CAP. 5: SOMME E APPROSSIMAZIONI:

5.1 ANNUITÀ

SUPPONIAMO DI AVERE VINTO AL SUPERENALOTTO

ABBIAMO DUE SCELTE:

a) 1.000.000 EURO SUBITO

b) 50.000 EURO/ANNO PER 30 ANNI

COSA CONVIENE SCEGLIERE?

VEDIAMO

SIA $X = 50.000$, SIA $0 \le p \le 1$, p = INFLAZIONE.

ALLORA IN 30 ANNI RICEVIAMO

$$X + X(1-p) + X(1-p)^2 + \dots + X(1-p)^{29} =$$

$$= X \cdot \sum_{i=0}^{29} (1-p)^i = X \cdot \frac{(1-p)^{30} - 1}{(1-p) - 1}$$

SE $p = 0{,}03 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{(0,97)^{30}-1}{(0,97)-1}\right) = x\cdot\left(\frac{0,401-1}{-0,03}\right)$$

$$= x\left(\frac{-0,599}{-0,03}\right) = x\cdot\left(19,9\bar{6}\right)$$

$$\cong 20\cdot x\,.$$

E SE INFINITI ANNI?

ABBIAMO

$$x \cdot \left(1 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \dots\right) = x \cdot \sum_{i \geq 0} (1-p)^i =$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-(1-p)}$$

SE $p = 0{,}03$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \frac{1}{+0{,}03} = x \cdot (33{,}\overline{3}) = 1.666.66\overline{6}$$

ABBIAMO USATO IL SEGUENTE

LEM 5.1.1 (SOMMA GEOMETRICA): SIA $m \in \mathbb{N}$.
ALLORA

$$\sum_{i=0}^{m} x^i = \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}.$$

DIM. FACILE INDUZIONE SU m. $\square$

COME INDOVINARE UNA TALE FORMULA?

METODO DELLA PERTURBAZIONE:

SIA $\quad S \overset{def}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. ALLORA

$$x \cdot S = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + (S - 1)$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot S = x^{n+1} - 1 .$$

5.2 SOMME POLINOMIALI:

ABBIAMO VISTO CHE

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}$$

(FACILE INDUZIONE).

COME INDOVINARE UNA TALE FORMULA?

$$(1+2+3+\dots+n)+(1+2+3+\dots+n)=$$

$$(1+2+3+\dots+n)+(n+(n-1)+\dots+2+1)=$$

$$\underbrace{(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n}=n\cdot(n+1).$$

COME POSSO INDOVINARE

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad ?$$

TEOREMA 5.2.1: SIA $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ E SIA $d \overset{\text{def}}{=} \deg(f(x))$ $(d \in \mathbb{P})$. ALLORA $\exists$ $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ DI GRADO $\leq d+1$ TALE CHE

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIM. OMESSA. $\square$

DEF. SI DICE ALLORA CHE $g(n)$ È UNA **FORMULA CHIUSA** PER $\sum_{i=0}^{n} f(i)$.

E.g. CALCOLARE (TROVARE UNA FORMULA CHIUSA)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 .$$

SIA $f(x) = x^2 \Rightarrow \alpha = 2 \overset{(5.2.1)}{\Longrightarrow} \exists$

$g(x) \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $\deg(g(x)) \leq 3$

E

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = g(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$

TALI CHE

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PERTANTO

$$\begin{cases} 0 = d & (n=0) \\ 1 = a+b+c+d & (n=1) \\ 5 = 8\cdot a+4\cdot b+2\cdot c+d & (n=2)\,(1^2+2^2) \\ 14 = 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c+d & (n=3)\,(1^2+2^2+3^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d=0 \quad \begin{cases} a+b+c = 1 \\ 8a+4b+2c = 5 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c = 1 - a - b$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 8a + 4b + 2(1-a-b) = 5 \\ 27a + 9b + 3(1-a-b) = 14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 6a + 2b = 3 \\ 24a + 6b = 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{3-6a}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$24a+6\left(\frac{3-6a}{2}\right)=11$$

$$\Downarrow$$

$$6a=2$$

$$\Downarrow$$

$$a=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{3-6\left(\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

CONCLUDENDO, PER 5.2.1,

$$\sum_{i=0}^{m} i^2 = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$.

<u>ES. [1+]</u>: SIANO $m, k \in \mathbb{P}$. DIMOSTRARE CHE

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}.$$

5.3 SOMME NON POLINOMIALI:

COME POSSO CALCOLARE

$$\sum_{i=0}^{n} \sqrt{i} \quad ?$$

<u>TEO 5.3.1</u>: SIA $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, f CONTINUA E MONOTONA. ALLORA

$$\int_1^n f(x)\,dx + f(1) \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

SE f È CRESCENTE, E

$$\int_1^m f(x)\,dx + f(1) \geq \sum_{i=1}^{m} f(i) \geq f(m) + \int_1^m f(x)\,dx$$

SE f È DECRESCENTE.

<u>DIM.</u> ABBIAMO CHE

$$\int_1^m f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m-1} \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{m-1} f(i+1)$$

POICHÈ f È CRESCENTE.

SIMILMENTE

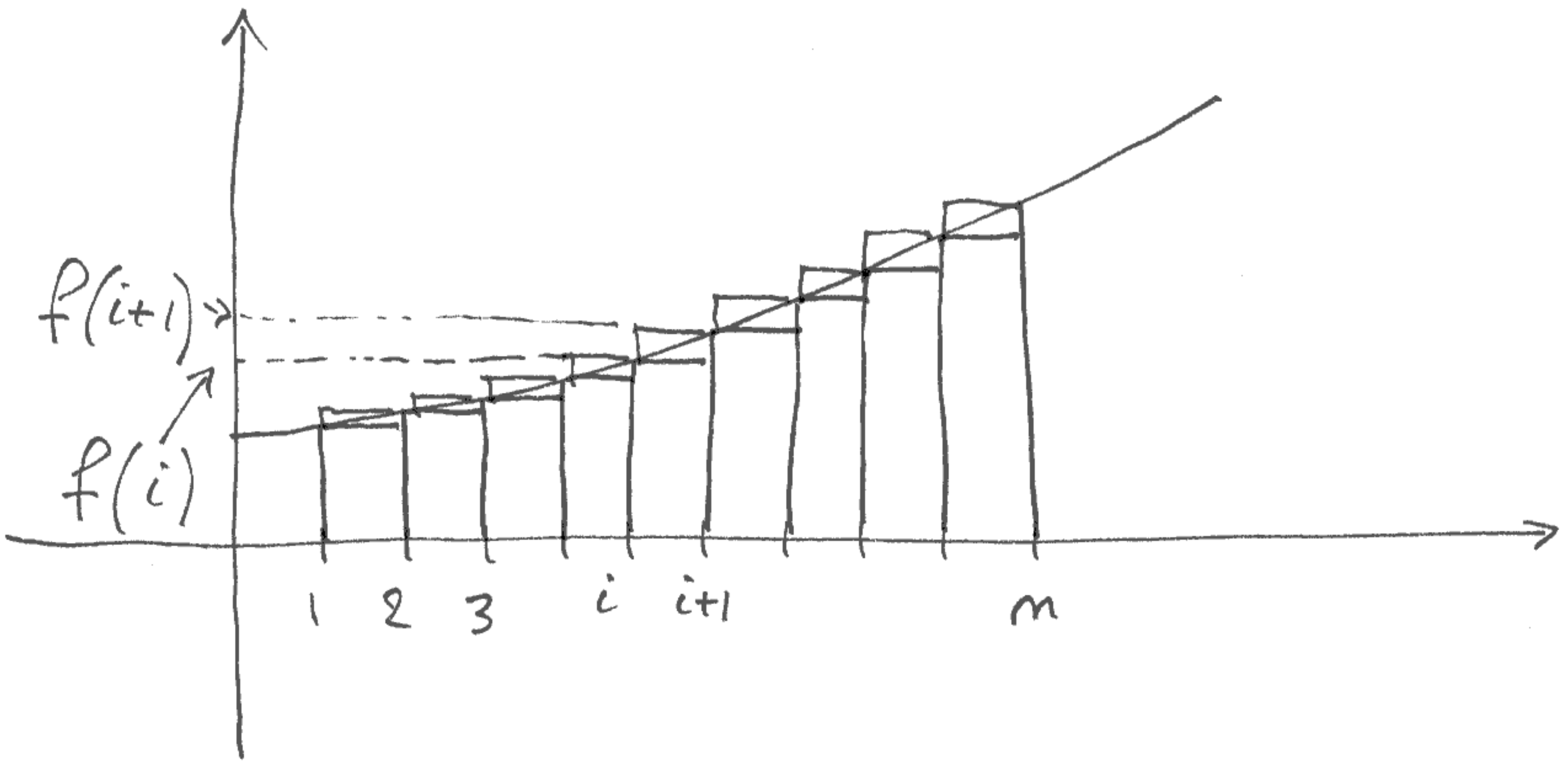
$$\int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - f(n)$$

QUINDI

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) - f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1)$$

PERCHÈ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum_{i=2}^{n} f(i)$.

GEOMETRICAMENTE



ANALOGAMENTE SE È DECRESCENTE. $\square$

E.g. STIMARE

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

SIA $f(x) \overset{def}{=} \sqrt{x}$. ALLORA f È CONTINUA IN $\mathbb{R}_{>0}$ E MONOTONA CRESCENTE.

DEVO QUINDI CALCOLARE

$$\int_1^n \sqrt{x}\, dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^n = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$

PER IL TEOREMA 5.3.1 ABBIAMO CHE

$$\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \sqrt{n}$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI

$$\underbrace{\frac{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}}_{\to 1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}} \leq \underbrace{\frac{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + n^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}}_{\to 1}$$

SE $n \to +\infty$

PERTANTO,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}} = 1 .$$

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

<u>DEF.</u> SI DICE CHE f E g SONO <u>ASINTO-TICAMENTE EQUIVALENTI</u> (SCRITTO $f \sim g$) SE $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

SIA $m \in \mathbb{P}$.

__DEF.__ L'm-ESIMO __NUMERO ARMONICO__ È

$$H_m \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}.$$

__E.g.__ LA FUNZIONE $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x}$ $(x \in \mathbb{R}_{>0})$ È CONTINUA E MONOTONA DECRESCENTE, QUINDI, PER 5.3.1,

$$\int_1^m \frac{1}{x}\,dx + 1 \geq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{m} + \int_1^m \frac{1}{x}\,dx$$

MA

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^n = \ln(n)$$

PERTANTO

$$\ln(n)+1 \geq H_n \geq \ln(n)+\frac{1}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$1+\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{H_n}{\ln(n)} \geq 1+\frac{1}{n\cdot\ln(n)}$$

PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$$

CIOÈ

$$H_n \simeq \ln(n)$$

SE $n \to +\infty$.

5.4 SOMME DOPPIE

QUANTO È GRANDE

$$\sum_{i=1}^{m} H_i \quad ?$$

QUESTO È

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$$

MA COSA STIAMO SOMMANDO

IN REALTÀ?

STIAMO SOMMANDO TUTTI I VALORI NELLA SEGUENTE TABELLA

$$
\begin{array}{c|cccccc}
i \backslash j & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
\hline
1 & \frac{1}{1} & & & & \\
2 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & & \\
3 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
n & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n}
\end{array}
$$

MA QUESTI POSSONO ESSERE SOMMATI ANCHE PER COLONNE. OTTENIAMO

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} = m \cdot 1 + (m-1) \cdot \frac{1}{2} + (m-2) \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

$$\dots + (m - (m-1)) \frac{1}{m}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} (m - j + 1) = \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{m}{j} - \frac{j}{j} + \frac{1}{j} \right)$$

$$= m \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{m} 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$$

$$= n \cdot H_n - n + H_n$$

CONCLUDENDO

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1) \cdot H_n - n$$

PER $\forall n \in \mathbb{P}$. IN PARTICOLARE

$$\sum_{i=1}^{n} H_i \cong n \cdot \ln(n)$$

PER $n \to +\infty$.

5.5 PRODOTTI

E SE ABBIAMO UN PRODOTTO?

QUANTO È GRANDE

$$\prod_{i=1}^{m} f(i) \quad ?$$

ABBIAMO CHE

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{m} f(i)\right) = \sum_{i=1}^{m} \ln(f(i))$$

QUINDI

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(f(i))\right).$$

<u>E.g.</u> QUANTO È GRANDE

$$n! \quad ?$$

ABBIAMO CHE

$$n! = \prod_{i=1}^{n} f(i)$$

DOVE $f(x) = x$ PER $\forall\, x \in \mathbb{R}_{>0}$.

ABBIAMO

$$\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i).$$

MA $\ln(x)$ È CONTINUA E MONOTONA CRESCENTE PER $x>0$. QUINDI, PER 5.3.1,

$$\int_1^n \ln(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,dx$$

MA

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = \Big[x \cdot \ln(x) - x\Big]_1^n = n \cdot \ln(n) - n + 1$$

OTTENIAMO

$$n \cdot \ln(n) - n + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \leq \ln(n) + n \cdot \ln(n) - n + 1$$

PERTANTO

$$e^{n \cdot \ln(n) - n + 1} \leq e^{\sum_{i=1}^{n} \ln(i)} \leq e^{\ln(n) \cdot (n+1) - n + 1}$$

CIOÈ

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

PER $\forall n \in \mathbb{P}$.

TEO 5.5.1 (STIRLING): ESISTE UNA FUNZIONE

$\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ TALE CHE

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \cdot e^{\varepsilon(n)}$$

DOVE

$$\frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon(n) \leq \frac{1}{12 \cdot n}$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

DIM. OMESSA. $\square$

ES. [1+]: SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. È VERO CHE

$$f \approx g \overset{?}{\Longrightarrow} e^f \approx e^g \quad ?$$

5.6 NOTAZIONI ASINTOTICHE

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.

DEF. SI DICE CHE f È ASINTOTICAMENTE PIÙ PICCOLA (O CHE È UN O-PICCOLO) DI g SE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

SCRITTO $f = o(g)$.

<u>LEMMA 5.6.1</u>: SIANO $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $a < b$.

ALLORA

$$x^a = o\left(x^b\right).$$

<u>DIM.</u> CHIARO. $\square$

$$\left(\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}} \to 0 \quad \text{SE} \quad x \to +\infty \right)$$

<u>LEMMA 5.6.2</u>: SIA $b \in \mathbb{R}_{>0}$. ALLORA

$$\ln(x) = o(x^b).$$

<u>DIM.</u> SAPPIAMO CHE $x < e^x$ PER $\forall x \in \mathbb{R}$.
QUINDI $\ln(x) < x$ PER $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow$
$\ln\left(x^{\frac{b}{2}}\right) < x^{\frac{b}{2}}$ PER $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$. PER = TANTO

$$\frac{b}{2} \cdot \ln(x) < x^{\frac{b}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\ln(x)}{x^b} < \frac{2}{b} \cdot \frac{x^{\frac{b}{2}}}{x^b} = \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{x^{\frac{b}{2}}} \to 0$$

SE $x \to +\infty$. □

<u>LEMMA 5.6.3</u>: SIA $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. ALLORA

$$x^b = o(a^x)$$

PER $\forall\ b > 0$.

<u>DIM</u>. VEDI CORSO DI ANALISI. □

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) > 0$ PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>DEF.</u> SI DICE CHE f È UN <u>O-GRANDE</u> DI g SE $\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $\exists\, N \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$|f(n)| \leq c \cdot g(n)$$

SE $n \geq N$, SCRITTO $f = O(g)$.

<u>E.g.</u> SIA $f(x) = 5 \cdot x^2 - 3x + 6$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

ALLORA

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 6}{x^2} = 5$$

QUINDI $\exists N \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$\frac{|5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 6|}{x^2} \leq 5 + \frac{1}{2}$$

SE $x > N$. PERTANTO

$$5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 6 = O(x^2).$$

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA CHE

TEO 5.6.4: SIANO $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. $(k \in \mathbb{P})$, TALI CHE $a_k > 0$. ALLORA

$$a_k \cdot x^k + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = O(x^k).$$

PRO 5.6.5: SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. ALLORA

$$f \gtrsim g \implies f = O(g)$$

E

$$f = o(g) \implies f = O(g).$$

DIM. SE $f \approx g \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq \frac{3}{2}$$

SE $n \geq N \Rightarrow f = O(g)$.

SE $f = o(g) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$

TALE CHE

$$\frac{f(n)}{g(n)} < \frac{1}{2}$$

SE $n \geq N \Rightarrow f = O(g)$. $\square$

<u>OSS.</u> $f = o(g) \not\Rightarrow g = O(f)$. PER ES., SE $f(x) = x$ E $g(x) = x^2 \Rightarrow f = o(g)$ (5.6.1) MA $g \neq O(f)$ (SE $\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $N \in \mathbb{N}$ TALI CHE $g(n) \leq c \cdot f(n)$ SE $n \geq N \Rightarrow n^2 \leq c \cdot n$ SE $n \geq N$, ASSURDO).

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.

DEF. SI DICE CHE f È UN OMEGA DI g (SCRITTO $f = \Omega(g)$) SE $\exists\ c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $N \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$g(n) \leq c \cdot f(n)$$

SE $n > N$.

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.

PRO 5.6.6:

$$f = O(g) \iff g = \Omega(f).$$

DIM.

$$f = O(g)$$

$$\Updownarrow$$

$\exists$ $c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $N \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$n \geq N \implies f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\ c \in \mathbb{R}_{>0}$ E $N \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$n \geq N \Rightarrow \frac{f(n)}{c} \leq g(n)$$

$$\Updownarrow$$

$$g = \Omega(f). \square$$

SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.

<u>DEF.</u> SI DICE CHE f È UN <u>TETA</u> DI g

SCRITTO $f=\Theta(g)$, SE $f=O(g)$ E $g=O(f)$.

E.g. SE $f(n)=\Theta(n^3) \Rightarrow \exists\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ ~~TALI~~

$\exists\ N \in \mathbb{N}$ TALI CHE $c_1 \cdot n^3 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^3$

SE $n \geq N \Rightarrow$ SE n RADDOPPIA $\Rightarrow f(n)$ SI

MOLTIPLICA PER 8.

5.7 QUANTO È GRANDE L'INFINITO?

SIANO A, B INSIEMI.

DEF. SI DICE CHE A E B HANNO LA STESSA **CARDINALITÀ**, SCRITTO $|A|=|B|$, SE $\exists\, f: A \to B$, f BIEZIONE.

TEO 5.7.1: (CANTOR): SIA A UN INSIEME. ALLORA

$$|A| \neq |\mathcal{P}(A)|.$$

DIM. PER ASSURDO. $\left(\mathcal{P}(A)=\{S : S \subseteq A\}\right)$

SIA $f: A \to \mathcal{P}(A)$, f BIEZIONE.

SIA

$$X \overset{\mathrm{def}}{=} \{ a \in A : a \notin f(a) \}. \qquad (*)$$

ALLORA $X \subseteq A$, MA f È SURIETTIVA, QUINDI $\exists\, b \in A$ TALE CHE $f(b) = X$. SE $b \in f(b)$

$$\underset{(X=f(b))}{\Longrightarrow} b \in X \underset{(*)}{\Longrightarrow} b \notin f(b),$$

ASSURDO. SE $b \notin f(b)$

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} b \in X \underset{(X=f(b))}{\Longrightarrow} b \in f(b),$$

ASSURDO. $\square$

SIANO A, B INSIEMI.

<u>DEF.</u> SI DICE CHE A HA CARDINALITÀ <u>MINORE</u> DI B, SCRITTO $|A| < |B|$, SE $\exists\, f : A \to B$, f INIETTIVA.

<u>OSS.</u> È CHIARO CHE

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

QUINDI

$$|A| < |\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| < \cdots\cdots$$

QUINDI CI SONO INFINITI INFINITI.

<u>IPOTESI DEL CONTINUO</u>: NON ESISTE ALCUN INSIEME A TALE CHE

$$|\mathbb{N}| < |A| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

ESAME: SCRITTO + ORALE

SCRITTO: 12 DOMANDE A SCELTA MULTIPLA

(5 SCELTE)

(TEMPO = VELOCE)

PUNTEGGIO SCRITTO: PUNTEGGIO DOMANDE

(+4 = RISPOSTA ESATTA
-1 = RISPOSTA ERRATA)

+ BONUS

(+10 SE LO STUDENTE È
NEL TOP 25%)

AMMISSIONE ALL'ORALE: ≥ 24 PUNTI.

ORALE: CONFERMA LO SCRITTO, IN CASO DI FORTE INCONGRUITÀ TRA SCRITTO E ORALE FARÀ FEDE L'ORALE.

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + k).$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\, f \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $\deg(f(x)) \leq 2+1$ E

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+k) = f(n)$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

QUINDI $\exists\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2+k) = a\cdot n^3 + b\cdot n^2 + c\cdot n + d$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. MA ALLORA

$$\begin{cases} 0 = d & (n=0) \\ 2 = a+b+c+d & (n=1) \\ 8 = 8\cdot a + 4\cdot b + 2\cdot c + d & (n=2) \\ 20 = 27\cdot a + 9\cdot b + 3\cdot c + d & (n=3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 8\cdot a+4\cdot b+2c=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c = 2-a-b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 8\cdot a+4\cdot b+2\left(2-a-b\right)=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot\left(2-a-b\right)=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 6 \cdot a + 2b = 4 \\ 24 \cdot a + 6 \cdot b = 14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3 \cdot a + b = 2 \\ 12 \cdot a + 3 \cdot b = 7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 2 - 3 \cdot a$$

$$\Rightarrow \quad 12 \cdot a + 3 \cdot \left(2 - 3 \cdot a\right) = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = 2 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$ CONCLUDENDO

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2}{3}\cdot n$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ALTERNATIVAMENTE

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SONDAGGIO: LA CARDINALITÀ DI

$$\{(x_1,\dots,x_6)\in[6]^6 : x_5=4\}$$

È

a)	6^6	30%	
b)	$6!$	14%	
c)	6^5	28%	✓
d)	$5!$	11%	
e)	NDQ	17%	

ES. : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8 \cdot f(n+1) + 12 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, CON LE C.I. $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=0$.

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ. CARATT. È

$$x^3 = -x^2 + 8 \cdot x + 12$$

CIOÈ

$$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = 0 . \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $X = -2$ È SOLUZ. DI $(*)$. USIAMO RUFFINI. ABBIAMO

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2-8\cdot x-12 & x+2 \\ \cline{2-2}
x^3+2x^2 & x^2-x-6 \\ \hline
-x^2-8\cdot x-12 & \\
-x^2-2x & \\ \hline
-6\cdot x-12 & \\
-6\cdot x-12 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

PERTANTO

$$x^3+x^2-8\cdot x-12=(x^2-x-6)(x+2)$$

RISOLVIAMO $x^2-x-6=0$. ABBIAMO

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2+4\cdot 6}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}.$$

QUINDI LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1=-2,\quad \gamma_2=3,\quad \gamma_3=-2$$

MA $\gamma_1 = \gamma_3$, QUINDI LE RADICI DISTINTE SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = 3$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 2$ E $d_2 = 1$ (IN EFFETTI $x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = (x-(-2))^2 \cdot (x-3)^1$). SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\ P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\mathrm{DEG}\left(P_1(x)\right) \leq d_1 - 1$, $\mathrm{DEG}\left(P_2(x)\right) \leq d_2 - 1$, E

$$f(n) = P_1(n)\cdot\left(\gamma_1\right)^n + P_2(n)\cdot\left(\gamma_2\right)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b\cdot n)\cdot(-2)^n + c\cdot(3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. PER TROVARE a, b, c USIAMO LE C.I.:

$$
\begin{cases}
0 = f(0) = a + c \\
5 = f(1) = (a+b)\cdot(-2)^1 + c\cdot(3)^1 \\
0 = f(2) = (a+2\cdot b)\cdot(-2)^2 + c\cdot(3)^2
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{cases}
a + c = 0 \\
-2a - 2b + 3\cdot c = 5 \\
4\cdot a + 8\cdot b + 9\cdot c = 0
\end{cases}
$$

$$c = -a$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 3 \cdot (-a) = 5 \\ 4 \cdot a + 8 \cdot b + 9 \cdot (-a) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -5a - 2b = 5 \\ -5 \cdot a + 8 \cdot b = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$5 \cdot a = 8 \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$-8 \cdot b - 2b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$-10 \cdot b = 5$$

$$\Downarrow$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$5 \cdot a = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 5 \cdot a = -4$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}.$$ CONCLUDENDO

$$f(n) = \left(-\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot n\right) \cdot (-2)^n + \frac{4}{5} \cdot (3)^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + k).$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists\, f \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $\deg(f(x)) \leq 2+1$ E

$$\sum_{k=0}^{n} (k^2 + k) = f(n)$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

QUINDI $\exists\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2+k\right) = a\cdot n^3+b\cdot n^2+c\cdot n+d$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. MA ALLORA

$$\begin{cases} 0 = d & (n=0) \\ 2 = a+b+c+d & (n=1) \\ 8 = 8\cdot a+4\cdot b+2\cdot c+d & (n=2) \\ 20 = 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c+d & (n=3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ 8\cdot a+4\cdot b+2c=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot c=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c = 2-a-b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 8\cdot a+4\cdot b+2\left(2-a-b\right)=8 \\ 27\cdot a+9\cdot b+3\cdot\left(2-a-b\right)=20 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 6\cdot a + 2b = 4 \\ 24\cdot a + 6\cdot b = 14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 3\cdot a + b = 2 \\ 12\cdot a + 3\cdot b = 7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 2 - 3\cdot a$$

$$\Rightarrow \quad 12\cdot a + 3\cdot\left(2 - 3\cdot a\right) = 7$$

$$\Rightarrow \quad 3\cdot a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = 2 - 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$\Rightarrow \; c = 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}$. CONCLUDENDO

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \frac{n^3}{3} + n^2 + \frac{2}{3}\cdot n$$

PER $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ALTERNATIVAMENTE

$$\sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + k\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}.$$

SONDAGGIO: LA CARDINALITÀ DI

$$\{(x_1, \ldots, x_6) \in [6]^6 : x_5 = 4\}$$

È

a) 6^6 30%

b) $6!$ 14%

c) 6^5 28% ✓

d) $5!$ 11%

e) NDQ 17%

<u>ES.</u> : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} 3^{i+j} .$$

ABBIAMO CHE

$$\sum_{j=0}^{m} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{m} 3^{i} \cdot 3^{j} = 3^{i} \cdot \sum_{j=0}^{m} 3^{j}$$

$$\underset{(5.1.1)}{=} 3^{i} \cdot \left(\frac{3^{m+1} - 1}{3-1} \right) = 3^{i} \cdot \frac{3^{m+1} - 1}{2}$$

QUINDI

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} 3^{i+j} = \sum_{i=0}^{n} 3^{i} \cdot \frac{3^{m+1}-1}{2} = \frac{3^{m+1}-1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n} 3^{i}$$

$$= \frac{3^{m+1}-1}{2} \cdot \frac{3^{n+1}-1}{2}$$

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA O ASINTOTICAMENTE CHIUSA PER

$$\sum_{k=1}^{n} 2k \cdot \ln(k) .$$

LA FUNZIONE $f(x) \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot x \cdot \ln(x)$ NON È UN POLINOMIO MA È CONTINUA PER $x>0$ E MONOTONA CRESCENTE PER $x>0$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE ALLORA

$$\int_1^m 2x\ln(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{m} 2\cdot k\cdot \ln(k) \leq 2\cdot m\cdot \ln(m) + \int_1^m 2x\ln(x)\,dx$$

PER $\forall\, m \in \mathbb{P}$. MA

$$\int_1^m 2x\ln(x)\,dx = \left[x^2\cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} \right]_1^m =$$

$$= \left(m^2\cdot \ln(m) - \frac{m^2}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

PERTANTO

$$n^2\cdot \ln(n) - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \le \sum_{k=1}^{n} 2\cdot k\cdot \ln(k) \le 2\cdot n\cdot \ln(n) + n^2\cdot \ln(n) - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}$$

PER $\forall n \in \mathbb{P}$. IL TERMINE CHE VA PIÙ VELOCEMENTE ALL'INFINITO PER $n \to +\infty$ A SINISTRA È $n^2\cdot \ln(n)$ E A DESTRA PURE. QUINDI

$$1 - \frac{1}{2\cdot \ln(n)} + \frac{1}{2\cdot n^2 \ln(n)} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} 2k\ln(k)}{n^2\cdot \ln(n)} \le \frac{2}{n} + 1 - \frac{1}{2\ln(n)} + \frac{1}{2n^2\ln(n)}$$

PERTANTO PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k)}{n^2 \cdot \ln(n)} = 1$$

PERTANTO

$$\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k) \approx n^2 \cdot \ln(n)$$

PER $n \to +\infty$.

ES. : TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} 2^i \cdot 3^j .$$

CALCOLIAMO PRIMA IL PRODOTTO INTERNO.

$$\prod_{j=1}^{m} 2^i \cdot 3^j = 2^i \cdot 3^1 \cdot 2^i \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 2^i \cdot 3^m$$

$$= (2^i)^m \cdot 3^{1+2+\ldots+m}$$

$$= 2^{i \cdot m} \cdot 3^{\binom{m+1}{2}}$$

PERTANTO

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} 2^{i} \cdot 3^{j} = \prod_{i=1}^{n} 2^{in} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}}$$

$$= 2^{n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}} \cdot 2^{2n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}} \cdot \ldots \cdot 2^{n \cdot n} \cdot 3^{\binom{n+1}{2}}$$

$$= 3^{\binom{n+1}{2} \cdot n} \; 2^{n+2n+\ldots+n \cdot n}$$

$$= 3^{n \cdot \binom{n+1}{2}} \cdot 2^{n(1+2+\ldots+n)}$$

$$= 3^{n\binom{n+1}{2}} \cdot 2^{n\binom{n+1}{2}} = 6^{n \cdot \binom{n+1}{2}}.$$

ES.: TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j).$$

STIAMO SOMMANDO TUTTI I NUMERI DELLA SEGUENTE TABELLA:

$i \backslash j$	1	2	3	4	$\ldots$	n
0	1	2	3	4	$\ldots$	n
1	2	3	4	5	$\ldots$	$n+1$
2	3	4	5	6	$\ldots$	$n+2$
3	4	5	6	7	$\ldots$	$n+3$
$\vdots$	$\vdots$					
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$\ldots$	$n+n$

QUINDI LA SOMMA È

$$= \sum_{i=0}^{n} \left((1+2+3+\ldots+n) + i \cdot n \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n+1}{2} + i \cdot n \right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{2} + \sum_{i=0}^{n} i \cdot n$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2}}_{n+1} + n \cdot \sum_{i=0}^{n} i = (n+1) \cdot \binom{n+1}{2} +$$

$$+ n \cdot \binom{n+1}{2}$$

CONCLUDENDO

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} (i+j) = (2m+1) \cdot \binom{m+1}{2}.$$

<u>ES. :</u> TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (m-j).$$

STIAMO SOMMANDO I NUMERI DELLA SEGUENTE TABELLA:

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	$\cdots$	$m-2$	$m-1$	m
0	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	0
1	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$				1	
2	m	$m-1$	$m-2$	$m-3$			2		
3	m	$m-1$	$m-2$	$\cdots$	$\cdots$	3			
$\vdots$									
m	m								

QUINDI LA SOMMA È

$$= (n+1)\cdot n + n(n-1) + (n-1)(n-2) + (n-2)(n-3) + \dots$$

$$+ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0$$

$(n-1)$-ESIMA COL. $\quad$ n-ESIMA COL. $\quad$ $(n+1)$-ESIMA COL.

$$= \sum_{i=1}^{n+1} i\cdot(i-1) = \sum_{i=1}^{n+1} (i^2 - i)$$

CHE È UNA SOMMA POLINOMIALE CHE POSSO CALCOLARE COME IN UN ES. PRECEDENTE.

ALTERNATIVAMENTE:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(n-j)$$

CALCOLIAMO PRIMA LA SOMMA PIÙ INTERNA

$$\sum_{j=0}^{n-i}(n-j)=\sum_{j=0}^{n-i}n-\sum_{j=0}^{n-i}j=(n-i+1)\cdot n-\binom{n-i+1}{2}$$

$$=(n-i+1)\left[n-\frac{n-i}{2}\right]=(n-i+1)\cdot\frac{n+i}{2}$$

QUINDI

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}(n-j)=\sum_{i=0}^{n}(n-i+1)\frac{n+i}{2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2}\left(n^2-i^2+n+i\right)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}(n^2+n)+\sum_{i=0}^{n}(i-i^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(n^2+n)(n+1)+\sum_{i=0}^{n}(i-i^2)\right].$$

SOMMA POLINOMIALE

ES. [17]: SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$

TALI CHE $f \cong g$. È VERO CHE

ALLORA

$$e^{f} \overset{?}{\cong} e^{g} \quad ?$$

ES. SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ DEFINITE

DA

$$f(n) \overset{\text{def}}{=} 2 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

E

$$g(n) \overset{def}{=} 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. QUALI TRA LE RELAZIONI $o, O, \Omega, \Theta, \simeq$ VALE TRA f e g?

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(n)$	3	2	1	2	3	2	1	2	.....
$g(n)$	2	3	2	1	2	3	2	1	.....

QUINDI $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ NON ESISTE

$\Rightarrow f \not\simeq g,\ f \neq o(g),\ g \neq o(f).$

INOLTRE

$$|f(n)| \le 2 \cdot g(n)$$

$\forall n \ge 0 \implies f = O(g)$. SIMIL.

$$|g(n)| \le 2 \cdot f(n)$$

$\forall n \ge 0 \implies g = O(f)$. PERTANTO

ANCHE $g = \Omega(f)$, $f = \Omega(g)$, E

$f = \Theta(g)$.

ES. [1+]: SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ TALI CHE $f \cong g$. È VERO CHE

$$\ln(f) \overset{?}{\cong} \ln(g) \quad ?$$

ES. COME SOPRA PER

$$f(n) \overset{def}{=} 4^n, \quad g(n) \overset{def}{=} 2^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

ABBIAMO CHE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

$\Rightarrow f \not\asymp g$ E $f \neq o(g)$. SIMIL.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

$\Rightarrow g = o(f) \underset{(4.5)}{\Longrightarrow} g = O(f) \Rightarrow f = \Omega(g)$. È VERO CHE $f = O(g)$?

SE È VERO $\Longrightarrow \exists\ c > 0$ E $N > 0$ TALI CHE

$$|f(n)| \leq c \cdot g(n)$$

$\forall n > N$. NEL NOSTRO CASO

$$4^n \leq c \cdot 2^n$$

$\forall n > N \Rightarrow$

$$\frac{4^n}{2^n} \leq c$$

$\forall n > N \Rightarrow$ ASSURDO. QUINDI

$f \neq O(g) \Rightarrow g \neq \Omega(f)$ E $g \neq \Theta(f)$.

<u>ES. [1]</u>: COME SOPRA PER

$$f(n) \stackrel{def}{=} (e^n)^2, \quad g(n) \stackrel{def}{=} e^{(n^2)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. COME SOPRA PER

$$f(n) \overset{def}{=} \sqrt{n}, \quad g(n) \overset{def}{=} n^{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

ABBIAMO CHE

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g(n)$	0	n	n^0	$\frac{1}{n}$	n^0	n^1	n^0	$\frac{1}{n}$	...	

PERTANTO

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{SE } n \equiv 0 \pmod{2} \\ n, & \text{SE } n \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{n}, & \text{SE } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$. PERTANTO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \quad \text{NON ESISTE}$$

PERCHÈ

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{SE } n \equiv 0 \ (2) \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{SE } n \equiv 1 \ (4) \\ n^{\frac{3}{2}}, & \text{SE } n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

$\Rightarrow f \not\asymp g$ E $f \neq o(g)$. SIMIL.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ NON ESISTE

$\Rightarrow g \neq o(f)$. È VERO CHE

$f = O(g)$? SE È VERO $\Rightarrow \exists\, c > 0$ E $N > 0$ TALI CHE

$$\frac{|f(n)|}{g(n)} \leq c$$

$\forall\, n > N$. QUINDI $\Rightarrow f \neq O(g)$.

SIMIL. $g \neq O(f) \Rightarrow f \neq \Omega(g)$ E $g \neq \Omega(f)$ E $g \neq \Theta(f)$.

<u>ES.</u> [1]: COME SOPRA PER

$$f(n) \stackrel{def}{=} (\ln(n))^7, \quad g(n) \stackrel{def}{=} n^{\frac{1}{100}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. SIA $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ DEFINITA DA

$$f(n) \stackrel{def}{=} n + \ln(n) + \ln(n)^2.$$

QUALI DELLE SEGUENTI AFFERMAZIONI È VERA?

$$f = \Theta\left(2^{n \ln(n)}\right), \quad f = \Theta(n), \quad f = \Theta(n^2)$$

$$f = \Theta(2^n), \quad f = \Theta\left(n^2 \cdot \log_{10}(n)\right) \quad ?$$

- $f = \Theta(2^{n \ln(n)})$?

BEH...

$$f(n) \overset{def}{=} n + \ln(n) + \ln(n)^2.$$

SE $f = \Theta(2^{n \cdot \ln(n)}) \Rightarrow 2^{n \cdot \ln(n)} = O(f)$

$\Rightarrow \exists\, c > 0$ E $\exists\, N \in \mathbb{P}$ TALI CHE

$$2^{n \cdot \ln(n)} \leq c\left(n + \ln(n) + \ln(n)^2\right)$$

SE $n > N$. MA $n < n \cdot \ln(n)$ SE $n \geq 3$,

QUINDI

$$2^n \leq c\left(n + \ln(n) + \ln(n)^2\right)$$

SE $n \geq 3$, CHE È ASSURDO PERCHÈ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n + \ln(n) + \ln(n)^2} = +\infty.$$

PERTANTO

$$f \neq \Theta\left(2^{n \ln(n)}\right).$$

$- f = \Theta(n)$?

POICHÉ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + \ln(n) + \ln(n)^2} = 1$$

$\Rightarrow f \cong n \Rightarrow f = O(n)$ E $n = O(f) \Rightarrow$

$f = \Theta(n)$.

$- f = \Theta(n^2)$?

SE $f = \Theta(n^2) \Rightarrow n^2 = O(f) \Rightarrow \exists c > 0$

E $\exists N > 0$ TALI CHE

$$n^2 \leq c\left(n + \ln(n) + \ln(n)^2\right)$$

PER $\forall n > N$. ASSURDO. QUINDI $f \neq \Theta(n^2)$.

- $f = \Theta(2^n)$?

CIOÈ

$$n + \ln(n) + \ln(n)^2 = \Theta(2^n) \quad ?$$

POICHÈ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n + \ln(n) + \ln(n)^2} = +\infty$$

CONCLUDIAMO COME PRIMA CHE $f \neq \Theta(2^n)$.

$- f = \Theta(n^2 \cdot \log_{10}(n))$?

CIOÈ

$$n + \ln(n) + \ln(n)^2 = \Theta(n^2 \cdot \log_{10}(n)) \text{ ?}$$

POICHÈ

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 \cdot \log_{10}(n)}{n + \ln(n) + \ln(n)^2} = +\infty$$

$$\Rightarrow f \neq \Theta(n^2 \cdot \log_{10}(n)).$$

CONCLUDENDO

$$f = \Theta(n).$$

ES. È VERO CHE

$$n! = O((n+1)!) \quad ?$$

ABBIAMO CHE

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n! = o((n+1)!) \Rightarrow n! = O((n+1)!).$$

ES. SIANO $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ DEFINITE PONENDO

$$f(n) \overset{def}{=} \log_2(n) \quad , \quad g(n) \overset{def}{=} \log_{10}(n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. DECIDERE QUALI DELLE RELAZIONI, o, O, Ω, Θ, $\eqsim$ VALGONO TRA f E g.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \quad , \quad g(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$$

PERTANTO

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \to \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

SE $n \to +\infty$. QUINDI $f \not\sim g$. INOLTRE

$$\frac{f(n)}{g(n)} \leq \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

SE $n > 0 \Rightarrow f = O(g)$. SIMILMENTE $g = O(f) \Rightarrow f = \Omega(g)$ E $g = \Omega(f)$.

INFINE $\dfrac{f(n)}{g(n)} \not\to 0$ SE $n \to +\infty \Rightarrow f \neq o(g)$.

SIMILMENTE $g \neq o(f)$.

ES. COME SOPRA PER

$$f(n) = 1 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad g(n) = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

ABBIAMO CHE

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8				
$f(n)$	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	....
$g(n)$	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	...

POICHÈ $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ NON ESISTE $\Rightarrow f \not\asymp g$,

$f \neq o(g)$ E $g \neq o(f)$. INOLTRE SE $\exists\, c > 0$

TALE CHE $f(n) \leq c \cdot g(n)$ SE $n > N$

$\Rightarrow 1 \leq c \cdot 0 \Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow f \neq O(g)$.

SIMILMENTE $g \neq O(f)$. QUINDI $g \neq \Omega(f)$ E

$f \neq \Omega(g)$ E $f \neq \Theta(g)$.

<u>OSS.</u> SE

$$f(n) \overset{def}{=} 2 + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \quad g(n) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ COME SOPRA $\left(f \not\sim g,\ f \neq o(g),\ g \neq o(f)\right)$

MA $f = O(g)$ E $g = O(f)$ $\Rightarrow$ $g = \Omega(f)$ E

$f = \Omega(g)$ E $f = \Theta(g)$ $\left(\Rightarrow g = \Theta(f)\right)$.