TROVARE UNA FORMULA ASINTOTICAMENTE CHIUSA DI

$$\sum_{k=1}^{n} 2k \cdot \ln(k)$$

LA FUNZIONE $f(x) \overset{def}{=} 2x \cdot \ln(x)$ NON È UNA FUNZIONE POLINOMIALE MA È CONTINUA PER $x>0$ È MONOTONA CRESCENTE PER $x>0$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA ALLORA

$$\int_1^n 2x \ln(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot k \cdot \ln(k) \leq 2n \ln(n) + \int_1^n 2x \ln(x)\, dx$$

$\forall n \in \mathbb{P}$. MA

$$\int_1^n 2n \ln(n) = \left[x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2}\right]_1^n =$$

$$= \left(n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{2}\right) - \left(1 \cdot \overbrace{\ln(1)}^{0} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

PORTANTO

$$n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} \leq \overbrace{\sum^{n} 2k \ln(k)}^{(*)} \leq 2n \ln(n) + n^2 \ln(n) - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$k=1$

$\forall n \in \mathbb{P}$.

IL TERMINE CHE VA PIÙ VELOCEMENTE AD INFINITO PER $n \to +\infty$ A SINISTRA È $n^2 \ln(n)$, ED ANCHE A SINISTRA. QUINDI

$$\frac{n^2 \ln(n)}{n^2 \ln(n)} - \frac{\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}\ln(n)} + \frac{1}{2n^2\ln(n)} \leq (*) \leq \frac{2\cancel{n^2\ln(n)}}{\cancel{n^2\ln(n)}} + \frac{\cancel{n^2\ln(n)}}{\cancel{n^2\ln(n)}}$$

$$1 - \frac{\cancel{n^2}}{2\cancel{n^2}\ln(n)} + \frac{1}{2n^2\ln(n)}$$

ALLORA

$$1 - \frac{1}{2\ln(n)} + \frac{1}{2n^2\ln(n)} \leq (*) \leq \frac{2}{n} + 1 - \frac{1}{2\ln(n)} + \frac{1}{2n^2\ln(n)}$$

PERTANTO PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} 2\cdot k\ln(k)}{n^2\ln(n)} = 1$$

$$2\ln(1) + 4\ln(2) + 6\ln(3) \simeq 9{,}36$$

PERTANTO

$$\sum^{n} 2k\ln(k) \simeq n^2\ln(n) \qquad 9\ln(3) \simeq 9{,}88$$

$k=1$

TROVARE UN'ESPRESSIONE ASINTOTICA OTTIMA PER

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2+1}{i} \right)$$

LA FUNZIONE $f \overset{def}{=} \frac{i^2+1}{i}$ NON È UNA FUNZIONE POLINOMIALE, MA È CONTINUA PER $x>0$ È MONOTONA CRESCENTE PER $x>0$.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2+1}{i} \right) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. MA

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_1^n =$$

$$= \left(\frac{n}{3} + n\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$

Pertanto

$$\frac{n^3}{3} + n - \frac{1}{3} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2+1}{i}\right) \leq \frac{i^2+1}{i} + \frac{n^3}{3} + n - \frac{1}{3}$$

Il termine che va più velocemente all'infinito per $n \to +\infty$ a sinistra è $\frac{n^3}{3}$, id anche a sinistra. Pertanto

$$\frac{\cancel{\frac{n^3}{3}}}{\cancel{\frac{n^3}{3}}} + \frac{n}{\frac{n^3}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{n^3}{3}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2+1}{i}\right)}{\frac{n^3}{3}} \leq \frac{\frac{n^2+1}{n}}{\frac{n^3}{3}} + \cancel{\frac{n}{\frac{n^3}{3}}} + \frac{n}{\frac{n^3}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{n^3}{3}}$$

Quindi

$$1 + \frac{\overbrace{3}^{\to 0}}{x^2} - \frac{\overbrace{1}^{\to 0}}{x^3} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2+1}{i}\right)}{\frac{n^3}{3}} \leq \overbrace{\frac{3x^2+3}{x^4}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0} + 1 - \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\to 0}$$

Quindi per il teorema del confronto

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2+1}{\ldots}\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2+1}{i}\right)}{\frac{n^3}{3}} = 1$$

PERTANTO

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2+1}{i}\right) \simeq \frac{n^3}{3}$$

TROVARE UNA FORMULA CHIUSA PER

$$\sum_{k=1}^{n} (k - \cos(k))$$

LA FUNZIONE $f \overset{def}{=} k - \cos(k)$ NON È UNA FUNZIONE POLINOMIALE, MA È CRESCENTE E CONTINUA PER $x \geq 0$

Sappiamo dalla teoria che

$$\int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} (k-\cos(k)) \le f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Ma

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n (k-\cos(k))\,dk =$$

$$= \int_1^n k\,dk - \int_1^n \cos(k)\,dk = \left[\frac{x^2}{2} - \sin(x)\right]_1^n$$

$$= \frac{n^2}{2} - \sin(n) - \frac{1}{2} + \sin(1) = \frac{n^2-1}{2} - \sin(n) + \sin(1)$$

Pertanto

$$\frac{n^2-1}{2} - \sin(n) + \sin(1) \le \sum_{k=1}^{n} (k-\cos(k)) \le n - \cos(n) + \frac{n^2-1}{2} - \sin(n) + \sin(1)$$

Il termine che va più velocemente all'infinito per $x \to +\infty$ è $\frac{n^2-1}{2}$,

MA ANCHE A DESTRA. QUINDI

$$\frac{\frac{\cancel{n^2-1}}{2}}{\frac{\cancel{n^2-1}}{2}} - \frac{\sin(n)}{\frac{n^2-1}{2}} + \frac{\sin(1)}{\frac{n^2-1}{2}} \le \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-\cos(k))}{\frac{n^2-1}{2}} \le \frac{\frac{n-\cos(n)}{n^2-1}}{\frac{2}{}} + \frac{\frac{\cancel{n^2-1}}{2}}{\frac{\cancel{n^2-1}}{2}} - \frac{\frac{\sin(n)}{n^2-1}}{\frac{2}{}} + \frac{\frac{\sin(1)}{n^2-1}}{2}$$

QUINDI

$$1 - \overbrace{\frac{2\sin(n)}{n^2-1}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{2\sin(1)}{\frac{n^2-1}{2}}}^{\to 0} \le \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-\cos(k))}{\frac{n^2-1}{2}} \le \overbrace{\frac{2n-2\cos(n)}{n^2-1}}^{\to 0} + 1 - \overbrace{\frac{2\sin(n)}{\frac{n^2-1}{2}}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{2\sin(1)}{\frac{n^2-1}{2}}}^{\to 0}$$

$$\frac{n^2\left(\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{2\cos(n)}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}_{\to 1}} \to 0$$

PERTANTO PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(k-\cos(k))}{\frac{n^2-1}{2}} = 1$$

QUINDI

$$\sum_{k=1}^{n}(k-\cos(k)) \approx \frac{n^2-1}{2}$$

TROVARE UN ESPRESSIONE ASINTOTICAMENTE CHIUSA PER

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right)$$

LA FUNZIONE $f \overset{def}{=} \frac{2i+1}{i^2+i}$ NON È UNA FUNZIONE POLINOMIALE, MA È DECRESCENTE E CONTINUA PER $x>1$.

SAPPIAMO QUINDI DALLA TEORIA CHE

$$\int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right) \geq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \Big[\ln(|x^2+x|)\Big]_1^n =$$

$$= \ln(|n^2+n|) - \ln(2)$$

QUINDI

$$\ln(|n^2+n|) - \ln(2) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right) \geq \frac{2n+1}{2n} + \ln(|n^2+n|) - \ln(2)$$

$$\ldots \sum_{i=1} \left(i^2+1\right) = n+1$$

IL TERMINE CHE LA PIÙ VELOCEMENTE AD INFINITO PER $n \to +\infty$ SIA A DESTRA CHE A SINISTRA È $\ln(1+n^2+n-1)$. QUINDI

$$\cancel{\frac{\ln(1+n^2+n-1)}{\ln(1+n^2+n-1)}}^{\,1} = \frac{\ln(n)}{\ln(1+n^2+n-1)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right)}{\ln(1+n^2+n-1)} \geq \frac{\frac{2n+1}{n^2+n}}{\ln(1+n^2+n-1)} + \cancel{\frac{\ln(1+n^2+n-1)}{\ln(1+n^2+n-1)}}^{\,1} - \frac{\ln(n)}{\ln(1+n^2+n-1)}$$

QUINDI

$$1 - \underbrace{\frac{\ln(n)}{\ln(1+n^2+n-1)}}_{\to 0} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right)}{\ln(1+n^2+n-1)} \geq \underbrace{\frac{(2n+1)(\ln(1+n^2+n-1))}{n^2+n}}_{\to 0} + 1 - \underbrace{\frac{\ln(n)}{\ln(1+n^2+n-1)}}_{\to 0}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

QUINDI PER IL TEOREMA DEL DOPPIO CONFRONTO

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right)}{\ln(1+n^2+n-1)} = 1$$

E QUINDI

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i+1}{i^2+i}\right) \approx \ln(1+n^2+n-1)$$