RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE A VARIABILI COSTANTI

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) \quad (*)$$

$\forall n \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$f(0) = 1$, $f(1) = 3$

PORTIAMO LA RICORSIONE IN FORMA STANDARD

$$f(n+2) = 2 \cdot f(n+1) + f(n)$$

$\forall n \geq 0$. L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

LE RADICI SONO

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

E QUINDI

$$\gamma_1 = 1 + \sqrt{2} \qquad \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $\alpha_1 = 1$ E $\alpha_2 = 1$

Sappiamo dalla teoria che $\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ e tali che $\deg(P_1) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2) \leq d_2 - 1$

$$f(n) = P_1(n) \cdot (\gamma_1)^n + P_2(n) \cdot (\gamma_2)^n$$

$\forall n \geq 0$. Quindi $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(n) = a\left(1+\sqrt{2}\right)^n + b\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$\forall n \geq 0$. Per trovare a e b usiamo le C.I abbiamo

$$\begin{cases} 1 = f(0) = a + b \\ 3 = f(1) = a\left(1+\sqrt{2}\right) + b \cdot \left(1-\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

Quindi

$$b = 1 - a$$

$$\Rightarrow 3 = a \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) + (1-a)\left(1-\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow 3 - 1 + \sqrt{2} = a \left(1+\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow b = 1 - a = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot (1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$f(n+3) = -2f(n+2) - 2f(n+1) - 4f(n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0$$

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ CARATTERISTICA È

$$x^3 = -2x^2 - 2x - 4$$

CIOÈ

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \qquad (*)$$

VEDIAMO CHE $x = -2$ È UNA RADICE DI $(*)$, USIAMO RUFFINI

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 2x^2 + 2x + 4 & x+2 \\ \cline{2-2}
x^3 + 2x^2 & x^2 + 2 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 2x + 4 & \\
\qquad\quad 2x + 4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

QUINDI

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x^2+2)(x+2)$$

RISOLVIAMO x^2+2

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{-4(1)(2)}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-8}}{2} =$$

$$= \pm \frac{\cancel{2}\sqrt{-2}}{\cancel{2}} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \pm i\sqrt{2}$$

PORTANTO LE RADICI DELL'EQ CARAT.

SONO

$$\gamma_1 = -2 \quad , \quad \gamma_2 = +i\sqrt{2} \quad , \quad \gamma_3 = -i\sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 1$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\exists\, P_1(x), P_2(x), P_3(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\deg(P_1) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2) \leq d_2 - 1$,

$\deg(P_3) \leq d_3 - 1$

$\deg(P_3) \leq d_3 - 1$ $\in$

$$f(n) = P_1(n)\cdot(\gamma_1)^n + P_2(n)\cdot(\gamma_2)^n + P_3(n)\cdot(\gamma_3)^n$$

per $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Quindi $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ tali che

$$f(n) = a\cdot(-2)^n + b(i\sqrt{2})^n + c(-i\sqrt{2})^n$$

per $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Per trovare a, b, c usiamo le C.I.

$$0 = f(0) = a + b + c$$

$$2 = f(1) = a(-2) + b(i\sqrt{2}) + c(-i\sqrt{2})$$

$$0 = f(2) = a(-2)^2 + b(i\sqrt{2})^2 + c(-i\sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + i\sqrt{2}\,b - i\sqrt{2}\,c = 2 \\ 4a + (-2)\cdot b + c(-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a = -b - c$$

$$\begin{cases} -2(-b-c) + i\sqrt{2}\,b - i\sqrt{2}\,c = 2 \\ 4(-b-c) + (-2)b + c(-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(2+i\sqrt{2}) + c(2-i\sqrt{2}) = 2 \\ b(-6) + c(-6) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b(2+i\sqrt{2}) + c(2-i\sqrt{2}) = 2 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b = -c$$

$$\begin{cases} -c(2+i\sqrt{2} + c(2-i\sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c(-2i\sqrt{2}) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{\cancel{2}}{-\cancel{2}i\sqrt{2}} = \frac{1}{-i\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-i}{\sqrt{2}} \,,$$

$$a = -b - c = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(i\sqrt{2}\right)^n + \frac{i}{\sqrt{2}} \left(-i\sqrt{2}\right)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE A VARIABILI COSTANTI

$$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + f(n-2) \quad (*)$$

$\forall n \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$f(0) = 1$, $f(1) = 3$

INNANZITUTTO PORTIAMO $(*)$ IN FORMA STANDARD

$$f(n+2) = 2f(n+1) + f(n)$$

LA CUI EQUAZIONE CARATTERISTICA È

$$x^2 = 2x + 1$$

CIOÈ

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

LE CUI RADICI SONO

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\gamma_1 = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1(\gamma_1) = 1$, $d_2(\gamma_2) = 1$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\deg(P_1) \leq d_1 - 1$ E $\deg(P_2) \leq d_2 - 1$

E

$$f(n) = P_1(n)\cdot(\gamma_1)^n + P_2(n)\cdot(\gamma_2)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. INOLTRE $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

UTILIZZIAMO LE C.I.

$$1 = f(0) = a + b$$

$$3 = f(1) = a(1+\sqrt{2}) + b(1-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 1 \\ a(1+\sqrt{2}) + b(1-\sqrt{2}) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 - b$$

$$\Rightarrow (1-b)(1+\sqrt{2}) + b(1-\sqrt{2}) = 3$$

$$1 + \sqrt{2} \cancel{-b} - b\sqrt{2} \cancel{+b} - b\sqrt{2} = 3$$

$$\frac{-2b\sqrt{2}}{-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{-2}$$

$$\frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a = 1 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\ }\right)$$

$$a = 1 + \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

IN CONCLUSIONE

$$f(n) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

ES.: RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8 \cdot f(n+1) + 12 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, CON LE C.I. $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=0$.

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ. CARATT. È

$$x^3 = -x^2 + 8x + 12$$

Cioè

$$x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$$

Cerchiamo le radici.

Una radice è $\alpha_1 = -2$. Utilizziamo Ruffini

	1	1	-8	-12
-2	↓	-2	2	12
	1	-1	-6	//

Quindi

$(x+2)(x^2 - x - 6)$. Scomponiamo $x^2 - x - 6$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

Quindi le radici sono:

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = -2$$

(dove $\alpha_1 = \alpha_3$)

di molteplicità $d_1 = 1$, $d_2 = 1$.

Sappiamo dalla teoria che

$\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ tali che

$\deg(P_1(x)) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2(x)) \leq d_2 - 1$

e

$f(n) = P_1(x)(\alpha_1)^n + P_2(x)(\alpha_2)^n$

$\forall n \geq 0$. Sappiamo che $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$

tali che

$f(n) = (a + b \cdot n)(-2)^n + c\,(3)^n$

$\forall n \geq N$. Per trovare tali $a, b, c \in \mathbb{C}$

utilizziamo le C.I.

$0 = f(0) = a + c$

$5 = f(1) = (a+b)(-2) + c(3)$

$0 = f(2) = (a+2b)(-2)^2 + c(3)^2$

quindi

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - 2b + 3c = 5 \\ 4a + 8b + 9c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = -a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b - 3a = 5 \\ 4a + 8b - 9a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5a - 2b = 5 \\ -5a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8b = 5a.$$

$$b = \frac{5a}{8}$$

$$\Rightarrow -5a - \cancel{2}\left(\frac{5a}{\cancel{8}\,4}\right) = 5$$

$$\Rightarrow -5a - \frac{5a}{4} = 5$$

$$\frac{-20a - 5a}{4} = 5$$

$$-\frac{25a}{4} = 5$$

$$a = 5 \cdot \frac{4}{25}$$

$$a = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow b = \frac{8\left(-\frac{4}{5}\right)}{8}$$

$$b = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = +\frac{4}{5}$$

In conclusione

$$f(n) = \left(-\frac{4}{5} - \frac{n}{2}\right)(-2)^n + \frac{4}{5}(3)^n$$

$\forall n \geq 0$

RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$$

$\forall n \geq 0$. Con le condizioni iniziali

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$

La ricorsione si trova già in forma standard.

L'equazione caratteristica è

$$x^3 = 3x - 2$$

cioè

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Troviamo le radici.

Una soluzione è $x = 1$. Utilizziamo Ruffini

	1	0	-3	+2
1		1	1	-2
	1	1	-2	//

$$x^2 + x - 2$$

Quindi

$(x-1)(x^2+x-2)$. Scomponiamo x^2+x-2.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow \frac{1+3}{2} = 2 \\ \searrow \frac{1-3}{2} = -1 \end{matrix}$$

QUINDI LE RADICI SONO

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha_1 = \alpha_3)$$

DI CARDINALITÀ $d_1(\alpha_1) = 1$, $d_2(\alpha_2) = 1$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[X]$ TALI CHE

$$\deg(P_1(x)) \leq d_1 - 1, \quad \deg(P_2(x)) \leq d_2 - 1$$

E

$$f(n) = P_1(n)(\alpha_1)^n + P_2(n)(\alpha_2)^n$$

$\forall n \geq 0$. QUINDI $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b \cdot n)(1)^n + c\,(-2)^n$$

$\forall n \geq 0$. PER TROVARE TALI $a, b, c \in \mathbb{C}$

UTILIZZIAMO LE C.I

$$0 = f(0) = a + c$$

$$1 = f(1) = a + b + c(-2)$$

$$0 = f(2) = (a+2b)(1)^2 + c(-2)^2$$

QUINDI

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b - 2c = 1 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = -a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b - 2(-a) = 1 \\ a + 2b + 4(-a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ -3a + 2b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b = \ldots$

$\Rightarrow b = 1 - 3a$

$$\Rightarrow -3a + 2(1 - 3a) = 0$$

$$-3a + 2 - 6a = 0$$

$$-9a = -2$$

$$a = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow b = 1 - \cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{9}\,3}\right)$$

$$b = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{2}{9}$$

In conclusione

$$f(n) = \left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right)(1)^n - \frac{2}{9}(-2)^n$$

Risolvere la ricorsione lineare

$$f(n+3) = -2f(n+2) + 4f(n+1) + 8f(n)$$

$\forall n \geq 0$, con le condizioni iniziali

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=0$

La ricorsione lineare è già in formato standard, e l'equazione caratteristica è

$$x^3 = -2x^2 + 4x + 8$$

cioè

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

Troviamo le radici.

$x=2$ è una soluzione dell'equazione.

Utilizziamo Ruffini

	1	2	-4	-8
2	[illegible]	[illegible]	8	8
	2	4	4	11

Quindi $(x-2)(x^2+4x+4)$. Troviamo le altre radici

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(4)}}{} = -2$$

QUINDI LE RADICI SONO

$$\alpha_1 = -2 \quad , \quad \alpha_2 = -2 \quad , \quad \alpha_3 = 2$$

$$(\alpha_1 = \alpha_2)$$

DI CARDINALITÀ $d_1(\gamma_1) = 1$, $d_2(\gamma_2) = 1$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\exists\, P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\deg(P_1(x)) \leq d_1 - 1$, $\deg(P_2(x)) \leq d_2 - 1$

E

$$f(n) = P_1(n)(2)^n + P_2(n)(-2)^n$$

$\forall n \geq 0$. QUINDI $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b \cdot n)(\alpha_1)^n + c(\alpha_2)^n$$

$\forall n \geq 0$. PER TROVARE TALI $a, b, c \in \mathbb{C}$

UTILIZZIAMO LE C.I.

$$0 = f(0) = a + c$$

$$1 = f(1) = (a+b)(-2) + c(2)$$

$$0 = f(2) = (a+2b)(-2)^2 + c(2)^2$$

ainsi

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - 2b + 2c = 1 \\ 4a + 8b + 4c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c = -a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b + 2(-a) = 1 \\ 4a + 8b + 4(-a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4a - 2b = 1 \\ 8b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow -4a - 2(0) = 1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow C = \frac{1}{4}$

IN CONCLUSIONE

$$f(n) = \left(-\frac{1}{4} + 0 \cdot n\right)(-2)^n + \frac{1}{4}(2)^n$$

$\forall_{n \geq 0}$

RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE

$$f(n+3) = 3 \cdot f(n+2) - 4 f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = f(2) = 0 \quad , \quad f(1) = 6$$

LA RICORSIONE SI TROVA GIÀ IN FORMA STANDARD.

L'EQ. CARATTERISTICA È

$$x^3 = 3x^2 - 4$$

CIOÈ

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

TROVIAMO LE RADICI.

UNA RADICE È $X=-1$. UTILIZZIAMO RUFFINI

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
-1 & \downarrow & -1 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & //
\end{array}
$$

QUINDI $(X+1)(X^2-4X+4)$

SCOMPONIAMO X^2-4X+4

$$X = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(4)}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

QUINDI LE RADICI SONO

$$\alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = -1$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1(\alpha_1) = 2, d_2(\alpha_2) = 1.$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$\exists\ P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$\deg(p_1(x)) \leq d_1 - 1$, $\deg(p_2(x)) \leq d_2 - 1$ E

$$f(n) = p_1(x)(2)^n + p_2(x)(-1)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

QUINDI $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(n) = (a + b \cdot n)(2)^n + c(-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

PER TROVARE TALI $a, b, c \in \mathbb{C}$

UTILIZZIAMO LE C.I

$$0 = f(0) = a + c$$
$$6 = f(1) = (a+b)(2) + c(-1)$$
$$0 = f(2) = (a+2b)(2)^2 + c(-1)^2$$

QUINDI

$$\begin{cases} a + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2b-c=6 \\ 4a+8b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c=-a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+2b+a=6 \\ 4a+8b-a=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+2b=6 \\ 3a+8b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a=-8b$$

$$a=-\frac{8b}{3}$$

$$\Rightarrow \cancel{3}\left(-\frac{8b}{\cancel{3}}\right)+2b=6$$

$$-6b=6$$

$$b=-1$$

$$\Rightarrow a=\frac{-8(-1)}{3}$$

$$a=8$$

$= \frac{\;\;}{3}$

$\Longrightarrow c = -\frac{8}{3}$

concludendo

$$f(n) = \left(\frac{8}{3} + (-1 \cdot n)\right)(2)^n - \frac{8}{3}(-1)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$