

MATEMATICA DISCRETA

- Prof. F. Brenti
- Studio: 12/13
- Tel. +4671
- Ricavamento: ME 16-17 (o su Appuntamento) (online
su TEAMS)
- e-mail: BRENTI@MAT.UNIROMA2.IT
- www.MAT.UNIROMA2.IT
- TESTO: VEDI PAGINA DEL CORSO

CONSIGLIATI: G.M. PIACENTINI CATTANEO, MATEMATICA
DISCRETA, ZANICHELLI, 2008

S. LIPSCHUTZ, H.L. LIPSON, DISCRETE MATHEMATICS,
SCHAUM, 2009

- ESAME: SCRITTO + ORALE (DETtagli, dopo)
- MATEMATICA ϕ : in TUTTI QUI SCRITTI
(INCORRETTA \rightarrow NON AMMESSO ALL'ESAME)
$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\ln(x) < e^{x-2}$$

ORE
1-4

ESERCIZI GRADUATI (5), (6), (3)

10-20
MIN

20-60
MIN

- ES. ONE: NON CI SONO ESONERI

↔ = -

PREAMBOLI: ◊ COS'E' LA MATEMATICA?

- ES. 1: WIMBLEDON

128 GIOCATORI, ELIMINAZIONE DIRETTA

64 +

DOMANDA: QUANTE PARTITE VENGONO

GIOCATE IN TOTALE?

64 + 32 + ... + 2 + 1

D'ALTRA PARTE: OGNI PARTITA HA ESATTAMENTE 1 PERDENTE

MENTE 1 PERDENTE, E OGNI GIOCATORE
(TRANNE IL VINCITORE) PERDE 1 E 1
SOLA VOLTA

⇒

PARTITE = # PERDENTI

$$128 - 1 = 127$$

ES. 8: i TEST SEROLOGICI condotti

DAL GOVERNO ITALIANO in ESTATE
SI SAPA CHE CI SONO $\approx 0,5$ MILIONI
di PERSONE (in ITALIA) CHE HANNO
COVID, E SONO ASINTOMATICHE.

POPOLAZ. ITALIANA ≈ 60 M.

DOMANDA: in un GRUPPO di 110

PERSONE, QUALE' È LA PROBABILITÀ
CHE ci sia ALMENO UNA PERSONA
CON COVID E ASINTOMATICA?

VEDREMO NEL CAP. 4, CHE QUESTA
PROBABILITÀ È 0,64

CAPITOLO 1. TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1 INSIEMI

TUTTO IN MATEMATICA È UN INSIEME.
LA MATEMATICA PRENDE COME CONCETTI
FONDAMENTALI I SEGUENTI:

INSIEME, ELEMENTO, APPARTENENZA
INTUITIVAMENTE: UN INSIEME E' UNA COLLE-
ZIONE DI OGGETTI, Detti ELEMENTI,
APPARTENENTI ALL'INSIEME)

SOLITAMENTE SI SCRIVE UN INSIEME
ELENCAENDO GLI ELEMENTI, SEPARATI DA
VIRGOGLIE E RACCHIUSI DA PARENTESI
GRAFFIATE.

E.g. $A = \{1, 2, 5\}$

OSS. UN INSIEME PUÒ ESSERE ELEMENTO
DI UN ALTRO INSIEME

E.g.

$$\{1, 3, 5, 2, 3\} \subset \{3, 6\}$$

OSS. IN UN INSIEME L'ORDINE NON
CONTA

E.g.

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$$

OSS. IN UN INSIEME NON CI SONO
REPETIZIONI

E.g. $\{1, 2, 2\}$ NON E' UN INSIEME.

SCRIVIAMO

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}$$

PER DIRE CHE A E' UN INSIEME SCRITTO
A DESTRA. SCRIVIAMO

$x \in A$ SE X E' ELEMENTO DI A

$x \notin A$ " " NON E' " "

NOTAZIONI:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots\} \quad (\mathbb{N})$$

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3\}$$

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b\}$$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$$

SE $a \in Z$ allora

$$[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, a-1, a\}.$$

DEF L'insieme che non ha elementi

si dice insieme vuoto, scritto

\emptyset .

Quindi $\emptyset = \{\}$.

1.2 OPERAZIONI TRA INSIEMI

SCRIVIAMO $A = B$ (A, B insiem)

PER DIRE CHE A e B HANNO GLI STESSI ELEMENTI.

SI ANO A, B INSIEMI.

DEF. A E' INCLUSO in B (\circ E' un SOTTO-INSIEME di B) SE OGNI ELEMENTO di A E' ANCHE ELEMENTO di B .

SCRIVIAMO $A \subset B$.

NOTAZIONE.

$A \cap B$

SIGNIFICA

$A \cap B$
e

$A \neq B$

OSS. $A \cap B$ e $B \cap C \rightarrow A \cap C$.

DEF. L'INTERSEZIONE DI A E B E'

$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : x \in B\}$
 \uparrow
(TALE CHE)

DEF. L'UNIONE DI A E B E'

L'INSIEME, SCRITTO $A \cup B$, CHE HA COME ELEMENTI, TUTTI GLI ELEMENTI DI A E TUTTI GLI ELEMENTI DI B.

PROP 1.2.1 A, B, C INSIEMI. Allora:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (\text{PROP.})$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (\text{ASSOCIAZIONE})$$

DIM. OMESSA. \square

ES. [1]: A, B INSIEMI.

$$A \cup B = A \cap B \quad ?? \quad A \cap B ?$$

OSS.

$$A \sqsubseteq B$$

$$\begin{array}{c} A \sqsubseteq B \\ \Leftrightarrow \\ B \sqsubseteq A \end{array}$$

PROP. I.2.2: A, B, C insiemi: ACCORDO:

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (PROP.)

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; DISTRIBU.
TIVE

DIM: i)

SIA $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$.

SE $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Se $x \in C$ $\vee x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$.

VICEVERSA. Si: $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow$

$x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Se $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. Se $x \in A \cap C \Rightarrow$

$x \in A$ e $x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow$

$x \in A \cap (B \cup C)$.

ii) SIMILE. \square

E.s.

S'IA

$\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{ A : A \notin A \}$

(E.g. $\emptyset \in \mathcal{R}$) ($\emptyset \notin \emptyset$)

DOMANDA: $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?

- se $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$

- se $\mathcal{R} \notin \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{R}$

DEF. DI
 \mathcal{R}

il paradosso si evita se assumiamo
che tutti gli insiemi che consideriamo
siano sottinsiemi di un insieme
universo, il

sia A insieme.

DEF. IL COMPLEMENTARE DI A è

A^c $\{x \in U : x \notin A\}$

(si scrive anche (A))

PROP. DISTRIBUTIVA:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

SIA $x \in U$, ALLORA

$$\begin{array}{c} \circ \quad x \in A \quad \circ \quad x \notin A \\ \circ \quad x \in B \quad \circ \quad x \notin B \\ \circ \quad x \in C \quad \circ \quad x \notin C \end{array}$$

\Rightarrow 8 POSSIBILITA'.

TAVOLE DI VERITA'

A B C B ∪ C A ∩ B A ∩ C A ∩ (B ∪ C)

1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

LE COLONNE CORRISPONDENTI

sono uguali \Rightarrow

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

PROP. 1.2.3: A, B INSIEMI. ALLORA:

i)

$$(A \cap B)' = (A') \cup (B') \quad (\text{LEGGI DI DE MORGAN})$$

ii)

$$(A \cup B)' = (A') \cap (B') \quad (\text{MORGAN})$$

DIM: OSIAMO LE TAVOLE DI VERITÀ.

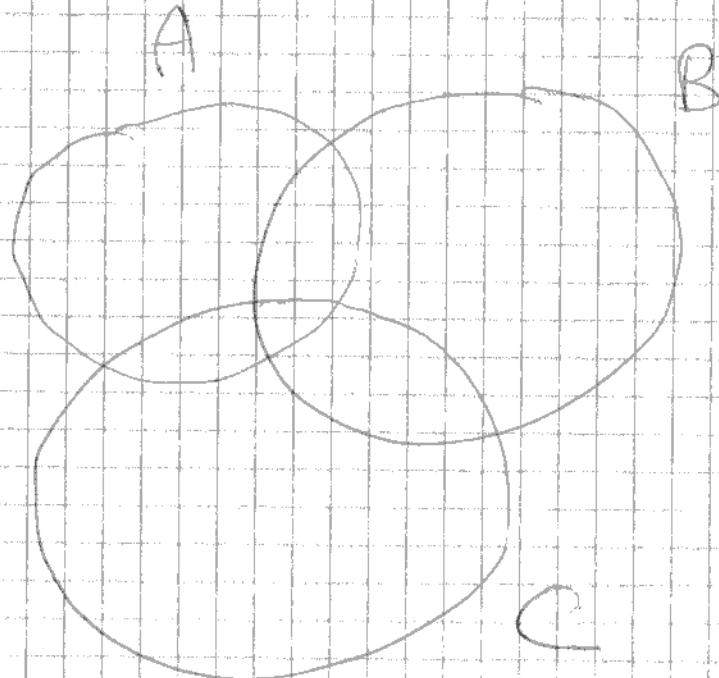
Es. T17. E

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	A'	B'	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$(A') \cap (B')$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0

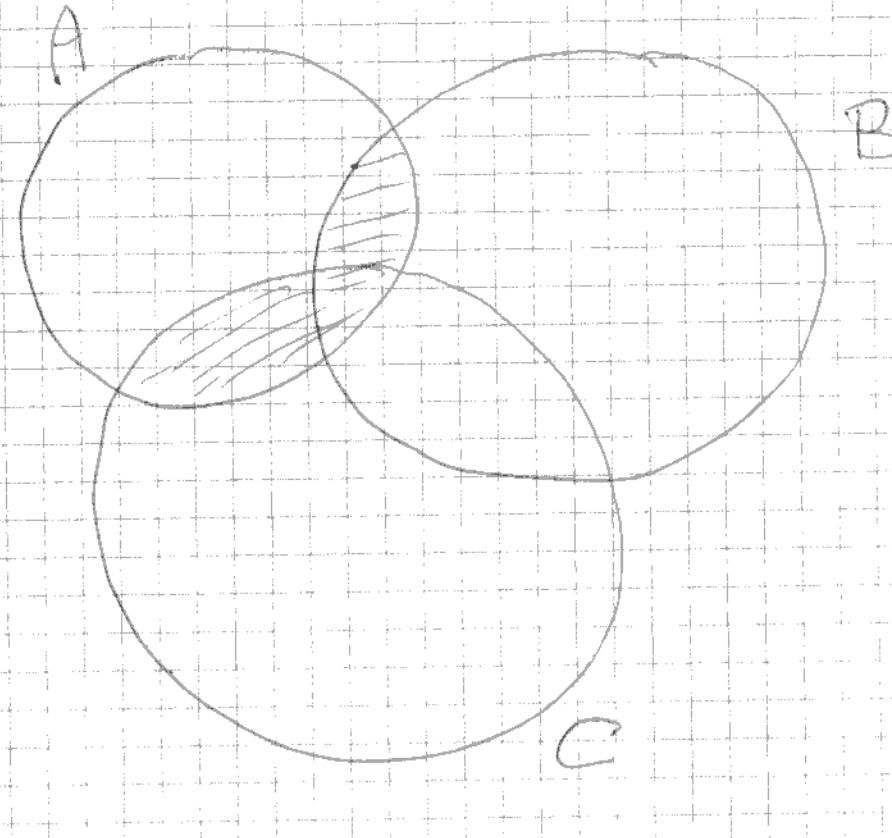
DIAGRAMMI DI VENN.

SI RAPPRESENTA OGNI INSIEME
CON I PUNTI RA CHIUSI DA UNA
CURVA.

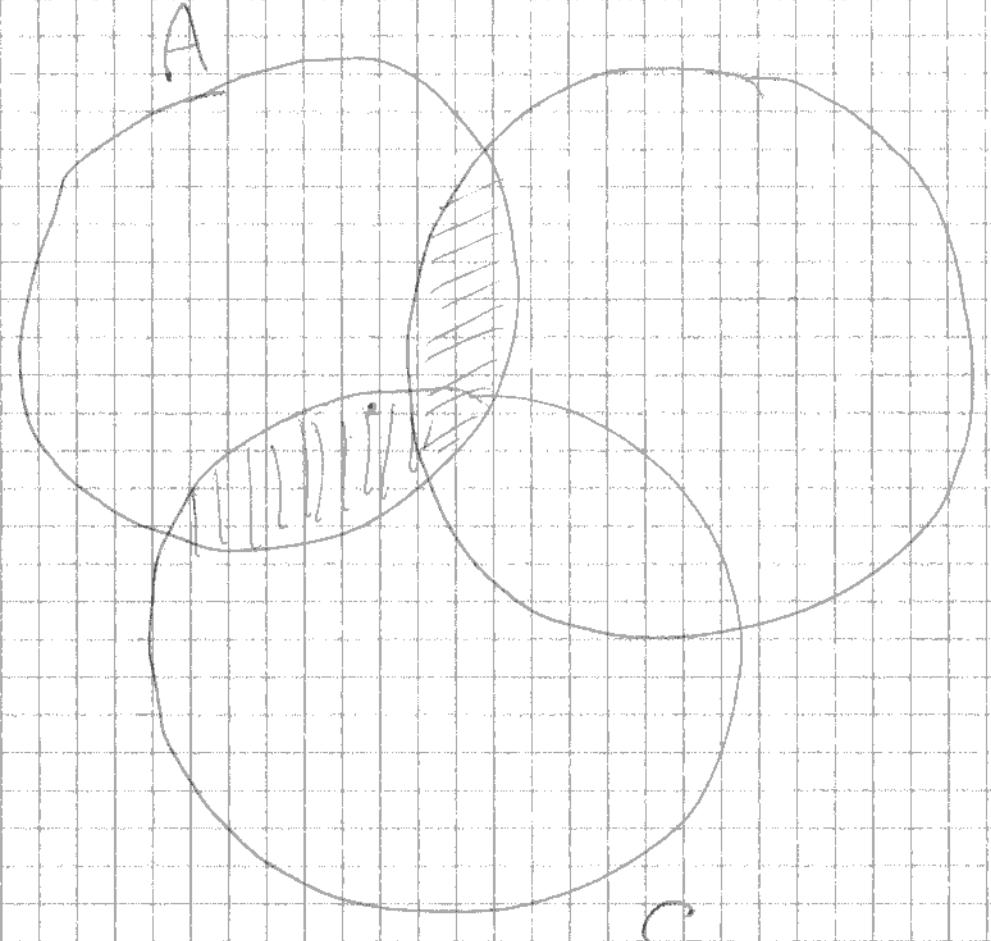
E.g.



PROP. DI STRIBUITIVA:



$$A \cap (B \cup C)$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

OSS.

TAVOLA DI VERITA': DIMOSTRA (NON
AIUTA L'INTUIZIONE)

DIAGRAMMA DI VENN: AIUTA
L'INTUIZIONE (NON DIMOSTRA)

~~DIMOS~~ RAGIONAMENTO: DIMOSTRA
(HA BISOGNO DELLA INTUIZIONE)

A, B INSIEMI

DEF. LA DIFFERENZA TRA A E B È

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

DEF. LA DIFFERENZA SIMMETRICA DI

A E B

E'

$$A \Delta B \stackrel{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

DEF: IL PRODOTTO CARTESIANO DI A E B È

B E

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

coppia ordinata

$$(= \{a, \{a, b\}\})$$

E.g.

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

SIMILMENTE, SE A, B, C SONO
INSIEMI, ALLORA

$$A \times B \times C \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

ETC.

(SEMPRE VERO)

E S. [2]: E' VERO CHE

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) ?$$

X	A	B	$A \cap B$	$X \setminus (A \cap B)$	$X \setminus A$	$X \setminus B$	$(X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

ES. [1]. A, B, C INSIEMI, CON,

C ⊂ A. E' VERO CHE

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

? 2

ES. [2]: CHE E'

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$$

? 2

A INSIEME.

DEF. L' INSIEME DELLE PARTI DI A

(o insieme potenza) è

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{B : B \subseteq A\}.$$

PROP. 1.2.3 A, B, C insiem. Allora

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Ora, sia $(x, y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A$

e $y \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ e $y \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).$

VICEVERSA. SIA $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times B \text{ e } (x, y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$

$\text{e } y \in B \text{ e } x \in A \text{ e } y \in C \Rightarrow x \in A \text{ e }$

$y \in B \cap C \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cap C). \square$

PROBLEMA SAT. DATE DUE FORMULE

COMPOSTE DA UN NUMERO FINITO

O INSIEMI, A E U, DECIDERE

SE SONO UGUALI COME (INSIEMI,

IN UN TEMPO

"RAGIONEVOLI"

1.3 APPLICAZIONI TRA INSIEMI

A, B INSIEMI. UNA APPLICAZIONE

DA A IN B È UNA LEGGE CHE

ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO UNICO

ELEMENTO $b \in B$.

DEF. UNA APPLICAZIONE (o FUNZIONE o MAPPA) $f: A \rightarrow B$ è UN SOTTOINSIEME
 $f \subseteq A \times B$ TALE CHE PER OGNI $a \in A$
ESISTE UN UNICO $b \in B$ TALE CHE
 $(a, b) \in f$ (SCRIVIAMO $f(a) = b$).

Sia $f: A \rightarrow B$.

DEF. f è SURGETTIVA SE PER
OGNI $b \in B$ ESISTE $a \in A$ TALE CHE

$$f(a) = b.$$

DEF. f è INIEZTIVA SE

$$\begin{array}{l} x, y \in A \\ x \neq y \end{array} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

DEF. f È BIONIVOCA SE f è INIETTIVA E f è SURGETTIVA.

SIANO A, B, C INSIEMI e

$$f: A \rightarrow B \quad \text{e} \quad g: B \rightarrow C$$

DEF. LA composizione di f e g è

$g \circ f: A \rightarrow C$ DEFINITA PONENDO

$$(g \circ f)(a) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(a)),$$

PER OGNI $a \in A$.

NOTAZIONI:

\forall SIGNIFICA "PER OGNI"

\exists SIGNIFICA "ESISTE"

$\exists !$ "ESISTE UN UNICO"

PROP. 1.3. | A, B, C insiemi, $f: A \rightarrow B$,

$g: B \rightarrow C$. ALLORA:

- i) $f \circ g$ INIETTIVA $\Rightarrow g \circ f$ INIETTIVA
- ii) $f \circ g$ SORIETTIVA $\Rightarrow g \circ f$ SORIETTIVA
- iii) $f \circ g$ BIONIVOCHE $\Rightarrow g \circ f$ BIONIVOCHE.

DIM. i) SIANO $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow$ POICHÉ'

f è INIETTIVA $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$. MA g è

INIETTIVA $\Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

ii) SIA $c \in C \Rightarrow$ POICHÉ' g È' SURIETTIVA

$\Rightarrow \exists b \in B$ tale che $g(b) = c$. Ma f È'
SURIETTIVA $\Rightarrow \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Quindi $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

iii) SEGUE DA ii) E' CO). \square

ES. [1+]: QUANTE FUNZIONI $f: [3] \rightarrow [4]$

E' SONO CHE SONO INIETTIVE?

(RISPOSTA: 24)

ES. [1+]: QUANTE FUNZIONI $f: [4] \rightarrow [3]$

ci sono che sono suriettive?

(RISPOSTA: 36).

A, B insiemi, $f: A \rightarrow B$, f Biunivoca.

DEF. L'INVERSA di f è $f^{-1}: B \rightarrow A$ DEFINITA

ponendo

$$f^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$$

OSS: QUINDI

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

DEF. LA FUNZIONE IDENTITÀ SU A è

$I_A : A \rightarrow A$ ($\circ I_A, \circ I, \circ 1$) DEFINITA

PONENDO

$$I_A(a) \stackrel{\text{def}}{=} a$$

$\forall a \in A$.

PROP. 1.3.2: A INSIEME, $f: A \rightarrow A$, $g: A \rightarrow A$,

$h: A \rightarrow A$. ALLORA:

i) $f \circ g: A \rightarrow A$,

ii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f \circ (g \circ h))(a) = f((g \circ h)(a)) = f(g(h(a)))$$

MENTRE

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$$

✓

iii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

MENTRE

$$(I_A \circ f)(a) = I_A(f(a)) = f(a) \quad \checkmark$$

$$\text{ii)} \quad f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h ;$$

$$\text{iii)} \quad f \circ I_A = I_A \circ f = f ;$$

$$\text{iv)} \quad f \text{ BIUNIVOCA} \rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A .$$

Ditt. ii) E' CHIARO.

~~ii)~~

OSS. DATE $f, g: A \rightarrow B$ si dice CHE $f \neq g$

SONO UGUALI (SCRITTO $f=g$) SE

$$f(a) = g(a) \quad \forall a \in A .$$

iv) SIA f BIUNIVOCÀ E $a \in A$. ALLORA

~~per def.~~

$$(f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a))$$

$$\text{SIA } b \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(a) \Rightarrow f(b) = a \Rightarrow$$

$$f(f^{-1}(a)) = a \Rightarrow (f \circ f^{-1})(a) = a = I_A(a)$$

✓

SIMILMENTE

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)).$$

$$\text{SIA } c \stackrel{\text{def}}{=} f(a) \Rightarrow f^{-1}(c) = a \Rightarrow$$

$$f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(a) = a = I_A(a). \square$$

ESEMPIO E CONTROESEMPIO:

ESEMPIO: NON DIMOSTRA

CONTROESEMPIO: DIMOSTRA CHE NON E' SEMPRE
VERO.

E.g. CONSIDERIAMO L'ENUNCIATO

"OGNI PRIMO E' DISPARI" (P1)

ESEMPIO: 3 E' PRIMO ED E' DISPARI

CONTROESEMPIO: \exists E' PRIMO ED E' PARI
 $(\Rightarrow (P \wedge) E' FALSA).$

Sia $m \in \mathbb{P}$. Poniamo

$S_m \stackrel{\text{def}}{=} \{ f : [m] \rightarrow [m], f \text{ bivoca} \}$

(S_m E' il GRUPPO SIMMETRICO)

Sia $f \in S_n$
SCRIVIAMO

$$f = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m$$

PER DIRE CHE

$$f(1) = \alpha_1, f(2) = \alpha_2, \dots, f(n) = \alpha_m$$

E.g.

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

OSS. SE $f, g \in S_m$, $f = a_1 \dots a_{m-1}$

$g = b_1 \dots b_m$ AURORA

$$f \circ g = a_1 a_2 \dots a_m$$
$$\quad \quad \quad b_1 \quad b_2 \quad \quad \quad b_m$$

E.g. $f = 7153426$ $g = 6712534$
 $(m=7)$

$$\Rightarrow f \circ g = 2671453$$

CSS. SE $f \in S_m$, $f = e_1 \dots e_m$ ALLORA

$f^{-1} = b_1 \dots b_m$ DOVE b_i E' LA

POSIZIONE DI e_i IN $e_1 \dots e_m$.

E.g. $m=7$, $f = 5132647$ ALLORA

$$f^{-1} = 2436157$$

IN EFFETTI

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{smallmatrix}$$

$$5132647 \circ 2436157 = 1234567$$

$$2436157 \circ 5132647 = 1234567 \quad \checkmark$$

DEF. Gli elementi di S_m si dicono
PERMUTAZIONI.

A, B INSIEMI, $f: A \rightarrow B$.

sia $x \in A, y \in B$.

DEF. L'IMMAGINE di x MEDIANTE f

$$\text{e } f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(e) : e \in x\}.$$

DEF. LA CONTRARIO IMMAGINE (o
RETROIMMAGINE) DI Y MEDIANTE

f^{-1}

$$f^{-1}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

OSS. $f^{-1}(Y)$ E' DEFINITA ANCHE
SE f NON E' BIUNIVOCA.

E.g. $A = [3]$, $B = [2]$,

$f: A \rightarrow B$ TRUE CHE

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2.$$

$y = 322$. ALLORA

$$f^{-1}(y) = 1, 2, 3.$$

PROP. 1.3.3: A, B insiemi, $f: A \rightarrow B$,

$x, y \in B$. ALLORA:

i) $f^{-1}(x \cap y) = f^{-1}(x) \cap f^{-1}(y)$

ii) $f^{-1}(x \cup y) = f^{-1}(x) \cup f^{-1}(y)$

DIH.

c) Sia $a \in f^{-1}(x \cap y) \Rightarrow f(a)$

$\in x \cap y \Rightarrow f(a) \in X \text{ e } f(a) \in Y$

$\Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X) \wedge \alpha \in f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y).$

VICEVERSA, SIA $\alpha \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X) \wedge \alpha \in f^{-1}(Y) \Rightarrow$

$f(\alpha) \in X \wedge f(\alpha) \in Y \Rightarrow f(\alpha) \in$

$X \cap Y \Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X \cap Y).$

ii) ANALOGO. \square

ES. [1+]: A, B insiemi, $f: A \rightarrow B$.

DIMOSTRARE CHE

$$f(f^{-1}(B)) = B \Leftrightarrow f \text{ è suriettiva.}$$

1.4 RELAZIONI

A insieme

DEF. UNA RELAZIONE SU A

E' UN SOTTOINSIEME $R \subseteq A \times A$.

SCRIVIAMO $\alpha R b$ PER DIRE CHE

$(\alpha, b) \in R$ ($\alpha, b \in A$) (LETTO " α E'
IN RELAZIONE CON b ")

SIA R UNA RELAZIONE SU A .

DEF.

i) R E' RIFLESSIVA SE

$\alpha \in A \Rightarrow \alpha R \alpha (\Leftrightarrow (\alpha, \alpha) \in R)$

ii) $R \in' \underline{\text{SIMMETRICA SE}}$

$$aRb \Leftrightarrow \cancel{bRa}$$

$(\forall a, b \in A)$

iii) $R \in' \underline{\text{TRANSITIVA SE}}$

$$aRb \\ bRc \Rightarrow aRc$$

$(\forall a, b, c \in A)$

DEF. R E' UNA RELAZIONE DI
EQUIVALENZA SE E' RIFLESSIVA,
SIMMETRICA E TRANSITIVA.

E.g. $A = [5]$, $R = \{(1,1), (2,2),$
 $(4,4), (5,5), (1,2), (2,3), (1,3), (3,2)\}$
 $(\subseteq A \times A)$. ALLORA R NON E'
RIFLESSIVA, PERCHE' ~~(3,3) $\notin R$~~ .

INOLTRE R NON E' SIMMETRICA
PERCHE'

$(1,2) \in R$ MA $(2,1) \notin R$.

$(\Rightarrow R$ NON E' DI EQUIVALENZA)

SIA R UNA RELAZIONE DI
EQUIVALENZA SU A . SIA $a \in A$.

DEF. LA CLASSE DI EQUIVALENZA

di a è E_a

$$[\alpha] = \{b \in A : \alpha R b\}.$$

PROP. 1.4.1.: R RELAZIONE DI EQUIVALENZA

LENZA SU A . SIANO $\alpha, b \in A$. ALLORA $\alpha [\alpha] = [b] \quad \text{e} \quad [\alpha] \cap [b] = \emptyset$.

DIM. SUPPONIAMO CHE $[\alpha] \cap [b] \neq \emptyset$.

SIA $c \in [\alpha] \cap [b]$. ALLORA $c R \alpha$

e $c R b$. MA R E' SIMMETRICA

$\Rightarrow \alpha R c \in cRb, \text{MA RE' TRANSITIVA} \Rightarrow \alpha R b (\Rightarrow bR\alpha).$

Sia $x \in [a] \Rightarrow xR\alpha, \text{MA } \alpha R b$

$\Rightarrow xRb \Rightarrow x \in [b], \text{ VICEVERSA.}$

(TRANSITIVA) $(bR\alpha)$

Sia $y \in [b] \Rightarrow yRb \stackrel{(bR\alpha)}{\Rightarrow} yR\alpha \Rightarrow y \in [a]. \square$

i) $B_i \subseteq A$ ($\forall i = 1, \dots, k$)

ii) $B_i \neq \emptyset$ ($\forall i = 1, \dots, k$)

iii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$

iv) $\forall 1 \leq i < j \leq k \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

B_1, \dots, B_k si dicono i BLOCCHI DELLA

PARTIZIONE π e si dice CHE π HA

k BLOCCHI.

ES. [1]: QUANTE RELAZIONI DI EQUIVALENZA ci SONO su [3] ?
(RISPOSTA: 5).

SIA A INSIEME.

DEF. UNA PARTIZIONE (o PARTIZIONE INSIEMISTICA) di A È UN INSIEME $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ TALE CHE:

E.g. $A = [8]$ ALLORA

$$\pi = \left\{ \{1, 3\}, \{4\}, \{2, 5, 7\}, \{6, 8\} \right\}$$

È UNA PARTIZIONE DI A IN 4 BLOCCHI.

1.4.2

CORSIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. ALLORA LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI R SONO UNA PARTIZIONE DI A.

Di M.: SIA $\alpha \in A \Rightarrow [\alpha] \neq \emptyset$ (PERCHE'

$\alpha \in [\alpha]$). INOLTRE $\bigcup_{\alpha \in A} [\alpha] = A$

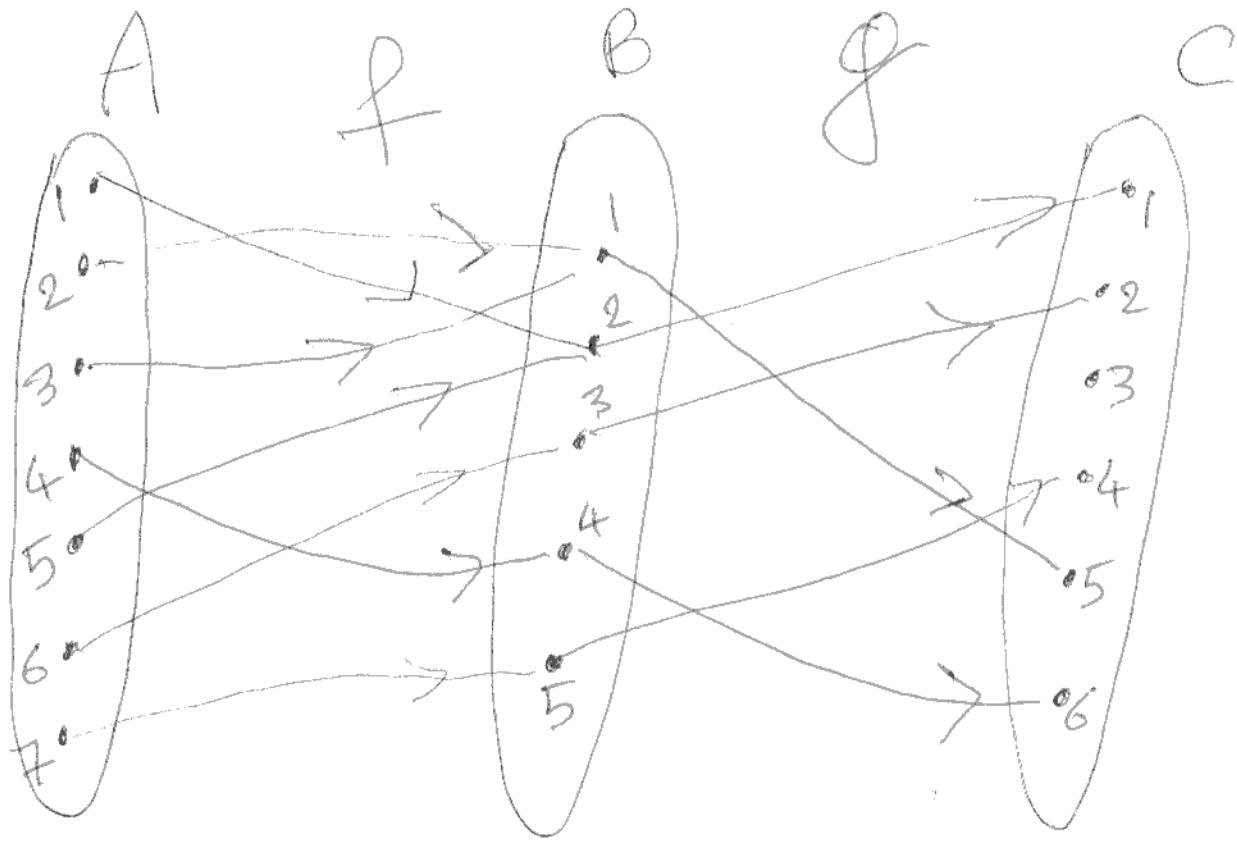
(SE $x \in A \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in A} [\alpha]$).

SEGUE QUINDI DA 1.4.1. \square

ES. 5: $f, g: A \rightarrow B$, $\forall f$ ASSORBIUTIVA,
 g INIETTIVA. ALLORA

$g \circ f$ INIETTIVA ?

VEDIAMO:



Sia $A = \{7\}$, $B = \{5\}$, $C = \{6\}$,

$f: A \rightarrow B$ DEFINITA DA

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 4$$

$$f(5) = 2, f(6) = 3, f(7) = 5 \text{ e}$$

g DEFINITA DA:

$$g(1) = 5, g(2) = 1, g(3) = 2,$$

$$g(4) = 6, g(5) = 4$$

ACCORA F E' SURGETTIVA E
g E' INIETTIVA MA

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$$

$$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(2) = 1$$

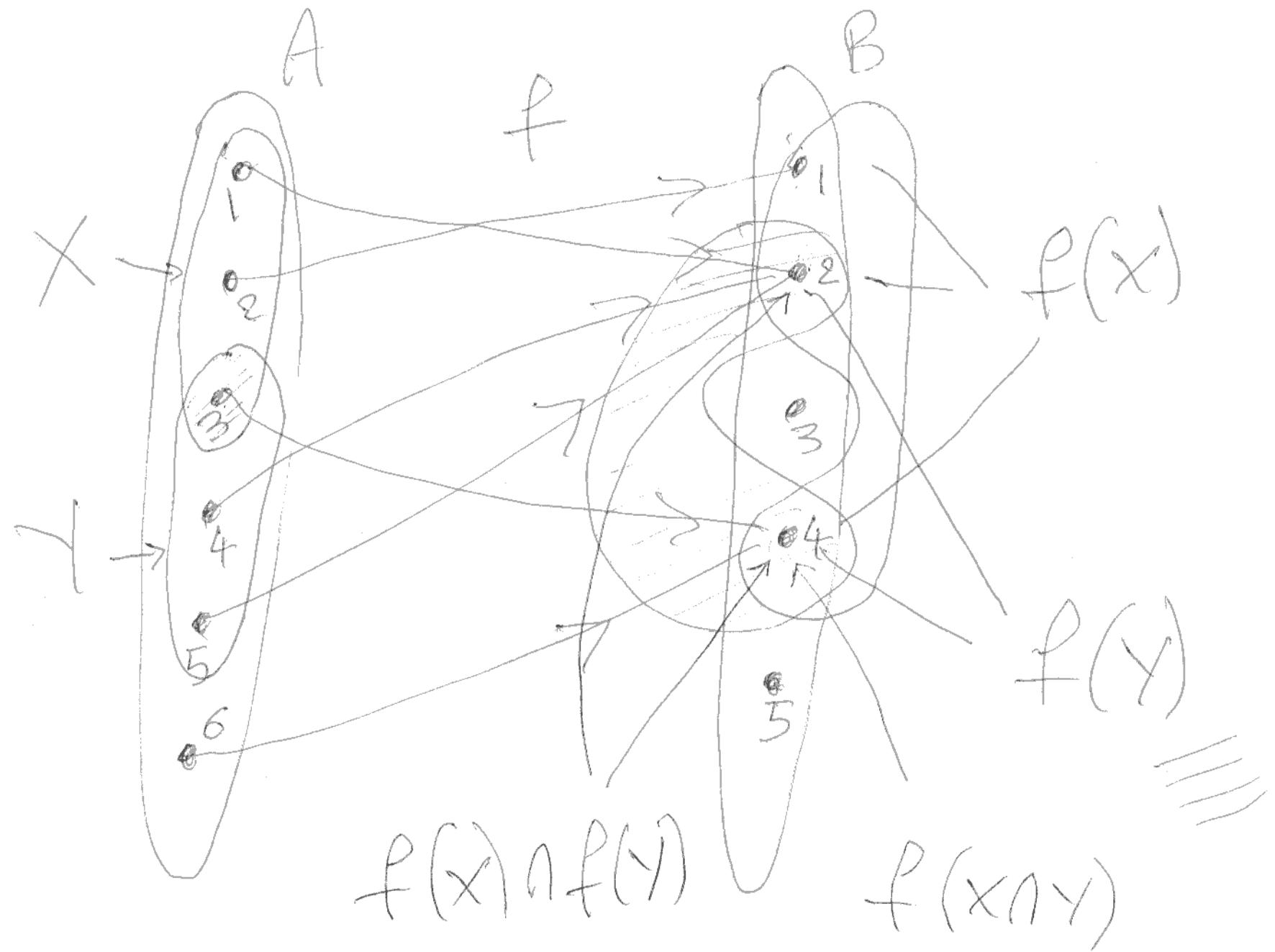
\Rightarrow g.f NON E' INIETTIVA
 \Rightarrow No.

ES.6: $f: A \rightarrow B$, $X, Y \subseteq A$.

E' VERO CHE

$$f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) ?$$

VEDIAMO:



QUINDI NO, ANCHE SE SEMBRA
CHE

$$f(x \wedge y) \subseteq f(x) \cap f(y).$$

COSTRUIAMO UN CONTROESEMPIO
DAL DISEGNO.

Sia $A = [6]$, $B = [5] \in f: A \rightarrow B$

DEFINITA DA

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4$$

$$f(4) = 2, \quad f(5) = 2, \quad f(6) = 4$$

E

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{3, 4, 5\}$$

ALLO RA

$$f(X) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 1, 4\}$$

$$f(Y) = \{f(3), f(4), f(5)\} = \{4, 2, 1\}$$

$$f(X \cap Y) = f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{4\}$$

$$f(X) \cap f(Y) = \{2, 4\}$$

\Rightarrow No.

DIMOSTRIAMO CHE

$$f(x \cap y) \subseteq f(x) \cap f(y).$$

SIA $a \in f(x \cap y) \Rightarrow \exists b \in x \cap y$

TALE CHE $f(b) = a$. MA $b \in x$

$\Rightarrow f(b) \in f(x) \Rightarrow a \in f(x)$. MA

$b \in y \Rightarrow f(b) \in f(y) \Rightarrow a \in f(y)$

$\Rightarrow \alpha \in f(x) \cap f(y)$. \square

E.S. 8: Chi è

$$(N \times Z) \cap (Z \times P) ?$$

Mi pare che sia

$$N \times P$$

VEDIAMO. SIA

$$(x, y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \Rightarrow$$

$$(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ e } (x, y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, \text{ e } x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{P}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathbb{P} \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}.$$

VICEVERSA. Si A $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}$
 $\Rightarrow x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{P} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ e
 $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ e
 $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{P} \Rightarrow (x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap$
 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{P}).$

ES. 9: $f: A \rightarrow B$, $X, Y \subseteq B$.

DIMOSTRARE CHE

$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y).$$

DIM. Si $a \in f^{-1}(X \setminus Y) \Rightarrow$

$$f(a) \in X \setminus Y \Rightarrow f(a) \in X \text{ e}$$

$$f(a) \notin Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X) \text{ e}$$

$\alpha \notin f^{-1}(Y) \Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

VICEVERSA. SIA $\alpha \in f^{-1}(X) \setminus$

$f^{-1}(Y) \Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X) \wedge \alpha \notin f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f(\alpha) \in X \wedge f(\alpha) \notin Y \Rightarrow$

$f(\alpha) \in X \setminus Y \Rightarrow \alpha \in f^{-1}(X \setminus Y)$. □

— o —

E.g. Sia $A = \mathbb{Z}$. Sia R la
RELAZIONE SU \mathbb{Z} DEFINITA
PONENDO

$$a R b \Leftrightarrow 3 | (b-a) \quad (cioè \exists k \in \mathbb{Z} \text{ TALE CHE } b-a = 3 \cdot k)$$

divide

$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ (cioè $b-a$ È MULTIPLO
DI 3) $\cancel{\forall}$

Quindi, per es. $2R5$ ha
 ~~$3R7$~~ .

Allora R è una relazione
di EQUIVALENZA. INFATTI,

sia $\alpha \in \mathbb{Z}$ allora $\alpha - \alpha = 0$

$\alpha - 0 = \alpha$ (INFATTI $0 = 3 \cdot 0$) \Rightarrow

$3 | \alpha - \alpha \Rightarrow \alpha R \alpha \checkmark$

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $aRb \Rightarrow$

$3 | (b-a) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ TALE CHE

$$b-a = 3 \cdot k \Rightarrow a-b = 3 \cdot (-k)$$

$\Rightarrow 3 | a-b$ (SE $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -k \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow bRa.$ QUINDI R È

SIMMETRICA.

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

$$aRb \text{ e } bRc \Rightarrow 3|b-a \text{ e } 3|c-b$$

$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $b-a=3 \cdot k$

$$\text{e } c-b=3 \cdot l \Rightarrow c-a=c-b+b-a$$

$$=3 \cdot l + 3 \cdot k = 3(l+k). \text{ MA } l+k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow 3|c-a \Rightarrow aRc$. QUINDI

R E' TRANSITIVA.

CHI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

$$[0] = \{a \in \mathbb{Z} : a R 0\} =$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 | (a - 0)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 | a\}$$

$$= \{3 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, -3, 6, -6, \dots\}$$

$$[1] = \{q \in \mathbb{Z} : qR1\}$$

$$= \{q \in \mathbb{Z} : 3 | (q-1)\}$$

$$= \{q \in \mathbb{Z} : q-1 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{3 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{1, -2, 4, -5, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{a \in \mathbb{Z} : a R 2\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-2)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : a-2 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{3 \cdot k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{2, -1, 5, -4, 8, \dots\}$$

IN GENERALE

$$[i] = \{3 \cdot k + i : k \in \mathbb{Z}\}$$

($i \in \mathbb{Z}$). QUINDI

$$[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \dots$$

$$[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \dots$$

$$[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \dots$$

QUINDI R HA 3 CLASSI DI EQUIVALENZA DISTINTE.

ES. [2-]: SIA R LA RELAZIONE

SU \mathbb{Z} DEFINITA PONENDO

$aRb \Leftrightarrow b-a \in \mathbb{Z}$ PARI
($\forall a, b \in \mathbb{Z}$). EQUIVALENZA ?

ES. [2]; @ SIA

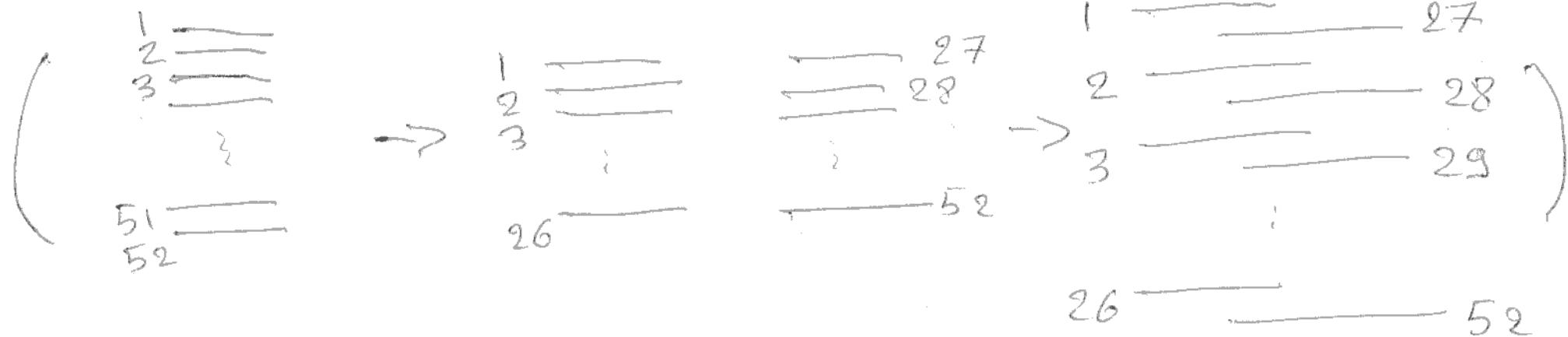
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 27 & 2 & 28 & 3 & 29 & \dots & 25 & 51 & 26 & 52 \end{pmatrix}$$

($\Rightarrow P \in S_{52}$). CALCOLARE IL

MINIMO $k \in \mathbb{P}$ TALE CHE

$$\underbrace{P^0 P^0 P^0 \dots P^0}_k = I_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 51 & 52 \end{pmatrix}_{[52]}$$

OSS. Q E' LA "SMAZZATA PERFETTA"



QUINDI E' IL MINIMO NUMERO
DI SMAZZATE PERFETTE DOPO LE
QUALI IL MAZZO TORNA NELL'ORDI-
NAMENTO INIZIALE

ES. 10. A, B, C INSIEMI.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) ?$$

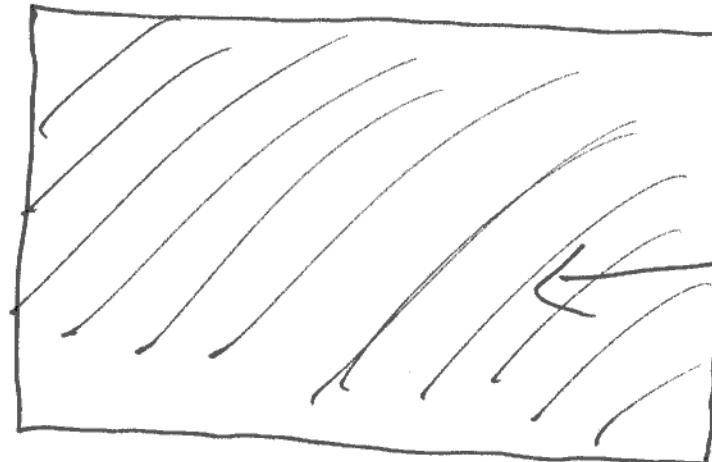
INTUIZIONE: POSSO USARE i

DIAGRAMMI DI VENN?

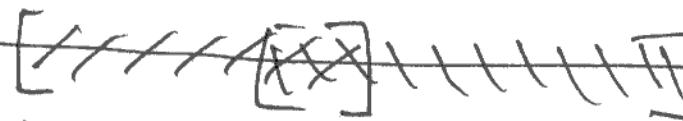
AVREI BISOGNO DI 4 DIMENSIONI...

MA A VOLTE SI PUÒ FARE

$A = \{ \}$



$A \times (B \cup C)$



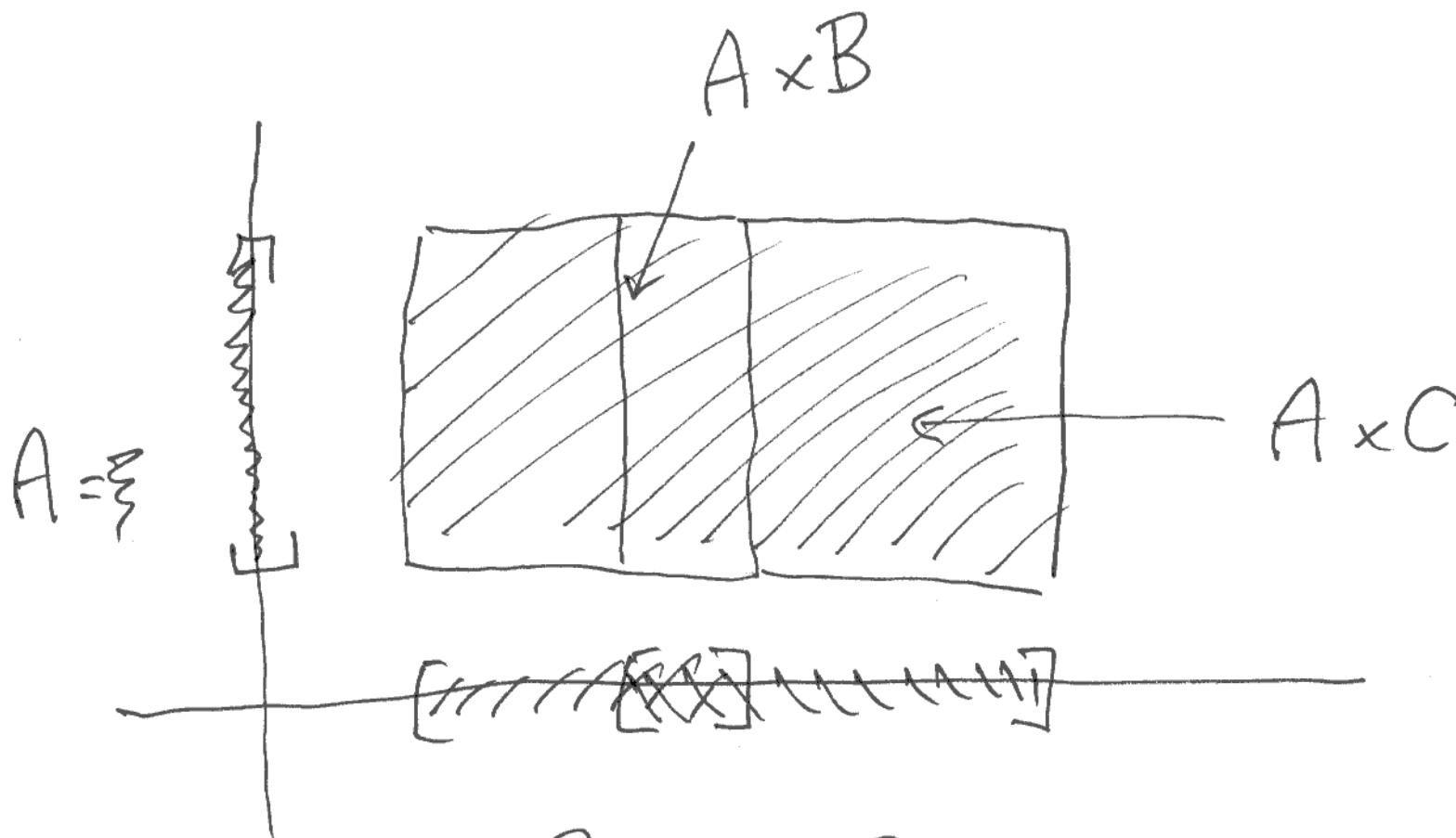
$B \cup C$

$B = \{ \}$

$C = \{ \}$

$A \times (B \cup C)$

DIAGRAMMA DI VENN:



$$B = \{/ / / \} \quad C = \{/ / / \}$$

$$(A \times B) \cup (A \times C)$$

SEMbra di sì.

DIMOSTRIAMO. SIA $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ e $y \in B \cup C$. SE $y \in B \Rightarrow$

$(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

SE $y \in C \Rightarrow (x, y) \in A \times C \Rightarrow (x, y) \in$

$(A \times B) \cup (A \times C)$.

VICEVERSA. SIA $(x, y) \in (A \times B) \cup$

$\cup(A \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times B \rightarrow (x, y) \in A \times C$. SE $(x, y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$.

SE $(x, y) \in A \times C \Rightarrow x \in A \wedge y \in C$
 $\Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cup C)$. □

POSSO USARE LE TAVOLE
Di VERITÀ?

Si, MA CON ATTENZIONE.

SOLUZ. 2 (NOT RECOMMENDED)

$x \in A$ $y \in B$ $y \in C$ $y \in B \cup C$ $(x, y) \in A \times B$ $(x, y) \in A \times C$ $(x, y) \in A \times (B \cup C)$

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$(A \times B) \stackrel{(x_i)_n}{\cup} (A \times C)$ LE COLONNE CORRISpondenti A

|
|
|
o
o
o
o
o

$A \times (B \cup C)$ e

$(A \times B) \cup (A \times C)$ SONO
UGUALI \Rightarrow SI, E'
SEMPRE VERO. \square

ES. 11: QUANTE $f: [3] \rightarrow [4]$ ci SONO CHE SONO INIETTIVE?

Sia $f: [3] \rightarrow [4]$. ALLORA ci SONO 4 POSSIBILITA' PER $f(1)$, QUINDI ci SONO 3 POSSIBILITA' PER $f(2)$ (PERCHE' $f(1) \neq f(2)$),

E QUINDI CI SONO 2 POSSIBILITÀ
PER $f(3)$ (PERCHÉ $f(3) \neq f(1)$ e
 $f(3) \neq f(2)$). PERTANTO, IN TUTTO
TALE, CI SONO $4 \times 3 \times 2 = 24$
TALI FUNZIONI f .

ES. 12: SIANO A, B, C INSIEMI,

TALI CHE $C \subseteq A$. E' VERO CHE

$$\textcircled{a} (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) ?$$

INTUIZIONE (VENN): SEMBRA VERO.

DIM. SIA $x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow$

$x \in A \cap B$ o $x \in C$. SE $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. SE $x \in C$

$\Rightarrow x \in B \cup C \wedge x \in A$ (PERCHE'
 $C \subseteq A$) $\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

VICEVERSA. SIA $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$. SE $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$.

SE $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$. \square

OSS. NON SI USA " $C \subseteq A$ " NEL
VICEVERSA.

POSso USARE LE TAVOLE Di
VERITA`?

Si, CON ATTENZIONE
VEDIAMO

A	B	C	$A \wedge B$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0

→ 0	+	+			
0	1	0	0	1	0
→ 0	0	+			
0	0	0	0	0	0

CASI IMPOSSIBILI PERCHE'
 $C \subseteq A$

$$(A \cap B) \cup C$$

1
1
0
0
0

LE COLONNE
CORRISPONDENTI
SONO UGUALI
 \Rightarrow
 $(A \cap B) \cup C$ e
 $A \cap (B \cup C)$ SONO
UGUALI (SE $C \subseteq A$). □

ES. 13: SIA R LA RELAZIONE SU \mathbb{Z}

DEFINITA PONENDO

$$mRm \Leftrightarrow \begin{array}{l} m=m \\ \sigma \\ m+m=5 \end{array}$$

$\forall m, m \in \mathbb{Z}$

(Es. $5R5, 5R7$)

EQUIVALENZA ?

Riflessiva?

Sia $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = m \Rightarrow mRm \checkmark$
 $(\Rightarrow \text{si})$

Simmetrica?

SiANO $m, m \in \mathbb{Z}$ TALI CHE mRm
 $\Rightarrow m = m \wedge m + m = 5.$ SE $m = m$

$\Rightarrow m = m \Rightarrow mRm.$ SE $m + m = 5$

$$\Rightarrow m+m=5 \Rightarrow mRm \checkmark (\Rightarrow \text{si})$$

TRANSITIVA?

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE aRb
e bRc . ALLORA $(a=b \text{ o } a+b=5)$

e $(b=c \text{ o } b+c=5)$. SE $a=b$ e

$b=c \Rightarrow a=c \Rightarrow aRc \Rightarrow \text{O.K.}$

SE $a=b$ e $b+c=5 \Rightarrow a+c=5$

$\Rightarrow aRc \Rightarrow \text{O.K.}$ SE $a+b=5$ e

$b=c \Rightarrow a+c=5 \Rightarrow aRc \Rightarrow \text{O.K.}$

SE $a+b=5$ e $b+c=5 \Rightarrow$ ~~$a+c=5$~~

$\Rightarrow a+c=5 \Leftrightarrow ab=5 \Leftrightarrow \text{MAI}$
 ~~$\Rightarrow aRc$~~ ~~QOINDI NO, PERCHE'~~
~~NON E TRANSITIVA.~~

$$\Rightarrow a=5-b \text{ e } c=5-b \Rightarrow a=c \Rightarrow$$

aRc . QUINDI SI' E' TRANSITIVA.

QUINDI E' DI EQUIVALENZA.

QUALI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

Si A $a \in \mathbb{Z}$, ALLORA

$$[a]_R = \{b \in \mathbb{Z} : aRb\} = \{b \in \mathbb{Z} : \begin{array}{l} a=b \\ a+b=5 \end{array}\}$$

$$= \{ \alpha, 5-\alpha \}$$

QUINDI

$$[\alpha]_R = \{ \alpha, 5-\alpha \}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\left(\Rightarrow [14]_R = \{ 14, -9 \} \text{ ETC..} \right).$$

ES. 14: SIA R LA RELAZIONE SU

$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ DEFINITA PONENDO

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

EQUIVALENZA?

RIFLESSIVA ?

SiA $(\alpha, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ $\Rightarrow \alpha \cdot b = \alpha \cdot b \Rightarrow$
 $(\alpha, b) R (\alpha, b) \Rightarrow$ Si

SIMMETRICA ?

SIANO $(\alpha, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ TALI CHE
 $(\alpha, b) R (c, d) \Rightarrow \alpha \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = d \cdot \alpha$
 $\Rightarrow (c, d) R (\alpha, b) \Rightarrow$ Si

TRANSITIVA?

SIANO $(\alpha, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ TALI CHE
 $(\alpha, b)R(c, d)$ e $(c, d)R(e, f) \Rightarrow \alpha \cdot d = b \cdot c$

$$e \cdot c \cdot f = d \cdot e \Rightarrow \alpha \cdot d \cdot f = b \cdot c \cdot f \text{ e}$$

$$b \cdot c \cdot f = b \cdot d \cdot e \Rightarrow \alpha \cdot d \cdot f = b \cdot d \cdot e. \text{ MA}$$

$d \neq 0$ ($d \in \mathbb{Z}^*$) $\Rightarrow \alpha \cdot f = b \cdot e \Rightarrow (\alpha, b)R(e, f).$ \Rightarrow si.

QUINDI E' DI EQUIVALENZA. \square

ES.: QUANTE RELAZIONI DI EQUIV. CI SONO
SU $A = [3]$ ($= \{1, 2, 3\}$)?

SIA R UNA RELAZ. DI EQUIV. SU $[3]$.

ALLORA $R \subseteq [3] \times [3] = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1),$
 $(2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. POICHÉ R

E' DI EQUIV. \Rightarrow E' RIFLESSIVA \Rightarrow
 $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq R$.

SE $R \supsetneq \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$

$\Rightarrow \exists (c,d) \in R$ con $(c,d) \notin \{(1,2), (2,1)\}$

e $(c,d) \neq (1,1), (2,2), (3,3)$ si A

$(c,d) = (2,3) \Rightarrow (3,2) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$

$\Rightarrow (3,1) \in R \Rightarrow$

$R \in \text{Di}$
 $R = [3] \times [3] \Rightarrow \text{EQUIV.}$

SE $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \Rightarrow R$ E' DI EQUIV.
(FACILE)

SIA $R \supsetneq \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. ALLORA ESISTE
 $(a,b) \in R$, CON $a \neq b$.

SIA $(a,b) = (1,2) \Rightarrow$ POICHE' R E' SIMM.

$\Rightarrow (2,1) \in R \Rightarrow R \supseteq \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$.

SE $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \Rightarrow$ R E' DI EQUIV.

SE $(\alpha, b) = (2, 1) \Rightarrow$ COME PRIMA
 $(\Rightarrow$ NON TROVO NIENTE DI NUOVO).

SE $(\alpha, b) = (2, 3) \Rightarrow (3, 2) \in R \Rightarrow$

$$R \supseteq \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$$

SE
 $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$
 $\Rightarrow R$ È DI EQUIV.

$SE R \supsetneq \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2)\}$

$\Rightarrow \exists (c,d) \in R \text{ con } c \neq d \quad (c,d) \neq (2,3), \quad (c,d) \neq (3,2).$ SE $(c,d) = (1,2)$

$\Rightarrow (2,1) \in R \Rightarrow (3,1) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$

$\Rightarrow R = [3] \times [3].$ SE $(c,d) = (1,3)$

$\Rightarrow (3,1) \in R \Rightarrow (1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$$\Rightarrow R = [3] \times [3].$$

INFINE, SE $(a,b) = (1,3) \Rightarrow$

$(3,1) \in R \Rightarrow R \supseteq \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$. SE

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$$

$\Rightarrow R \not\sim$ Di EQUIV.

SE $R \not\equiv \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$

$\Rightarrow \sigma(1,2) \in R \wedge \sigma(2,1) \in R \wedge (2,3)$

$\in R \Rightarrow (3,2) \in R$. IN QUESTI

CASI $\Rightarrow R = [3] \times [3]$.

QUINDI \Rightarrow 5 REL. DI EQUIV.

SU $[3]$.

C'E' UN MODO PIU' VELOCE?

SI, PIU' CONCETTUALE.

SAPPIAMO DA 1.4.2 CHE LE

CLASSI DI EQUIVALENZA DI

UNA RELAZ. DI EQUIV. SONO

UNA PARTIZIONE DELL'INSIEME

(A)

QUANTE PARTIZIONI CI SONO

DI $[3]$? BEH...

$$- \{ \{1, 2, 3\} \} \quad - \{ \{1, 3\}, \{2\} \}$$

$$- \{ \{1, 2\}, \{3\} \} \quad - \{ \{1\}, \{2, 3\} \}$$

$$- \{ \{1\}, \{2\}, \{3\} \}$$

QUINDI IL NUMERO DI RELAZ.

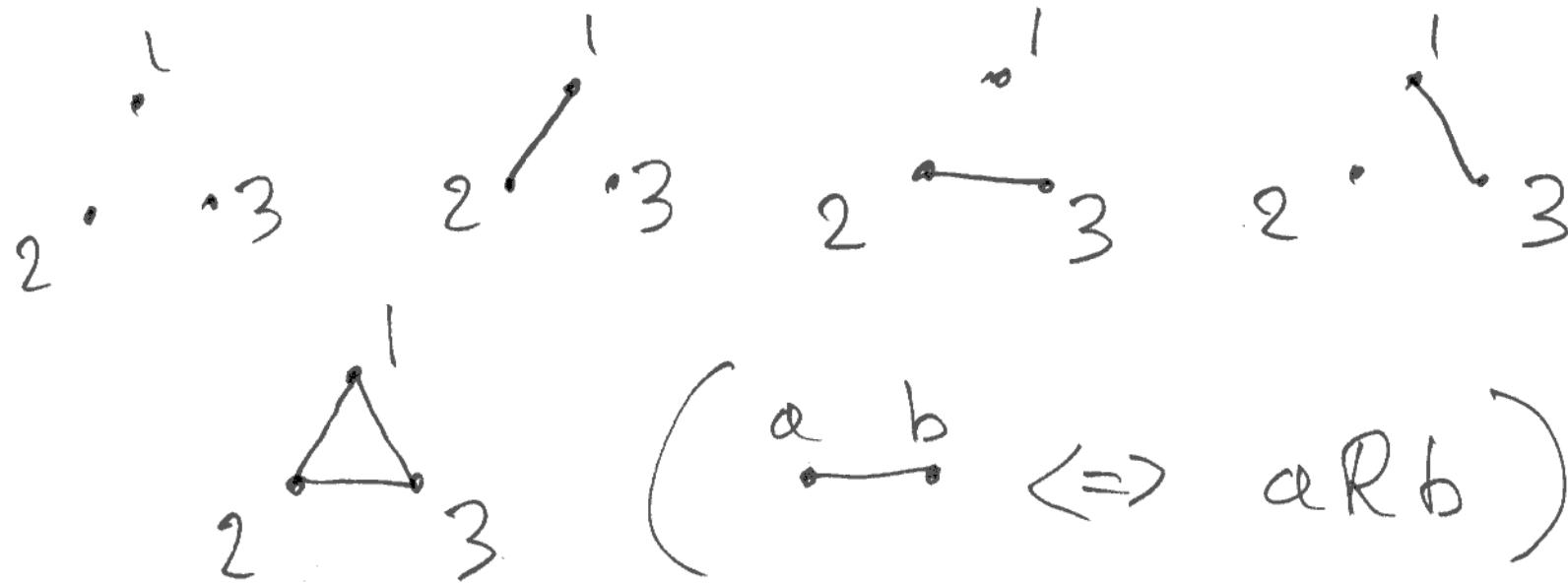
DI EQUIV. SU $[3]$ E' ≤ 5 .

MA OGNI PARTIZIONE "VIENE"
DA UNA REL. DI EQUIV. - (PER
ES.

$$\left\{ \{1, 2, 3\}, \{2, 3\} \right\} \leftrightarrow \left(\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \{(2, 3), (3, 2)\} \right)$$

$\Rightarrow 5$.

GRAFICAMENTE:



COSÌ SONO INDICATI I
CAPITOLI DEI RACCONTI
DEL GENJI

SONDAGGIO:

SIA $f:[5] \rightarrow [5]$ LA FUNZIONE DEFINITA
DA $f(1)=2$, $f(2)=5$, $f(3)=1$, $f(4)=2$,
 $f(5)=4$. ALLORA:

- a) f È INIETTIVA MA NON SURIETTIVA. 9%
- b) f È SURIETTIVA MA NON INIETTIVA. 18,5%
- c) f È SURIETTIVA E INIETTIVA. 1,25%
- d) NESSUNA DI QUESTE. ✓ 77,5%