ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 4

SUP E INF

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

$M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se
$$\forall a \in A \quad a \leq M$$
$m \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se
$$\forall a \in A \quad m \leq a$$
$M \in \mathbb{R}$ si dice MASSIMO di A e si scrive $M = \max(A)$ se
$$\forall a \in A \quad a \leq M \text{ e } M \in A$$
$m \in \mathbb{R}$ si dice MINIMO di A e si scrive $m = \min(A)$ se
$$\forall a \in A \quad m \leq a \text{ e } m \in A$$
A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se
$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M$$
A ha almeno un maggiorante

A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se
$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a$$
A ha almeno un minorante

A si dice LIMITATO se
$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a \leq M$$

ESEMPI

- $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

  L'insieme dei maggioranti è vuoto.
  L'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$.
  A non è limitato. $\min(A) = 0$, A non ha massimo.

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

  L'insieme dei maggioranti è $[3, +\infty)$
  L'insieme dei minoranti è $(-\infty, -2]$.
  A è limitato. $\max(A) = 3$, A non ha minimo.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato superiormente allora l'insieme dei maggioranti di A ha un elemento minimo che si dice ESTREMO SUPERIORE di A e si scrive $\sup(A)$.

Se A è limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un elemento massimo che si dice ESTREMO INFERIORE di A e si scrive $\inf(A)$.

La definizione di sup e inf si estende agli insiemi non limitati:

$\sup(A) = +\infty$ se A non è limitato superiormente

$\inf(A) = -\infty$ se A non è limitato inferiormente

OSSERVAZIONE

Se A ha un massimo allora $\max(A) = \sup(A)$.

Se A ha un minimo allora $\min(A) = \inf(A)$.

ESEMPI

- $A = \mathbb{N}$

  $\inf(A) = \min(A) = 0$ e $\sup(A) = +\infty$

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

  $\inf(A) = -2$ e $\sup(A) = \max(A) = 3$.

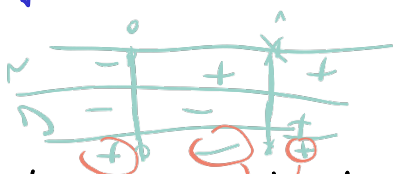
- $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\}$

$\sup(A)=\max(A)=1$. $\inf(A)\overset{?}{=}0$ A non ha minimo.
Verifico che m, il massimo dei minoranti di A è 0.
$m\geq 0$ perché 0 è un minorante di A.
Se per assurdo fosse che $m>0$ allora $\exists\, n\in\mathbb{N}^+$ tale che $m>\frac{1}{n}$ e quindi $m>\frac{1}{n}\in A$ ossia m non è un minorante di A. Contraddizione.
Così $m=0$.

- $A=\{x\in\mathbb{Q} : x^2\leq 2\}=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$

$\left.\begin{array}{l}\inf(A)=-\sqrt{2},\ \text{A non ha minimo}\\ \sup(A)=\sqrt{2},\ \text{A non ha massimo}\end{array}\right\}\ \pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

- $A=\left\{x\in\mathbb{R} : x-2<\left|\frac{x}{x-1}\right|\right\}$



Il segno di $\frac{x}{x-1}$ è $+++\ 0\ ---\ 1\ +++$ e quindi

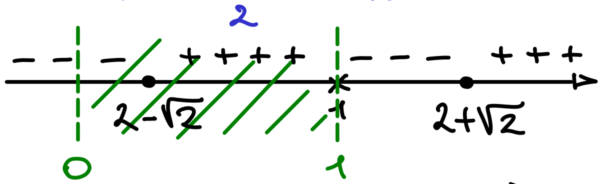
$$\begin{cases}x\leq 0 \lor x>1\\ x-2<\frac{x}{x-1}\end{cases}\cup\begin{cases}0<x<1\\ x-2<-\frac{x}{x-1}=\frac{x}{\underbrace{1-x}_{>0}}\end{cases}$$

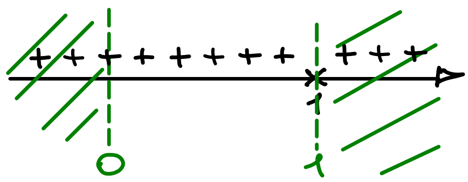
$x-2-\frac{x}{x-1}=\frac{x^2-4x+2}{x-1}<0$

$(1-x)(x-2)<x$

$x^2-2x+2>0$ $\quad\Delta=4-8<0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$





$x\in(-\infty,0]\cup(1,2+\sqrt{2})$ $\qquad$ $x\in(0,1)$

Quindi $A=(-\infty,1)\cup(1,2+\sqrt{2})$ e

$$\inf(A)=-\infty\qquad \sup(A)=2+\sqrt{2}$$

A non ha né massimo né minimo.

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DEL SUP

$$\sup(A)=+\infty \iff \forall M\in\mathbb{R}\ \exists a\in A : M<a$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più grande di M

$$\sup(A)=l\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a\in A \quad a\le l \\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A : l-\varepsilon<a \end{cases}$$

l è un maggiorante

ogni numero più piccolo di l
non è un maggiorante di A

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DELL'INF

$$\inf(A)=-\infty \iff \forall M\in\mathbb{R}\ \exists a\in A : a<M$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più piccolo di M

$$\inf(A)=l\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a\in A \quad l\le a \\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A : a<l+\varepsilon \end{cases}$$

l è un minorante

ogni numero più grande di l
non è un minorante di A

OSSERVAZIONE

Vale la seguente disuguaglianza (AG)

$$\forall a,b\ge 0 \qquad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{media aritmetica}} \ge \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{media geometrica}}$$

infatti $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0 \iff a-2\sqrt{ab}+b\ge 0$

$\iff a+b\ge 2\sqrt{ab}$.

L'uguaglianza vale solo se $a=b$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare sup/inf/max/min di
$$A=\left\{x+\frac{5}{x} : x\in\mathbb{R}^+\right\}. \qquad \mathbb{R}^+=(0,+\infty)$$

Notiamo che $\forall M>0$, $M< M+\underbrace{\left(\frac{5}{M}\right)}_{>0}\in A$
e quindi $\sup(A)=+\infty$. A non ha massimo.
Inoltre
$$\forall x>0 \quad x+\frac{5}{x}\overset{AG}{\geq} 2\sqrt{x\cdot\frac{5}{x}}=2\sqrt{5} \text{ e vale l'= se } x=\sqrt{5}$$

Quindi $2\sqrt{5}$ è un minorante e appartiene ad A.
Così $\inf(A)=\min(A)=2\sqrt{5}$ irrazionale $\in(4,5)$.

- Determinare sup/inf/max/min di
$$A=\left\{n+\frac{5}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\}.$$

Si ha che $\forall M>0$ $M<n+\frac{5}{n}\in A$ con n intero $>M$
e quindi $\sup(A)=+\infty$. A non ha massimo.
Come prima
$$\forall n\in\mathbb{N}^+ \quad n+\frac{5}{n}\overset{AG}{\geq} 2\sqrt{n\cdot\frac{5}{n}}=2\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$$

$2\sqrt{5}$ è un minorante ma $2\sqrt{5}\notin A\subseteq\mathbb{Q}$.
$2\sqrt{5}$ è il più grande dei minoranti? NO!
$$A=\left\{\overset{1}{6}, \overset{2}{\boxed{\frac{9}{2}}}, \overset{3}{\frac{14}{3}}, \overset{4}{\frac{21}{4}}, \overset{5}{6}, \dots\right\}$$

$\frac{9}{2}\in A$ ed è minore di $6, \frac{14}{3}, \frac{21}{4}$ inoltre
$$\forall n\geq 5 \quad \underbrace{n}_{\geq 5}+\underbrace{\frac{5}{n}}_{>0}>5>\frac{9}{2}.$$

Così $\inf(A)=\min(A)=\frac{9}{2}$.

• Determinare sup/inf/max/min di

$$A=\left\{ \frac{2n^2-1}{(n+1)^2} : n\in\mathbb{N}\right\} = \left\{ \overset{0}{-1}, \overset{1}{\frac{1}{4}}, \overset{2}{\frac{7}{9}}, \overset{3}{\frac{17}{16}}, \dots \right\}.$$

$\min(A)=\inf(A)=-1$? SÌ

$-1\in A$ e $\forall n\geq 1 \ \frac{2n^2-1}{(n+1)^2}>0>-1$.

$\sup(A)$? Esiste $\max(A)$?

Verifichiamo che 2 è un maggiorante di A

$$\underbrace{\frac{2n^2-1}{(n+1)^2}}_{>0} \overset{?}{\leq} 2 \iff \cancel{2n^2}-1\leq \cancel{2n^2}+4n+2 \iff -\frac{3}{4}\leq n\in\mathbb{N} \ \text{VERO}$$

Inoltre non vale mai l'= e $2\notin A$.

Verifichiamo che 2 è il più piccolo dei maggioranti di A:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists a\in A : 2-\varepsilon<a$$

ossia

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n\in\mathbb{N} : 2-\frac{2n^2-1}{(n+1)^2}<\varepsilon.$$

Osserviamo che

$$2-\frac{2n^2-1}{(n+1)^2}=\frac{\cancel{2n^2}+4n+2-\cancel{2n^2}+1}{(n+1)^2}<\frac{4\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{\cancel{2}}}\overset{?}{<}\varepsilon$$

Vale se $\frac{4}{\varepsilon}-1<n$

e quindi basta prendere un intero n maggiore di $\frac{4}{\varepsilon}-1$ (esiste perché $\sup(\mathbb{N})=+\infty$).

Possiamo così concludere che

$$\sup(A)=2 \ \text{e A non ha massimo.}$$