f(x)=2x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) \qquad D=[0,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\cos\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}^{\to0}\right)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}2x\underbrace{\left(\frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2}\right)}_{\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2=-1$$

Asintoto per $x\to+\infty$: $y=2x-1$.

$$\lim_{x\to+\infty}2x\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)-2x=\lim_{x\to+\infty}2x\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)-1\right)=$$

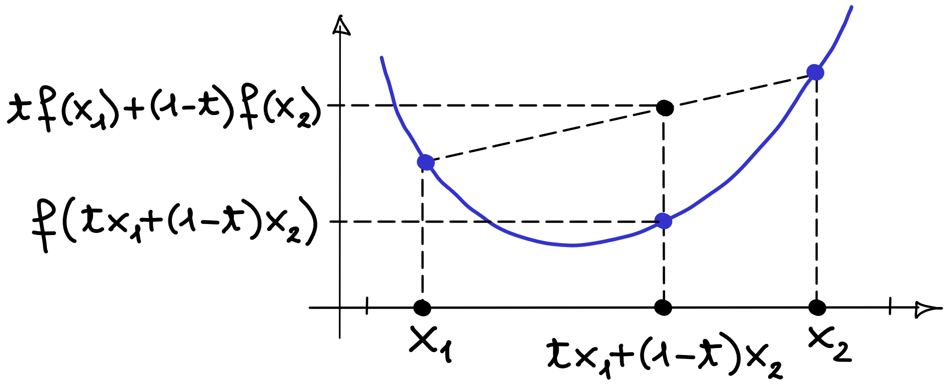
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2} \cdot \left(\frac{\;}{\sqrt{x+1}}\right)$$

CONVESSITÀ E CONCAVITÀ

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia I un intervallo $\subseteq D$

f si dice (STRETTAMENTE) CONVESSA in I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1) \quad f(tx_1+(1-t)x_2) \overset{(<)}{\leq} t f(x_1)+(1-t)f(x_2)$$



f si dice (STRETTAMENTE) CONCAVA in I se $-f$ è (strettamente) convessa in I.

OSSERVAZIONI

1) $f(x) = mx+q$ è una funzione sia convessa che concava in $\mathbb{R}$ (non strettamente)
2) $f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$.
3) $f(x) = -|x|$ è concava in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DI CONVESSITÀ/CONCAVITÀ)

Sia f derivabile in un intervallo I. Allora

1) f è convessa in $I \iff f'$ è crescente in I
2) f è concava in $I \iff f'$ è decrescente in I

OSSERVAZIONI Per il criterio di monotonia, se f è derivabile due volte in I:

1) f è convessa in $I \iff \forall x \in I \; f''(x) \geq 0$. ← DERIVATA SECONDA $(f')' = f''$

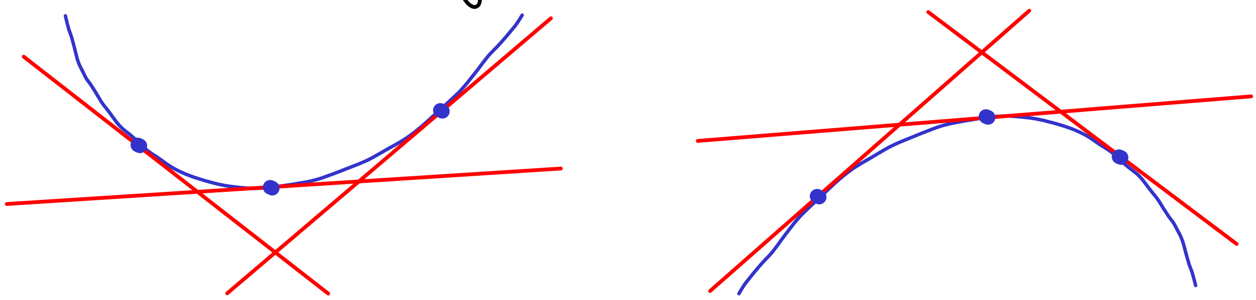
2) f è concava in $I \iff \forall x \in I \; f''(x) \leq 0$.

Inoltre

1) $\forall x \in I \; f''(x) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente convessa in I

2) $\forall x \in I \; f''(x) < 0 \Rightarrow f$ è strettamente concava in I

Se f è convessa (concava) e derivabile in I allora $\forall x, x_0 \in I \;\; f(x) \overset{(\leq)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ossia il grafico di f sta sopra (sotto) le sue rette tangenti.



ESEMPIO

$f(x) = (1+x)^b$ per $b > 0$ e $x \in (-1, +\infty)$

$$f''(x) = b(b-1)(1+x)^{b-2} = \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < b \leq 1, \; f \text{ è concava} \\ \geq 0 & \text{se } b \geq 1, \; f \text{ è convessa} \end{cases}$$

Quindi per $x > -1$,

Se $0 < b \leq 1$ allora $(1+x)^b \leq f(0) + f'(0)x = 1 + bx$

Se $b \geq 1$ allora $(1+x)^b \geq f(0) + f'(0)x = 1 + bx$

estensione della disuguaglianza di Bernoulli

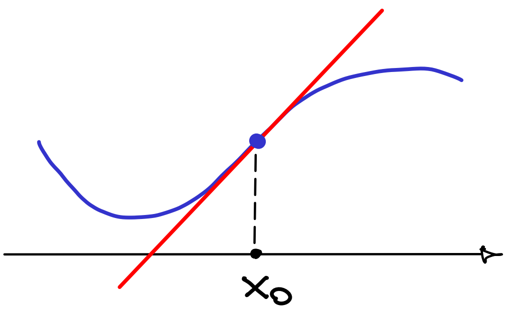
Sia f continua in $(x_0 - r, x_0 + r)$ e derivabile in x_0.

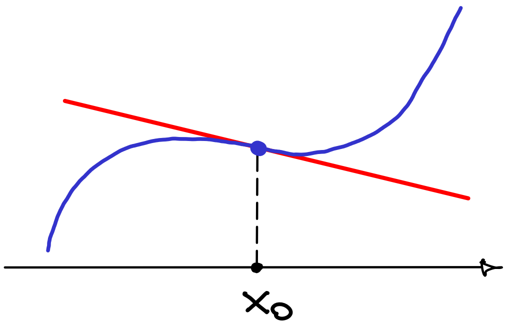
x_0 si dice PUNTO DI FLESSO

se f è strettamente convessa in $(x_0 - r, x_0)$
e f è strettamente concava in $(x_0, x_0 + r)$

oppure

se f è strettamente concava in $(x_0 - r, x_0)$
e f è strettamente convessa in $(x_0, x_0 + r)$

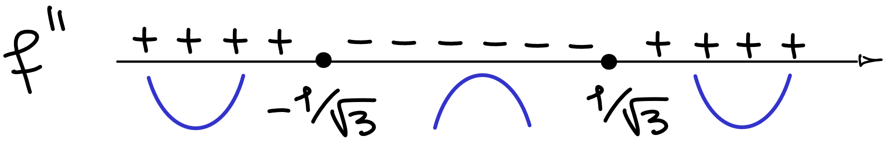




$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x(-2\cdot 2x)}{(1+x^2)^3} = \frac{2(-1+3x^2)}{(1+x^2)^3}$$



f è convessa in $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ e in $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

f è concava in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

f ha due punti di flesso: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$.