ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 16

ESEMPI

- $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x_0 = 0$, T_n?

Calcolo delle derivate successive:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & \cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\cos(x) \arrow[lll, bend right, "D"'] \arrow[d, "x=0"] \\
0 & 1 & 0 & -1
\end{tikzcd}$$

Così il polinomio di Taylor T_{2n+1} in $x_0 = 0$ è

$$T_{2n+1}(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$, T_n?

Calcolo delle derivate successive:

$$\begin{tikzcd}
\cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & \operatorname{sen}(x) \arrow[lll, bend right, "D"'] \arrow[d, "x=0"] \\
1 & 0 & -1 & 0
\end{tikzcd}$$

Così il polinomio di Taylor T_{2n} in $x_0 = 0$ è

$$T_{2n}(x) = 1 + 0 \cdot x - 1 \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

- $f(x)=(1+x)^b$, $x_0=0$, T_n?

Calcolo delle derivate successive:

$$(1+x)^b \xrightarrow{D} b(1+x)^{b-1} \xrightarrow{D} b(b-1)(1+x)^{b-2}$$
$$\downarrow x=0 \qquad \downarrow x=0 \qquad \downarrow x=0$$
$$1 \qquad b \qquad b(b-1)$$

$$\xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} b(b-1)\cdots(b-n+1)(1+x)^{b-n}$$
$$\downarrow x=0$$
$$b(b-1)\cdots(b-n+1)$$

Così il polinomio di Taylor T_n in $x_0=0$ è

$$T_n(x)=1+bx+\frac{b(b-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{b}{k}x^k \quad \text{dove } \binom{b}{k}=\frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!}$$

COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO con $b\in\mathbb{R}$

Ad esempio:

1) il polinomio di Taylor T_5 di $f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ in $x_0=0$ è

$$T_5(x)=\sum_{k=0}^{5}\binom{-1}{k}x^k=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$$

2) il polinomio di Taylor T_3 di $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$ in $x_0=0$ è

$$T_3(x)=\sum_{k=0}^{3}\binom{1/2}{k}x^k=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$$

- $f(x) = tg(x)$, $x_0 = 0$, T_3?

Calcolo delle derivate:

$$tg(x) \xrightarrow{D} 1+tg^2(x) \xrightarrow{D} 2tg(x)(1+tg^2(x)) = 2tg(x)+2tg^3(x)$$

$$tg(x) \xrightarrow{x=0} 0, \quad 1+tg^2(x) \xrightarrow{x=0} 1, \quad 2tg(x)+2tg^3(x) \xrightarrow{x=0} 0$$

$$\xrightarrow{D} 2(1+tg^2(x)) + 6tg^2(x)(1+tg^2(x)) \xrightarrow{x=0} 2$$

Così $T_3(x) = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}$

- $f(x) = arctg(x)$, $x_0 = 0$, T_3?

Calcolo delle derivate:

$$arctg(x) \xrightarrow{D} (1+x^2)^{-1} \xrightarrow{D} -(1+x^2)^{-2}\cdot 2x \xrightarrow{D} -2(1+x^2)^{-2} + 2x\cdot(\cdots)$$

$$arctg(x) \xrightarrow{x=0} 0, \quad (1+x^2)^{-1} \xrightarrow{x=0} 1, \quad -(1+x^2)^{-2}\cdot 2x \xrightarrow{x=0} 0, \quad -2(1+x^2)^{-2} + 2x\cdot(\cdots) \xrightarrow{x=0} -2$$

Così $T_3(x) = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}$.

O-PICCOLO (simbolo di LANDAU)

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ diciamo che f è un O-PICCOLO di g per $x \to x_0$ e si scrive $f \in o(g)$ se $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ossia se f è un infinitesimo di ordine superiore a g.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Se f è derivabile n volte in $I(x_0,r)$ con $r>0$ allora

$$\forall x \in I(x_0,r) \quad f(x)=T_{n,x_0}(x)+o((x-x_0)^n).$$

dim. Dobbiamo dimostrare che per $h=x-x_0 \to 0$

$$\frac{f(x)-T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k}{h^n}$$

$$=\frac{f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k}{h^n}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\xrightarrow{?}0$$

Applicando $n-1$ volte de L'Hôpital si ha

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot h^k}{h^n}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k h^{k-1}}{n h^{n-1}}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{h\to0}\frac{f''(x_0+h)-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k(k-1) h^{k-2}}{n(n-1) h^{n-2}}$$

definizione di derivata

$$\overset{H}{=}\dots\overset{H}{=}\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+h)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,h}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

da cui segue la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE Si dimostra che $T_{n,x_0}(x)$ è l'unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che

$$f(x)=P(x)+o((x-x_0)^n)$$

Principali SVILUPPI DI TAYLOR: per $x\to 0$

$$\boxed{e^x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\boxed{\frac{x^n}{n!}}+o(x^n)$$

$$\boxed{\log(1+x)}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\boxed{(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}}+o(x^n)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x)}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\boxed{(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}+o(x^{2n+2})$$

$$\boxed{\cos(x)}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\boxed{(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}}+o(x^{2n+1})$$

$$\boxed{(1+x)^b}=1+bx+\frac{b(b-1)}{2!}x^2+\cdots+\boxed{\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{n!}x^n}+o(x^n)$$

$$\boxed{\operatorname{arctg}(x)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\boxed{(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}+o(x^{2n+2})$$

ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0}\frac{(xe^x-\log(1+x))^2}{\operatorname{sen}(x^2-x^4)-x^2}=\ ?$$

Ricordando che per $x\to 0$

$$e^x=1+x+o(x),\ \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),\ \operatorname{sen}(x)=x+o(x^2)$$

abbiamo che

$$\frac{(xe^x-\log(1+x))^2}{\operatorname{sen}(x^2-x^4)-x^2}=\frac{(x(1+x+o(x))-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)))^2}{x^2-x^4+o((x^2-x^4)^2)-x^2}$$

$$= \frac{\left(\cancel{x}+x^2+o(x^2)-\cancel{x}+\frac{x^2}{2}-o(x^2)\right)^2}{\cancel{x^2}-x^4+o(x^4)-\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)^2}{-x^4+o(x^4)} = \frac{\frac{9}{4}x^4+\overbrace{3x^2o(x^2)+o(x^4)}^{=o(x^4)}}{-x^4+o(x^4)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{9}{4}+o(1)\right)}{\cancel{x^4}\left(-1+o(1)\right)} \longrightarrow -\frac{9}{4}$$

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{1/x^2} = ?$

Per $x\to 0$,

$$\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\right)$$

$\operatorname{sen}(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\log\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right)$$

$\log(1+t)=t+o(t)$

$t=-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\to 0$

$$= \exp\left(\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6}+\underbrace{o(x^2)+o\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}_{=o(x^2)}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{6}+o(1)\right) \longrightarrow e^{-\frac{1}{6}}$$