

4.3 COEFFICIENTI BINOMIALI

RICORDIAMO CHE, SE $m \in \mathbb{P}$, ALLORA

$$[m] \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, m\}.$$

PROP. 4.3.1: SIA $m \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$|\mathcal{P}([m])| = 2^m.$$

DIM. SIA ~~\mathbb{Z}~~ $\varphi: \mathcal{P}([m]) \rightarrow \underbrace{[2] \times [2] \times \dots \times [2]}_m$

DEFINITA PONENDO

$$\varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, \dots, a_m)$$

DOVE

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{SE } i \notin A, \\ 2, & \text{SE } i \in A, \end{cases}$$

PER $i=1, \dots, m$, $\in A \subseteq [m]$ (PER ES., SE
 $m=5$ $\in A=\{1,4\} \Rightarrow \varphi(A)=(2,1,1,2,1)$).

ALLORA φ È BIUNIVOCA \Rightarrow

$$|\mathcal{P}([m])| = \underbrace{|\underbrace{[2] \times \dots \times [2]}_m|}_{(4.2.1)} \stackrel{\downarrow}{=} \underbrace{|[2]| \cdot \dots \cdot |[2]|}_m = 2^m. \square$$

Sia $m \in \mathbb{Z}$.

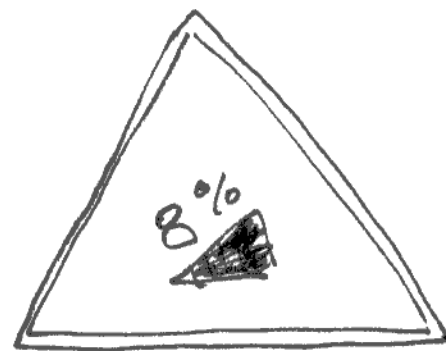
DEF. IL COEFFICIENTE BINOMIALE DI GRADO $m \in \mathbb{Z}$

$$\binom{x}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+1)}{m!} \quad \left(\begin{array}{l} \text{LETTO:} \\ \text{"x SCEGLIE"} \\ \text{m"} \end{array} \right)$$

SE $m \in \mathbb{P}$, $\binom{x}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $\binom{x}{m} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ SE $m < 0$.

OSS. QUINDI $\binom{x}{m} \in \mathbb{Q}[x]$.

(SI DICE ANCHE "x BINOMIALE m")



PROP. 4.3.2. SIANO $m, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq m$.

ALLORA

$$|\{A \subseteq [m] : |A| = k\}| = \binom{m}{k}.$$

DIM. INDUZIONE SU $m \in \mathbb{N}$. FACILE SE

$m \leq 2$. SIA $m \geq 3$. SE $k=0 \Rightarrow$ ~~O.K.~~

$$|\{A \subseteq [m] : |A|=0\}| = |\{\emptyset\}| = 1 = \binom{m}{0} \Rightarrow \text{O.K.}$$

Sia $k \geq 1$. ABBIAMO CHE

$$|\{A \subseteq [m]: |A| = k\}| \stackrel{(4.2.1)}{=} \downarrow$$

$$|\{A \subseteq [m]: |A| = k, m \notin A\}| +$$

$$|\{A \subseteq [m]: |A| = k, m \in A\}|.$$

MA

$$\{A \subseteq [m]: |A| = k, m \notin A\} = \{A \subseteq [m-1]: |A| = k\}$$

QUINDI, PER INDUZIONE,

$$|\{A \subseteq [m]: |A|=k, m \notin A\}| = \binom{m-1}{k}.$$

SIA $\psi: \{A \subseteq [m]: |A|=k, m \in A\} \rightarrow$

$\{B \subseteq [m-1]: |B|=k-1\}$ DEFINITA PONENDO

$$\psi(A) \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus \{m\}$$

PER $\forall A \subseteq [m]$ TALE CHE $|A|=k$ E $m \in A$.

ALLORA ψ È BIUNIVOCA ($B \mapsto B \cup \{m\}$ È
L'INVERSA). QUINDI, PER INDUZIONE,

$$|\{A \subseteq [m] : |A| = k, m \in A\}| = \binom{m-1}{k-1}.$$

CONCLUDENDO

$$|\{A \subseteq [m] : |A| = k\}| = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$$

(ALGEBRA
LICEALE) \searrow
 $= \binom{m}{k} . \square$

PROP. 4.3.3: SIA $m \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m.$$

DIM. INDUZIONE SU $m \in \mathbb{P}$. FACILE SE $m=1$. SIA VERO PER $m-1$. ALLORA

$$(1+x)^m = (1+x) \cdot (1+x)^{m-1}$$

$$\xrightarrow{\text{INDUZIONE}} (1+x) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \cdot x^k + x \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \cdot x^k$$

$$\left(\binom{m-1}{m} = 0 \right) \Rightarrow \sum_{k=0}^m \binom{m-1}{k} x^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \cdot x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m-1}{k} \cdot x^k + \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} \cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^m \left[\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} \right] \cdot x^k = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \cdot x^k \cdot \square$$

PROP. 4.3.4: SIA $m \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$|\{A \subseteq [m] : |A| \text{ È PARI}\}| =$$

$$|\{A \subseteq [m] : |A| \text{ È DISPARI}\}|.$$

DIM. BASTA PORRE $x = -1$ IN 4.3.3. \square

ES. [2-]: TROVARE UNA BIEZIONE

TRA $\{A \subseteq [m] : |A| \text{ È PARI}\}$ E

$\{A \subseteq [m] : |A| \text{ È DISPARI}\}.$

4.4 IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE

SAPPIAMO CHE

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (*)$$

(A, B insiemi finiti). SIANO A, B, C
insiemi finiti. ALLORA

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \stackrel{(*)}{=} \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\downarrow} = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$$

$$\stackrel{(*)}{\downarrow} = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \left(|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \right)$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

SIANO A_1, A_2, \dots, A_m INSIEMI FINITI ($m \in \mathbb{P}$).
DATO $T \subseteq [m]$ PONIAMO

$$A_T \stackrel{\text{def}}{=} A_{t_1} \cap A_{t_2} \cap \dots \cap A_{t_r}$$

SE $T = \{t_1, t_2, \dots, t_r\}$ (PER ES., $A_{\{1,3,5\}}$
 $= A_1 \cap A_3 \cap A_5$). FACENDO LO STESSO

RAGIONAMENTO APPENA FATTO PER
 $m=3$ SI OTTIENE

TEO. 4.4.1: (IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE-ESCLUSIONE):

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{\substack{T \subseteq [m] \\ T \neq \emptyset}} (-1)^{|T|-1} \cdot |A_T|.$$

TEO.: Sia $m \in \mathbb{P}$ e sia $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$
LA SUA DECOMPOSIZIONE IN NUMERI PRIMI
($p_1, \dots, p_r, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{P}$, p_1, \dots, p_r PRIMI DI-
STINTI). ALLORA

$$\Phi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

DIM. ABBIAMO CHE

$$|\{1 \leq i \leq m : (m, i) = 1\}| = m - |\{1 \leq i \leq m : (m, i) \geq 2\}|.$$

MA

$$\{1 \leq i \leq m : (m, i) \geq 2\} = \{1 \leq i \leq m : p_1 | i\} \cup$$

$$\{1 \leq i \leq m : p_2 | i\} \cup \dots \cup \{1 \leq i \leq m : p_r | i\}$$

Si A

$$A_j \stackrel{\text{def}}{=} \{1 \leq i \leq m : p_j | i\}$$

$$j = 1, \dots, r.$$

USIAMO IL PRINCIPIO DI I-E. DOBBIAMO
CALCOLARE

$$|A_T| = |A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_k}|$$

SE $T = \{t_1, \dots, t_k\}$, $T \subseteq [n]$. ABBIAMO

CHE

$$|A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_k}| = |\{1 \leq i \leq n : P_{t_1} \mid i\} \cap \dots \cap$$

$$\left| \bigcap \{1 \leq i \leq m : p_{t_k} \mid i\} \right| =$$

$$= \left| \{1 \leq i \leq m : (p_{t_1} \cdot p_{t_2} \cdots p_{t_k}) \mid i\} \right| =$$

$$= \frac{m}{p_{t_1} \cdot p_{t_2} \cdots p_{t_k}} .$$

PERTANTO

$$\left| \{1 \leq i \leq n : (i, n) \geq 2\} \right| = \sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ T \neq \emptyset}} (-1)^{|T|-1} \cdot |A_T|$$

$$= \sum_{\substack{T \subseteq [n] \\ T \neq \emptyset}} (-1)^{|T|-1} \cdot \frac{n}{p_{t_1} \cdots p_{t_k}}$$

$$T = \{t_1, \dots, t_k\}$$

(FARE
PER $n=3$)

$$= -n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) + n \cdot \square$$

$$(E.g., \quad p_1=2, p_2=7, p_3=13, \quad \cancel{p_4=19}, T \subseteq [4])$$

$$T = \{1, 3\} \quad (\Rightarrow t_1=1, t_2=3) \Rightarrow p_{t_1} \cdots p_{t_k} = p_1 \cdot p_3 = 2 \cdot 13) \\ (k=2)$$

4.5 COMPOSIZIONI

SIANO $m, k \in \mathbb{P}$.

DEF. UNA COMPOSIZIONE (DI m IN k PARTI) È
UNA SEQUENZA $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k$ TALE CHE

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = m.$$

E.g. LE COMPOSIZIONI DI 5 IN 3 PARTI SONO

$$(3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3), (2, 2, 1),$$

$$(2, 1, 2), (1, 2, 2)$$

PROP. 4.5.1. SIANO $m, k \in \mathbb{P}$. ALLORA CI SONO

$$\binom{m-1}{k-1}$$

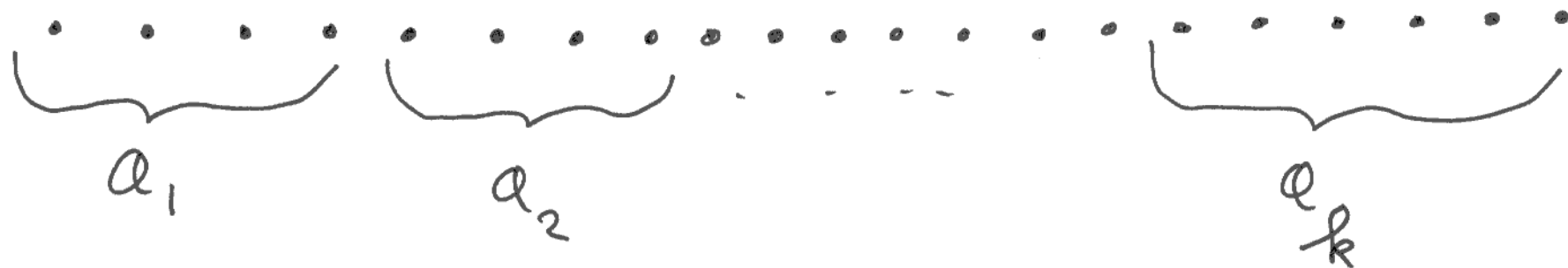
COMPOSIZIONI DI m IN k PARTI.

DIM. C'E' UNA BIEZIONE TRA LE COMPOSIZIONI DI m IN k PARTI E

$$\{A \subseteq [m-1] : |A| = k-1\}.$$

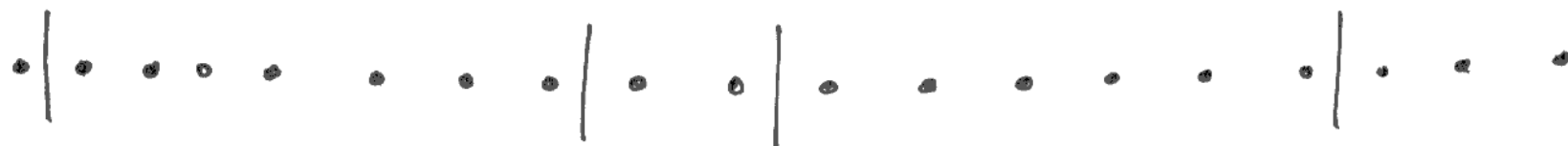
SIA $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k$ TALE CHE

$$a_1 + \dots + a_k = n. \text{ GRAFICAMENTE}$$



E.g. $n=19$, $k=5$, $(a_1, \dots, a_k) = (1, 7, 2, 6, 3)$

$(1, 7, 2, 6, 3)$



$$\{1, 8, 10, 16\} \subseteq [18].$$

SIANO $m, k \in \mathbb{P}$.

DEF. UNA COMPOSIZIONE DEBOLE (DI n IN k
PARTI) È UNA SEQUENZA $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$
TALE CHE $(\uparrow!)$

$$a_1 + \dots + a_k = n.$$

PROP. 4.5.2: SIANO $m, k \in \mathbb{P}$. ALLORA CI SONO

$$\binom{m+k-1}{k-1}$$

COMPOSIZIONI DEBOLI DI n IN k PARTI.

DIM. C'E' UNA BIEZIONE TRA COMPOSIZIONI
DEBOLI DI n IN k PARTI E COMPOSIZIONI
DI $n+k$ IN k PARTI, DATA DA

$$(a_1, \dots, a_k)$$



$$(a_1+1, \dots, a_k+1). \square$$

4.6 COEFFICIENTI MULTINOMIALI ($\underbrace{\mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \dots \times \mathbb{P}}_{k \text{ " " } k}$)

SIANO $m, k \in \mathbb{P}$ E SIA $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k$

UNA COMPOSIZIONE DI m IN k PARTI.

DEF. IL COEFFICIENTE MULTINOMIALE

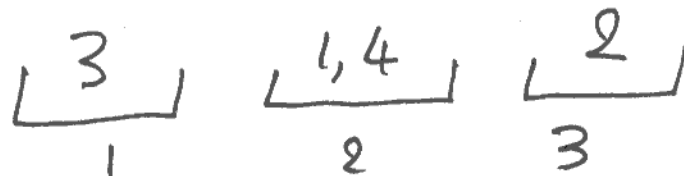
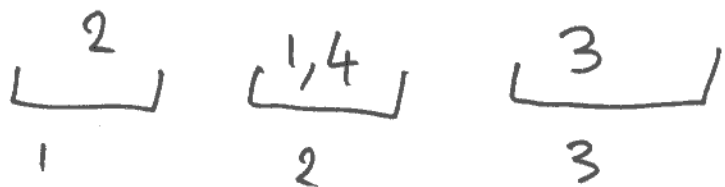
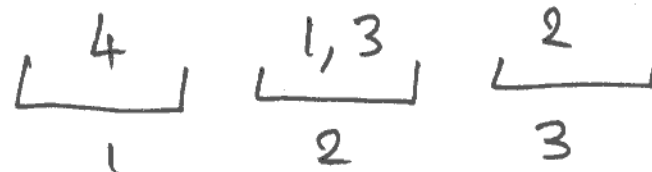
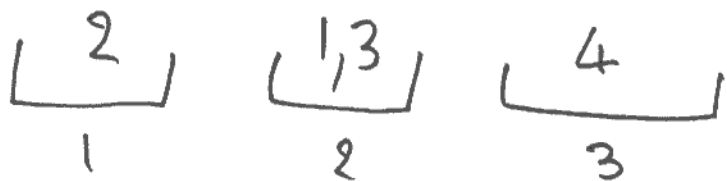
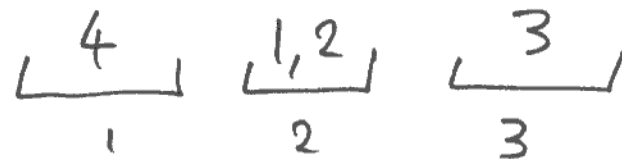
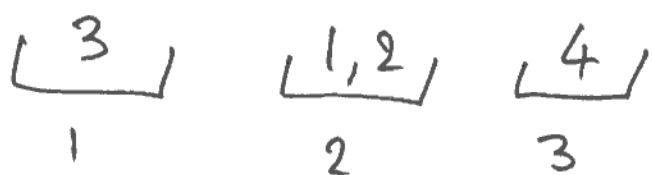
$\binom{m}{a_1, \dots, a_k}$ È UGUALE AL NUMERO DI
(PALLINE NUMERATE)

MODI DI ASSEGNARE OGNI $i \in [m]$
(SCATOLE NUMERATE)

AD UNA DI k CATEGORIE C_1, \dots, C_k

IN MODO CHE q_j NUMERI VENGONO ASSEGNA-
TI ALLA CATEGORIA C_j , PER OGNI $j \in [k]$.

E.g. $m=4$, $k=3$, $(a_1, \dots, a_k) = (1, 2, 1)$.



$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2, 3 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2, 3 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2, 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2, 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3, 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 3, 4 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \binom{4}{1, 2, 1} = 12.$$

PROP. 4.6.1. SIANO $m, k \in \mathbb{P}$ E SIA (a_1, \dots, a_k)
UNA COMPOSIZIONE DI m IN k PARTI. ALLORA

$$\binom{m}{a_1, \dots, a_k} = \frac{m!}{a_1! \cdot \dots \cdot a_k!}.$$

DIM. POSSO SCEGLIERE I NUMERI DA
METTERE IN C_1 IN $\binom{m}{a_1}$ MODI.

RIMANGONO $m - a_1$ NUMERI. TRA QUESTI

POSSO SCEGLIERE i NUMERI DA METTE
RE IN C_2 IN $\binom{m-a_1}{a_2}$ MODI. RIMANGONO

$m - a_1 - a_2$ NUMERI. TRA QUESTI POSSO

SCEGLIERE i NUMERI DA METTERE

IN C_3 IN $\binom{m-a_1-a_2}{a_3}$ MODI, ETC...

QUINDI

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_k} = \binom{n}{a_1} \cdot \binom{n-a_1}{a_2} \cdot \binom{n-a_1-a_2}{a_3} \cdot \dots$$

$$\dots \cdot \binom{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}{a_k}$$

$$= \frac{n!}{(a_1!)(a_2!)\dots(a_k!)} \cdot \square$$

SIA S UN INSIEME.

INFORMALMENTE, UN MULTINSIEME È UN INSIEME CON RIPETIZIONI.

FORMALMENTE

DEF. UN MULTINSIEME SU S È UNA FUNZIONE

$\nu : S \rightarrow \mathbb{N}$. SE $x \in S$ ALLORA $\nu(x)$ SI DICE

LA MOLTEPLICITÀ DI x . LA CARDINALITÀ

DEL MULTINSIEME È $\sum_{x \in S} \nu(x)$.

E.g. $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $v: S \rightarrow \mathbb{N}$ DEFINITA
DA $v(1)=3$, $v(2)=0$, $v(3)=1$, $v(4)=2$, E' UN
MULTINSIEME, SCRITTO

$$M = \{1^3, 2^0, 3^1, 4^2\}$$

OPPURE

$$M = \{1, 1, 1, 3, 4, 4\}.$$

LA CARDINALITA' DI M E' 6.

SIANO $m, k \in \mathbb{P}$.

DEF. IL COEFFICIENTE BINOMIALE STORTO

("TWISTED BINOMIAL COEFFICIENT") È IL
NUMERO, SCRITTO $\left(\binom{m}{k}\right)$, DI MULTINSIEMI
SU $[m]$ DI CARDINALITÀ k .

PROP. 4.6.2: SIA $m \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$\sum_{k \geq 0} \left(\binom{m}{k}\right) \cdot x^k = \frac{1}{(1-x)^m}.$$

DIM. ABBIAMO CHE

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^k \left((1-x)^{-m} \right) \Big|_{x=0} = (-m)(-m-1)\dots(-m-k+1)(-1)^k$$

PERTANTO

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \left(\frac{1}{(1-x)^m} \right) \Big|_{x=0} = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{k!}$$

$$= \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} \stackrel{\uparrow}{=} \left(\binom{n}{k} \right) \cdot \square$$

↖ (4.5.2)

$\left(\begin{array}{c} \text{MULTINSIEME SU } [m] \text{ DI CARDINALITA' } k \\ \Downarrow \\ \text{COMPOSIZIONE DEBOLE DI } k \text{ IN } m \text{ PARTI} \end{array} \right)$

SIA

$$M = \{ 1^{v_1}, 2^{v_2}, \dots, m^{v_m} \}$$

UN MULTINSIEME SU $[m]$.

DEF. UNA PERMUTAZIONE DI M È UN ORDINA-
MENTO LINEARE DEGLI ELEMENTI DI M .

INDICHIAMO CON $S(M)$ L'INSIEME DELLE
PERMUTAZIONI DI M .

E.g. $M = \{1, 2, 2, 3\}$. ALLORA

$$\{1^1, 2^2, 3^1\} \rightarrow \frac{(1+2+1)!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{4!}{2} = 12$$

$S(M) = \{ 2213, 2231, 2123, 2321, 2132, \\ 2312, 1223, 3221, 3212, 1232, 1322, \}$

$$3122\}.$$

$$\Rightarrow |S(M)| = 12.$$

PROP. 4.6.3: SIA $M = \{1^{v_1}, 2^{v_2}, \dots, m^{v_m}\}$. ALLORA

$$|S(M)| = \binom{v_1 + v_2 + \dots + v_m}{v_1, v_2, \dots, v_m}.$$

DIM. C'E' UNA BIEZIONE TRA $S(M)$

E IL MODO DI ASSEGNARE OGNI

$i \in [N]$ (DOVE $N \stackrel{\text{def}}{=} v_1 + v_2 + \dots + v_m$) AD UNA
 DI m CATEGORIE IN MODO CHE PER OGNI
 $j \in [m]$, v_j NUMERI SONO ASSEGNATI
 A C_j (CATEGORIA C_j). SIA

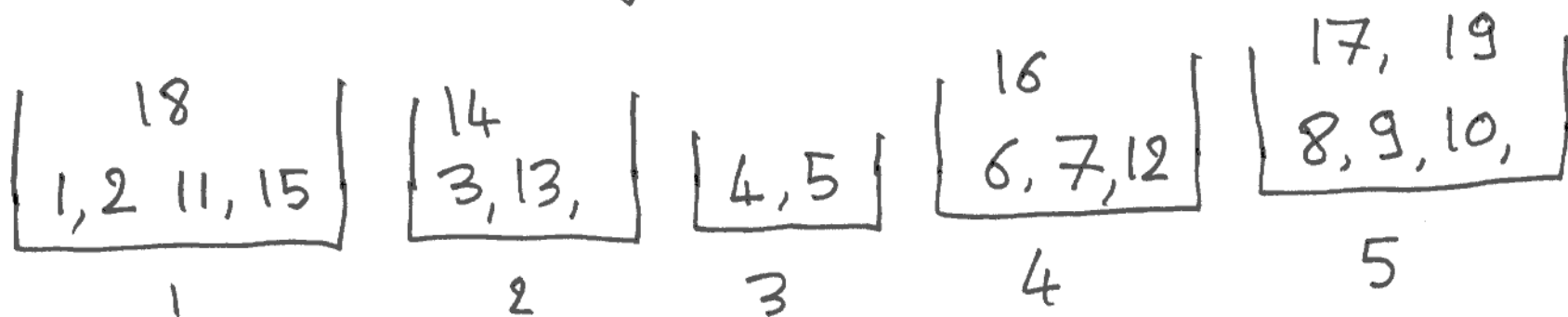
$$x_1 x_2 x_3 \dots x_N \in S(M)$$



$$\left(\begin{array}{l} \text{E' ASSEGNATO} \\ \text{A CATEGORIA } C_j \end{array} \Leftrightarrow x_i = j \right). \square$$

E.g. $M = \{1^5, 2^3, 3^2, 4^4, 5^5\}$, siA

$$1123344555142214515 \in S(M)$$



4.7 ENUMERAZIONE PRATICA: POKER

$$4 \times 13 = 52 \text{ CARTE}$$

SEMI VALORI

(CQFP) (2345678910JQKA)

- QUANTE "MANI" CI SONO NEL POKER?

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \overset{10}{\cancel{50}} \cdot 49 \cdot \overset{2}{\cancel{48}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 2598960$$

- QUANTE DI QUESTE MANI SONO UN FULL?

✓ FULL = 3 CARTE DI VALORE UGUALE + 2 CARTE DI VALORE UGUALE

FULL \leftrightarrow (VALORE DEL TRIS, SEME MANCANTE, VALORE DELLA COPPIA, SEMI DELLA COPPIA)

E.g.

{ JC, JQ, JP, 3F, 3P } \leftrightarrow ~~***~~ (J, F, 3, { F, P })

$$13 \times 4 \times 12 \times \binom{4}{2} = 3744.$$

- QUANTE "MANI" SONO UN POKER?

POKER = 4 CARTE DI VALORE UGUALE

POKER \leftrightarrow (VALORE DEL, CARTA
POKER, RIMANENTE)

$$\Rightarrow 13 \times 48 = 624$$

- QUANTE "MANI" SONO UN COLORE?

COLORE = 5 CARTE DELLO STESSO SEME

COLORE \leftrightarrow $\left(\begin{array}{cc} \text{SEME DELLE} & \text{VALORI DELLE} \\ 5 \text{ CARTE} & , \quad 5 \text{ CARTE} \end{array} \right)$

$$4 \times \binom{13}{5} = 5148$$

- QUANTE "MANI" SONO UNA DOPPIA COPPIA ?

DOPPIA COPPIA = 2 CARTE DI VALORE UGUALE +
2 CARTE DI VALORE UGUALE

DOPPIA COPPIA \leftrightarrow (VALORE DELLA PRIMA COPPIA, SEMI DELLA PRIMA COPPIA, VALORE DELLA 2^a COPPIA, SEMI DELLA 2^a COPPIA, VALORE DELLA CARTA RIMANENTE, SEME DELLA CARTA RIMANENTE)

$$\Rightarrow 13 \times \binom{4}{2} \times 12 \times \binom{4}{2} \times 11 \times 4 = 247.104$$

ERRATO!! PERCHE'?

NON E' UNA BIEZIONE!

E.g.

$$\begin{array}{l} \{4F, 4C \\ QC, QP, 8C\} \end{array} \leftrightarrow (4, \{F, C\}, Q, \{C, P\}, 8, C) \quad \#$$

$$\nwarrow (Q, \{C, P\}, 4, \{F, C\}, 8, C)$$

$$\Rightarrow \frac{247104}{2} = \overset{123552}{\cancel{123456}}$$

ES. [1+]: QUANTE "MANI" SONO UN TRIS?

ES. [1+]: QUANTE "MANI" SONO UNA COPPIA?

4.8 RICORSIONI LINEARI A COEFFICIENTI

COSTANTI

TEO 4.8.1: (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

BRA): SIANO $q_0, q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$ ($d \in \mathbb{P}$) TALI CHE $q_d \neq 0$. ALLORA $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ ($r \in \mathbb{P}$) E $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{P}$, TALI CHE

$$q_0 + q_1 x + \dots + q_d x^d = q_d (x - \alpha_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_r)^{d_r}$$

$$\text{E } d = d_1 + \dots + d_r.$$

DIM. OMESSA. \square

DEF. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ si dicono le RADICI di

$q_0 + q_1 x + \dots + q_d x^d$, d_1, \dots, d_n si dicono le

MOLTEPLICITÀ di $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (RISPETTIVAMENTE).

PROP. 4.8.2: (RUFFINI): SIA $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ E

SIA $\alpha \in \mathbb{C}$. ALLORA

$$P(\alpha) = 0 \iff (x - \alpha) \mid P(x).$$

DIM. OMESSA. \square

(SE $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$ ALLORA SI DICE CHE

$A(x)$ DIVIDE $B(x)$ (SCRITTO $A(x) \mid B(x)$)

SE $\exists C(x) \in \mathbb{R}[x]$ TALE CHE $B(x) = A(x) \cdot C(x)$).

SI A $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

DEF. SI DICE CHE f SODDISFA UNA

RICORSIONE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

SE $\exists q_0, q_1, \dots, q_{d-1} \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$f(n+d) = q_{d-1} \cdot f(n+d-1) + \dots + q_1 \cdot f(n+1) + q_0 \cdot f(n) \quad (*)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

EURISTICA: (E IDEA):

CALCOLANDO UN PÒ DI TERMINI ED ESEMPI

VEDIAMO CHE $f(n)$ CRESCE ESPONENZIALMENTE

MENTE IN m . SUPPONIAMO QUINDI CHE $\exists \lambda$
 $\in \mathbb{C}$ TALE CHE

$$f(m) = \lambda^m$$

PER OGNI $m \in \mathbb{N}$. ALLORA QUESTA È SOL.
DI (*) SE E SOLO SE

$$\lambda^{m+d} = q_{d-1} \cdot \lambda^{m+d-1} + \dots + q_1 \cdot \lambda^{m+1} + q_0 \cdot \lambda^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. QUINDI SE E SOLO SE

$$\lambda^d - a_{d-1} \lambda^{d-1} - \dots - a_1 \lambda - a_0 = 0$$

CIOE' SE E SOLO SE λ E' RADICE DI

$$X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \dots - a_1 X - a_0 = 0. \quad (**)$$

DEF. (**) SI DICE L'EQUAZIONE CARATTERISTICA DELLA RICORSIONE (*)

TEO 4.8.3: SIANO $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ E $q_0, \dots, q_{d-1} \in \mathbb{R}$
($d \in \mathbb{P}$) TALI CHE

$$f(n+d) = q_{d-1} f(n+d-1) + \dots + q_1 f(n+1) + q_0 f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$. ALLORA $\exists P_1(x), \dots, P_r(x) \in \mathbb{C}[x]$
($r \in \mathbb{P}$) TALI CHE

$$f(n) = \sum_{i=1}^r P_i(n) \cdot \cancel{\lambda_i} (\lambda_i)^n$$

DOVE $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ SONO LE RADICI

DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA E $\sum_{i=1}^n \deg(p_i)$

$\leq d_i - 1$ PER $\forall i=1, \dots, n$ DOVE $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{P}$

SONO LE MOLTEPLICITÀ DI $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

DIM. OMESSA. \square

3.13 NUMERAZIONI IN BASI DIVERSE:

TEO 3.13.1: SIANO $b, m \in \mathbb{P}$, $b \geq 2$. ALLORA \exists

$b_0, \dots, b_k \in \mathbb{N}$ (DOVE $k = \max\{i \in \mathbb{P} : b^i \leq m\}$)

TALI CHE $0 \leq b_0, \dots, b_k \leq b-1$ E

$$m = b_k \cdot b^k + b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b^1 + b_0 \cdot b^0.$$

DIM. INDUZIONE SU $m \in \mathbb{P}$. PER DEF.

Di k

$$b^k \leq m < b^{k+1} \quad (*)$$

QUINDI

$$n = q \cdot b^k + r, \quad 0 \leq r < b^k$$

E $1 \leq q \leq b-1$ (PER (*)). MA $r < n$

\Rightarrow PER INDUZIONE $\Rightarrow \exists b_{k-1}, \dots, b_0 \in \mathbb{N}$

TALI CHE $0 \leq b_0, \dots, b_{k-1} \leq b-1$ E

$$r = b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b + b_0$$

QUINDI

$$n = q \cdot b^k + b_{k-1} \cdot b^{k-1} + \dots + b_1 \cdot b + b_0.$$

SIANO $b_0, \dots, b_k, c_0, \dots, c_k \in \mathbb{N}$ TALI CHE

$$0 \leq b_0, \dots, b_k, c_0, \dots, c_k \leq b-1$$

E

$$n = b_k \cdot b^k + \dots + b_1 \cdot b + b_0 = c_k \cdot b^k + \dots + c_1 \cdot b + c_0 \quad (\square)$$

ALLORA

$$b_0 - c_0 = c_k b^k + \dots + c_1 b - (b_k b^k + \dots + b_1 b)$$

$$\Rightarrow b \nmid (b_0 - c_0) \Rightarrow \text{MA } b_0 - c_0 \leq b-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_0 - c_0 = 0 \Rightarrow b_0 = c_0. \text{ QUINDI}$$

$$b_k \cdot b^k + \dots + b_1 \cdot b = c_k \cdot b^k + \dots + c_1 \cdot b$$

$$\Downarrow$$

$$b_k \cdot b^{k-1} + \dots + b_2 \cdot b + b_1 = c_k \cdot b^{k-1} + \dots + c_2 \cdot b + c_1$$

$$\Downarrow$$

$$b \mid (b_1 - c_1)$$

$$\Downarrow$$

$$b_1 - c_1 = 0$$

\Rightarrow ETC..... \square

DEF. QUELLA DEL TEO 3.13.1 SI DICE LA
ESPRESSIONE b-ARIA (o IN BASE b) DI m .

CAPITOLO 4: COMBINATORIA ENUMERATIVA

4.1 IL PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA COMBINATORIA ENUMERATIVA

PROBLEMA FONDAMENTALE DELLA C.E.:

DATA UNA SEQUENZA A_1, A_2, A_3, \dots
DI INSIEMI FINITI CALCOLARE

$$\{|A_m|\}_{m=1,2,\dots}$$

TRE POSSIBILI SOLUZIONI:

1) UNA FORMULA (E.g., $|A_m| = 2^m$ PER $\forall m \in \mathbb{P}$,

OPPURE $|A_m| = \sum_{i=1}^m 2^i$)

2) UNA RICORSIONE (E.g., $|A_m| = |A_{m-1}| +$

$|A_{m-2}|$ PER $\forall m \geq 3$)

3) UNA FUNZIONE GENERATRICE: UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$ (cioè infinitamente differenziabile) il cui sviluppo in serie di TAYLOR in $x=0$ è

$$\sum_{m \geq 0} |A_m| \cdot x^m.$$

$$\left(\text{E.g. } f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \right)$$

4.2 PROPRIETÀ FONDAMENTALI

SIA A UN INSIEME FINITO. PONIAMO

$|A|$ ($0 \neq A$) (DETTA CARDINALITÀ)

IL NUMERO DI ELEMENTI DI A .

SIANO A, B INSIEMI.

DEF. LA POTENZA DI A ALLA B È

$$A^B \stackrel{\text{def}}{=} \{f: B \rightarrow A\}.$$

DEF. L'insieme delle parti di A è

$$\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{S : S \subseteq A\}.$$

PROP. 4.2.1: SIANO A, B INSIEMI FINITI.

ALLORA:

$$\text{i)} \quad |A \times B| = |A| \cdot |B| ;$$

$$\text{ii)} \quad |A^B| = |A|^{|B|} ;$$

$$\text{iii)} \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

DIM. CHIARO. \square

OSS. A, B INSIEMI, $f: A \rightarrow B$, f BIUNIVOCA

$$\Rightarrow |A| = |B|.$$

ES. : LE INDAGINI SIEROLOGICHE SVOLTE DAL GOVERNO SUGGERISCONO CHE CI SONO CIRCA 500.000 ITALIANI ASINTOMATICI. QUAL'E' LA PROBABILITA' CHE IN UN GRUPPO DI 110 PERSONE CI SIA ALMENO UN ASINTOMATICO.
PONIAMO

$$ITA = \{ \text{italiani} \}$$

E

$$ASI = \{ \text{italiani asintomatici} \}.$$

QUINDI $|ITA| = 60.000.000$ E $|ASI| = 500.000$.

LA PROBABILITA' RICHIESTA E'

$$p = \frac{\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON } \geq 1 \text{ ASINTOM.}\}}{\#\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\}}$$

ABBIAMO CHE

$$\{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI}\} = \{G \subseteq ITA : |G| = 110\}.$$

QUINDI

$$\# \{ \text{GRUPPI DI 110 ITALIANI} \} = \binom{60.000.000}{110},$$

MENTRE

$$\bullet \{ \text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON } \geq 1 \text{ ASINTOM.} \}$$

$$= \{ \text{GRUPPI DI 110 ITALIANI} \} \setminus \{ \text{GRUPPI DI} \\ \text{110 ITALIANI SENZA ASINTOM.} \}$$

$$= \{G \subseteq \text{ITA} : |G| = 110\} \setminus \{G \subseteq \text{ITA} : |G| = 110, \\ G \cap \text{ASi} = \emptyset\}$$

$$= \{G \subseteq \text{ITA} : |G| = 110\} \setminus \{G \subseteq \text{ITA} \setminus \text{ASi} : |G| = 110\}.$$

PERTANTO

$$\# \{\text{GRUPPI DI 110 ITALIANI CON } \geq 1 \text{ ASINTOMI}\} \\ = \binom{60.000.000}{110} - \binom{59.500.000}{110}$$

CONCLUDENDO

$$P = \frac{\binom{60.000.000}{110} - \binom{59.500.000}{110}}{\binom{60.000.000}{110}}$$

$$= 1 - \frac{\binom{59,5 M}{110}}{\binom{60 M}{110}} = 1 - \frac{\frac{(59,5 M)(59,5 M - 1) \dots (59,5 M - 109)}{110!}}{\frac{(60 M)(60 M - 1) \dots (60 M - 109)}{110!}}$$

$$= 1 - \frac{(59,5M)(59,5M-1) \dots (59,5M-109)}{(60M)(60M-1) \dots (60M-109)}$$

$$\approx 1 - 0,398 = 0,602.$$

ES. : NELL'ANNO ACCADEMICO 2019-20 SI SONO
LAUREATI, PRESSO LA NOSTRA UNIVERSITÀ,
28 PERSONE IN INFORMATICA, 22 IN MATE=
MATICA, E 21 IN FISICA. DI QUESTI 8 SONO
LAUREATI SIA IN INFORMATICA CHE IN MATEMA=
TICA, 6 SIA IN MATEMATICA CHE IN FISICA,
4 IN INFORMATICA E FISICA, E 1 IN TUTTE
E TRE LE DISCIPLINE. QUANTE PERSONE
(ALMENO UNA DI)
SI SONO LAUREATE IN QUESTE

DISCIPLINE NELL' A.A. 19/20 ?

PONIAMO

$$A = \{ \text{LAUREATI IN INFORMATICA} \}$$

$$B = \{ \text{" " MATEMATICA} \}$$

$$C = \{ \text{" " FISICA} \}.$$

DOBBIAMO CALCOLARE $|A \cup B \cup C|$.

USIAMO IL PRINCIPIO DI I.-E.

ABBIAMO

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$

$$+ |A \cap B \cap C| =$$

$$= 28 + 22 + 21 - 8 - 4 - 6 + 1$$

$$= 54.$$

SONDAGGIO: SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE
 $\text{MCD}(a, b) \mid c$, E SIA $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ UNA SOLUZ.
 PARTICOLARE DI

$$ax + by = c. \quad (48) \quad (*)$$

ALLORA TUTTE LE SOLUZ. DI (*) SONO DATE
 DA:

a) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot b$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot a$ ^{60%} ✓ (CON $d = \text{MCD}(a, b)$)

b) $x = x_0 + \frac{t}{d} \cdot b$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot a$ ^{19%} E $t \in \mathbb{Z}$

c) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot a$, $y = y_0 - \frac{t}{d} \cdot b$ ^{2%}

d) $x = x_0 - \frac{t}{d} \cdot a$, $y = y_0 + \frac{t}{d} \cdot b$ ^{4%} e) NDQ 15%

ES.: SIA $m \in \mathbb{P}$ IL PARAMETRO PUBBLICO DI UN CODICE RSA. DIMOSTRARE CHE, SE $\Phi(m)$ È NOTO, ALLORA POSSO ROMPERE RSA.

ABBIAMO CHE

$$m = p \cdot q \quad , \quad \Phi(m) = (p-1)(q-1)$$

$$\Rightarrow p = \frac{m}{q} \Rightarrow \Phi(m) = \left(\frac{m}{q} - 1 \right) (q-1)$$

$$\Rightarrow q \cdot \Phi(m) = (m - q)(q-1)$$

$$\Rightarrow q \cdot \Phi(m) = nq - q^2 - m + q$$

$$\Rightarrow q^2 + q(\Phi(m) - m - 1) + m = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{m+1 - \Phi(m) \pm \sqrt{(\Phi(m) - m - 1)^2 - 4m}}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{m}{q}.$$

ES. : QUANTI SOTTOINSIEMI DI $[7]$ CI SONO
DI CARDINALITÀ 4?

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE IL NUMERO È

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 7 \cdot 5 = 35.$$

POTREI ANCHE CALCOLARLO CON LA F.G.:

$$(1+x)^7 = (1+x)^3 (1+x)^3 (1+x)$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+3x^2+x^3)(1+x)$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3+3x+9x^2+9x^3+3x^4+ \\ +3x^2+9x^3+9x^4+3x^5+x^3+3x^4+3x^5+x^6)(1+x)$$

$$= (1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6)(1+x)$$

$$= (1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6+ \\ +x+6x^2+15x^3+20x^4+15x^5+6x^6+x^7)$$

$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + \overset{\uparrow}{35}x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7.$$

$$\binom{7}{4}$$

ES. : CALCOLARE

$$|\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A\}|.$$

ABBIAMO CHE

$$\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A\} = X \cup Y$$

DOVE

$$X = \{A \subseteq [9] : 2 \notin A\}$$

E

$$Y = \{A \subseteq [9] : 8 \notin A\}.$$

DEVO CALCOLARE $|X \cup Y| \Rightarrow$ USO I.E.

ABBIAMO

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

MA

$$|X| = |\{A \subseteq [9] : 2 \notin A\}| = |\{A \subseteq \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\}| \\ = 2^8$$

E

$$|Y| = \dots = 2^8$$

INFINE

$$|X \cap Y| = |\{A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ \& \& } 8 \notin A\}|$$

$$= \left| \{ A \subseteq \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\} \} \right| = 2^7.$$

QUINDI

$$|\{ A \subseteq [9] : 2 \notin A \text{ o } 8 \notin A \}| = |X \cup Y|$$

$$= 2^8 + 2^8 - 2^7 = 2^7 (2 + 2 - 1)$$

$$= 3 \cdot 2^7.$$

ES. : CALCOLARE

$$\left| \left\{ f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ E } f(4) \neq 4 \right\} \right|.$$

RAGIONAMENTO EURISTICO: "E" \Rightarrow INTERSE

ZIONE. FACILE? NON DIREI. PRINCIPIO

DI I-E? IMPOSSIBILE. QUINDI?

DE MORGAN!

ABBIAMO CHE

$$\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ e } f(4) \neq 4\} =$$

$$S_9 \setminus \{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ o } f(4) = 4\}$$

CALCOLIAMO QUINDI

$$|\{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ o } f(4) = 4\}|.$$

DOBBIAMO CALCOLARE

$$|X \cup Y|$$

DOVE

$$X = \{f \in S_9 : f(2) = 2\}$$

E

$$Y = \{f \in S_9 : f(4) = 4\}.$$

APPLICHIAMO I.E. DOBBIAMO CALCOLARE

RE

$$|X|, \quad |Y|, \quad |X \cap Y|.$$

ABBIAMO CHE

$$|X| = |\{f \in S_9 : f(2) = 2\}| = 8!$$

$$\left(f = \begin{array}{cccccccc} x_1 & 2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \right)$$

8 7 6 ETC...

SCELTE

SIMILMENTE $|Y| = \dots = 8!$. INFINE

$$|X \cap Y| = |\{f \in S_9 : f(2) = 2 \text{ E } f(4) = 4\}|$$

$$= 7! \quad \left(\begin{array}{cccccccc} x_1 & 2 & x_3 & 4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} = f \right)$$

7 SCELTE

PERTANTO

$$|X \cup Y| = 8! + 8! - 7!$$

CONCLUENDO

$$|\{f \in S_9 : f(2) \neq 2 \text{ e } f(4) \neq 4\}| =$$

$$9! - (|X \cup Y|) = 9! - (8! + 8! - 7!)$$

$$= 9! - 8! - 8! + 7!$$

$$= (9 \cdot 8 - 8 - 8 + 1) \cdot 7! = 57 \cdot 7!$$

ES. : QUANTI NUMERI DI CELLULARE CI SONO CHE
HANNO TRE CIFRE CONSECUTIVE UGUALI ?

VOGLIAMO CALCOLARE

$$\left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_i = x_{i+1} = x_{i+2} \text{ PER} \right. \right. \\ \left. \left. \text{QUALCHE } 1 \leq i \leq 5 \right\} \right|$$

$$([0, 9] = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.)$$

PONIAMO

$$A_1 = \{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 \}$$

$$A_2 = \{ \text{ " " " : } x_2 = x_3 = x_4 \}$$

$$A_3 = \{ \text{ " " " : } x_3 = x_4 = x_5 \}$$

$$A_4 = \{ \text{ " " " : } x_4 = x_5 = x_6 \}$$

$$A_5 = \{ \text{ " " " : } x_5 = x_6 = x_7 \}$$

DOBBIAMO QUINDI CALCOLARE

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|.$$

APPLICHIAMO I.-E.:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_5| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| - \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| - |A_4 \cap A_5| - \\ &- |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |\cancel{A_4} \cap A_1| \\ &- |A_2 \cap A_5| - |A_1 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4 \cap A_5| \\
& + |A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \\
& + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| - \\
& - |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5|.
\end{aligned}$$

ABBIAMO CHE

$$|A_1| = 10^5, \quad |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 10^5$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \right\} \right|$$
$$= 10^4$$

SIMILMENTE

$$|A_2 \cap A_3| = 10^4, \quad |A_3 \cap A_4| = 10^4, \quad |A_4 \cap A_5| = 10^4.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_3| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5\}| \\ = 10^3$$

SIMIL.

$$|A_2 \cap A_4| = 10^3, \quad |A_3 \cap A_5| = 10^3.$$

ANCHE

$$x_4 = x_5 = x_6$$

$$|A_1 \cap A_4| = |\{(x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 \text{ e } x_4 = x_5 = x_6\}|$$

$$= 10^3$$

E simil.

$$|A_2 \cap A_5| = 10^3.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_5| = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : \begin{array}{l} x_1 = x_2 = x_3 \text{ E} \\ x_5 = x_6 = x_7 \end{array} \right\} \right| = 10^3.$$

INOLTRE

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \right\} \right|$$

$$= 10^3$$

E simic.

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left| \left\{ (x_1, \dots, x_7) \in [0, 9]^7 : x_1 = x_2 = x_3 = \right. \right.$$

$$\left. = x_4 = x_5 = x_6 \right\} \right| = 10^2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_5| = 10^2$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 10^2, \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_5| = 10$$

$$|A_1 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2, \quad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10^3$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 10^2, \quad |A_2 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2$$

$$|A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10^3.$$

ANCHE

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10^2, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 10^1$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| = 10, \quad |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10^2,$$

INFINE

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 10.$$

CONCLUDENDO

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| &= 5 \cdot 10^5 - \left(4 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 \right. \\
 &\quad \left. + 2 \cdot 10^3 + 10^3 \right) + \left(10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^{\cancel{3}}^2 + 2 \cdot 10^3 + 10 \right) \\
 &\quad - \left(3 \cdot 10 + 2 \cdot 10^2 \right) + 10 =
 \end{aligned}$$

$$= 5 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 - 10$$

$$= 457390$$

ES. : DIECI PERSONE SI DIVIDONO IN 5 GRUPPI, OGNUNO DI 2 PERSONE. IN QUANTI MODI PUO' AVVENIRE QUESTO? LE PERSONE SONO TRA LORO DISTINGUIBILI. QUINDI

$$\{\text{PERSONE}\} \leftrightarrow [10]$$

E

$$\{\text{GRUPPI}\} \leftrightarrow \{\text{SCATOLE}\}$$

PERTANTO IL NUMERO E'

$$\binom{10}{2, 2, 2, 2, 2} = \frac{\overset{5}{10} \cdot \overset{4}{9} \cdot \overset{3}{8} \cdot \overset{2}{7} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$= 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot$$

ES. : QUANTE PAROLE DIVERSE POSSONO ESSERE FORMATE PERMUTANDO (ANAGRAMMANDO) LE LETTERE DELLA PAROLA MISSISSIPPI ?

SI CHIEDE IL NUMERO DI PERMUTAZIONI
DEL MULTINSIEME

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \{M^1, i^4, S^4, P^2\}.$$

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE QUESTO
E'

$$\binom{11}{1, 4, 4, 2} = \frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2}$$

ES. : TROVARE UNA RICORSIONE SOD-
DISFATTA DAL NUMERO DI COMPOSIZIO-
NI DI n IN PARTI UGUALI AD 1 O 2.

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO.

ABBIAMO CHE:

$$n=1 \Rightarrow (1) \Rightarrow f(1)=1.$$

$$n=2 \Rightarrow (2), (1,1) \Rightarrow f(2)=2$$

$$n=3 \Rightarrow (2,1), (1,2), (1,1,1) \Rightarrow f(3)=3$$

$$n=4 \Rightarrow (2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (1,1,1,1) \\ \Rightarrow f(4)=5$$

$$n=5 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(5)=8.$$

SEMBRA FIBONACCI. PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

DIMOSTRIAMOLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \underbrace{[2] \times \dots \times [2]}_k : k \in \mathbb{P}, \right. \right. \\ \left. \left. \begin{array}{c} \text{"} \\ a_1 + \dots + a_k = n \end{array} \right\} \right|$$

MA

$$\left\{ (a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_k = n \right\}$$

//

$$\{(a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_k = n, \\ a_k = 1\} \quad (+)$$

$$\{(a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_k = n, \\ a_k = 2\}$$

(DOVE " $C = A \uplus B$ " SIGNIFICA
 " $C = A \cup B$ E $A \cap B = \emptyset$ "))

MA

$$\left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_k = n, a_k = 1 \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ (a_1, \dots, a_{k-1}) \in [2]^{k-1} : k-1 \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_{k-1} = n-1 \right\} \right|$$

$$= f(n-1)$$

SIMILMENTE

$$|\{(a_1, \dots, a_k) \in [2]^k : k \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_k = n, a_k = 2\}|$$

$$= |\{(a_1, \dots, a_{k-1}) \in [2]^{k-1} : k-1 \in \mathbb{P}, a_1 + \dots + a_{k-1} = n-2\}|$$

$$= f(n-2)$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

ES.: SIA $m \in \mathbb{P}$. CALCOLARE IL NUMERO DI
SOTTOINSIEMI DI $[m]$ CHE NON CONTENGONO
NO DUE INTERI CONSECUTIVI.

PER ESEMPIO:

$$m=1 \Rightarrow [1] \Rightarrow \{1\}, \emptyset \Rightarrow 2$$

$$m=2 \Rightarrow [2] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\} \Rightarrow 3$$

$$n=3 \Rightarrow [3] \Rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\},$$

$$\{1, 3\} \Rightarrow 5$$

$$n=4 \Rightarrow [4] \Rightarrow \dots \Rightarrow 8$$

SIA $f(n)$ IL NUMERO CERCATO
($\Rightarrow f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5, f(4)=8$).

SEMBRA LA SEQUENZA DI FIBONACCI

PENSIAMO QUINDI CHE

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

PER $\forall n \geq 3$.

CERCHIAMO DI DIMOSTRARLO.

ABBIAMO CHE

$$f(n) = \left| \left\{ S \subseteq [n] : \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n-1 \\ i \in S \Rightarrow i+1 \notin S \end{array} \right\} \right|$$

MA

$$\left\{ S \subseteq [m]: \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m-1 \\ i \in S \end{array} \Rightarrow i+1 \notin S \right\} =$$

$$\left\{ S \subseteq [m]: S \text{ SPARSO}, m \in S \right\} \cup$$

$$\left\{ S \subseteq [m]: S \text{ SPARSO}, m \notin S \right\}$$

DOVE S È SPARSO SE E SOLO SE

$$1 \leq i \leq m-1, i \in S \Rightarrow i+1 \notin S$$

D'ALTRONDE

$$\begin{aligned} \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, m \in S\} = \\ = \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, m \in S, m-1 \notin S\} \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, m \notin S\} = \\ = \{S \subseteq [m-1] : S \text{ SPARSO}\} \end{aligned}$$

QUINDI

$$|\{S \subseteq [m]: S \text{ SPARSO}, m \notin S\}| =$$

(DEF.)

$$= |\{S \subseteq [m-1]: S \text{ SPARSO}\}| \stackrel{\downarrow}{=} f(m-1) \quad (*)$$

~~(INDUZIONE)~~

INOLTRE LA FUNZIONE

$$S \mapsto SU\{n\}$$

E' UNA BIEZIONE DA

$$\{S \subseteq [n-2]: S \text{ SPARSO}\}$$

A

$$\{T \subseteq [n]: T \text{ SPARSO}, n \in T, n-1 \notin T\}.$$

QUINDI

$$|\{T \subseteq [n]: T \text{ SPARSO}, n \in T, n-1 \notin T\}|$$

(~~INDUZIONE~~)(**)

$$= |\{S \subseteq [n-2]: S \text{ SPARSO}\}| \stackrel{\uparrow}{=} f(n-2)$$

(DEF. DI f)

PERTANTO

$$f(m) = \left| \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}\} \right| =$$

$$= \left| \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO } m \notin S\} \right| +$$

$$+ \left| \{S \subseteq [m] : S \text{ SPARSO}, m \in S\} \right|$$

(*)

\Downarrow
 \equiv

$$f(m-1) + f(m-2).$$

\Uparrow

(**)

QUINDI

$$f(2) = 3, \quad f(1) = 2$$

E

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

SE $n \geq 3$. SIA $\{F_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ LA SEQUENZA
DI FIBONACCI (QUINDI $F_0 = F_1 = 1$,

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ SE $n \geq 2$). ALLORA

$$f(n) = F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{P}.$$

ES. : RISOLVERE LA RICORSIONE LINEARE
A COEFFICIENTI COSTANTI

$$f(m) = 2 \cdot f(m-1) + f(m-2) \quad (*)$$

PER $\forall m \geq 2$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 3.$$

PORTIAMO LA RICORSIONE IN FORMA
STANDARD:

$$f(m+2) = 2 \cdot f(m+1) + f(m)$$

PER $\forall m \geq 0$. L'EQUAZIONE CARATTERISTICA È

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

LE RADICI SONO

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

E QUINDI

$$\gamma_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{1}, \quad \gamma_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Di MOLTEPLICITÀ $d_1 = 1$ E $d_2 = 1$ (IN $E_{\mathbb{F}_2}$
FETTI $x^2 - 2x - 1 = (x - (1 + \sqrt{2}))^1 (x - (1 - \sqrt{2}))^1$).

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists P_1(x), P_2(x)$
 $\in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE $\text{DEG}(P_1) \leq d_1 - 1$, $\text{DEG}(P_2)$
 $\leq d_2 - 1$ E

$$f(m) = P_1(m) \cdot (\gamma_1)^m + P_2(m) \cdot (\gamma_2)^m$$

PER $\forall m \geq 0$. QUINDI $\exists a, b \in \mathbb{C}$ TALI

CHE

$$f(m) = a \cdot (1 + \sqrt{2})^m + b \cdot (1 - \sqrt{2})^m$$

PER $\forall m \geq 0$. PER TROVARE a E b USIAMO
LE C.I. . ABBIAMO

$$\begin{cases} 1 = f(0) = a + b \\ 3 = f(1) = a \cdot (1 + \sqrt{2}) + b \cdot (1 - \sqrt{2}) \end{cases}$$

QUINDI

$$b = 1 - a$$

⇓

$$3 = a \cdot (1 + \sqrt{2}) + (1 - a) \cdot (1 - \sqrt{2})$$

⇓

$$3 - 1 + \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})$$

⇓

$$a = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

⇓

$$b = 1 - a = 1 - \frac{1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

CONCLUDENDO

$$f(m) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot (1+\sqrt{2})^m + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \cdot (1-\sqrt{2})^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$.

ES. : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A COEFF.
COSTANTI

$$f(m+3) = -2 \cdot f(m+2) - 2 \cdot f(m+1) - 4 \cdot f(m)$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$, CON LE CONDIZIONI INIZIALI

$$f(0)=0, f(1)=2, f(2)=0.$$

LA RIC. È GIÀ IN FORMA STANDARD. L'EQ. CARAT.

È

$$x^3 = -2x^2 - 2x - 4$$

CIOÈ

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0. \quad (*)$$

VEDIAMO CHE $x = -2$ È UNA RADICE DI (*)

USIAMO RUFFINI

$x^3 + 2x^2 + 2x + 4$	$x + 2$
$x^3 + 2x^2$	$x^2 + 2$
$2x + 4$	
$2x + 4$	
0	

QUINDI

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = (x^2 + 2)(x + 2)$$

RISOLVIAMO $x^2 + 2 = 0$. ABBIAMO

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{\pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{\pm \sqrt{4(-2)}}{2} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-2}}{2} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{-2}}{2} = \pm \sqrt{-2}$$

$$= \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = \pm i \cdot \sqrt{2}$$

PERTANTO LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = i\sqrt{2}, \quad \gamma_3 = -i\sqrt{2}$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1=1$, $d_2=1$, E $d_3=1$. SAPPIAMO
DALLA TEORIA CHE $\exists P_1(x), P_2(x), P_3(x) \in \mathbb{C}[x]$
TALI CHE $\text{DEG}(P_1) \leq d_1-1$, $\text{DEG}(P_2) \leq d_2-1$, $\text{DEG}(P_3)$
 $\leq d_3-1$ E

$$f(m) = P_1(m) \cdot (\gamma_1)^m + P_2(m) \cdot (\gamma_2)^m + P_3(m) \cdot (\gamma_3)^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI CHE

$$f(m) = a \cdot (-2)^m + b \cdot (i\sqrt{2})^m + c \cdot (-i\sqrt{2})^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. PER TROVARE $a, b, c \in \mathbb{C}$ USIAMO
LE C.I.. ABBIAMO

$$0 = f(0) = a + b + c$$

$$2 = f(1) = a \cdot (-2) + b \cdot (i\sqrt{2}) + c \cdot (-i\sqrt{2})$$

$$0 = f(2) = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (i\sqrt{2})^2 + c \cdot (-i\sqrt{2})^2$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -2a+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot c\cdot\sqrt{2}=2 \\ 4\cdot a+(-2)\cdot b+c(-2)=0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$a = -b - c$$

$$\begin{cases} -2(-b-c)+i\sqrt{2}\cdot b-i\cdot\sqrt{2}\cdot c=2 \\ 4(-b-c)+(-2b)-2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(2+i\sqrt{2})+c(2-i\sqrt{2})=2 \\ b(-6)+c(-6)=0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} b(2+i\sqrt{2})+c(2-i\sqrt{2})=2 \\ b+c=0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$b=-c$$

$$\left\{ -c \left(2 + i\sqrt{2} \right) + c \left(2 - i\sqrt{2} \right) = 2 \right.$$

\Downarrow

$$c \left(-2i\sqrt{2} \right) = 2$$

\Downarrow

$$c = \frac{2}{-2i\sqrt{2}} = \frac{1}{-i\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{-i}{\sqrt{2}},$$

$$a = -b - c = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0.$$

CONCLUDENDO

$$f(n) = \frac{-i}{\sqrt{2}} (i\sqrt{2})^n + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot (-i\sqrt{2})^n$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$.

ES. : RISOLVERE LA RIC. LINEARE A
COEFF. COSTANTI

$$f(n+3) = -f(n+2) + 8 \cdot f(n+1) + 12 \cdot f(n)$$

PER $\forall n \in \mathbb{N}$, CON LE C.I. $f(0)=0$, $f(1)=5$, $f(2)=0$.

LA RIC. E' GIA' IN FORMA STANDARD.
L'EQ. CARATT. E'

$$x^3 = -x^2 + 8 \cdot x + 12$$

CIOE'

$$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = 0. \quad (*)$$

VEDIAMO CHE $x = -2$ E' SOLUZ. DI

(*). USIAMO RUFFINI. ABBIAMO

$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12$	$x + 2$
$x^3 + 2x^2$	
<hr/>	$x^2 - x - 6$
$-x^2 - 8 \cdot x - 12$	
$-x^2 - 2x$	
<hr/>	
$-6 \cdot x - 12$	
$-6 \cdot x - 12$	
<hr/>	
0	

PERTANTO

$$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12 = (x^2 - x - 6)(x + 2)$$

RISOLVIAMO $x^2 - x - 6 = 0$. ABBIAMO

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

QUINDI LE RADICI DELL'EQ. CARATT.

SONO

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -2$$

MA $\gamma_1 = \gamma_3$, QUINDI LE RADICI DISTINTE
SONO

$$\gamma_1 = -2, \quad \gamma_2 = 3$$

DI MOLTEPLICITÀ $d_1 = 2$ E $d_2 = 1$

(IN EFFETTI $x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x - (-2))^2$

$\cdot (x - 3)^1$). SAPPIAMO DALLA TEORIA

CHE $\exists P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ TALI CHE

$$\text{DEG}(P_1(x)) \leq d_1 - 1, \quad \text{DEG}(P_2(x)) \leq d_2 - 1, \quad E$$

$$f(m) = P_1(m) \cdot (\gamma_1)^m + P_2(m) \cdot (\gamma_2)^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. QUINDI $\exists a, b, c \in \mathbb{C}$ TALI
CHE

$$f(m) = (a + b \cdot m) \cdot (-2)^m + c \cdot (3)^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$. PER TROVARE a, b, c
USIAMO LE C.I.:

$$\begin{cases} 0 = f(0) = a + c \\ 5 = f(1) = (a+b) \cdot (-2)^1 + c \cdot (3)^1 \\ 0 = f(2) = (a+2 \cdot b) \cdot (-2)^2 + c \cdot (3)^2 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -2a - 2b + 3 \cdot c = 5 \\ 4 \cdot a + 8 \cdot b + 9 \cdot c = 0 \end{cases}$$

$$c = -a$$

$$\begin{cases} -2a - 2b + 3 \cdot (-a) = 5 \\ 4 \cdot a + 8 \cdot b + 9 \cdot (-a) = 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} -5a - 2b = 5 \\ -5 \cdot a + 8 \cdot b = 0 \end{cases}$$

\Downarrow

$$5 \cdot a = 8 \cdot b$$

\Downarrow

$$-8 \cdot b - 2b = 5$$

\Downarrow

$$-10 \cdot b = 5$$

\Downarrow

$$b = -\frac{1}{2}$$

⇓

$$5 \cdot a = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 5 \cdot a = -4$$

$$\Rightarrow a = \frac{-4}{5} \Rightarrow c = \frac{4}{5}. \text{ CONCLUDENDO}$$

$$f(m) = \left(-\frac{4}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot m\right) \cdot (-2)^m + \frac{4}{5} \cdot (3)^m$$

PER $\forall m \in \mathbb{N}$.