# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 9

**ESEMPI**

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$(1-\cos(x))(1+\cos(x))=1+\cancel{\cos(x)}-\cancel{\cos(x)}-\cos^2(x)=\boxed{1-\cos^2(x)}$$

$$\mathrm{sen}(x^2)=1-\cos^2(x)$$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}=\Big(\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big)^2\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\to\frac{1}{2}}\Big)\to\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\Big)=1$$

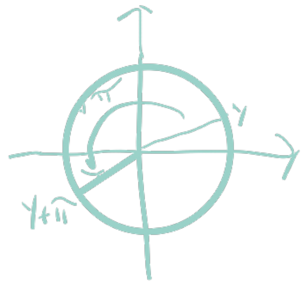
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}(x)}{x}\underset{\uparrow}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{sen}(y)}=1$$

$y=\mathrm{arcsen}(x)\to 0$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}(x)}{x}\underset{\uparrow}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\mathrm{tg}(y)}=1=\lim_{y\to 0}\Big(\frac{\mathrm{tg}(y)}{y}\Big)^{-1}=1^{-1}$$

$y=\mathrm{arctg}(x)\to 0$

- $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}=0$$



Per $x\to\pm\infty$, $0\le\left|\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\to 0$

- $$\lim_{x\to\pi}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x-\pi}\underset{\uparrow}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{sen}(y+\pi)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-\mathrm{sen}(y)}{y}=-1$$

$y=x-\pi\to 0$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)-\mathrm{tg}(x)}{x^3}$$

$$\mathrm{sen}(x)-\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}=\mathrm{sen}(x)\frac{(\cos(x)-1)}{\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\Big)=-\frac{1}{2}.$$

# CONFRONTI TRA INFINITESIMI

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ e supponiamo

che $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \pm\infty \end{cases}$$

1) nel caso $0$ diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a $g(x)$

2) nel caso $\ell\neq 0$ diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DELLO STESSO ORDINE di $g(x)$

3) nel caso $\pm\infty$ diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $g(x)$

Se $\alpha>0$, per $x\to x_0$, $(x-x_0)^\alpha$ è un infinitesimo di ordine $\alpha$.

## ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = ? \quad \text{con } a>0 \text{ e } a\neq 2$$

Se $0<a<2$ allora per $x\to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{x(\underbrace{2x^2}_{\to 0}-\underbrace{3x}_{\to 0}+4)}{x^a(\underbrace{x^{2-a}}_{\to 0}-1)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ -4 & \text{se } a=1 \\ -\infty & \text{se } 1<a<2 \end{cases}$$

Se $2<a$ allora per $x\to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{\cancel{x}(\underbrace{2x^2}_{\to 0}-\underbrace{3x}_{\to 0}+4)}{x^{\cancel{2}}(1-\underbrace{x^{a-2}}_{\to 0})} \longrightarrow +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^{x^2}}{\sin^2(x)} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\cos(x)-e^{x^2}}{\sin^2(x)} = \Bigg(\underbrace{\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1-e^{x^2}}{x^2}}_{\to -1}}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1}\Bigg)^2 \to -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\cos(x)-e^{x^2}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)-e^{x^2}}{\sin^2(x)}$$

- $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = 2$$

$$\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} \to \frac{2}{2-1} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \left(\frac{\log(1+\overbrace{(\cos(x)-1)}^{\to 0})}{\underbrace{(\cos(x)-1)}_{\to 0}}\right)\cdot\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right) \to 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

- $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg}(y)} = 1$$

$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) \to 0$

$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}(y)}$

- $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\right) = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x = x\left(\left(1+\overbrace{\left(\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}^{\to 0}\right)^{1/3} - 1\right)$$

$$= \underbrace{\left(x\cdot\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}_{\to 2}\cdot\underbrace{\left(\frac{\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{1/3}-1}{\frac{2x^2+1}{x^3}}\right)}_{\to \frac{1}{3}} \to \frac{2}{3}$$

# PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (1ª PARTE)

**TEOREMA** (DEGLI ZERI) Se $f$ è una funzione continua in $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$ allora $\exists\, x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=0$.

dim. Caso $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Costruiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ nel seguente modo: $a_0=a$, $b_0=b$ e dati $a_0, a_1, \dots, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_n$ sia

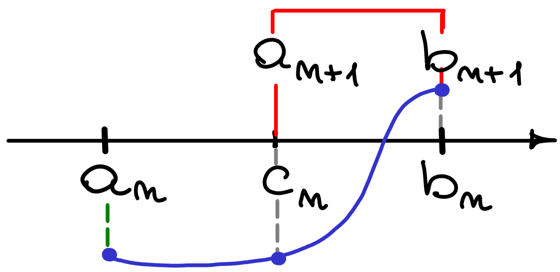
$$c_n=\frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{PUNTO MEDIO di } [a_n,b_n]$$

Abbiamo 3 casi possibili (ed esclusivi).

1) Se $f(c_n)=0$ allora $x_0=c_n$ e abbiamo finito.

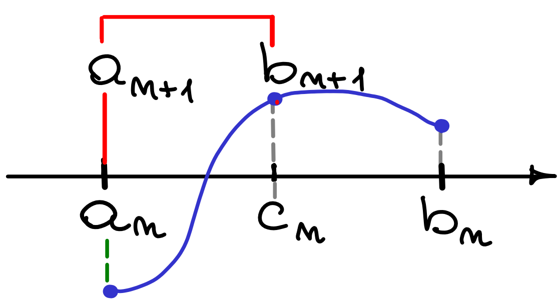
2) Se $f(c_n)<0$ allora poniamo

$$a_{n+1}=c_n \quad e \quad b_{n+1}=b_n$$




3) Se $f(c_n)>0$ allora poniamo

$$a_{n+1}=a_n \quad e \quad b_{n+1}=c_n$$




Se 1) non si verifica mai, $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono tali che

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad a_n \underset{\{a_n\}\text{ è crescente}}{\leq} a_{n+1} \overset{\{a_n\}\text{ è sup. limitata}}{<} b \quad e \quad a \underset{\{b_n\}\text{ è inf. limitata}}{<} b_{n+1} \overset{\{b_n\}\text{ è decrescente}}{\leq} b_n$$

e quindi convergono entrambe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n, n\geq 0\} = A$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{a_n, n\geq 0\} = B$$
con $a \leq A \leq B \leq b$

Inoltre al passo n-simo l'intervallo $[a,b]$ è stato diviso a metà n volte e quindi

$$B - A \xleftarrow{n\to\infty} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies B = A$$

Chiamiamo questo valore comune $x_0$ e verifichiamo che $f(x_0)=0$.

Dato che $f$ è continua in $x_0 \in [a,b]$,

$$a_n \to x_0 \implies \overbrace{f(a_n)}^{<0} \to f(x_0) \leq 0$$

permanenza del segno

$$b_n \to x_0 \implies \underbrace{f(b_n)}_{>0} \to f(x_0) \geq 0$$

Così $0 \leq f(x_0) \leq 0$ ossia $f(x_0) = 0$. $\square$

**TEOREMA** (DEI VALORI INTERMEDI)

Se $f$ è una funzione continua in $[a,b]$ e $y_0$ è un valore compreso strettamente tra $f(a)$ e $f(b)$ allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = y_0$.

OSSERVAZIONE

Se $f$ è una funzione continua in un intervallo $I$ allora l'insieme immagine $f(I)$ è ancora un intervallo.

ESEMPIO

Contare il numero di soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni:

1) $2^x = \operatorname{sen}(\pi x)$
2) $\operatorname{arcsen}(2^x) = \pi x$

L'equazione 1) ha infinite soluzioni.

Sia $f(x) = 2^x - \operatorname{sen}(\pi x)$. $f$ è continua in $\mathbb{R}$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f(-2n) = 2^{-2n} - 0 > 0$$
$$f\left(-2n+\tfrac{1}{2}\right) = 2^{-2n+\frac{1}{2}} - 1 < 0$$

e per il teorema degli zeri $\exists\, x_n \in \left(-2n, -2n+\tfrac{1}{2}\right)$ tale che $f(x_n) = 0$.

L'equazione 2) non ha soluzioni.

Sia $f(x) = \operatorname{arcsen}(2^x) - \pi x$. $f$ è continua in

$$D = \{x : 2^x \in [-1, 1]\} = (-\infty, 0].$$

Inoltre $\forall x \leq 0$,

$$f(x) = \underbrace{\operatorname{arcsen}(\overset{>0}{2^x})}_{>0} + \underbrace{(-\pi x)}_{\geq 0} > 0.$$

$f$ non si annulla MAI!