1) $f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|)$

2) DOMINIO:

$$|e^{2x} - 1| > 0 \rightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 > 0 \\ e^{2x} - 1 < 0 \end{cases} \rightarrow e^{2x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} 4x - \log(|e^{2x} - 1|) = -\log(|0^{\pm}|) =$$

$$= -\log(0^{+}) = -(-\infty) = +\infty$$

QUINDI $x = 0$ È UN ASINTOTO VERTICALE

INOLTRE

---

2) $$y'(x) + \frac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^{x}$$

PER $x > 0$

$$a(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x)}{x(x+1)}$$

$$A(x+1)+B(x) = Ax + A + B\,x$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

QUINDI

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x) - \ln(x+1) =$$

$$= \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

IL FATTORE INTEGRANTE È:

$$e^{A(x)} = e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{x}{x+1}$$

QUINDI INTEGRO

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int \frac{x}{x+1} \cdot (x^2+x)e^x\,dx =$$

$$= \int \frac{x}{\cancel{(x+1)}} \cdot x \cdot \cancel{(x+1)}\, e^x\,dx = \int x^2 \cdot e^x\,dx =$$

$$= x^2 e^x - \int e^x\,d(x^2) = x^2e^x - \int e^x\,2x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

DUNQUE LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\,dx =$$

$$= \frac{x+1}{x} \cdot e^x(x^2-2x+2) + c$$

CAUCHY

$$2e = y(1) = 2 \cdot e\left(1 - \cancel{1} + \cancel{x}\right) + c = 2e + c$$

$2e = y(1) = \ldots e(1/e) + c = 2e + c$

Quindi

$$2e + c = 2e \rightarrow c = 0$$

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $x \in (0, +\infty)$ È

$$y(0) = \frac{x+1}{x} \cdot e^x (x^2 - 2x + 2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{x} \cdot e^x (x^2 - 2x + 2)$$

---

3) $$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha}\, dx$$

I PUNTI DA INDAGARE NELL'INTERVALLO

$(0, 4)$ SONO 0^+ E 4^-

PER $x \to 0^+$

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x - x^2)^\alpha} \sim \frac{5x^{2\alpha-1}}{4^\alpha x^\alpha} = \frac{5}{4^\alpha} \cdot \frac{x^{2\alpha-1}}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{5}{4^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-2\alpha+1}} = \frac{5}{4^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{-\alpha+1}}$$

QUINDI LA CONDIZIONE PER LA CONVERGENZA È

$$-\alpha+1<1 \rightarrow \alpha>0$$

PER $x \to 4^-$, $t = 4-x \to 0^+$

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^{\alpha}} = \frac{(5+3\sqrt{4-t})(\arctan(4-t))^{2\alpha-1}}{(4(4-t)-(4-t)^2)^{\alpha}} \sim$$