3)

a) $$\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx$$

$$(x^2+1-2x)(x+1) = x^3+x^2+x+1-2x^2-2x =$$

$$= x^3-x^2-x+1$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & & & & +1 & x^3-x^2-x+1 \\
\hline
-x^4 & +x^3 & +x^2 & -x & & x+1 \\
\hline
// & +x^3 & +x^2 & -x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & \\
\hline
 & & 2x^2 & // & // &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \int (x+1) \cdot \frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx =$$

$$= \int (x+1) + \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}\right) dx =$$

$$= \int (x+1) \cdot \left(\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+1) + B(x+1) + C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} \right) dx =$$

$$B = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2}{(x+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$C = \lim_{x\to -1} \frac{2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(-2)^2} = \frac{1}{2}$$

a vltnl

$$\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} =$$

Si $x=0$

$$0 = \frac{A}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$0 = \frac{-2A + 2 + 1}{2} \rightarrow 0 = \frac{-\cancel{2}A}{\cancel{2}} + \frac{3}{2} \rightarrow$$

$$A = \frac{3}{2}$$

Così

$$\int \frac{x^4+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \int \left(x+1 + \frac{3}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\log|x+1| + c$$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-9)}\,dx$

$t=\sqrt{x}$, $t^2=x$, $2t\,dt=dx$

$\int \frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}(t^2-9)}\,dt = 2\int \frac{1}{(t+3)(t-3)}\,dt =$

$\frac{1}{(t-3)(t+3)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t+3} =$

$= \frac{A(t+3)+B(t-3)}{(t-3)(t+3)}$

$A = \lim \quad \frac{1}{\quad} = \frac{1}{6}$

$t \to 3 \quad t+3$

$$B = \lim_{t \to -3} \frac{1}{t-3} = -\frac{1}{6}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{(t^2-9)}\,dt = 2\int \frac{1}{\cancel{6}\,3}\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3} \log\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + c =$$

$$= \frac{1}{3} \log\left|\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}\right| + c$$

$$= \frac{1}{3} \log \frac{|\sqrt{x}-3|}{\sqrt{x}+3}$$ ⟸ sempre positivo

d) $\int \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx =$

$= x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int x \cdot d\left(\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) =$

$= x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot dx =$

$= x\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \left(\frac{x}{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+x^2}+x}}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

$= x\log\left(x+\sqrt{1+x}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx =$

$t = 1+x^2 \quad , \quad dt = 2x \, dx$

$= x\log\left(x+\sqrt{1+x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt =$

$= x \lg (x + \sqrt{1+x}) - \sqrt{t} + c =$

$= x \lg (x + \sqrt{1+x} - \sqrt{x^2+1}$

---

5) a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^{\alpha}} \, dx$

SIA

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^{\alpha}}$$

$\to e^{\alpha \ln(x)}$ $\to x > 0$

NELL'INTERVALLO $(0, 2]$, f È POSITIVA.

IL PUNTO DA INDAGARE È 0^+.

PER $x \to 0^+$

$\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha}}$$

DUNQUE LA CONVERGENZA SI HA PER $\alpha < 1$

b) $$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^a}\,dx$$

SIA $f(x)$ COME PRIMA,

f NELL'INTERVALLO $[1,+\infty)$ È'

POSITIVA. IL PUNTO DA INDAGARE È $+\infty$

PER $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^a} = \frac{1}{x^{a+\frac{1}{3}}}$$

E DUNQUE LA CONVERGENZA SI HA

PER $a+\frac{1}{3} > 1$, OSSIA $a > \frac{2}{3}$

c) $$\int_0^{4} \frac{(e^x-1)^a}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^{a}}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

$\sim x$ per $x \to 0^+$

La funzione è positiva in $(0, 2]$, e il punto da indagare è 0^+.

Per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^{a}}{2x} \sim \frac{1/2}{x^{1-a}}$$

Quindi la convergenza si ha per

$1 - a < 1$ ossia $a > 0$

b) $$\int_2^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^{a}}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{(e^x - 1)^a}{e^x - e^{-x}}$$

LA FUNZIONE È POSITIVA NELL'INTERVALLO $[2, +\infty)$, E IL PUNTO DA INDAGARE È $+\infty$

PER $x \to \infty$

$$f(x) \sim \frac{(e^x)^a}{e^x} = \frac{e^{ax}}{e^x} = e^{ax - x} =$$

$$= e^{x(a-1)}$$

LA CONVERGENZA SI HA SE $a - 1 < 0$, OSSIA $a < 1$

e) $$\int_1^{+\infty} \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a} \, dx$$

Sia

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^{\alpha}}$$

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

f è positiva in $(1, +\infty)$. I punti da indagare sono 2: 1 e $+\infty$

Per $x \to 1$

$$f(x) \sim \frac{\overset{x+1}{3}(x-1)^2}{4^{\alpha}(x-1)^{\alpha}} = \frac{3/4^{\alpha}}{(x-1)^{\alpha-2}} = \frac{C}{(x-1)^{\alpha-2}}$$

Quindi è convergente se si ha $\alpha - 2 < 1$, ossia $\alpha < 3$.

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\overset{x(x)^2}{x^3}}{x \cdot x^{4\alpha}} = \frac{x^3}{x^{4\alpha+1}} = \frac{1}{x^{4\alpha-2}}$$

QUINDI È NECESSARIO PER LA CONVERGENZA CHE $4a - 2 > 1$, OSSIA $a > \frac{3}{4}$

IMPONENDO LE 2 CONDIZIONI, L'INTEGRALE IMPROPRIO È CONVERGENTE SOLO E SOLTANTO SE $\frac{3}{4} < a < 3$