ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 5

LIMITI DI SUCCESSIONI

Una SUCCESSIONE REALE $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ è una funzione che ad ogni intero $n \geq n_0$ associa un numero reale $\underbrace{a_n}_{\text{indice}}$ = termine n-simo

ESEMPI

- $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n\geq 1}$ $\quad \overset{1}{\downarrow}\!-1,\ \overset{2}{\downarrow}\!\frac{1}{2},\ \overset{3}{\downarrow}\!-\frac{1}{3},\ \overset{4}{\downarrow}\!\frac{1}{4},\ \overset{5}{\downarrow}\!-\frac{1}{5},\ \dots,\ \overset{n}{\downarrow}\!\frac{(-1)^n}{n},\ \dots$

- $\left\{ \sqrt{n^2-5} \right\}_{n\geq 3}$ $\quad \overset{3}{\downarrow}\!2,\ \overset{4}{\downarrow}\!\sqrt{11},\ \overset{5}{\downarrow}\!\sqrt{20},\ \overset{6}{\downarrow}\!\sqrt{31},\ \dots,\ \overset{n}{\downarrow}\!\sqrt{n^2-5},\ \dots$

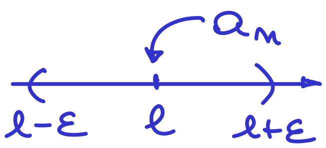
Il LIMITE DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ è definito come

DEFINITIVAMENTE → solo da un certo punto in poi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \forall M\in\mathbb{R}\ \overbrace{\exists N \geq n_0 : \forall n > N}^{\text{DEFINITIVAMENTE}}\ a_n > M \\ l\in\mathbb{R} & \text{se } \forall \varepsilon>0\ \exists N \geq n_0 : \forall n>N\ |a_n - l| < \varepsilon \\ -\infty & \text{se } \forall M\in\mathbb{R}\ \exists N \geq n_0 : \forall n>N\ a_n < M \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\nexists$ NON ESISTE

$|a_n - l| < \varepsilon \iff l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \iff$



Se il limite vale $l\in\mathbb{R}$ la successione si dice CONVERGENTE, se vale $+\infty$ o $-\infty$ si dice DIVERGENTE, se $\nexists$ si dice INDETERMINATA.

OSSERVAZIONE

Vale la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (DT)

$$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad |a+b| \leq |a|+|b|.$$

ESEMPI

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

  perché $\forall M\in\mathbb{R}$ $n^2 > M$ se $n > \sqrt{|M|}$ definitivamente

- $\lim_{n\to\infty} 2-\sqrt{n} = -\infty$

  perché $\forall M\in\mathbb{R}$ $2-\sqrt{n} < M$ se $n > (2-M)^2$ definitivamente

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

  perché $\forall\varepsilon>0$ $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$ definitivamente

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$

  $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ è limitata e quindi non tende a $\pm\infty$.

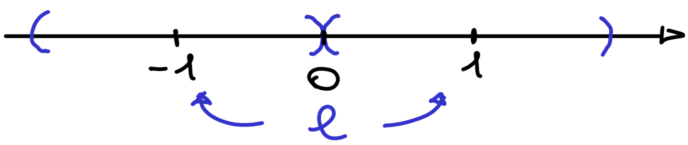
Se esistesse un limite $\ell\in\mathbb{R}$ allora per $\varepsilon=1>0$

$$\exists N\geq 0 : \forall n\geq N \quad |(-1)^n-\ell| < \varepsilon = 1$$

ossia $|1-\ell|<1$ per n pari e $|-1-\ell|<1$ per n dispari

$$2 = |1-\ell+\ell+1| \overset{DT}{\leq} |1-\ell| + |\ell+1| < 1+1 \leq 2$$

da cui $2<2$ contraddizione. Il limite non esiste.



OSSERVAZIONE

Il valore del limite di una successione $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ non dipende dall'indice iniziale n_0 o da da un numero finito dei suoi termini.

PROPRIETÀ DEI LIMITI

1) UNICITÀ: il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ se esiste è unico

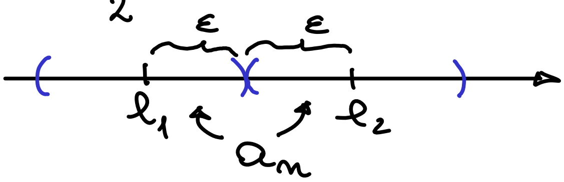
dim. Supponiamo che $\exists\, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ (caso finito-finito)

con $\ell_1 \neq \ell_2$: $\forall \varepsilon > 0$ $\begin{cases} \exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |a_n - \ell_1| < \varepsilon \\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |a_n - \ell_2| < \varepsilon \end{cases}$

allora $\forall n > \max(N_1, N_2)$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2| \overset{DT}{\leq} |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\varepsilon$$

Scegliendo $\varepsilon = \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2} > 0$ si ha una contraddizione.



$\square$

2) Se il limite $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è limitata. Non vale il viceversa: $\{(-1)^n\}$ è una successione limitata ma non ha limite.

3) Se $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste allora per ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$ si ha $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots \rightarrow$ sottosuccessione $a_2, a_5, a_7, a_8, \dots$

OSSERVAZIONE

Se una successione ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi allora la successione non ha limite.

Ad esempio $\{(-1)^n\}_n$ non ha limite perché

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} = 1 \quad \neq \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} = -1$$

$2n \leftarrow$ PARI $\qquad 2n+1 \leftarrow$ DISPARI

4) PERMANENZA DEL SEGNO: se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l > 0$ oppure $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

dim. Supponiamo che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l > 0$ (caso finito)

Allora per $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$ $\underbrace{\exists N : \forall n > N}_{\text{DEFINITIVAMENTE}}$, $\underbrace{l - \frac{l}{2}}_{= \frac{l}{2} > 0} < a_n < l + \frac{l}{2}$

da cui $\forall n > N \ a_n > 0$. $\square$

5) CONFRONTO: se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$ e definitivamente $a_n \leq b_n$ allora $l_1 \leq l_2$.

dim. Se per assurdo fosse $l_1 > l_2$ allora per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$ $\underbrace{\exists N : \forall n \geq N}_{\text{DEFINITIVAMENTE}}$ $b_n < l_2 + \varepsilon = l_1 + \varepsilon < a_n$

contro il fatto che definitivamente $a_n \leq b_n$. $\square$

6) DOPPIO CONFRONTO: se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ e definitivamente $a_n \leq c_n \leq b_n$ allora $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

7) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ è limitata allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

dim. Dato che $\{b_n\}_{n\geq n_0}$ è limitata

$$\exists M > 0 : \forall n \geq n_0 \quad |b_n| \leq M$$

da cui

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M |a_n| \to 0$$

e per doppio confronto anche $a_n \cdot b_n \to 0$. $\square$

8) ALGEBRA DEI LIMITI: se $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$ allora

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2 .$$

Se $l_2 \neq 0$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.

9) LIMITE DI UNA SUCCESSIONE MONOTONA:

se $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE CRESCENTE)

allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq n_0\}$

se $\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE DECRESCENTE)

allora $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq n_0\}$

10) Per le funzioni elementari $|x|$, x^a, a^x, $\log_a(x)$ $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$ e $\operatorname{arctg}(x)$, si dimostra che

se $a_n \to l \in D$ allora $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(l)$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim_{n\to\infty} \log(\underbrace{e^{-n}}_{\to 0} + \underbrace{2\cos(\overbrace{\tfrac{1}{n^2+1}}^{\to 0})}_{\to 1}) = \log(2)$

- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}(e^n)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}_{\to 0} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\operatorname{arctg}(n)}_{\text{crescente}} = \sup\{\operatorname{arctg}(n) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{\pi}{2}$

FORME INDETERMINATE

L'algebra dei limiti si può in parte estendere anche alle successioni divergenti:

SOMMA

$+$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$

PRODOTTO

$\cdot$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell>0$	0	$\ell<0$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$

RECIPROCO $\quad \dfrac{1}{\pm\infty}=0 \qquad \dfrac{1}{\underbrace{0^+}_{\text{tende a 0 con valori +}}}=+\infty \qquad \dfrac{1}{\underbrace{0^-}_{\text{tende a 0 con valori −}}}=-\infty$

I casi "critici" indicati con ? si dicono FORME INDETERMINATE. Non hanno un risultato immediato e vanno indagate con più attenzione.

ESEMPIO

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{2n+1}}{3^n-7\cdot 2^n+(-1)^n}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty+?}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n-2\cdot 4^n}{3^n-7\cdot 2^n+(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{+\infty}\cdot\frac{3\cdot\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\to 0}-2}{1-7\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\to 0}}$$

$$=+\infty\cdot\frac{3\cdot 0-2}{1-7\cdot 0+0}=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>1\\ 1 & \text{se } a=1\\ 0 & \text{se } |a|<1\\ \nexists & \text{se } a\le -1\end{cases}$$