ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 24

INTEGRALI IMPROPRI

Sia f una funzione definita in $[a,b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tale che sia integrabile in $[a,t]$ per ogni $t \in (a,b)$ allora l'INTEGRALE IMPROPRIO DI f IN $[a,b)$ è dato da

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx \stackrel{d}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

Una simile definizione vale per f definita in $(a,b]$ con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx \stackrel{d}{=} \int_a^b f(x)\,dx$$

L'integrale improprio si dice CONVERGENTE se il limite è finito, DIVERGENTE se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, INDETERMINATO se il limite non esiste.

ESEMPI

- $\log(x)$ è continua in $D=(0,+\infty)$ e

$$\int \log(x)\,dx = x\log(x) - x + c$$

e quindi

$$\int_0^1 \log(x)\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \log(x)\,dx$$

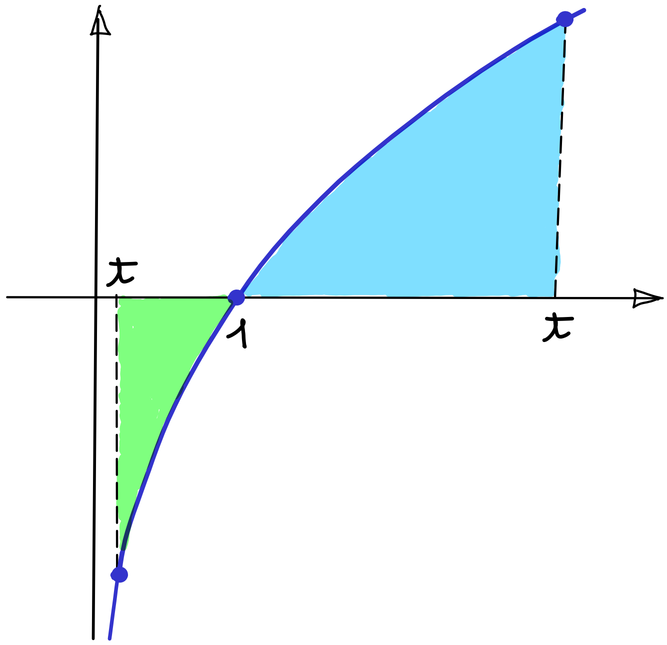
$$= \lim_{t\to 0^+} \left[x\log(x) - x \right]_t^1$$

$$= -1 - \lim_{t\to 0^+} (t\log(t) - t) = -1 \quad \text{convergente}$$

$$\int_1^{+\infty} \log(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \log(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[x\log(x) - x \right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (t\log(t) - t) - (-1) = +\infty \quad \text{divergente}$$



• sen(x) è continua in $D=\mathbb{R}$ e

$$\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)\,dx = \left[-\cos(x) \right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (-\cos(x)) - (-1) = \nexists$$

indeterminato

OSSERVAZIONE

Se f è definita in (a,b) allora l'integrale improprio in (a,b) è

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)dx + \lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)dx$$

dove $c\in(a,b)$ (non importa quale).

In particolare l'integrale improprio $\int_a^b f(x)dx$ è convergente se e solo se sono convergenti sia $\int_a^c f(x)dx$ che $\int_c^b f(x)dx$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\dfrac{x}{x^2+1}$ è continua in $D=\mathbb{R}$ e

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1)+c$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx = \text{indeterminato}$$

$$-\infty \xleftarrow{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\log(x^2+1) \qquad \frac{1}{2}\log(x^2+1) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

anche se $\dfrac{x}{x^2+1}$ è dispari e $(-\infty,+\infty)$ è simmetrico l'integrale improprio NON vale 0.

$t = -\sqrt{x} \qquad dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\boxed{\int \frac{e^{t}}{-t}\cdot(-2t)\,dt = -2\int e^{t}\,dt = -2e^{t} = -2e^{-\sqrt{x}}+c}$$

- $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ è continua in $D=(0,+\infty)$ e

$$\boxed{\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2e^{-\sqrt{x}}+c}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_{0^+}^{1} + \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_{1}^{+\infty}$$

$$= \underbrace{(-2e^{-1}+2)}_{\text{convergente}} + \underbrace{(0+2e^{-1})}_{\text{convergente}} = 2 \quad \text{convergente}$$

- Per $n\in\mathbb{N}$, $I(n)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \,?$

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 0-(-1)=1.$$

Per $n\geq 1$,

$$I(n)=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} x^n\, d(-e^{-x})$$

$$= \left[x^n(-e^{-x})\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x})\,d(x^n)$$

$$= 0 - \overset{n\geq 1}{0} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

$$= n\cdot I(n-1) = n(n-1)\cdot I(n-2) = \cdots$$

$$= n!\,I(0) = n!\cdot 1 = n!$$

$x^{-\alpha} = e^{-\alpha \log(x)} \to x>0 \to D=(0,+\infty)$

- $\dfrac{1}{x^\alpha}$ è continua in $(0,+\infty)$.

Se $\alpha=1$ allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log(x)\Big]_{0^+}^{1} = 0-(-\infty) = +\infty$$

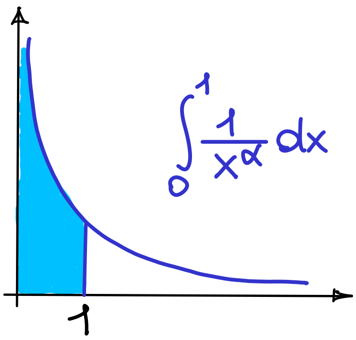
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log(x)\Big]_{1}^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

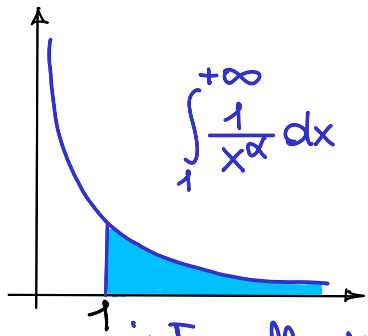
Se $\alpha\neq 1$ allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{0^+}^{1} = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

funzione
NON
LIMITATA





intervallo di integrazione
NON LIMITATO

OSSERVAZIONE

Per traslazione e simmetria, $\forall x_0\in\mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx \quad e \quad \int_{x_0-1}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}\,dx$$

sono convergenti se e solo se $\alpha<1$.

- $\dfrac{1}{x|\log(x)|^\beta}$ è continua in $(0,1)\cup(1,+\infty)$. $\leftarrow \beta\neq 0$

Dato che $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x|\log(x)|^\beta}\,dx = \int_{\log(a)}^{\log(b)} \frac{1}{|t|^\beta}\,dt$

$t=\log(x)$

$dt=\dfrac{dx}{x}$

e quindi

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta}\,dx = \int_{-\infty}^{-\log(2)} \frac{1}{|t|^\beta}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta\leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \beta>1 \end{cases}$$

$$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta}\,dx = \int_{-\log(2)}^{0} \frac{1}{|t|^\beta}\,dt = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta< 1 \\ +\infty & \text{se } \beta\geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta}\,dx = \int_{0}^{\log(2)} \frac{1}{|t|^\beta}\,dt = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \beta< 1 \\ +\infty & \text{se } \beta\geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x|\log(x)|^\beta}\,dx = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{|t|^\beta}\,dt = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta\leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \beta>1 \end{cases}$$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$ è convergente se e solo se $\alpha<0$.

Infatti se $\alpha=0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dx = \big[x\big]_0^{+\infty} = +\infty$. Se $\alpha\neq 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = \left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty} e^{\alpha x} - 1\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ -\dfrac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$