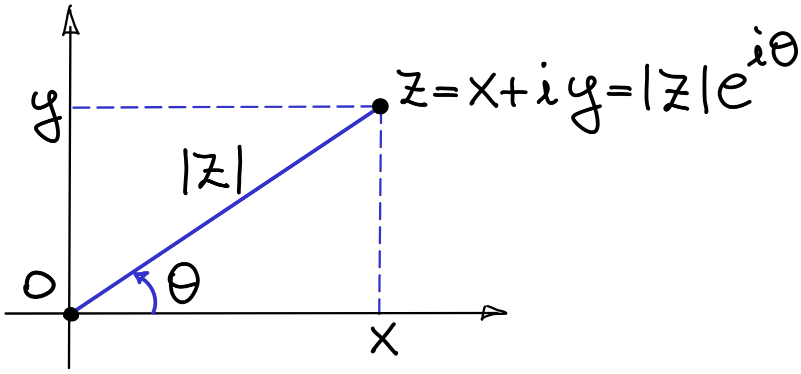
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 31

Un altro modo di rappresentare un numero complesso $z \neq 0$ è la FORMA ESPONENZIALE:

ARGOMENTO

$$z = |z| e^{i\theta}$$

MODULO



L'ARGOMENTO θ è "un" angolo orientato, espresso in radianti, dalla semiretta positiva dell'asse reale alla semiretta da O a z. θ è determinato a meno di multipli interi di 2π:

ARGOMENTO PRINCIPALE

$$\theta = \theta_p + 2\pi k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \quad \text{con } \theta_p \in (-\pi, \pi].$$

Per la conversione dalla forma esponenziale a quella cartesiana e viceversa valgono le seguenti formule:

ESP → CART

$$\begin{cases} x = |z| \cos(\theta) \\ y = |z| \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

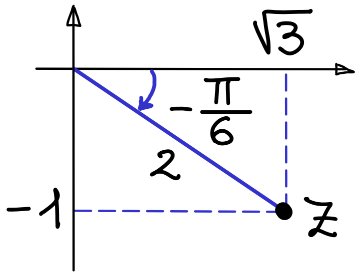
CART → ESP

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_p = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

ESEMPI

- $z=\sqrt{3}-i$

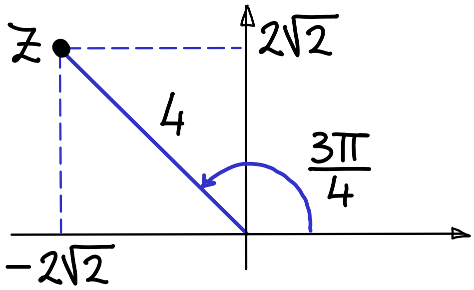
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$



Così $z = |z|e^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ y = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$



Così $z = x+iy = -2\sqrt{2}+i\,2\sqrt{2}$.

OSSERVAZIONE L'identità

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

è detta FORMULA DI EULERO. L'uso del simbolo $e^{i\theta}$ è motivato dalla seguente proprietà:

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

In particolare la potenza n-sima di z si scrive come $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$.

RADICI n-SIME DI UN NUMERI COMPLESSO

Consideriamo l'equazione

$$z^n = w$$

dove $w \in \mathbb{C}$ e $n > 0$ è un intero, da risolvere rispetto a $z \in \mathbb{C}$. Ogni soluzione z si dice RADICE n-SIMA di w.

Se $w = 0$ allora $z = 0$ è l'unica radice n-sima con molteplicità n.

Se $w \neq 0$ allora ci sono n radici n-sime $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ ciascuna con molteplicità 1.

Per trovarle usiamo la forme esponenziale di z e w: $\quad z = |z| e^{i\theta}, \quad w = |w| e^{i\varphi}$.

Così l'equazione

$$|z|^n e^{in\theta} = z^n = w = |w| e^{i\varphi}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \theta_k = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

uguali a meno di angoli giri

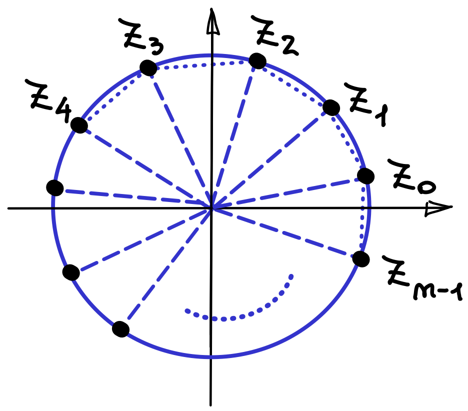
argomenti non equivalenti

da cui

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \exp\left(i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

OSSERVAZIONE

Le radici n-sime di w $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ sono i vertici di un poligono regolare di n-lati.



Se $n=2$ e $w\neq 0$ le 2 radici quadrate sono

$$z^2 = w = |w|e^{i\varphi} \begin{cases} z_0 = \sqrt{|w|}\,e^{i\varphi/2} \quad \longleftarrow \text{opposte} \\ z_1 = \sqrt{|w|}\,e^{i(\varphi+2\pi)/2} = z_0 e^{i\pi} = -z_0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Calcolare le radici terze di $8i$ ossia risolvere
$$z^3 = 8i.$$

Abbiamo che $8i = |8i|\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$ e quindi le sue radici terze sono

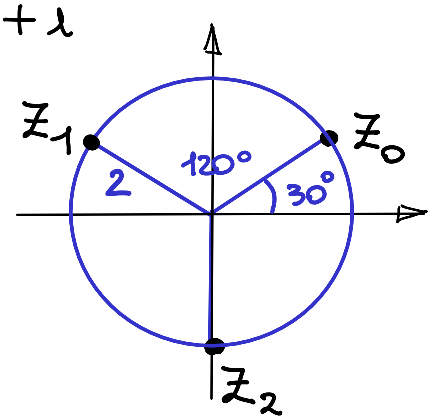
$$z_k = \sqrt[3]{8}\exp\left(i\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) \quad \text{con } k=0,1,2$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = 2e^{\frac{i\pi}{6}} = 2\Big(\overset{\sqrt{3}/2}{\cos\!\left(\tfrac{\pi}{6}\right)} + i\,\overset{1/2}{\operatorname{sen}\!\left(\tfrac{\pi}{6}\right)}\Big) = \sqrt{3}+i$$

$$z_1 = 2e^{\frac{i5\pi}{6}} = -\sqrt{3}+i$$

$$z_2 = 2e^{\frac{i9\pi}{6}} = 2e^{\frac{i3\pi}{2}} = -2i$$



- Risolvere $z^4 = -4$ (radici quarte di -4).

Si ha che $-4 = 4e^{i\pi}$ e radici quarte sono

$$z_k = \sqrt[4]{4}\exp\left(i\,\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad \text{con } k = 0,1,2,3$$

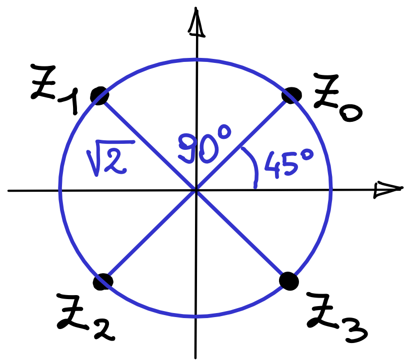
che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}^{1/\sqrt{2}} + i\,\underbrace{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}^{1/\sqrt{2}}\Big) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i3\pi}{4}} = i\,z_0 = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}} = (i)^2 z_0 = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{i7\pi}{4}} = (i)^3 z_0 = 1 - i$$



- Risolvere $z^6 = 1$ (radici seste di 1)

Si ha che $1 = |1|e^{i0} = 1e^{i0}$ e le radici seste sono

$$z_k = \sqrt[6]{1}\exp\left(i\,\frac{0 + 2k\pi}{6}\right) \quad \text{con } k = 0,1,2,3,4,5$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = e^{i0} = 1 = -z_3$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_4$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_5$$