

# ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 7

## ESEMPI

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{n-1}(n+1)! + 2n^{n-2}(n+2)!}{n^{10}10^{3n} - n! \cdot n^n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n \cdot n!} \cdot \left( 3 \cdot \frac{(n+1)}{n} + 2 \cdot \frac{(n+2)(n+1)}{n^2} \right)}{\cancel{n \cdot n!} \cdot \left( \left( \frac{n^{10}}{n^n} \right) \cdot \left( \frac{10^{3n}}{n!} \right) - 1 \right)} = -5$$

$\xrightarrow{-1} \quad \xrightarrow{-1}$   
 $\xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-0}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(\log n)}{n}} = e^0 = 1$$

$\xrightarrow{-0}$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - n^n}{a^{n \log n}} = ? \quad \text{per } a > 0$$

$$a^{n \log n} = e^{\log(a) \cdot n \log n} = e^{\log(n^{n \cdot \log(a)})} = n^{n \log a}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left( \frac{n!}{n^n} - 1 \right)}{n^{n \log a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{n(1 - \log a)} \cdot \left( \left( \frac{n!}{n^n} \right) - 1 \right)$$

$\xrightarrow{-0}$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a > e & 1 - \log a < 0 \\ -1 & \text{se } a = e & 1 - \log a = 0 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < e & 1 - \log a > 0 \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+1})^n} = ?$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sqrt{n} \log n - \frac{n}{2} \log(n+1) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( (n \log n) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\log(n+1)}{2 \log n} \right) \right) = e^{-\infty} = 0.$$

$\xrightarrow{+\infty} \quad \xrightarrow{-0} \quad \xrightarrow{-\frac{1}{2}}$

## IL NUMERO DI NEPERO $e$

**TEOREMA** La successione  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$  è convergente e il suo limite è detto NUMERO DI NEPERO  $e$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

OSSERVAZIONE Si dimostra che  $e \notin \mathbb{Q}$  e il suo valore è

$$e = 2.718281828459...$$

dim. Verifichiamo la convergenza dimostrando che 1) la successione è strettamente crescente e 2) la successione è superiormente limitata e dunque il limite esiste e vale

$$\sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} \in \mathbb{R}.$$

1) Stretta crescenza:  $\forall n \geq 1 \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \left( \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \right)^{>0}$$

$$> \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

perché

$$\binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{n+1-k+1}{n+1} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\text{per } j \geq 0 \quad \frac{n+1-j}{n+1} \geq \frac{n-j}{n} \Leftrightarrow n^2 + n - nj \geq n^2 + nx - nj - j \Leftrightarrow j \geq 0$$

2) Limitatezza superiore:  $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 + 1 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

perché

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Quindi la successione ha 3 come maggiorante e dunque è limitata superiormente.  $\square$

### ESEMPI

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$  perché  $\{n^2\}_{n \geq 1}$  è una sottosucc. di  $\{n\}_{n \geq 1}$

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left( \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right)^{-1}.$$

$\xrightarrow{\text{e}} \quad \quad \quad \xrightarrow{1}$

•  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

Per confronto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^n \geq 2^n \xrightarrow{+} +\infty$$

$\xrightarrow{\text{e}} \quad \quad \quad \uparrow \text{definitivamente perché } e > 2$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Per doppio confronto:

$$1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{1/n} \leq 3^{1/n} \rightarrow 1$$

$\rightarrow e$   $\leftarrow$  definitivamente  
purché  $e < 3$

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

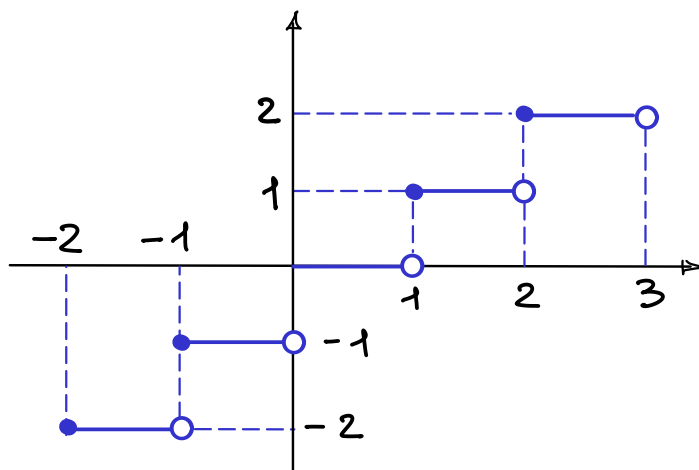
Per doppio confronto:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n] + 1}$$

$\rightarrow e$   $\rightarrow e$

dove  $[x]$  è la funzione PARTE INTERA

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad [x] = m \text{ se } x \in [m, m+1)$$



$[x]$  è il più grande  
intero  $m \leq x$

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Posto  $b_n = -(a_n + 1) \rightarrow +\infty$  e

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{-1} \rightarrow e.$$

$\rightarrow e$   $\rightarrow 1$

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$  allora per ogni  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x$$

Per  $x=0$  è ovvio. Per  $x \neq 0$ ,  $b_n = \frac{a_n}{x} \rightarrow \pm \infty$  e

$$\left(1 + \frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)^x \rightarrow e^x$$

- Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e  $a_n \neq 0$  allora per ogni  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x a_n)^{1/a_n} = e^x$$

Caso  $a_n \rightarrow 0^+$ . Allora  $b_n = 1/a_n \rightarrow +\infty$  e

$$(1 + x a_n)^{1/a_n} = \left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{b_n} \rightarrow e^x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}\right)^{2n} = ?$$

Per  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n = \frac{3n+1}{n^2+1} \rightarrow 0$  e

$$\left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{3n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+1}}\right)^{\left(\frac{3n+1}{n^2+1} \cdot 2n\right)} \rightarrow e^6$$

$$\frac{3n+1}{n^2+1} \cdot 2n = \frac{6n^2 + 2n}{n^2+1} = \frac{n^2 \left(6 + \frac{2}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \rightarrow 6$$

• Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  allora

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left((1+a_n)^{1/a_n}\right) = \log(e) = 1.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\log(1+b_n)} = 1.$$

$b_n = e^{a_n} - 1 \rightarrow 0$   
 $\Rightarrow a_n = \log(1+b_n)$

3) Per  $\alpha \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{b_n} - 1}{b_n} \right) \cdot \alpha \left( \frac{\log(1+a_n)}{a_n} \right) = \alpha.$$

$b_n = \alpha \log(1+a_n) \rightarrow 0$   
 $e^{b_n} = (1+a_n)^\alpha$

