$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) CALCOLO TUTTE LE POTENZE DI M^n

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+6+1-1 & 2+0+0+(-2)\cdot 1 & -1+2+1 & 1+6+1-1 \\ 3-1-3 & 6+0+0-6 & -3+0+0+3 & 3+0-1\cdot 3 \\ -1+0+0+1 & -2+0+0+2 & 1+0+0-1 & -1+0+0+1 \\ -1-6-1+1 & -2+0+0+2 & 1-2+0-1 & -1-6-1+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7+2+0-7 & 0+0+0+0 & 2+0+0-2 & 7-2+0-7 \\ 21+0+0-21 & 0+0+0+0 & 6+0+0-6 & 21+0+0-21 \\ -7+0+0+7 & 0+0+0+0 & -2+0+0+2 & -7+0+0+7 \\ -7-2+0+7 & 0+0+0+0 & -2+0+0+2 & -7+2+0+14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M \cdot M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0+0-2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & -2+0+0+2 \\ 6+0+0-6 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & -6+0+0+6 \\ -2+0+0+2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 2+0+0-2 \\ -2+0+0+2 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & +2+0+0-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 0$$

$$\forall n \geq 4 \qquad M^n = 0$$

b) PER CALCOLARE IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI M SI DEVE CALCOLARE

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_4) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -\lambda & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA 3° RIGA

$$= (-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} + 0 + (-1)^{3+3}\cdot(-\lambda)\cdot$$

$$\cdot \det\begin{pmatrix} \dots & \lambda & \dots \\ 3 & -\lambda & 3 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{\dots} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \dots & \dots \\ 3 & -\lambda & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\left(\cancel{-\lambda} - 2\lambda + \cancel{6} - \cancel{\lambda} + \cancel{2} + \cancel{\lambda} - \lambda^2 - \cancel{6}\right) + \lambda\left(-\cancel{\lambda} + \cancel{2\lambda} - \lambda^3 - \cancel{6} - \cancel{\lambda} + \cancel{6} + \cancel{6\lambda} + \right.$$

$$\left. + 6 - \cancel{6\lambda}\right) + \left(\cancel{\lambda} + \lambda^2 - \cancel{2} + \cancel{6} + \cancel{\lambda} - \cancel{6} + \cancel{2} - \lambda\right) =$$

$$= -\left(-2\lambda - \lambda^2\right) - \lambda\cdot\left(-\lambda^3 + 6\right) + \lambda^2 - \lambda =$$

$$= +2\lambda + \lambda^2 + \lambda^4 - 6\lambda + \lambda^2 - \cancel{\lambda} = -5\lambda + 2\lambda^2 + \lambda^4 =$$

$$= \lambda\left(\lambda^3 + 2\lambda - 5\right)$$

---

2)

a) $L_A^2 := L_A \circ L_A$, PER VERIFICARE SE È INIETTIVA VERIFICHIAMO SE L_A È INIETTIVA, E SI SA DAL TEOREMA DEL RANGO CHE

L_A INIETTIVA $\Longleftrightarrow L_A$ SURIETTIVA $\Longleftrightarrow rg(A)=3$

DATO CHE LA MATRICE È GIÀ RIDOTTA

A SCALA, È HA 3 PIVOT, IL SUO RANGO È PROPRIO 3 $\iff L_A$ SURIETTIVA $\iff$

$\iff L_A$ INIETTIVA $\implies L_A^2$ INIETTIVA

---

4)

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times4}(\mathbb{Q})$$

a) PER CALCOLARE IL DETERMINANTE DI A UTILIZZO LO SVILUPPO LUNGO LA 3° RIGA

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1) \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1) \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (1) \cdot \left(3 \cdot 3 - (2 \cdot 4) \right) =$$

$$(\;\; 8) = -1$$

$= -1 \cdot (9-8) = -1$

b) DATO CHE $\det(A) = -1 \neq 0$ ALLORA LA MATRICE È INVERTIBILE

c) PER TROVARE L'INVERSA DI A BISOGNA CONSIDERARE LA MATRICE 3×6 $(A \mid I_3)$ E RISOLVERLA, UTILIZZANDO L'ALGORITMO DELL'ELIMINAZIONE DI GAUSS PRIMA IN AVANTI E POI ALL'INDIETRO.

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 3 \end{array}\right) =$$

$$= (I_3 \mid A^{-1})$$

QUINDI

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$