ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 26

ESEMPI

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\underbrace{x^a}_{x>0}\,\underbrace{|x-1|^{4a}}_{x\neq 1}}\,dx \text{ è convergente?}$$

$(0,1)\cup(1,+\infty)$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+, $1^\pm$ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\underbrace{|x-1|^{4a}}_{\to 1}} \sim \frac{1-(1-x)}{x^a \cdot 1} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

convergenza per $a-1<1$ ossia $a<2$

Per $x \to 1^\pm$

$$\frac{1-e^{-x}}{\underbrace{x^a}_{\to 1}|x-1|^{4a}} \sim \frac{1-e^{-1}}{1\cdot|x-1|^{4a}} = \frac{c}{|x-1|^{4a}}$$

COSTANTE

convergenza per $4a<1$ ossia $a<\frac{1}{4}$

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}{x^a|x-\cancel{1}|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a|x|^{4a}} = \frac{1}{x^{5a}}$$

convergenza per $5a>1$ ossia $a>\frac{1}{5}$

Quindi l'integrale in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\begin{cases} a<2 \\ a<\frac{1}{4} \\ a>\frac{1}{5} \end{cases} \iff \boxed{\frac{1}{5}<a<\frac{1}{4}}$$

• Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{x^{1/3}}\,dx$$ è convergente?

L'unico punto da indagare è $+\infty$.

Notiamo che per $t\to 0$

$$\operatorname{sen}(t)=t-\frac{t^3}{6}+o(t^3) \Longrightarrow \operatorname{sen}(t)-t \sim -\frac{t^3}{6}.$$

Così per $x\to+\infty$

costante

$$\frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{x^{1/3}} \sim \frac{\frac{1}{6^a}\cdot\frac{1}{x^{3a}}}{x^{1/3}} = \frac{C}{x^{3a+\frac{1}{3}}}$$

e l'integrale in $[1,+\infty)$ è convergente se $3a+\frac{1}{3}>1$ ossia se $a>\frac{2}{9}$.

• Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a}\,dx$$ è convergente?

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x\to 0^+$,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{\underbrace{(1-e^{-x})}_{\sim x}\underbrace{\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a}_{\sim \log\left(\frac{1}{x}\right)=-\log(x)=|\log(x)|}} \sim \frac{1}{x|\log(x)|^a}$$

convergenza per $a>1$

Per $x \to +\infty$,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{(1-\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})(\log(2+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}))^a} \sim \frac{e^{(a-3)x}}{1\cdot(\log(2))^a}$$

convergenza per $a-3<0$ ossia $a<3$

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se $\boxed{1<a<3}$

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)}\,dx$$ è convergente?

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$ $\quad (1+x^a)^{1/4} \sim 1+\frac{1}{4}x^a$

$$\frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)} \sim \frac{\cancel{1}+\frac{1}{4}x^a-\cancel{1}}{x^2\cdot\log^2(2)} = \frac{c}{x^{2-a}}$$

costante · costante

$\log(e^{x^2}+x^3) = \log(1+x^2+o(x^2)+x^3) \sim \log(1+x^2) \sim x^2$

convergenza per $2-a<1$ ossia $a>1$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)} \sim \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^2\log^2(x)} = \frac{1}{x^{2-\frac{a}{4}}\log^2(x)}$$

$\log(e^{x^2}+x^3) \sim \log(e^{x^2}) = x^2$

convergenza per $2-\frac{a}{4} \geq 1$ ossia $a \leq 4$.

$\beta = 2 > 1$

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\boxed{1<a\leq 4}$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$t=\sqrt{x}$, $t^2=x$
$2t\,dt=dx$
$\sqrt{0}=0$, $\sqrt{+\infty}=+\infty$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(1+t^2)}=2\Big[\operatorname{arctg}(t)\Big]_0^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\,dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\operatorname{arctg}(x)\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x}\,d(\operatorname{arctg}(x))$$

$$=0+\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\begin{cases}A+B=0 \Rightarrow B=-1\\ C=0\\ A=1\end{cases}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log(x)-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}-\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\log(2)}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}+\left[\log(x)-\log\left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{+\infty}$$

$l_\gamma(\sqrt{1+(\gamma')})$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{2} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$t=\sqrt{2-x}$
$x=2-t^2$
$2t\,dt=-dx$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \int_{2}^{0} \frac{\log(4-t^2)}{\cancel{t}}(-2\cancel{t}\,dt)$$

$$=2\int_0^2 \log(4-t^2)\,dt$$

Determiniamo prima l'integrale indefinito:

$$\int \log(4-t^2)\,dt = t\log(4-t^2)-\int t\,d(\log(4-t^2))$$

$$=t\log(4-t^2)-\int \frac{t\cdot(-2t)}{\underbrace{4-t^2}_{-(t-2)(t+2)}}\,dt$$

$$=t\log(4-t^2)-2\int\left(1+\frac{\overset{=1}{A}}{t-2}+\frac{\overset{=-1}{B}}{t+2}\right)dt$$

$t\in[0,2)$

$$\stackrel{\downarrow}{=} t\log(\underbrace{4-t^2}_{(2-t)(2+t)})-2t-2\log\underbrace{|t-2|}_{2-t}+2\log\underbrace{|t+2|}_{t+2}+c$$

$$=(t-2)\log(2-t)+(t+2)\log(t+2)-2t+c$$

Così

$$\int_{-2}^{2} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\Big[(t-2)\log(2-t)+(t+2)\log(t+2)-2t\Big]_0^{2^-}$$

$$=2(4\log(4)-4)=16\log(2)-8.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\int_2^{x^2} \frac{1}{\log(t)}\,dt$$

Notiamo che se $F(x)=\int_2^{x} \frac{1}{\log(t)}\,dt$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(t)}\,dt \underset{\alpha=0,\,\beta=1}{=} +\infty \quad e \quad F'(x)=\frac{1}{\log(x)}$$

inoltre $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log(x)}=+\infty$.

Quindi per il limite dato possiamo applicare de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x^2)}{\frac{x^2}{\log(x)}} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x^2)\cdot 2x}{\frac{2x\log(x)-x^2\cdot 1/x}{\log^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2}x}{\log(x^2)}\cdot\frac{\log^{\cancel{2}}(x)}{2x\log(x)-x}$$

$$\cancel{2\log}(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\log(x)}{2x\log(x)-x}=\frac{1}{2}.$$