2)

a) $\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

$a(x) = 2$

QUINDI

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{2x}$$

QUINDI INTEGRIAMO

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int \cancel{e^{2x}} \cdot 3\cancel{e^{-2x}}\,dx = \int 3\,dx = 3x + c$$

DUNQUE LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} f(x) = e^{-2x} \cdot (3x + c)$$

CAUCHY

$1 = y(0) = e^{-2(0)}(3\cdot 0 + c) = 1\cdot c$

COSÌ LA SOLUZIONE CERCATA IN $\mathbb{R}$ È

$$y(x) = e^{2x}(3x+1)$$

b) $$\begin{cases} y'(x) + 2x\,y(x) = x e^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

$a(x) = 2x$

QUINDI

$$A(x) = \int 2x\,dx = 2\int x\,dx = x^2$$

IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{x^2}$$

QUINDI INTEGRANDO

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int \cancel{e^{x^2}} \cdot x\,\cancel{e^{-x^2}}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

DUNQUE LA SOLUZIONE GENERALE È

$$Y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\,dx = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

CAUCHY

$$Y(1) = e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} + c\right)$$

DA CUI SI RICAVA CHE $c = \frac{1}{2}$.

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $\mathbb{R}$ È

$$Y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{x^2+1}{2e^{x^2}}$$

c)

$$\begin{cases} Y'(x) + \dfrac{Y(x)}{x+2} = 3e^x \\ Y(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{PER } x \in (-2, +\infty)$$

$$a(x) = \frac{1}{x+2} \qquad \text{PER} \quad x > -2$$

QUINDI

$A(x) = \ln|x+2|$

ALLORA IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{\ln(x+2)} = x+2$$

QUINDI INTEGRANDO

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int (x+2)\, 3e^x\, dx = 3\int (x+2)\, d(e^x) =$$

$$= 3\left((x+2)e^x - \int e^x\, d(x)\right) = 3(x+1)e^x + c$$

E LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\,dx = \frac{3(x+1)e^x + c}{x+2}$$

CAUCHY

$$2 = y(0) = \frac{3+c}{2} \rightarrow 2 = \frac{3}{2} + \frac{c}{2} \rightarrow 2 - \frac{3}{2} = \frac{c}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = c$$

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $(-2, +\infty)$ È

$$y(x) = \frac{3(x+1)e^{x}+1}{x+2}$$

d) $\begin{cases} y'(x) + \tan(x)\, y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$a(x) = \tan(x)$ IN $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

QUINDI

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin}{\cos(x)}\, dx =$$

$$= \int -\frac{1}{\cos(x)}\, d(\cos(x)) = -\ln|\cos(x)| = -\ln(\cos(x))$$

ALLORA IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{-\ln \cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

QUINDI INTEGRANDO

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + c$$

LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx =$$

$$= \cos(x) \cdot \left(\tan(x) + c \right) = \cos(x) \cdot \left(\frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}} + c \right) =$$

$$= \sin(x) + c \cdot \cos(x)$$

CAUCHY

$$4 = y(0) = \sin(0) + c \cdot \cos(0) = c = 4$$

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ È

$$y(x) = \sin(x) + 4 \cdot \cos(x)$$

e) PER $x \in (0, +\infty)$

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan(x) \\ \ldots \end{cases}$$

$y(1) = -1$

$a(x) = \frac{1}{x}$ PER $x \in (0, +\infty)$

QUINDI

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \ln \underset{\substack{x>0 \\ \downarrow}}{|x|} = \ln(x)$$

ALLORA IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{\ln(x)} = x$$

QUINDI INTEGRANDO

$$\int e^{A(x)} \cdot f(x)\,dx = \int x \cdot 2\arctan(x)\,dx =$$

$$= \int 2x \cdot \arctan(x)\,dx = \int \arctan(x) \cdot d(x^2) =$$

$$= x^2 \cdot \arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x^2 \cdot \arctan(x) - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x^2 \cdot \arctan(x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= x^2 \cdot \arctan(x) - x + \arctan(x) + c$$

$$= \arctan(x)(x^2+1) - x + c$$

LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot ((x^2+1)\arctan(x) - x + c)$$

CAUCHY

$$-1 = y(1) = \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}_2} - 1 + c = \frac{\pi}{2} - 1 + c \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{-1} = \frac{\pi}{2} \cancel{-1} + c \rightarrow c = \frac{-\pi}{2}$$

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $x \in (0, +\infty)$ È

$$y(x) = \frac{1}{...} \cdot ((x^2+1)\arctan(x) - x + \frac{\pi}{...}) \sim$$

$$= \frac{(x^2+1)\arctan(x)}{x} - 1 - \frac{\pi}{2x} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan(x) - 1 - \frac{\pi}{2x}$$

b) Per $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (1+x^4)\, y'(x) = -4x^3 y(x) + 3x^2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Sistemo i termini

$$(1+x^4)\, y'(x) = -4x^3 y(x) + 3x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (1+x^4)\, y'(x) + 4x^3 y(x) = 3x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y'(x) + \frac{4x^3}{(1+x^4)} y(x) = \frac{3x^2}{1+x^4}$$

Allora

$$a(x) = \frac{4x^3}{}$$

$1+x^4$

è:

$$A(x) = \int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = 4\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx =$$

$t = x^4+1 \quad , \quad dt = 4x^3\,dx$

$$= \cancel{4}\int \frac{\cancel{x^3}}{t}\,\frac{dt}{\cancel{4}\cancel{x^3}} = \int \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \ln|t|$$

$$= \ln|1+x^4|$$

IL FATTORE INTEGRANTE È

$$e^{A(x)} = e^{\ln(1+x^4)} = 1+x^4$$

QUINDI INTEGRANDO

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int (\cancel{1+x^4}) \cdot \frac{3x^2}{\cancel{1+x^4}}\,dx =$$

$$= \int 3x^2 \, dx = x^3 + c$$

E LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{1+x^4} \cdot \left(x^3 + c\right)$$

CAUCHY

$$S = y(0) = c$$

QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA IN $\mathbb{R}$ È

$$y(x) = \frac{1}{1+x^4} \cdot \left(x^3 + s\right) = \frac{x^3 + s}{1+x^4}$$

---

3) a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$(3,-1)$

$(3, -1, f(3,-1))$

$$f_x(x,y) = \frac{(x-y)'(x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(\cancel{x}+y) - (\cancel{x}-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{(x-y)'(x+y) - (x-y)(x+y)'}{(x+y)^2} =$$

$$= \frac{-1(x+y) - (x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-x-\cancel{y}-x+\cancel{y}}{(x+y)^2} =$$

$$= -\frac{2x}{(x+y)^2}$$

DA CUI IL GRADIENTE IN $(3,-1)$

$$\nabla f(3,-1) = \left(f_x(3,-1),\ f_y(3,-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{2\cdot(-1)}{(3-1)^2},\ -\frac{2\cdot 3}{(3-1)^2}\right) = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$$

(ii) il piano tangente al grafico di f nel punto $(3,-1,f(3,-1))$ è

$$z = f(3,-1) + f_x(3,-1)(x-3) + f_y(3,-1)(y+1)$$

$$= \frac{3+1}{3-1} - \frac{1}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(y+1) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2}x + \cancel{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}y - \cancel{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y$$

b) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ $\quad (1,2)$

$(1,2,f(1,2))$

$$f_x(x,y) = \left((9-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2-y^2}} \cdot -\cancel{2}x =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \left((9-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9-x^2-y^2}} \cdot -\cancel{2}y =$$

$$= -y$$

$\sqrt{9-x^2-y^2}$

DA CUI IL GRADIENTE IN $(1,2)$ E'

$$\nabla f(1,2)=\left(f_x(1,2),f_y(1,2)\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{9-1-4}},-\frac{2}{\sqrt{9-1-4}}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

COSÌ IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f NEL PUNTO $(1,2,f(1,2))$ E'

$$z=f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)=$$

$$=\sqrt{9-1-4}-\frac{1}{2}(x-1)-1(y-2)=$$

$$=2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-y+2=\frac{4+1+4}{2}-\frac{x}{2}-y=$$

$$= \frac{8}{2} - \frac{x}{2} - y$$

c) $f(x,y) = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $(1,1)$

$(1,1,f(1,1))$

$$f_x(x,y) = 2 \cdot \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)' =$$

$$= -2\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{2y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{\cancel{x^2}}} =$$

$$= -\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = 2 \cdot \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)' =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{2}{x+\frac{y}{x}} = \frac{2}{\frac{x^2+y^2}{x}} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

DA CUI IL GRADIENTE IN $(1,1)$ È

$$\nabla f(1,1) = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (-1, 1)$$

COSÌ IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f IN $(1, 1, f(1,1))$ È

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) =$$

$$= 2 \cdot \arctan(1) - 1 \cdot (x-1) + y - 1 =$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}2} - x + \cancel{1} + y - \cancel{1} = \frac{\pi}{2} - x + y$$

d) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{y}$ $\qquad (\pi, 1)$

$(\pi, 1, f(\pi, 1))$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\ldots} \cdot \cos(xy^2) \cdot y^{\cancel{2}} = y \cdot \cos(xy^2)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(\sin(xy^2))' \cdot y - \sin(xy^2)\,(y)'}{y^2} =$$

$$= \frac{\cos(xy^2)\cdot 2xy \cdot y - \sin(xy^2)}{y^2} =$$

$$= \frac{\cos(xy^2)\, 2x\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} - \frac{\sin(xy^2)}{y^2} =$$

$$= 2x\cos(xy^2) - \frac{\sin(xy^2)}{y^2}$$

DA CUI IL GRADIENTE IN $(\pi, 1)$ È

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(\pi,1),\, f_y(\pi,1)\right) =$$

$$= \left(\cos(\pi),\, 2\pi \cdot \cos(\pi) - \sin(\pi)\right) =$$

$$= \left(-1,\, 2\pi \cdot (-1)\right) = (-1, -2\pi)$$

COSÌ IL PIANO TANGENTE AL GRAFICO DI f

NEL PUNTO $(\pi, 1, f(\pi, 1))$ È

$$z = f(\pi,1) + f_x(\pi,1)(x-\pi) + f_y(\pi,1)(y-1) =$$

$$= \sin(\pi) - x + \pi + (-2\pi)(y-1) =$$

$$= -x + \pi - 2y\pi + 2\pi = 3\pi - x - 2y\pi$$

---

4) a) $f(x,y) = y^2 e^x - x^2 + x$

$$f_x(x,y) = y^2 e^x - 2x + 1$$

$$f_y(x,y) = 2e^x y$$

PER OTTENERE I PUNTI CRITICI SI RISOLVE

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$$

OSSIA

$$\begin{cases} y^2 e^x - 2x + 1 = 0 \\ \ldots \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2e^x y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0 \qquad \{ y = 0$$

E QUINDI C'È UN SOLO PUNTO CRITICO $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

INOLTRE

$$f_{xx}(x,y) = y^2 e^y - 2$$

$$f_{xy}(x,y) = e^x \cdot 2y$$

$$\parallel$$

$$f_{yx}(x,y) = 2ye^x$$

$$f_{y,y} = 2e^x$$

LA MATRICE HESSIANA

$$Hf = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

NEL PUNTO CRITICO $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -2$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0 = f_{yx}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$f_{yy}\left(\tfrac{1}{2},0\right) = 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$$

QUINDI

$$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\det(H_f) = (-2)(2\sqrt{2}) - 0 = -4\sqrt{2} < 0$$

ALLORA $\left(\frac{1}{2},0\right)$ E' UN PUNTO DI SELLA

b) $f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3$

$$f_x(x,y) = 2x - 4y$$

$$f_y(x,y) = -4x + 6y + 3y^2$$

TROVO I PUNTI CRITICI

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y \\ -8y + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = 2y \\ y(3y-2) = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

I punti critici sono $(0,0)$ e $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Le derivate seconde sono

$$f_{xx}(x,y) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = -4$$

$$f_{yx}(x,y) = -4$$

$$f_{yy}(x,y) = 6 + 6y$$

Nel punto critico $(0,0)$

$f_{xx}(0,0) = 2$

$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = -4$

$f_{yy}(0,0) = 6$

MENTRE NEL PUNTO CRITICO $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2$

$f_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = f_{yx}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = -4$

$f_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 6 + 6\left(\frac{2}{3}\right) = 6 + 4 = 10$

QUINDI LE MATRICI HESSIANE

$H_f \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ sono

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

ORA

$$\det\left(H_f(0,0)\right) = 2\cdot 6 - (-4)(-4) = 12-16 = -4 < 0$$

QUINDI $(0,0)$ È UN PUNTO DI SELLA

$$\det\left(H_f\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}\right)\right) = 2\cdot 10 - (-4)(-4) = 20-16 = 4 > 0$$

E $f_{xx}\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{2}{3}\right) = 2 > 0$

QUINDI $\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO

c) $f(x,y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$

$$f_x(x,y) = y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y)$$

$$f_y(x,y) = x - x^2 - 2xy = x(1-x-2y)$$

TROVO I PUNTI CRITICI

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ x(1-x-2y)=0 \right.$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x(1-x)=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=-2x+1 \\ x(1-x+4x-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

QUINDI I PUNTI CRITICI SONO

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

LE DERIVATE SECONDE SONO

$$f_{xx}(x,y)=-2y$$

$$f_{xy}(y,y)=1-2x-2y$$

$$f''_{yx}(x,y)=1-2x-2y$$

$$f_{yy}(x,y)=-2x$$

- NEL PUNTO CRITICO $(0,0)$

$$f_{x,x}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0)$$

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$$

- NEL PUNTO CRITICO $(1,0)$

$$f_{xx}(1,0) = 0$$

$$f_{xy}(1,0) = f_{yx}(1,0) = -1$$

$$f_{yy}(1,0) = -2$$

- NEL PUNTO CRITICO $(0,1)$

$$f_{xx}(0,1) = -2$$

$$f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = -1$$

$$f_{yy}(0,1) = 0$$

- NEL PUNTO CRITICO $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} = f_{yy}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$f_{xy}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = f_{yx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

LA MATRICE HESSIANA $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

NEI PUNTI CRITICI.

$$\det\left(H_f(0,0)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 < 0$$ PUNTO DI SELLA

$$\det\left(H_f(1,0)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right) = -1 < 0$$ PUNTO DI SELLA

$$\det\left(H_f(0,1)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 < 0$$ PUNTO DI SELLA

$$\det\left(H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

E

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} < 0$$

QUINDI $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

d) $f(x,y) = \frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y$

PER $x \neq 0$ E $y \neq 0$

$f_x(x,y) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{y} = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y}$

$f_y(x,y) = x \cdot -\frac{1}{y^2} + 2 = -\frac{x}{y^2} + 2$

TROVO I PUNTI CRITICI

$$\begin{cases} -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4y = x^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq, y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 4y^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

QUINDI C'È UN UNICO PUNTO CRITICO IN $(2,1)$

LE DERIVATE SECONDE SONO:

$$f_{xx}(x,y) = -2(-4) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{8}{x^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

E NEL PUNTO CRITICO $(2,1)$

$$f_{xx}(2,1) = 1$$

$$f_{xy}(2,1) = f_{yx}(2,1) = -1$$

$$f_{yy}(2,1) = 4$$

CALCOLO LA MATRICE HESSIANA $H_f \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

OSSIA

$$H_f(\ldots) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_f(2,1) = \begin{bmatrix} \ & \ \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{è}$$

$$\det(H_f(2,1)) = 4 - 1 = 3 > 0$$

e

$$f_{xx}(2,1) = 1 > 0$$

QUINDI $(2,1)$ È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO

---

5)

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x) \cdot \cos(3x)\, dx$$

PER LA FORMULA DI EULERO

$$\cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad \text{e QUINDI}$$

$$\cos^2(2x)\cos(3x) =$$

$$= \frac{1}{2^2} \cdot \left(e^{i2x} + e^{-i2x}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) =$$

$$\frac{1}{\ } \left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 2\right) \left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{7ix} + e^{ix} + e^{-ix} + e^{-7ix} + 2e^{3ix} + 2e^{-3ix}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{7ix} + e^{-7ix}\right) + \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + 2\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(7x) + \cos(x) + 2\cos(3x)\right)$$

cos i

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x) \cdot \cos(3x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(7x) + \cos(x) + 2\cos(3x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(7x)}{7} + \sin(x) + 2\,\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{7} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}\right) - 0\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7} \ldots 1 - \frac{2}{\ldots}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-3+21-14}{\ldots}\right) =$$

$$= \frac{\quad}{4}\left(-\frac{\quad}{7} + \cdots \frac{\quad}{3}\right) = \frac{\quad}{4}\left(\frac{\quad}{21}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{4}}{21}\right) = \frac{1}{21}$$