ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 27

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ una successione in $\mathbb{R}$.

La SERIE NUMERICA associata è

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=k_0}^{n} a_k}_{\text{SOMMA PARZIALE } S_n} = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{indeterminata} \end{cases}$$

somma della serie — comportamento della serie

ESEMPI

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 0.\overline{1} = \frac{1}{9}$

  $10 \cdot 0.\overline{1} = 1.\overline{1} = 1 + 0.\overline{1}$

  $(10-1)0.\overline{1} = 1 \Rightarrow 0.\overline{1} = \frac{1}{9}$

- $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \nexists$

dove $S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n$

- $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

dove

Scomposizione in fratti semplici

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

SOMMA TELESCOPICA

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ SERIE GEOMETRICA di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \underset{\text{per induzione}}{=} \begin{cases} n+1 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Quindi

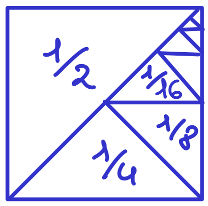
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

perchè per $x \neq 1$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x|<1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

Si noti che se $|x|<1$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} x^k \underset{j=k-k_0}{=} \sum_{j=0}^{\infty} x^{j+k_0} = x^{k_0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{x^{k_0}}{1-x}$$

Ad esempio $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

OSSERVAZIONI

1) Se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_k = b_k$ definitivamente allora le serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento (ma possono avere somme diverse).

2) Se $a_k \geq 0$ $\forall k \geq 0$ allora $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ è una succ. crescente e $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

convergente

divergente

La serie non può essere indeterminata.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA)

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente allora $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

dim. Per ipotesi $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to L \in \mathbb{R}$ e per $n \geq 1$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$$

Così

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L - L = 0. \qquad \square$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$

Non converge perché

$$\lim_{k\to\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = 1 \neq 0$$

La serie diverge a $+\infty$ perché $k\sin\left(\frac{1}{k}\right) > 0$.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ SERIE ARMONICA

$a_k \to 0$ è condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza

Per verificare la divergenza si nota che

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\vee} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\vee} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{\vee}$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{8}_{2}} + \dots + \cancel{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n}_{2}}$$

$$\geq 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente $(\forall k \geq N)$

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente perché $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ $\forall k \geq 2$

e
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

- $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\cos(k)} \overset{\cos(k)\leq 1}{\geq} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ definitivamente $(\forall k \geq N)$

Se $\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, +\infty)$ ossia $a_k \sim L b_k$ per $k \to \infty$

EQUIVALENZA ASINTOTICA

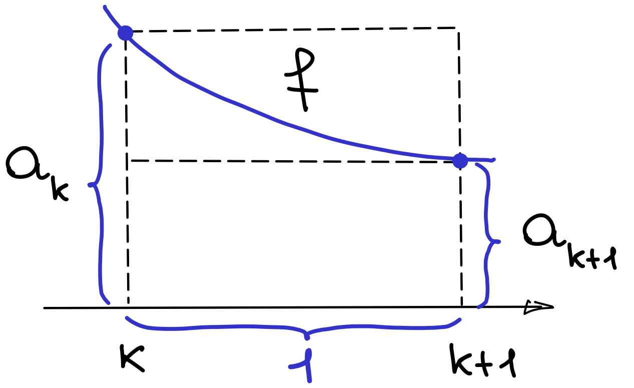
allora
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ converge}$$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO INTEGRALE)

Sia f una funzione decrescente e ≥ 0 in $[1,+\infty)$ e sia $a_k = f(k)$ $\forall k \geq 1$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

dim. Confrontando le aree si ha che



$$\Longrightarrow \quad a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k$$

area rettangolo inscritto — area rettangolo circoscritto

Sia $b_k = \int_k^{k+1} f(x)\,dx$ allora $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Quindi applicando il teorema del confronto rispetto a $a_{k+1} \leq b_k$ e $b_k \leq a_k$ si ottiene la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE

Per il confronto integrale, dalle condizioni di convergenza degli integrali impropri si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\log(k))^{\beta}} \text{ converge} \iff \boxed{\begin{array}{c} \alpha > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array}}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k-100\log(k)}{k(k+\sin(k))}$ converge? NO

$$0 < \frac{3k-100\log(k)}{k(k+\sin(k))} = \frac{\cancel{k}\left(3-\frac{100\log(k)}{k}\right)}{k^{\cancel{2}}\left(1-\frac{\sin(k)}{k}\right)} \sim \frac{3}{k}$$

definitivamente

dato che $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$, per il confronto asintotico

anche la serie data diverge a $+\infty$.