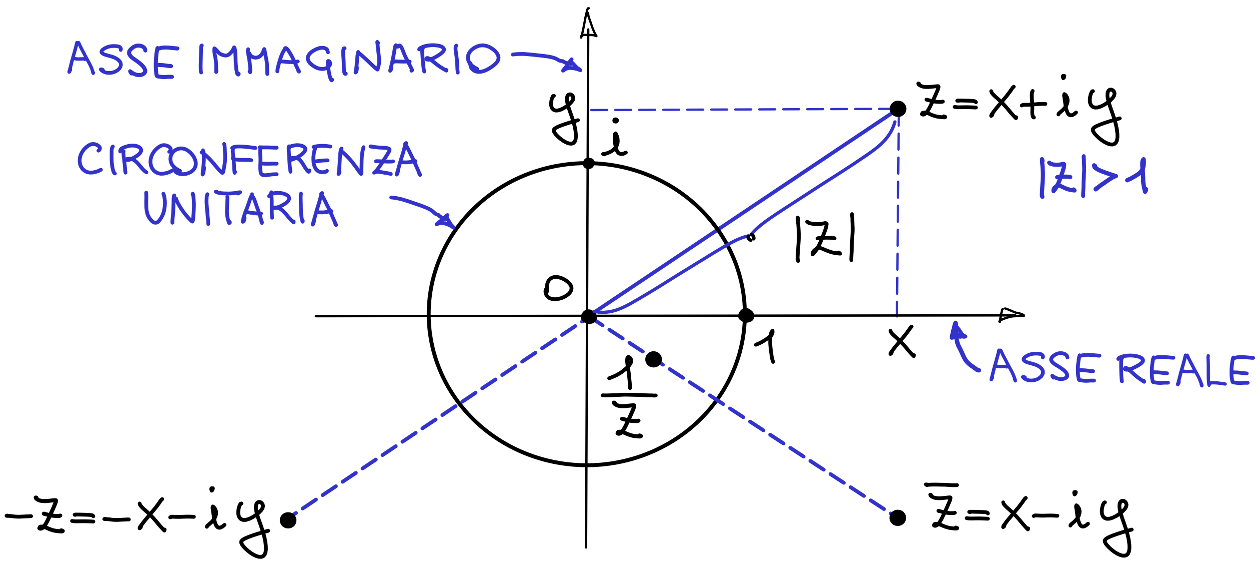
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 30

NUMERI COMPLESSI

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ si estende all'insieme $\mathbb{C}$ dei NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

dove il simbolo i indica l'UNITÀ IMMAGINARIA. Ogni numero complesso $z = x + iy$ è individuato da una coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dunque si può rappresentare come un punto nel PIANO COMPLESSO $\mathbb{C}$.



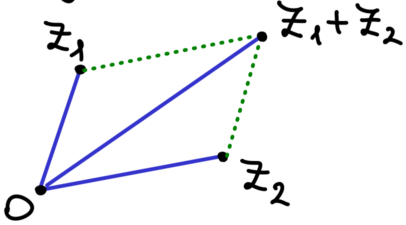
Notazioni:

- $z = x + iy$ FORMA CARTESIANA di z
- $\mathrm{Re}(z) = x$ PARTE REALE di z
- $\mathrm{Im}(z) = y$ PARTE IMMAGINARIA di z
- $\bar{z} = x - iy$ CONIUGATO di z
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ MODULO di z

In $\mathbb{C}$ sono definite due operazioni ossia la SOMMA e il PRODOTTO le cui proprietà rendono $\mathbb{C}$ un CAMPO non ordinato.

SOMMA: se $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$ allora

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



L'elemento neutro è $0 = 0 + i0$

L'opposto di $z = x + iy$ è $-z = -x - iy$.

PRODOTTO: se $z_1 = x_1 + i y_1$ e $z_2 = x_2 + i y_2$ allora

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) \\ &= x_1 x_2 + i y_1 x_2 + i x_1 y_2 + \overset{= -1 \text{ definizione}}{\boxed{i \cdot i}}\, y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

L'elemento neutro è $1 = 1 + i0$.

Il reciproco di $z = x + iy \neq 0$ è

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

dove

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - \overset{-(-1)}{i^2} y^2 \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

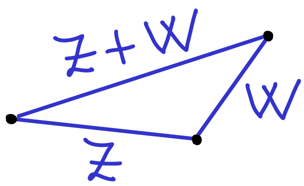
Altre proprietà del coniugio e del modulo:

1) $\overline{(\overline{z})} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$, $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$, $|z| = |\overline{z}|$

2) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$

3) $|zw| = |z|\cdot|w|$, $|z+w| \leq |z|+|w|$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $(2+3i)+(-3+4i) = (2-3)+i(3+4) = -1+7i$

- $$\begin{aligned}(2+3i)\cdot(-3+4i) &= -6+8i-9i+12i^2\\ &= (-6-12)+i(8-9)\\ &= -18-i\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\frac{2+3i}{-3+4i} &= (2+3i)\cdot\frac{1}{-3+4i} = (2+3i)\cdot\frac{-3-4i}{|-3+4i|^2}\\ &= \frac{1}{25}(-6-8i-9i-12i^2)\\ &= \frac{1}{25}((-6+12)+i(-8-9)) = \frac{6}{25}-i\frac{17}{25}\end{aligned}$$

$(-3)^2+4^2=25$

- Risolvere $2iz+3=4+i$.

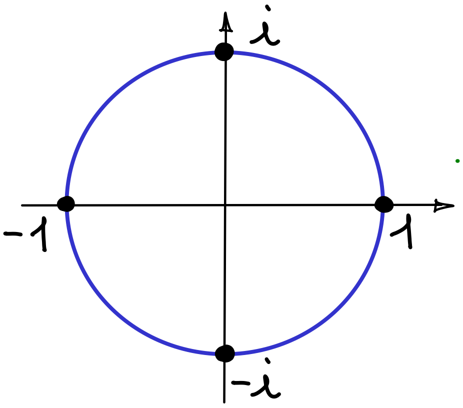
$$2iz = 4+i-3 = 1+i \Rightarrow z = \frac{1+i}{2i} = \frac{1+i}{2}\cdot(-i) = \frac{1-i}{2}$$

• Calcolare i^n per $n \in \mathbb{Z}$

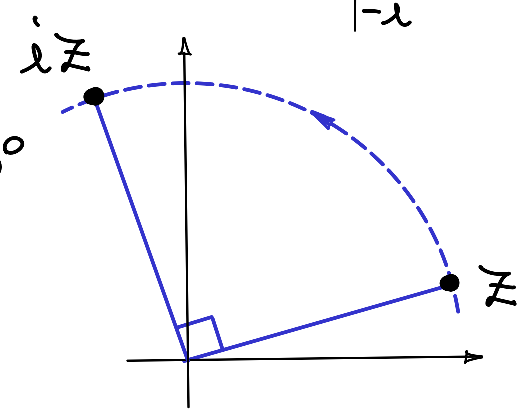
$$i^n = \begin{cases} (i^2)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari} \\ i^{\overbrace{n-1}^{\text{PARI}}} \cdot i = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot i & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

in altri termini se $n \equiv r \pmod 4$ con $r \in \{0,1,2,3\}$ il resto della divisione di n per 4

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$



Se $z = x + iy \neq 0$ allora $iz = -y + ix$ è ruotato di $90°$ in senso anti-orario rispetto a z.



OSSERVAZIONE

Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $x^2 = a$ con $x \in \mathbb{R}$ allora abbiamo tre casi:

1) se $a > 0$ ci sono DUE SOLUZIONI $x_1 = +\sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$

2) se $a = 0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA $x_1 = x_2 = 0$

3) se $a < 0$ NESSUNA SOLUZIONE perché $x^2 \geq 0$ in $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$ la situazione cambia.

Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $z^2 = a$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ allora l'equazione diventa

PARTE REALE

$$(x+iy)^2 = (x^2-y^2) + i(2xy) = a + i \cdot 0$$

PARTE IMMAGINARIA

ossia

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-y^2=a \\ y=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^2=-a \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2=a \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\pm\sqrt{-a} \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=\pm\sqrt{a} \\ y=0 \end{cases}$$

se $a<0$ se $a \geq 0$

$z = \pm i\sqrt{-a}$ $z = \pm\sqrt{a}$

Riassumendo:

1) se $a>0$ ci sono DUE SOLUZIONI

$$z_1 = +\sqrt{a}, \quad z_2 = -\sqrt{a} \qquad \text{reali}$$

2) se $a=0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA

$$z_1 = z_2 = 0 \qquad \text{reali}$$

3) se $a<0$ ci sono DUE SOLUZIONI

$$z_1 = +i\sqrt{-a}, \quad z_2 = -i\sqrt{-a} \qquad \text{complesse coniugate}$$

Così l'equazione $z^2 = -9$, che in $\mathbb{R}$ non ha soluzioni, in $\mathbb{C}$ ha due soluzioni ossia $3i$ e $-3i$.

Come si risolve un'equazione di secondo grado con coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{a}_{\neq 0} z^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } z \in \mathbb{C}?$$

Riduciamo l'equazione al caso precedente

completiamo il quadrato

$$z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

DELTA

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac$$

Così per quanto detto, si ha che

1) se $\Delta > 0$ ci sono DUE SOLUZIONI REALI

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) se $\Delta = 0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA REALE

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

3) se $\Delta < 0$ ci sono DUE SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

In ogni caso si arriva alla fattorizzazione

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Risolvere in $\mathbb{C}$
$$z^2 - z - 1 = 0.$$
Dato che
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$$
le soluzioni sono due e sono reali
$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
e vale la fattorizzazione
$$z^2 - z - 1 = \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

- Risolvere in $\mathbb{C}$
$$z^2 - z + 1 = 0.$$
Dato che
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (+1) = -3 < 0$$
le soluzioni sono due e sono complesse coniugate
$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$
e vale la fattorizzazione
$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

OSSERVAZIONE I polinomi di secondo grado irriducibili in $\mathbb{R}$ sono riducibili in $\mathbb{C}$.