CAP. 6: TEORIA DEI GRAFI

SIA A UN INSIEME E SIA $k \in \mathbb{N}$. PONIAMO

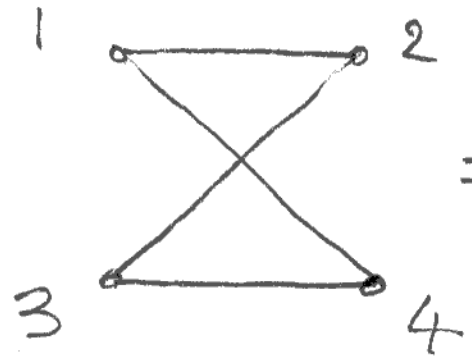
$$\binom{A}{k} \overset{def}{=} \{ S \subseteq A : |S| = k \}. \quad \binom{[5]}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}!} = 10$$

<u>DEF.</u> UN <u>GRAFO</u> È UNA COPPIA $G = (V, E)$ DOVE V È UN INSIEME E $E \subseteq \binom{V}{2}$. GLI ELEMENTI DI V SI DICONO I <u>VERTICI</u> DI G, QUELLI DI E SI DICONO I <u>LATI</u> (O <u>SPIGOLI</u>, <u>EDGES</u>) DI G

SI RAPPRESENTA GRAFICAMENTE UN GRAFO DISEGNANDO DEI PUNTI PER OGNI VERTICE E COLLEGANDO DUE PUNTI CON UN SEGMENTO (ANCHE CURVILINEO) SE I DUE VERTICI CORRISPONDENTI SONO UN LATO.

<u>E.g.</u>

$$G = ([4], \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}) \longleftrightarrow$$



$= G$

SIA $n \in \mathbb{N}$.

<u>DEF.</u> IL <u>GRAFO VUOTO</u> (SU n VERTICI) È

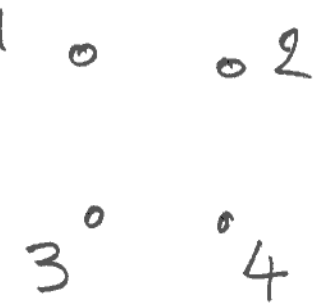
$$N_n \overset{def}{=} ([n], \emptyset).$$

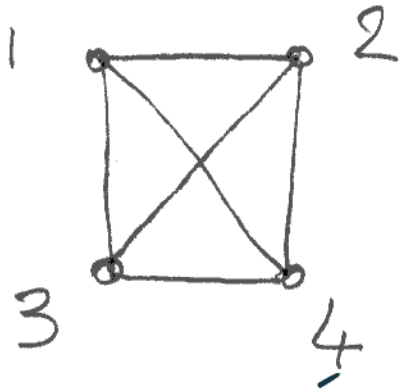
<u>DEF.</u> IL <u>GRAFO COMPLETO</u> (SU n VERTICI)

È $$K_n \overset{def}{=} \left([n], \binom{[n]}{2}\right).$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

<u>E.g.</u>

$N_4 =$ 

, $K_4 =$ 

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO.

<u>DEF.</u> UN <u>CAMMINO</u> IN G È UNA SEQUENZA $(v_1,\dots,v_k)\in V^k$ TALE CHE $\{v_{i-1},v_i\}\in E$ PER $\forall\, i=2,\dots,k$. LA <u>LUNGHEZZA</u> DEL CAMMINO È $k-1$.

<u>DEF.</u> UN <u>SENTIERO</u> IN G È UN CAMMINO $(v_1,\dots,v_k)$ TALE CHE $1\le i,j\le k$, $i\neq j$ $\Rightarrow v_i\neq v_j$.

DEF. UN CAMMINO CHIUSO IN G È ~~UNA~~ UN CAMMINO $(v_1, \dots, v_k)$ TALE CHE $v_1 = v_k$.

DEF. UN CICLO IN G È UN CAMMINO CHIUSO $(v_1, \dots, v_k)$ TALE CHE $(v_1, \dots, v_{k-1})$ È UN SENTIERO.

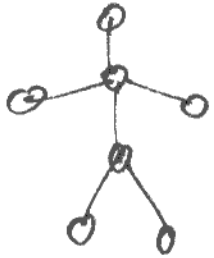
<u>DEF.</u> G È <u>CONNESSO</u> SE PER $\forall x, y \in V$, $x \neq y \Rightarrow \exists$ UN CAMMINO $(v_1, \dots, v_k)$ TALE CHE $v_1 = x$ E $v_k = y$.

<u>DEF.</u> G È <u>ACICLICO</u> SE G NON HA CICLI.

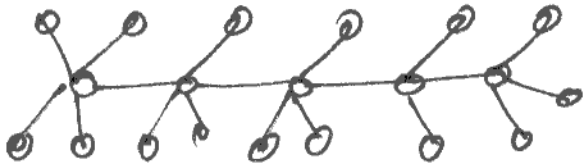
<u>DEF.</u> G È UN <u>ALBERO</u> SE G È CONNESSO E ACICLICO.

<u>DEF.</u> G È UNA <u>FORESTA</u> SE G È ACICLICO.

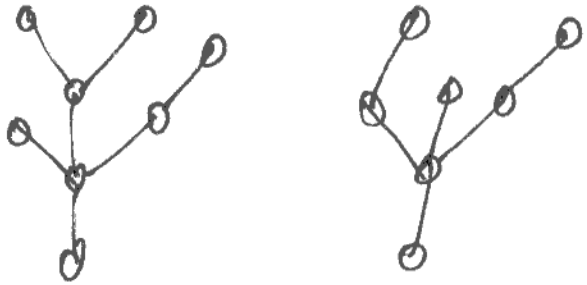
E.g.



È UN ALBERO



È UN ALBERO



È UNA FORESTA

SIA $S \subseteq V$.

<u>DEF.</u> S È <u>INDIPENDENTE</u> SE

$$x, y \in S \Rightarrow \{x, y\} \notin E.$$

<u>DEF.</u> S È <u>COMPLETO</u> (O UNA <u>CLIQUE</u>) SE

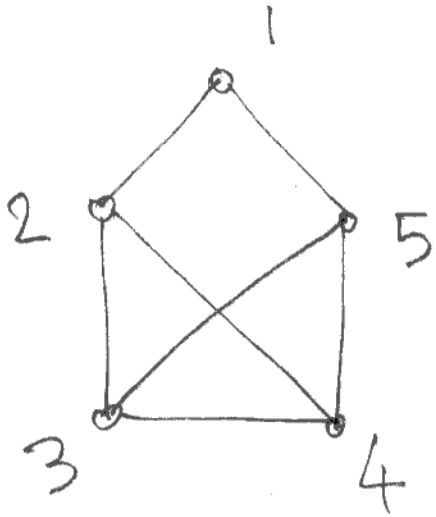
$$\begin{matrix} x, y \in S \\ x \neq y \end{matrix} \Rightarrow \{x, y\} \in E$$

SIA $v \in V$.

<u>DEF.</u> IL <u>GRADO</u> DI v È

$$\mathrm{DEG}(v) \overset{\text{def}}{=} \left| \{ u \in V : \{u, v\} \in E \} \right|.$$

E.g.

$G =$ 

$\Rightarrow$ $\{2,3,4\}$ È UNA CLIQUE

$\{2,5\}$ È INDIPENDENTE

$DEG(4)=3$, $DEG(1)=2$

$(2,4,5)$ È UN SENTIERO

$(2,3,4)$ È UN CICLO

G È CONNESSO.

LEM 6.1.1: SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO. ALLORA

$$\sum_{v \in V} \mathrm{DEG}(v) = 2 \cdot |E|.$$

DIM. ABBIAMO CHE

$$\left| \{ (v, e) \in V \times E : v \in e \} \right| =$$

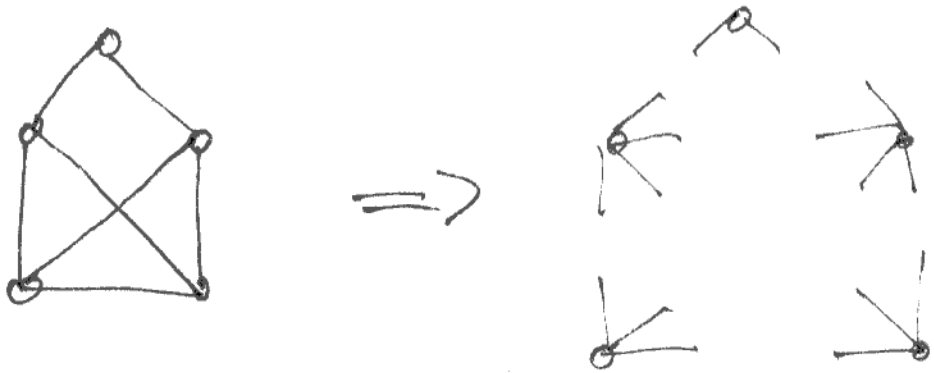
$$= \sum_{v \in V} \left| \{ e \in E : v \in e \} \right| = \sum_{v \in V} \mathrm{DEG}(v)$$

MA ANCHE

$$\left| \{ (v, e) \in V \times E : v \in e \} \right| =$$

$$= \sum_{e \in E} \left| \{ v \in V : v \in e \} \right| = \sum_{e \in E} 2 = 2 \cdot |E| . \square$$

INTUITIVAMENTE



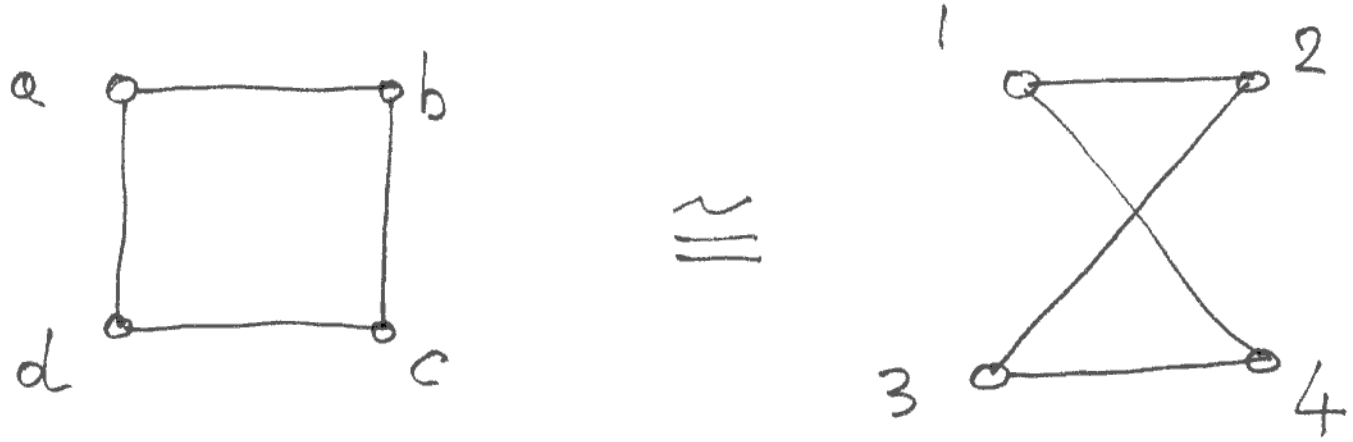
SIANO $G=(V,E)$ E $H=(F,K)$ DUE GRAFI.

<u>DEF.</u> G E H SONO <u>ISOMORFI</u> (SCRITTO $G \cong H$) SE $\exists\, f: V \to F$, f BIEZIONE, TALE CHE, SE $x, y \in V$, ALLORA

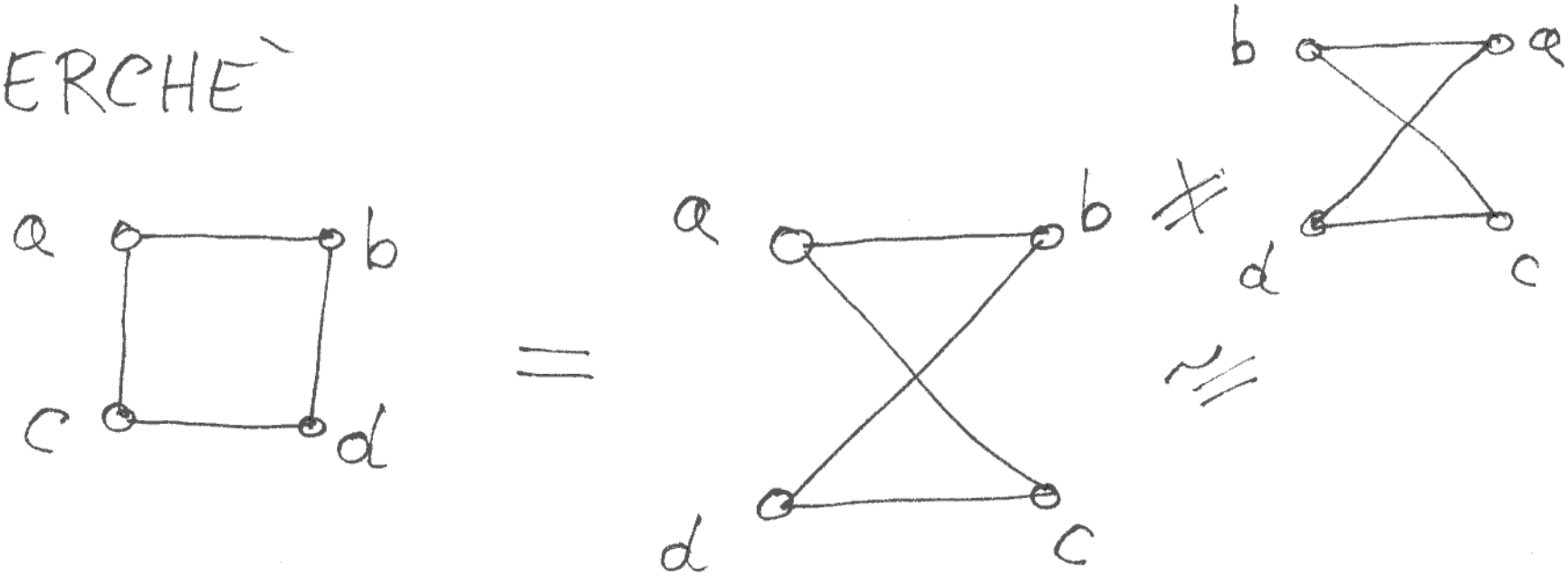
$$\{x,y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in K.$$

<u>INTUITIVAMENTE</u>: POSSO CAMBIARE I NOMI DEGLI ELEMENTI DI V IN MODO CHE $G=H$.

E.g.



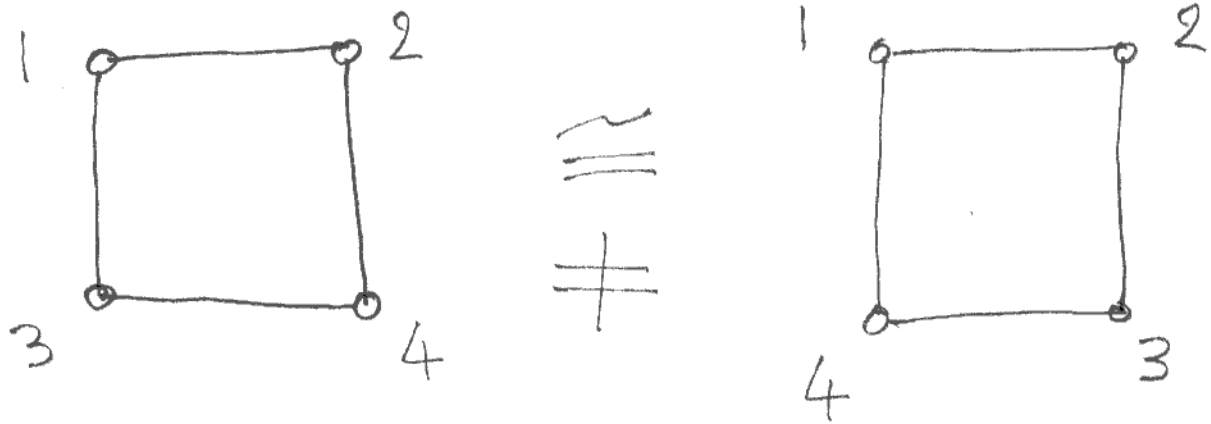
PERCHÈ



$\left(f(a)=1,\ f(b)=2,\ f(c)=3,\ f(d)=4 \right.$ È

UN ISOMORFISMO).

<u>E.g.</u>



$$\| \qquad\qquad \|$$

$$([4], \{\{1,2\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,3\}\}) \neq ([4], \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\})$$

SIA P UNA PROPRIETÀ CHE UN GRAFO PUÒ AVERE O NO.

<u>DEF.</u> SI DICE CHE P È <u>INVARIANTE PER ISOMORFISMI</u> SE, PRESI DUE GRAFI G E H VALE CHE

$$G \cong H \Rightarrow \Big((G \text{ HA } \underline{P}) \Leftrightarrow (H \text{ HA } \underline{P}) \Big).$$

E.g.

P = "È CONNESSO"

È INVARIANTE PER ISOMORFISMI

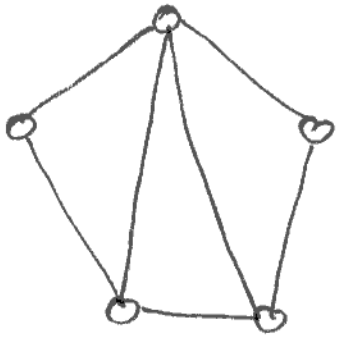
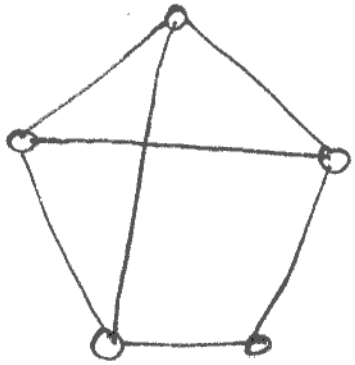
P = "HA UN CICLO DI LUNGHEZZA 4"

È INVARIANTE PER ISOM.

P = "4 È UN VERTICE"

NON È INV. PER ISOM.

E.g.

$G =$  $\not\cong$  $= H$

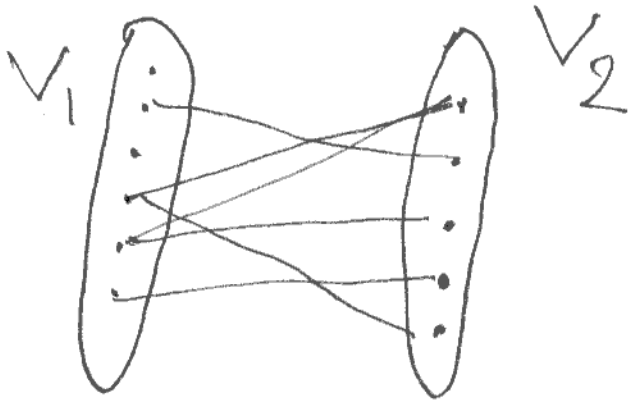
(G HA UN VERTICE DI GRADO 4, H NO)

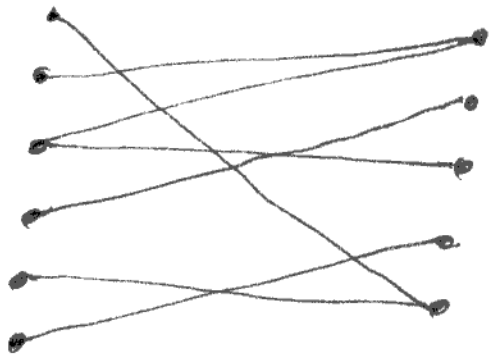
(H HA UN CICLO DI LUNGHEZZA 4, G NO)

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO.

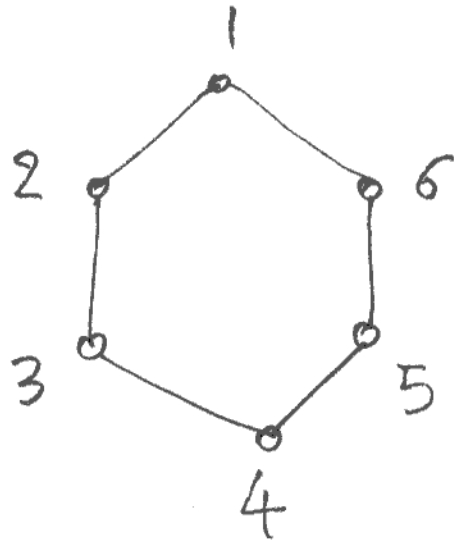
<u>DEF.</u> G È <u>BIPARTITO</u> SE $\exists\, V_1, V_2 \subseteq V$, TALI CHE V_1 E V_2 SONO INDIPENDENTI E $V = V_1 \uplus V_2$ (CIOÈ $V = V_1 \cup V_2$ E $V_1 \cap V_2 = \emptyset$).

GRAFICAMENTE



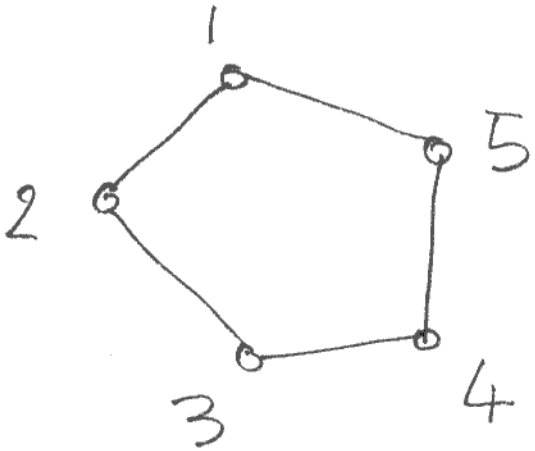


E. g.



È BIPARTITO

$(V_1 = \{1,3,5\},\ V_2 = \{2,4,6\})$



<u>NON</u> È BIPARTITO

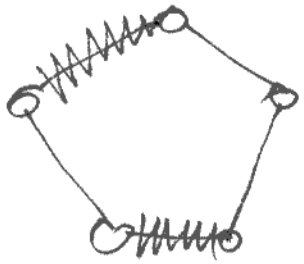
5.2 ACCOPPIAMENTI

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO.

<u>DEF.</u> UN <u>ACCOPPIAMENTO</u> (<u>MATCHING</u>) DI G È UN SOTTOINSIEME $M \subseteq E$ TALE CHE

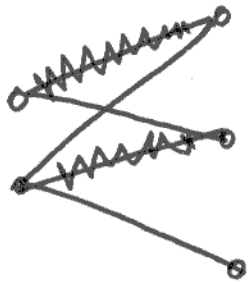
$$f, g \in M \Rightarrow f \cap g = \emptyset.$$

<u>E.g.</u>

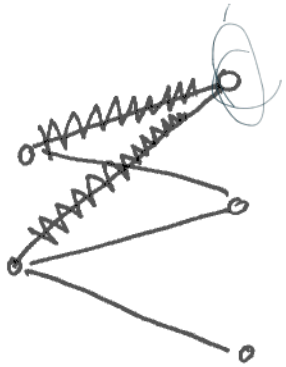


SI

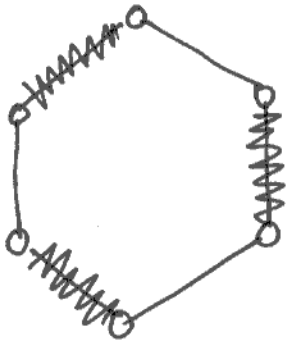
E.g.



SI



NO



SI

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO BIPARTITO,

(SIANO V_1, V_2 TALI CHE $V = V_1 \uplus V_2$

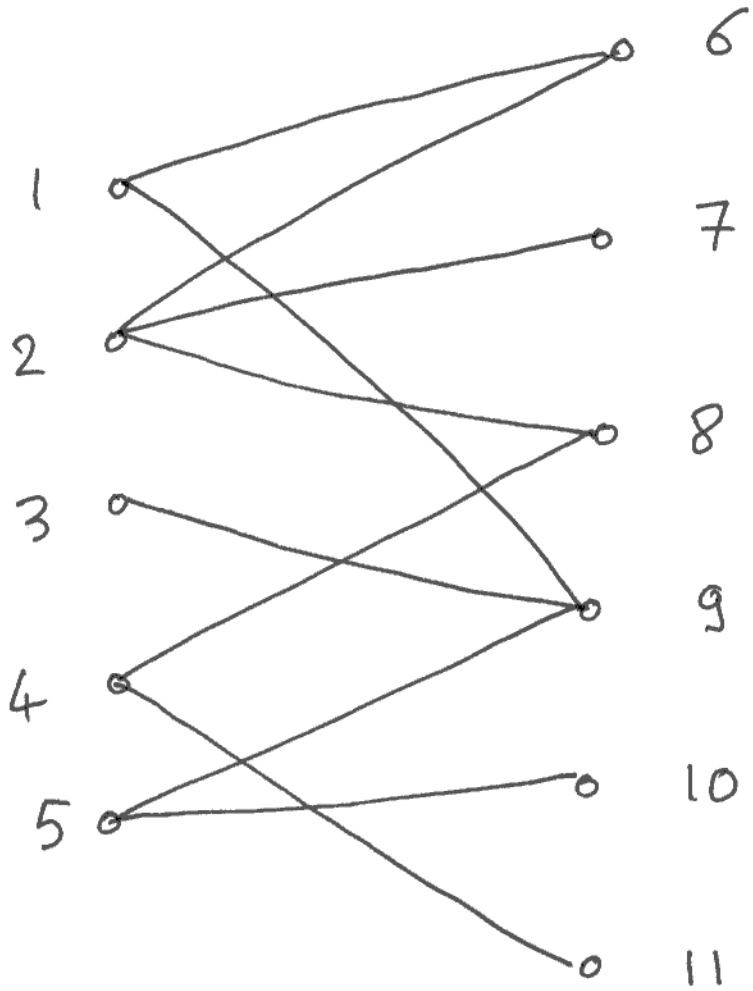
E V_1 E V_2 SONO INDIPENDENTI)

DEF. UN <u>ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2</u> È UN ACCOPPIAMENTO M DI G TALE CHE PER $\forall\, u \in V_1 \Rightarrow \exists\, v \in V_2$ TALE CHE $\{u, v\} \in M$.

SIA $S \subseteq V_1$. PONIAMO

$$N_G(S) \overset{def}{=} \{ v \in V_2 : \exists\, u \in S \text{ TALE CHE } \{u, v\} \in E \}.$$

E.g.



G

$S = \{1, 3, 5\}$

$\Downarrow$

$N_G(S) = \{6, 9, 10\}$

SIA $E' \subseteq E$ E $G' = (V, E')$. ALLORA

$$N_{G'}(S) \subseteq N_G(S).$$

<u>TEO 6.2.1: (HALL) (TEOREMA DEL MATRIMONIO)</u>

SIA $G = (V, E)$ UN GRAFO BIPARTITO COME SOPRA. ALLORA $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2 SE E SOLO SE

$$S \subseteq V_1 \Rightarrow |S| \leq |N_G(S)|.$$

<u>DIM.</u> SUPPONIAMO CHE $|S| \leq |N_G(S)|$ PER $\forall S \subseteq V_1$. INDUZIONE SU $|E|$. ABBIAMO DUE CASI.

a) $\exists\, S \subseteq V_1$ TALE CHE $|S| = |N_G(S)|$.

ALLORA L'IPOTESI DEL TEOREMA È ANCORA VERA PER

$$H = \left(S \cup N_G(S), \{ \ell \in E : \ell \cap S \neq \emptyset \} \right)$$

SE $T \subseteq S \Rightarrow N_G(T) \subseteq N_G(S)$ E $N_G(T) = N_H(T)$

$\Rightarrow |N_H(T)| = |N_G(T)| \geq |T| \Rightarrow$ PER INDUZIONE

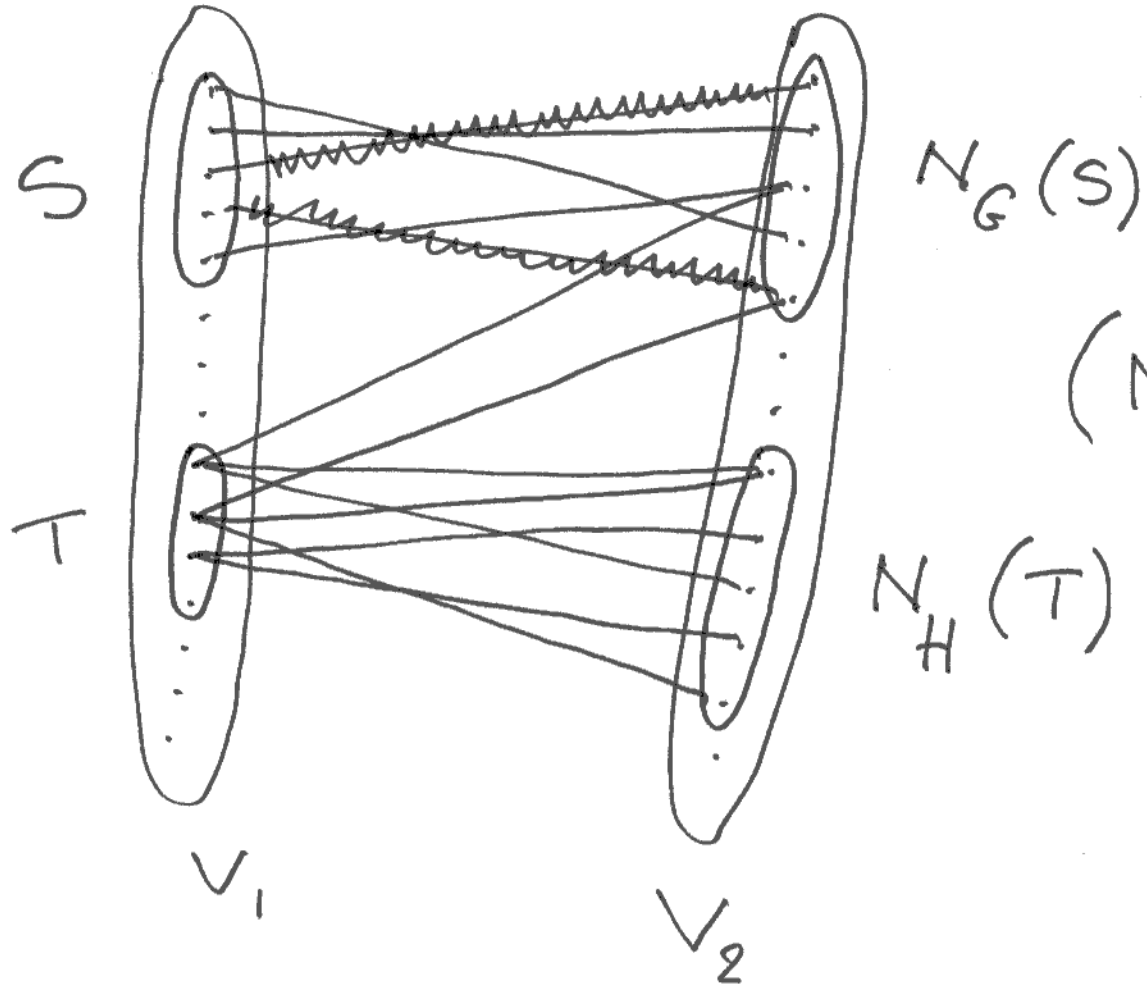
$\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI S IN $N_G(S)$ IN H

($\Rightarrow$ IN G).

SIA

$$G' \stackrel{def}{=} \left((V_1 \setminus S) \uplus (V_2 \setminus N_G(S)), E' \right)$$

DOVE



$(N_G(S \cup T) = N_G(S) \uplus N_H(T))$

(NON CI SONO LATI TRA S E $V_2 \setminus N_G(S)$)

$$E' \overset{def}{=} \{ \ell \in E : \ell \cap S = \emptyset \text{ E } \ell \cap N_G(S) = \emptyset \}.$$

SIA $T \subseteq V_1 \setminus S$. ALLORA $N_G(S \cup T) = N_G(S) \uplus N_H(T)$. QUINDI

$$|S| + |T| \underset{\substack{\uparrow \\ (S \cap T = \emptyset)}}{=} |S \cup T| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(IPOTESI)}}}{\leq} |N_G(S \cup T)| = |N_G(S)| +$$

$$+ |N_H(T)| = |S| + |N_H(T)|$$

$\Rightarrow |T| \leq |N_H(T)| \Rightarrow$ (PER INDUZIONE)

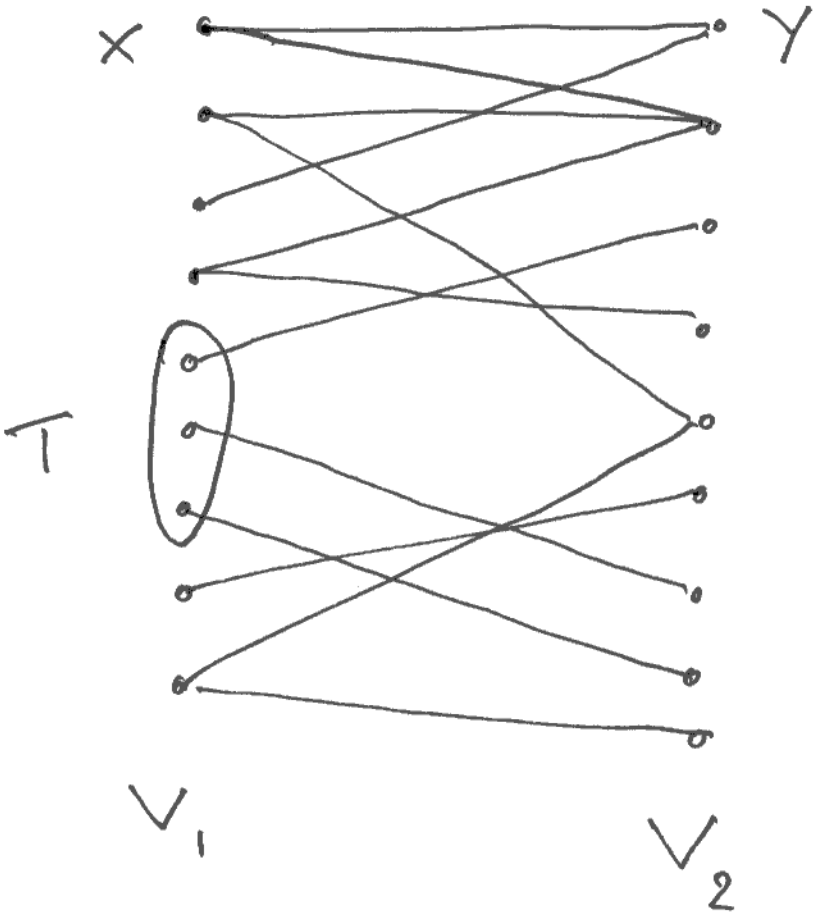
$\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI $V_1 \setminus S$ IN $V_2 \setminus N_G(S)$ IN H ($\Rightarrow$ IN G). QUINDI HO UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2 IN G.

b) $|S| < |N_G(S)|$ PER $\forall S \subseteq V_1$.

SIA $x \in V_1 \Rightarrow |N_G(\{x\})| \geq 2$. SIA $y \in N_G(\{x\})$.

CONSIDERIAMO

$$G' \overset{def}{=} \left(V \setminus \{x, y\}, \{ \ell \in E : x \notin \ell \overset{E}{\cancel{\cup}} y \notin \ell \} \right)$$


X
Y
T
V_1
V_2

SIA $T \subseteq V_1 \setminus \{x\}$. ALLORA

$$N_G(T) = \begin{cases} N_{G'}(T) \cup \{y\}, & \text{SE } y \in N_G(T), \\ N_{G'}(T), & \text{SE } y \notin N_G(T). \end{cases}$$

PERTANTO

$$|N_{G'}(T)| \geq |N_G(T)| - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ (b))}}{\geq} |T| + 1 - 1 = |T|.$$

QUINDI, PER INDUZIONE, $\Rightarrow \exists$ ACCOPPIAMENTO DI $V_1 \setminus \{x\}$ IN $V_2 \setminus \{y\} \Rightarrow \exists$ ACCOP.

PIAMENTO DI V_1 IN V_2.

IL VICEVERSA È FACILE. $\square$

SIA $G=(V,E)$ BIPARTITO, COME SOPRA.

<u>DEF.</u> G SI DICE <u>LEGATO NEI GRADI DA V_1 A V_2</u>

SE

$$\begin{array}{l} x \in V_1 \\ y \in V_2 \end{array} \Rightarrow d(x) \geq d(y).$$

<u>COR 6.2.2</u>: SIA $G=(V,E)$ BIPARTITO E LEGATO NEI GRADI DA V_1 IN V_2. ALLORA $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2.

<u>DIM.</u> SIA $S \subseteq V_1$. SIA

$$E^* \overset{df}{=} \{ \ell \in E : \ell \cap S \neq \emptyset \}.$$

SIA $d \in \mathbb{P}$ TALE CHE $d(x) \geq d \geq d(y)$ PER $\forall x \in V_1$ E $\forall y \in V_2$. ALLORA

$$d \cdot |S| \leq \sum_{x \in S}' d(x) = |E^*| \leq \sum_{y \in N_G(S)}' d(y) \leq d \cdot |N_G(S)|$$

(PERCHE' $\sum_{y \in N_G(S)}' d(y) = \left| \left\{ \ell \in E : \ell \cap N_G(S) \neq \emptyset \right\} \right|$).

QUINDI $|S| \leq |N_G(S)|$ => PER 6.2.1 => $\exists$ ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2. $\square$

SIA $G = (V, E)$ BIPARTITO.

<u>DEF.</u> G È <u>REGOLARE</u> (<u>DI GRADO d</u>) SE

$$x \in V \Rightarrow d(x) = d.$$

<u>COR. 6.2.3</u>: SIA $G=(V,E)$ BIPARTITO E REGOLARE. ALLORA $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2 E $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI V_2 IN V_1.

<u>DIM.</u> SEGUE SUBITO DA 6.2.2. $\square$

6.3 COLORAZIONI

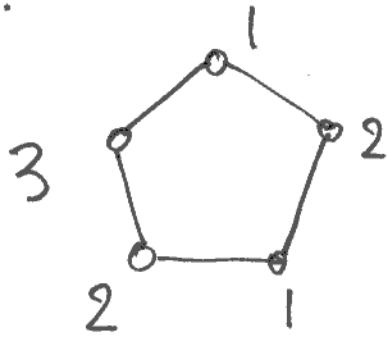
SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO E SIA $m \in \mathbb{P}$.

<u>DEF.</u> UNA <u>COLORAZIONE</u> DI G IN m COLORI È UNA FUNZIONE $f: V \to [m]$ TALE CHE

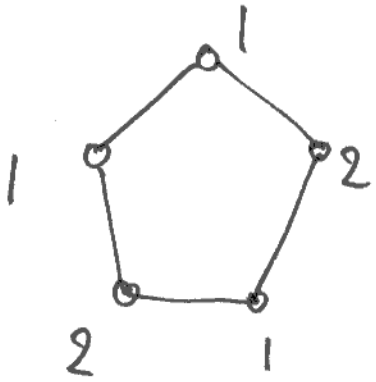
$$\{x, y\} \in E \implies f(x) \neq f(y).$$

<u>DEF.</u> IL <u>NUMERO CROMATICO</u> DI G, SCRITTO $\chi(G)$, È IL MINIMO $m \in \mathbb{P}$ PER CUI $\exists$ UNA COLORAZIONE DI G IN m COLORI.

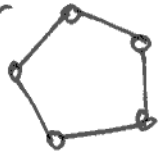
E.g.



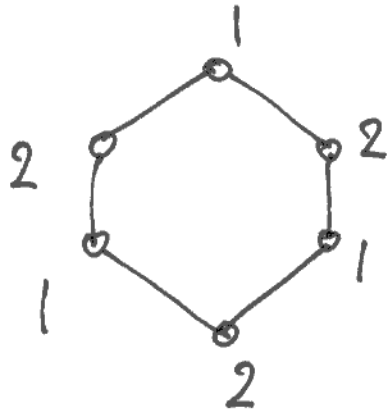
È UNA COLORAZIONE

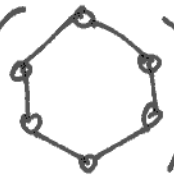


NON È " " .

$\Rightarrow \chi\Big($  $\Big) = 3.$

E.g.



$\Rightarrow \chi\Big($  $\Big) = 2$

ES. [1+]: SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO. DIMOSTRARE CHE

$$G \text{ È BIPARTITO} \iff \chi(G) = 2.$$

PRO 6.3.1: SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO. ALLORA

$$\chi(G) \leq \max_{v \in V} \{d(v)\} + 1.$$

DIM. SIA $k \overset{def}{=} \max_{v \in V} \{d(v)\} + 1$. È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE G PUÒ ESSERE COLORATO CON k COLORI. PROCEDIAMO PER INDUZIONE SU $|V|$. SE $|V|=1 \Rightarrow \chi(G)=1 \leq 1 = \max_{v \in V} \{d(v)\} + 1$. SIA IL RISULTATO

VERO PER GRAFI CON AL PIÙ $n-1$ VERTICI.

SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO CON n VERTICI.

SIA $v \in V$. SIA $G' \overset{def}{=} (V \setminus \{v\}, E')$ DOVE

$$E' \overset{def}{=} \{ \ell \in E : v \notin \ell \}.$$

ALLORA $d_{G'}(u) \leq d_G(u)$ PER $\forall u \in V \setminus \{v\}$

($d_{G'}(u) =$ GRADO DI u IN G'). MA $|V'|$

$= n-1 \Rightarrow$ PER INDUZIONE

$$\chi(G') \leq \max_{u \in V'} \{ d_{G'}(u) \} + 1$$

$$\leq \max_{u \in V'} \{ d_G(u) \} + 1$$

$$\leq k.$$

QUINDI POSSO COLORARE G' CON k COLORI. SIA

$$\{ v_1, \dots, v_r \} \overset{def}{=} \{ u \in V : \{u, v\} \in E \}$$

ALLORA $r = d(v) \leq k-1 \Rightarrow$ POSSO COLORARE v CON UNO DEI $k-r$ COLORI RIMANENTI. QUINDI POSSO COLORARE G CON k COLORI. $\square$

6.4 GRAFI DIRETTI

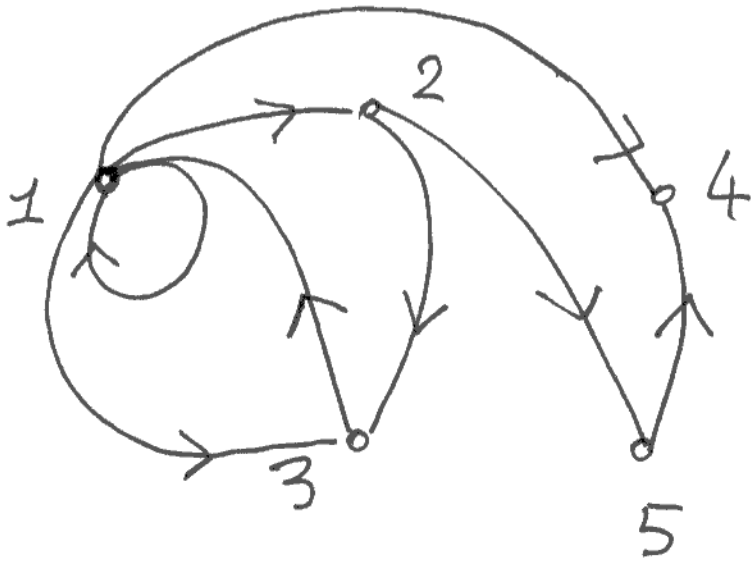
DEF. UN <u>GRAFO DIRETTO</u> (O <u>DIGRAFO</u>) È UNA COPPIA $D = (V, A)$ DOVE V

È UN INSIEME E $A \subseteq V \times V$. GLI ELEMENTI DI V SI DICONO <u>VERTICI</u>, GLI ELEMENTI DI A SI DICONO <u>LATI DIRETTI</u> (O <u>SPIGOLI DIRETTI</u> O <u>FRECCIE</u>).

SI RAPPRESENTA UN GRAFO DIRETTO GRAFICAMENTE RAPPRESENTANDO OGNI VERTICE CON UN PUNTO E COLLEGANDO I PUNTI CORRISPONDENTI A DUE

VERTICI u E v CON UNA FRECCIA DA u A v SE $(u,v) \in A$.

<u>E.g.</u> $D = ([5], \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (1,4), (2,3), (2,5), (5,4)\})$. ALLORA



$= D$

E.g. TWITTER È UN GRAFO DIRETTO.

SIA $D=(V,A)$ UN GRAFO DIRETTO.

DEF. UN CAMMINO DIRETTO IN D È UNA SEQUENZA $(x_0,\dots,x_k)\in V^{k+1}$ TALE CHE $(x_{i-1},x_i)\in A$ PER $\forall\, i=1,\dots,k$.

DEF. UN SENTIERO DIRETTO IN D È UN CAMMINO DIRETTO $(x_0,\dots,x_k)$ TALE CHE $x_i\neq x_j$ SE $0\leq i<j\leq k$.

SIA $v \in V$.

<u>DEF.</u> IL <u>GRADO INTERNO</u> DI v (<u>IN-DEGREE</u>)

È

$$d_-(v) \overset{def}{=} \left| \{ u \in V : (u, v) \in A \} \right|.$$

<u>DEF.</u> " <u>GRADO ESTERNO</u> " " (<u>OUT-DEGREE</u>)

È

$$d_+(v) \overset{def}{=} \left| \{ u \in V : (v, u) \in A \} \right|.$$

<u>DEF.</u> G È <u>ACICLICO</u> SE NON HA CICLI DIRETTI.

<u>6.5 RETI DI COMUNICAZIONE</u>

5.5 RETI DI COMUNICAZIONE

DEF. UNA <u>RETE DI COMUNICAZIONE</u> È UNA TERNA (R, I, O) DOVE $R = (V, A)$ È UN DIGRAFO (GRAFO DIRETTO), $I \subseteq V$, $O \subseteq V$, $I \cap O = \emptyset$ (VERTICI DIVERSI), E $|I| = |O| = N$. GLI ELEMENTI DI I SI DICONO <u>NODI DI INPUT</u>, " DI O " " <u>NODI DI OUTPUT</u>.

SIA (R, I, O) UNA RETE DI COMUNICAZIONE.

DEF. UN <u>PROBLEMA DI SMISTAMENTO</u> PER (R, I, O) È UNA PERMUTAZIONE $\pi \in S_N$.

SIA $\pi \in S_N$.

DEF. UNO <u>SMISTAMENTO</u> PER π È UNA SEQUENZA $(P_1, \dots, P_N)$ DOVE P_j È UN CAMMINO DIRETTO CHE VA DA i_j A $\sigma_{\pi(j)}$, $\forall j = 1, \dots, N$.

DOVE $I \overset{def}{=} \{i_1, \dots, i_N\}$ E $O \overset{def}{=} \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$.

SIA $(P_1, \dots, P_N)$ UN TALE SMISTAMENTO.

<u>DEF.</u> LA <u>LATENZA</u> DI $(P_1, \dots, P_N)$ È

$$\max\{\ell(P_j) : j = 1, \dots, N\}.$$

<u>DEF.</u> LA <u>CONGESTIONE</u> DI $(P_1, \dots, P_N)$ È

$$c(P_1, \dots, P_N) \overset{def}{=} \max_{x \in V} \{ |\{ j \in N : x \in P_j \}| \}.$$

SIANO $x, y \in V$.

<u>DEF.</u> LA <u>DISTANZA</u> DA x A y È LA LUNGHEZZA MINIMA DI UN CAMMINO DIRETTO DA x AD y, SCRITTO $d(x,y)$ (SE y NON È RAG-

GIUNGIBILE DA x SI PONE $d(x,y) \stackrel{df}{=} +\infty$).

<u>DEF.</u> IL <u>DIAMETRO</u> DI (R,I,O) È

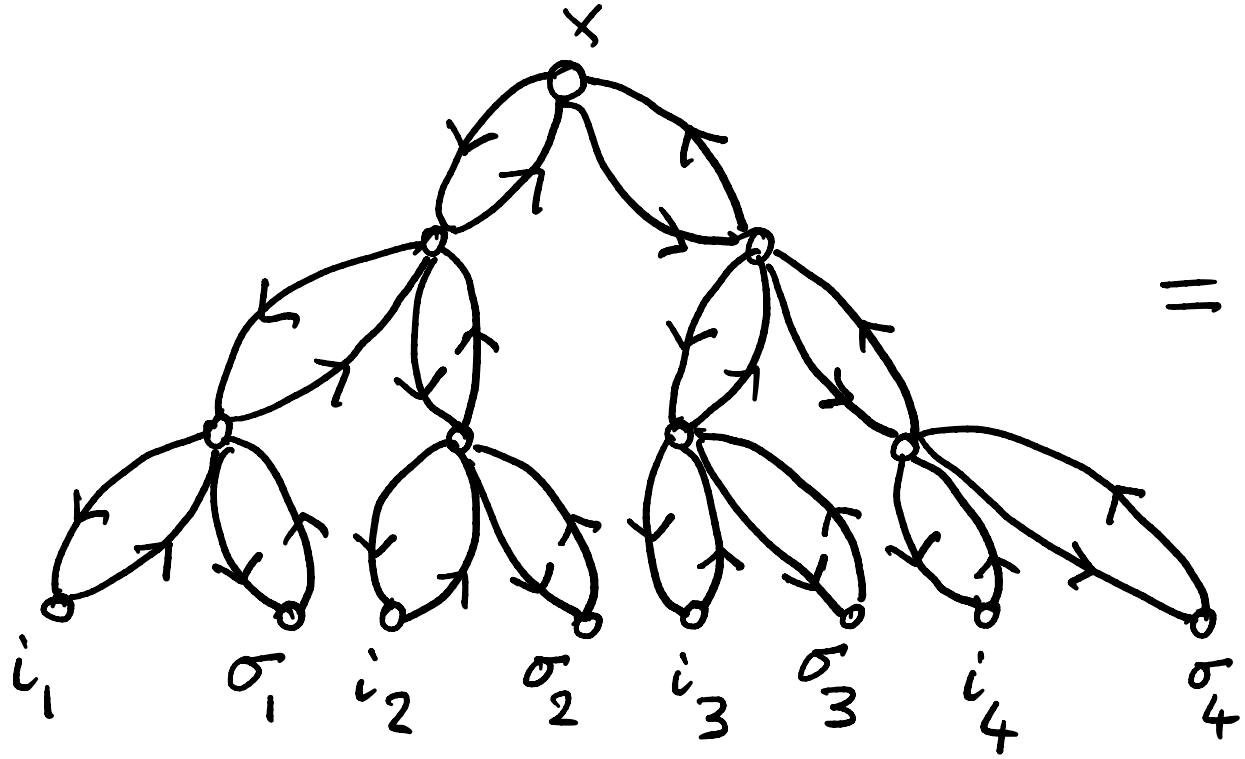
$$\max\left\{ d(i_j, o_k) : 1 \leq j, k \leq N \right\}.$$

<u>DEF.</u> LA <u>CONGESTIONE</u> DI (R,I,O) È

$$\max_{\pi \in S_N} \left\{ \min_{\substack{(P_1,\dots,P_N) \\ \text{SMISTAMENTO} \\ \text{PER } \pi}} \left\{ c(P_1,\dots,P_N) \right\} \right\},$$

SCRITTO $c(R,I,O)$.

E.g.



$(N=4)$

$= (R, I, O)$

SIA $\pi = 4321$, SIA $(P_1, \dots, P_4)$ UNO SMISTAMENTO PER π. ALLORA:

P_1 VA DA i_1 A σ_4 $(\pi(1)=4)$

P_2 " " i_2 A σ_3 $(\pi(2)=3)$

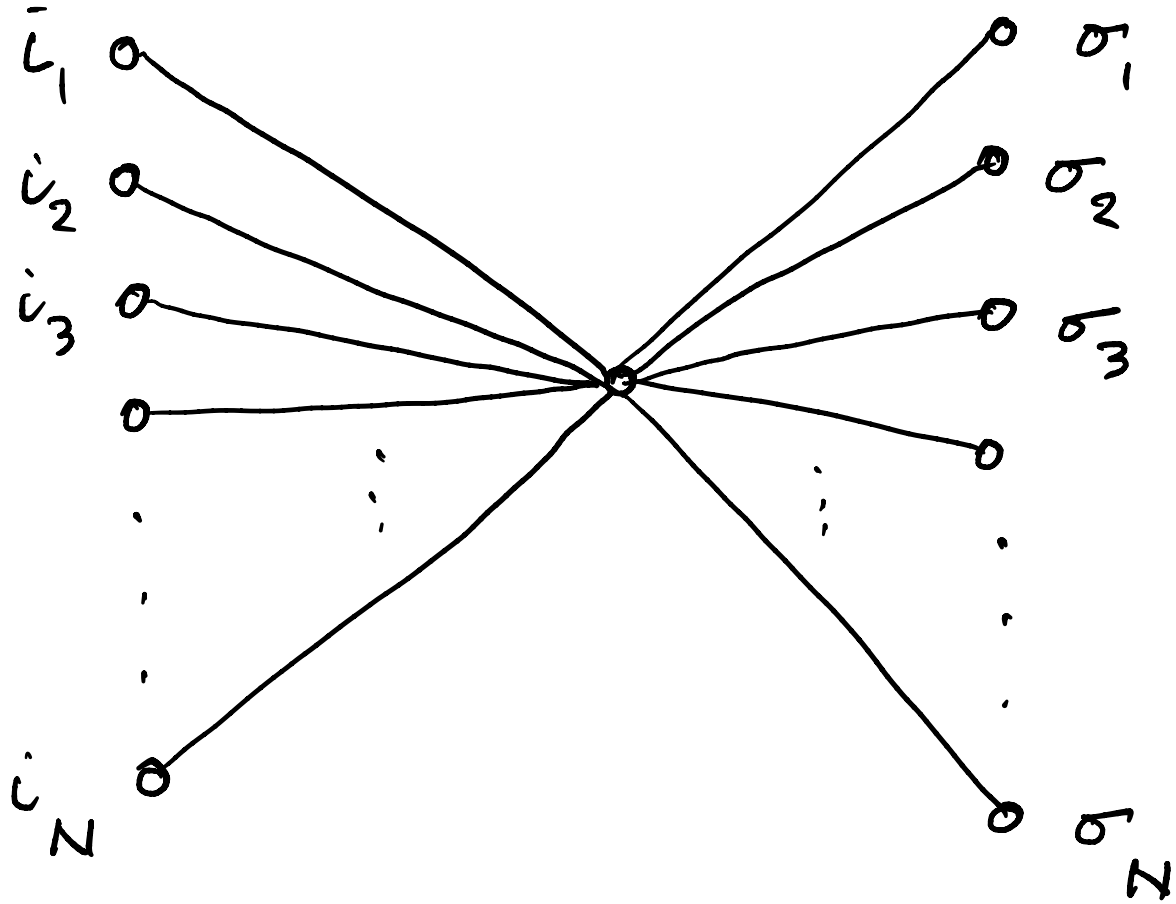
P_3 " " i_3 A σ_2 $(\pi(3)=2)$

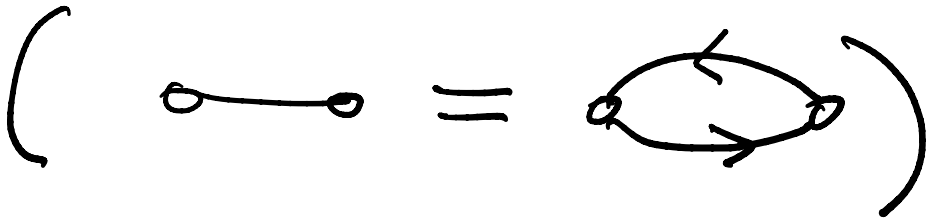
P_4 " " i_4 A σ_1 $(\pi(4)=1)$

$\Longrightarrow$ $x \in P_1$, $x \in P_2$, $x \in P_3$, $x \in P_4$ $\Longrightarrow$

$c(P_1, \ldots, P_4) = 4 \Longrightarrow c(R, I, 0) = 4.$

E.g. IL "MOSTRO" SU N TERMINALI.





PER $\forall\, \pi \in S_N$ E $\forall\, (\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_N)$ SMISTAMENTO DI π $\Rightarrow$ $c(\underline{P}_1, \dots, \underline{P}_N) = N$ $\Rightarrow$ LA CONGESTIONE DEL "MOSTRO" È N.

PER $\forall \pi \in S_N$ E $\forall (P_1, \dots, P_N)$ SMISTAMENTO DI π $\Rightarrow$ $c(P_1, \dots, P_N) = N$ $\Rightarrow$ LA CONGESTIONE DEL "MOSTRO" È N.

SIA (R, I, o) UNA RETE DI COMUNICAZIONE.

<u>DEF.</u> I VERTICI DI (R, I, o) SI DICONO ANCHE <u>SWITCH</u>.

SIA $v \in V$.

<u>DEF.</u> LA <u>GRANDEZZA</u> DI v È $(d_+(v),$

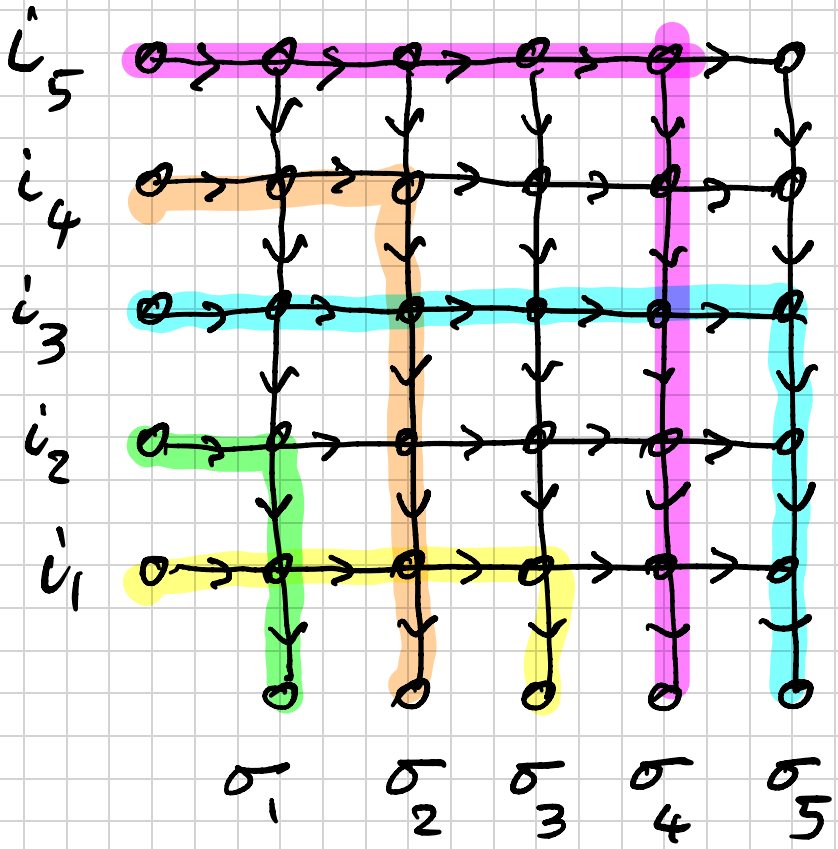
$d_-(v)$). SI DICE ANCHE CHE v È UNO

<u>$(d_+(v) \times d_-(v))$-SWITCH</u>.

<u>OBIETTIVO</u>: CONGESTIONE BASSA,

POCHI SWITCH, SWITCH PICCOLI.

LA GRIGLIA G_5 È:



$\pi = 31524$

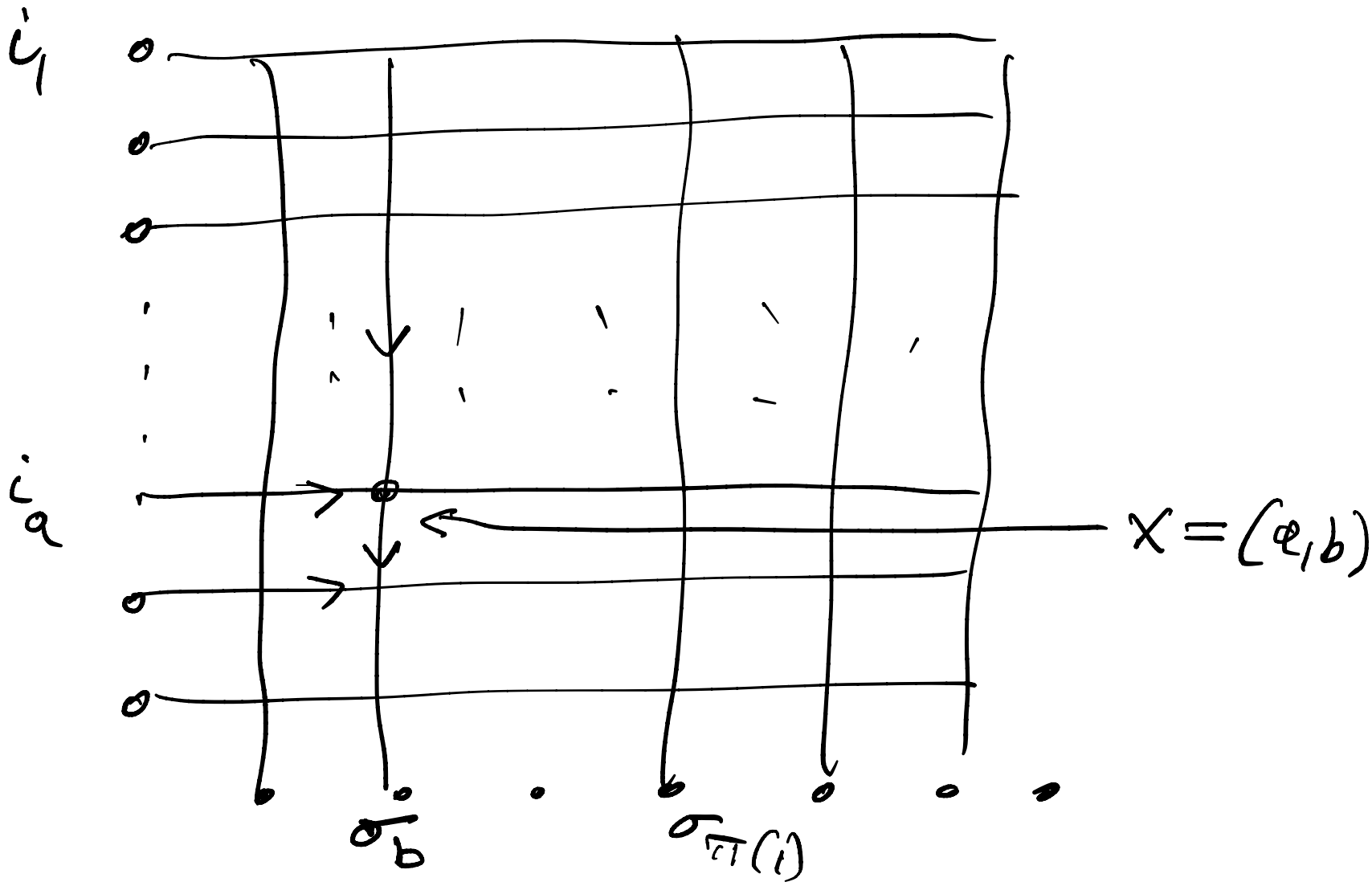
ANALOGAMENTE G_n.

TEO. 5.5.1: SIA $m \in \mathbb{P}$. ALLORA

$$c(G_m) = 2.$$

DIM. È CHIARO CHE $c(G_m) > 1$. SE $\pi \in S_m$ È TALE CHE $\pi(1) = m$ E $\pi(m) = 1$ E SE $(P_1, \dots, P_m)$ È UNO SMISTAMENTO PER $\pi \Rightarrow P_1 \cap P_m \neq \emptyset$. SIA $\pi \in S_m$, E SIA x IL VERTICE NELLA STESSA RIGA DI i_a E NELLA STESSA COLONNA

NA DI σ_b, DOVE $a, b \in [n]$. PONIAMO $(a,b) \overset{def}{=} x$.



DEFINIAMO UNO SMISTAMENTO $(P_1, \dots, P_m)$ IN QUESTO MODO. P_j SEGUE LA RIGA j-ESIMA FINO ALLA COLONNA $\pi(j)$-ESIMA E LA SEGUE VERSO IL BASSO ($\Rightarrow P_j$ COLLEGA i_j CON $\sigma_{\pi(j)}$) $\forall\, j = 1, \dots, m$. ALLORA, $c(P_1, \dots, P_m) = 2$.

SIA P_j UN CAMMINO TALE CHE

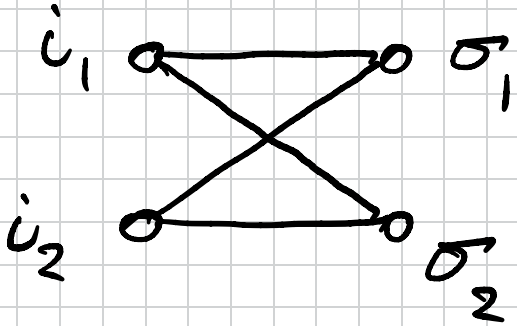
$(a,b) \in P_j \Longrightarrow$ O $j = a$ OPPURE $\pi(j) = b$

$\Longrightarrow j = a$ O $j = \pi^{-1}(b) \Longrightarrow$ AL PIÙ 2 POSSIBILITÀ PER P_j. QUINDI $c(P_1, \ldots, P_n) = 2$. $\square$

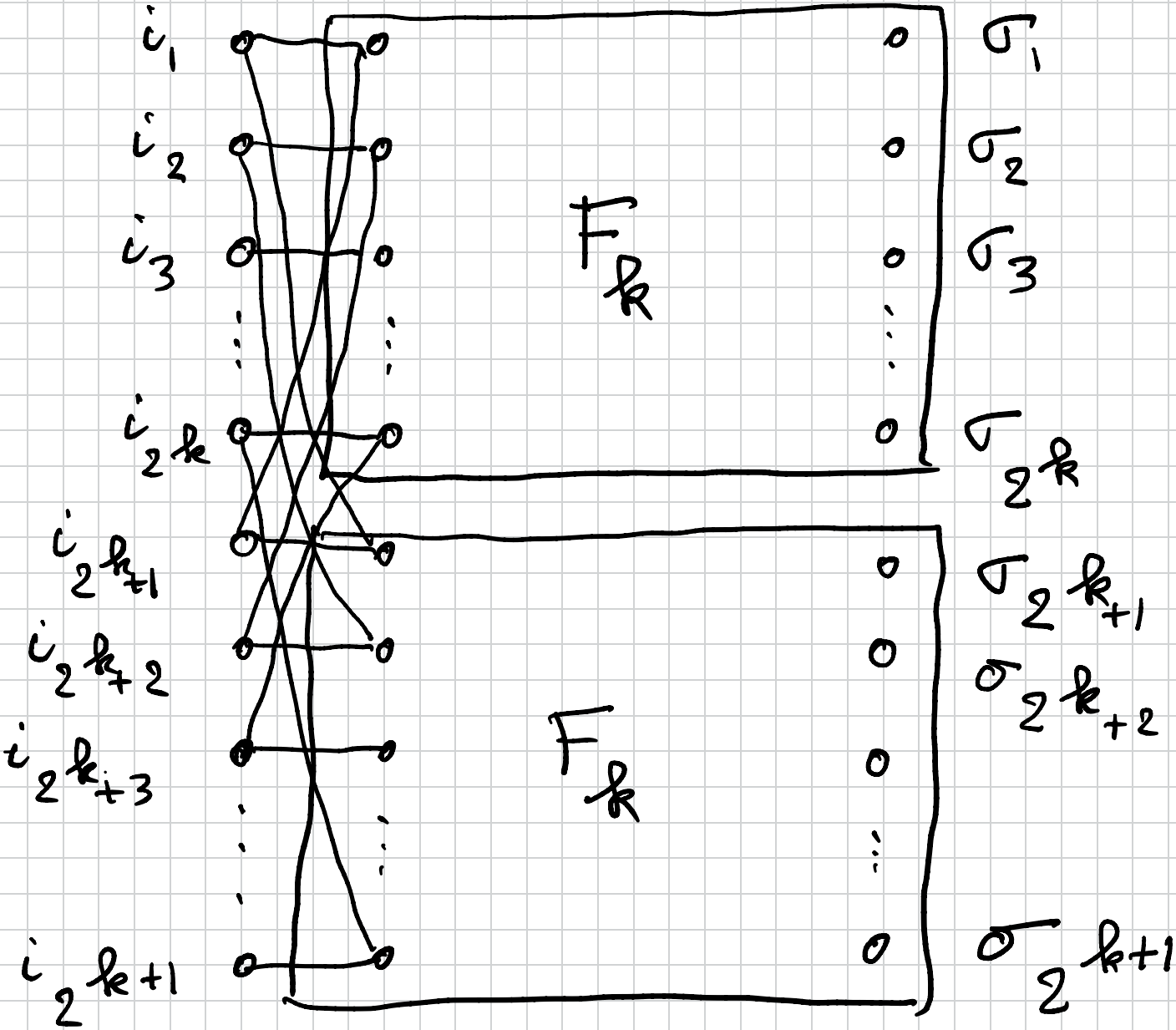
SIA $k \in \mathbb{P}$.

<u>DEF.</u> LA <u>FARFALLA</u> F_k È DEFINITA INDUTTIVAMENTE COME SEGUE.

$F_1 =$

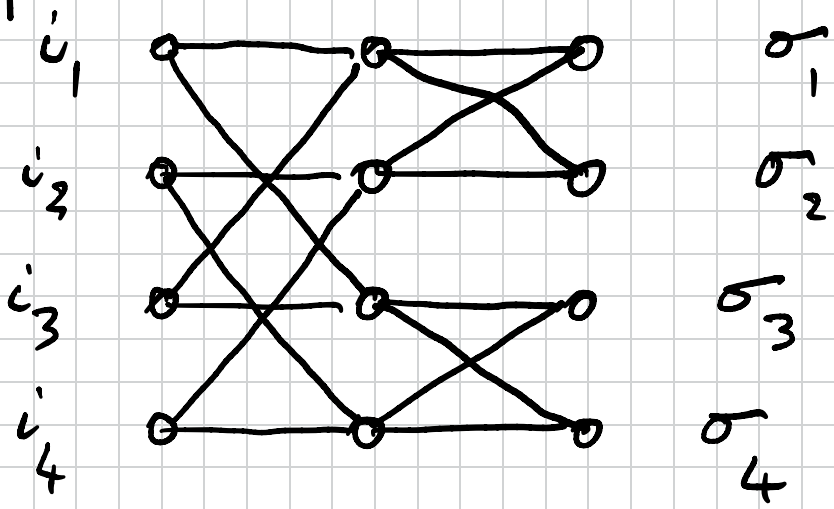


(TUTTI I LATI SONO DIRETTI VERSO DESTRA)


i_1
i_2
i_3
i_{2k}
i_{2k+1}
i_{2k+2}
i_{2k+3}
i_{2k+1}
F_k
F_k
σ_1
σ_2
σ_3
σ_{2k}
σ_{2k+1}
σ_{2k+2}
σ_{2k+1}

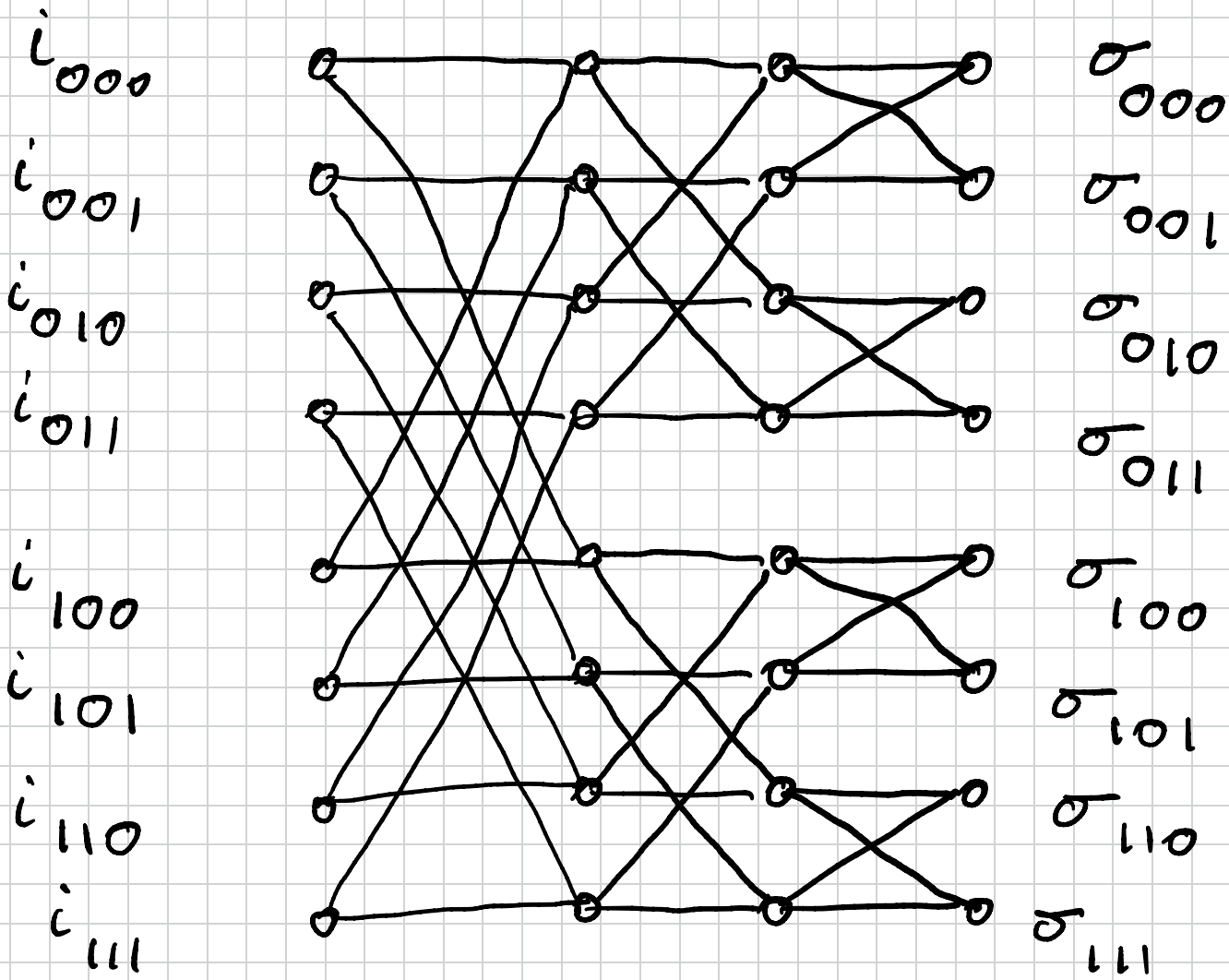
QUINDI

$F_2 =$



(TUTTI GLI ARCHI DIRETTI A DESTRA)

$F_3 =$


i_{000}
i_{001}
i_{010}
i_{011}
i_{100}
i_{101}
i_{110}
i_{111}
o_{000}
o_{001}
o_{010}
o_{011}
o_{100}
o_{101}
o_{110}
o_{111}

FORMALMENTE, $F_k = (R, I, O)$ DOVE $R = (V, E)$

DOVE

$$V \overset{def}{=} \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, i) \in [0,1]^k \times [k+1] \right\}$$

E

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, i) \to (\eta_1, \dots, \eta_k, j)$$

SE E SOLO SE

$j = i+1$ E $\varepsilon_r = \eta_r \quad \forall r \in [k+1] \setminus \{i\}$

OSS. C'È UN SOLO SENTIERO DIRETTO DA QUALSIASI NODO DI INPUT AD OGNI NODO DI OUTPUT.

E.g. $k=4$

$$(1,0,0,1,1) \to (1,0,0,1,2) \to (1,1,0,1,3)$$

$$\| \quad i_{1001}$$

$$(1,1,1,1,4) \longrightarrow (1,1,1,0,5)$$

$$= \sigma_{1110}$$

TEO. 5.5.2: SIA $k \in \mathbb{P}$. ALLORA LA CONGESTIONE DELLA FARFALLA È

$$c(F_k) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{SE } k \text{ È PARI} \\ 2^{\frac{k-1}{2}}, & \text{SE } k \text{ È DISPARI}. \end{cases}$$

DIM. (IDEA)

SIA $\pi \in S_N$ $(N = 2^k)$ E SIA $(P_1, \dots, P_N)$ UNO SMISTAMENTO PER π. SIA

$$x \overset{def}{=} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, i) \in V.$$

SIA P_j TALE CHE $x \in P_j$. ALLORA IL NODO DI OUTPUT DI P_j È DELLA FORMA

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}, x_i, \dots, x_k, k+1)$$

$\Rightarrow 2^{k-i+1}$ POSSIBILITÀ. SIMIL., IL NODO DI INPUT DI P_j È DELLA FORMA

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_k, 1)$$

$\Rightarrow 2^{i-1}$ POSSIBILITÀ. PERTANTO CI

SONO

$$\min\{2^{i-1}, 2^{k-i+1}\}$$

POSSIBILITÀ PER P_j. MA

$$\min\{2^{i-1}, 2^{k-i+1}\} \leq \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & \text{SE } k \text{ È PARI} \\ 2^{\frac{k-1}{2}}, & \text{SE } k \text{ È DISPARI,} \end{cases}$$

$$\left(\min_{1 \leq i \leq k} \{i-1, k-i+1\} \leq \begin{cases} \frac{k}{2} \\ \frac{k-1}{2} \end{cases} \text{COME SOPRA} \right). \square$$

CONCLUDENDO

RETE	# DI NODI	# DI TERMINALI	CONGESTIONE
G_N	$N(N+2)$	N	2
F_k	$N(\log_2(N)+1)$	N $(=2k)$	$\sqrt{N}$ SE k È PARI $\sqrt{\frac{N}{2}}$ SE k È DISPARI

GRANDEZZA DEI SWITCH

2×2	
2×2	

5.6 ORARI PARALLELI

SIA $D = (V, A)$ UN GRAFO DIRETTO.

<u>DEF.</u> UN <u>ORARIO PARALLELO</u> PER D È UNA PARTIZIONE $\{B_0, B_1, \ldots, B_k\}$ DI V TALE CHE

$0 \leq i < j \leq k \Longrightarrow$ NESSUN VERTICE DI B_i È RAGGIUNGIBILE DA ALCUN VERTICE DI B_j.

$\max\{|B_0|, \ldots, |B_k|\}$ SI DICE IL <u>NUMERO DI PROCESSORI</u> DELL'O.P., $k+1$ SI

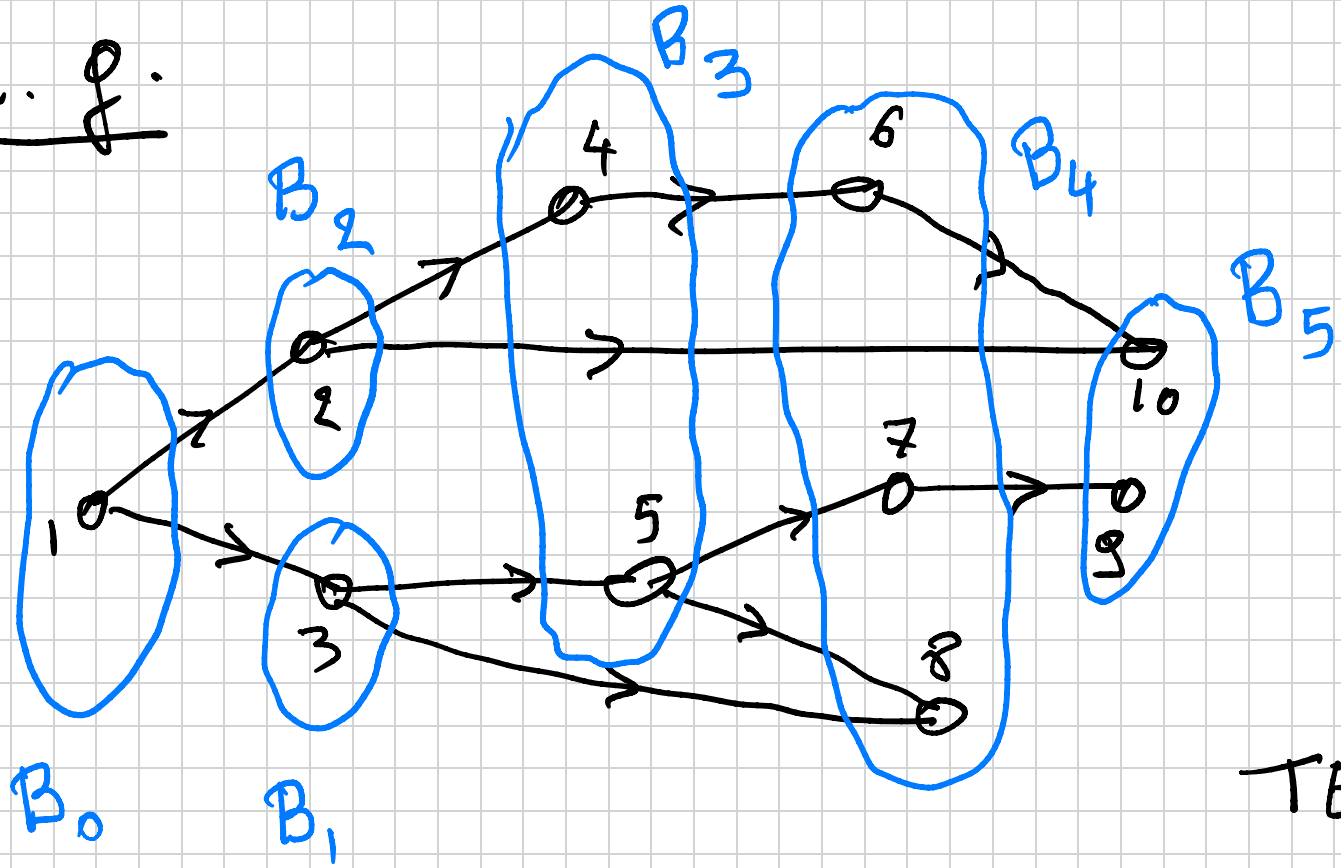
DICE IL <u>TEMPO</u> DELL'O.P., GLI ELEMENTI DI B_i SI DICONO IL <u>PASSO i-ESIMO</u> DELL'O.P.

SIA $x \in V$.

<u>DEF.</u> UN <u>SENTIERO CRITICO</u> PER x È UN SENTIERO DIRETTO $(x_0, x_1, \dots, x_r)$ IN D TALE CHE $x_r = x$ E SE $(y_0, y_1, \dots, y_s)$ È UN ALTRO SENTIERO DIRETTO TALE CHE $y_s = x \Rightarrow r \geq s$.

DEF. LA <u>PROFONDITÁ</u> DI x, SCRITTA $d_p(x)$, È LA LUNGHEZZA DI UN SENTIERO CRITICO PER x.

E. g.



È UN O. P.

DI PROCESSORI È 3

TEMPO = 6.

<u>TEO. 5.6.1</u>: SIA $D=(V,A)$ UN GRAFO DIRETTO, PRIVO DI CICLI DIRETTI. ALLORA

$$(A_0, A_1, \dots, A_k)$$

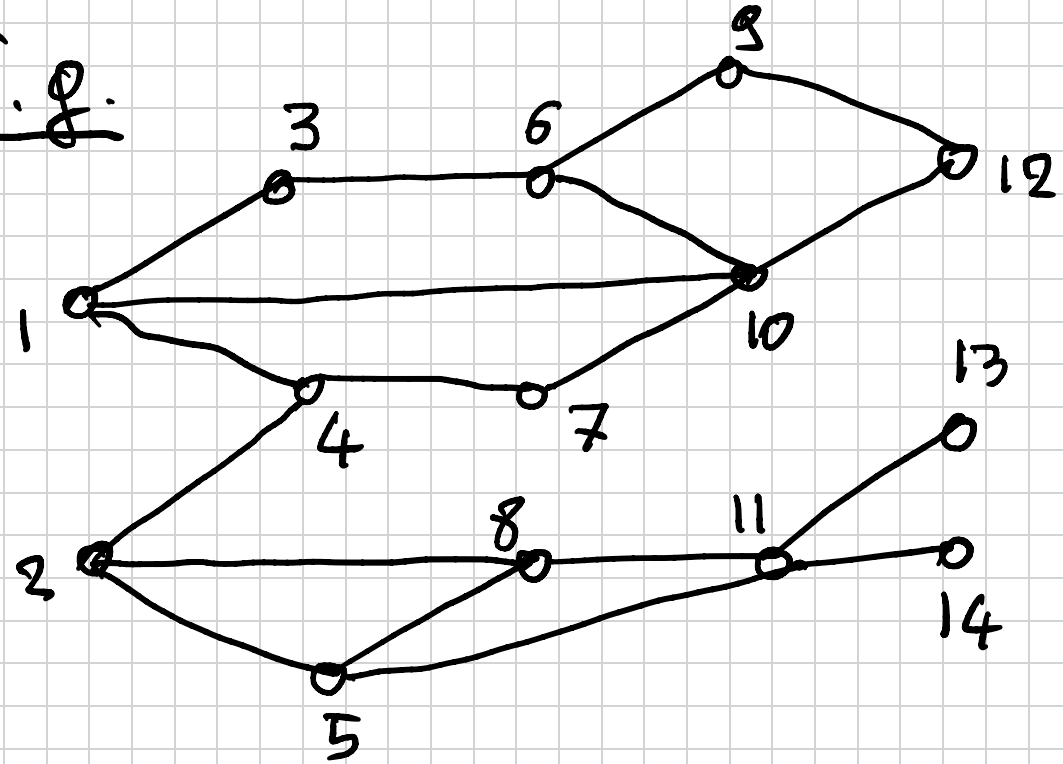
DOVE

$$A_i \overset{def}{=} \{x \in V : dp(x) = i\}$$

$\forall\, i = 0, \dots, k$, È UN ORARIO PARALLELO DI TEMPO MINIMO.

<u>DIM.</u> OMESSA. $\square$

E.g.



(TUTTI I LATI SONO ORIENTATI VERSO DESTRA)

$dp(1) = 0$

$dp(2) = 0$

$dp(3) = 1$, $dp(4) = 1$, $dp(5) = 1$, $dp(6) = 2$

$dp(7) = 2$, $dp(8) = 2$, $dp(9) = 3$, $dp(10) = 3$,

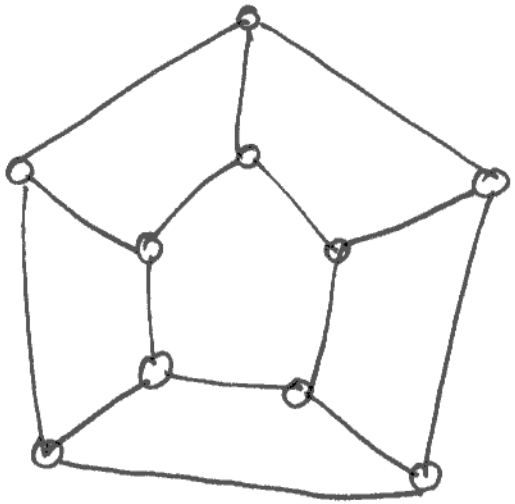
$dp(11) = 3$, $dp(12) = 4$, $dp(13) = 4$, $dp(14) = 4$

$\Rightarrow (\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}, \{9,10,11\}, \{12,13,14\})$

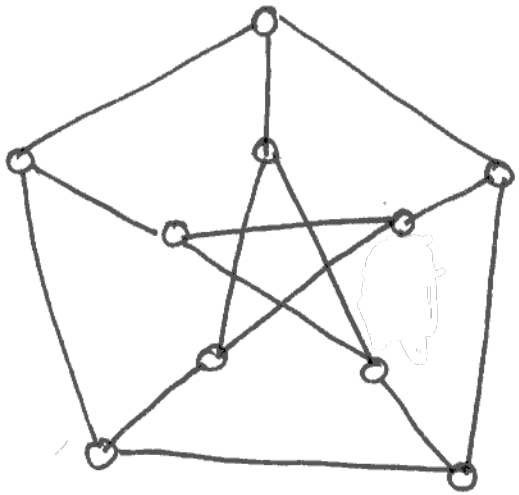
È UN ORARIO PARALLELO DI TEMPO MINIMO.

ES. I GRAFI

G =



H =



SONO ISOMORFI ?

NO, PERCHÈ G HA CICLI DI LUNGHEZZA 4, MENTRE H NO.

ALTERNATIVAMENTE, G HA 2 CICLI DI LUNGHEZZA 5, H HA (ALMENO) 7 CICLI DI LUNGHEZZA 5.

<u>ES.</u> SIA $G = ([10]^3, E)$, DOVE

$$\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\} \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$|\{i \in [3] : a_i \neq b_i\}| = 1.$$

$$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in [10]^3.$$

(QUINDI, PER ES., $\{(1,2,3),(3,2,3)\} \in E$

MA $\{(1,2,3),(6,2,10)\} \notin E$). È POSSIBILE

COLORARE G CON 30 COLORI ?

SAPPIAMO DALLA TEORIA (6.3.1) CHE

$$\chi(G) \leq \max_{v \in V} \{d(v)\} + 1.$$

QUINDI È POSSIBILE COLORARE

G CON

$$\max_{v \in V} \{ d(v) \} + 1$$

COLORI. SIA $v = (a_1, a_2, a_3) \in [10]^3$. ALLORA

$$d(v) = \left| \{ u \in V : \{u, v\} \in E \} \right|$$

$$= \left| \{ (b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : \{ (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \} \in E \} \right|$$

$$= \left| \{ (b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : \left| \{ i \in [3] : a_i = b_i \} \right| = 2 \} \right|$$

$$= \Big| \{(b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : b_1 \neq a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 = a_3\} \cup$$

$$\{(b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : b_1 = a_1,\ b_2 \neq a_2,\ b_3 = a_3\} \cup$$

$$\{(b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 \neq a_3\}\Big|$$

$$= |\{(b_1, b_2, b_3) \in [10]^3 : b_1 \neq a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 = a_3\}| +$$

$$|\{ \qquad : b_1 = a_1,\ b_2 \neq a_2,\ b_3 = a_3\}| +$$

$$|\{ \qquad : b_1 = a_1,\ b_2 = a_2,\ b_3 \neq a_3\}|$$

$= 9+9+9 = 27$

QUINDI $d(v) = 27$. MA v È QUALSIASI $\Rightarrow d(u) = 27$

PER $\forall u \in V$. PERTANTO

$$\max_{u \in V} \{ d(u) \} + 1 = 27 + 1 = 28.$$

QUINDI, PER 6.3.1, $\Rightarrow \chi(G) \leq 28 \Rightarrow G$ È COLO=

RABILE CON 28 COLORI $\Rightarrow$ CON 30

COLORI.

ES. SIA $G=(V,E)$ UN GRAFO BIPARTITO, DOVE $V = A \uplus B$, A E B SONO INDIPENDENTI, DEFINITO PONENDO

$$A \stackrel{def}{=} \binom{[n]}{2}, \qquad B \stackrel{def}{=} \binom{[n]}{3}$$

$(n \in \mathbb{N},\ n \geq 5)$, E DOVE

$$\{X, Y\} \in E \iff X \subseteq Y$$

$\forall X \in A$ E $\forall Y \in B$. DECIDERE SE $\exists$ UN

ACCOPPIAMENTO DI A IN B.

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE

$d(X) \geq d(Y)$ PER $\forall X \in A$ E $\forall Y \in B$ $\Longrightarrow$ $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI A IN B.

SIA $X \in A \Rightarrow X \subseteq [n]$ E $|X| = 2$. QUINDI

$$d(X) = \left| \{ Y \in B : \{X, Y\} \in E \} \right|$$

$$= \left| \{ Y \subseteq [n] : |Y| = 3, \ Y \supseteq X \} \right|$$

$$= n - 2.$$

SIA $Y \in B \Rightarrow Y \subseteq [m]$ E $|Y| = 3$. QUINDI

$$d(Y) = \left| \{ X \in A : \{X, Y\} \in E \} \right|$$

$$= \left| \{ X \subseteq [m] : |X| = 2, X \subseteq Y \} \right|$$

$$= \left| \{ X \subseteq Y : |X| = 2 \} \right|$$

$$= \binom{3}{2} = 3.$$

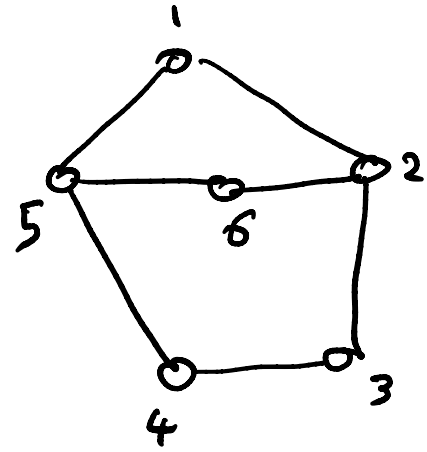
PERTANTO $d(X) = m - 2 \geq 3 = d(Y)$ PER $\forall X \in A$

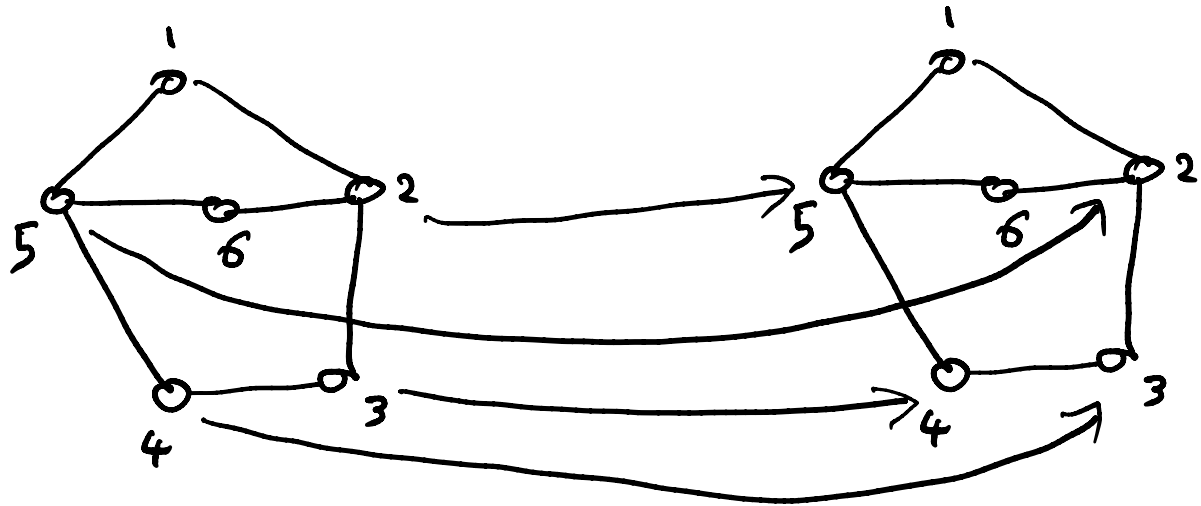
E $\forall Y \in B \Rightarrow$ ESISTE UN ACCOPPIAMENTO

DI A IN B.

ES. Trovare tutti gli isomorfismi da G in G dove

$G =$





1) $f(5)=2$ E $f(2)=5$.

.... $\Rightarrow$ POICHE' $\{4,5\}\in E$ E $\{4,2\}\notin E$

$\Rightarrow \{f(4),2\}\in E$ E $\{f(4),5\}\notin E \Rightarrow f(4)=3$

SIMIL. $\{3,2\} \in E$ E $\{3,5\} \notin E \Rightarrow \{f(3),5\} \in E$ E $\{f(3),2\} \notin E \Rightarrow f(3)=4$. MA ANCHE, $\{6,5\} \in E$ E $\{6,2\} \in E \Rightarrow \{f(6),2\} \in E$ E $\{f(6),5\} \in E \Rightarrow f(6) \in \{1,6\}$. SIMIL., $\Rightarrow f(1) \in \{1,6\}$. QUINDI

$$f(1)=1 \quad E \quad f(6)=6$$

$$\text{o}$$

$$f(1)=6 \quad E \quad f(6)=1.$$

PERTANTO, O

$$f(1)=1,\ f(2)=5,\ f(3)=4,\ f(4)=3,\ f(5)=2,\ f(6)=6$$

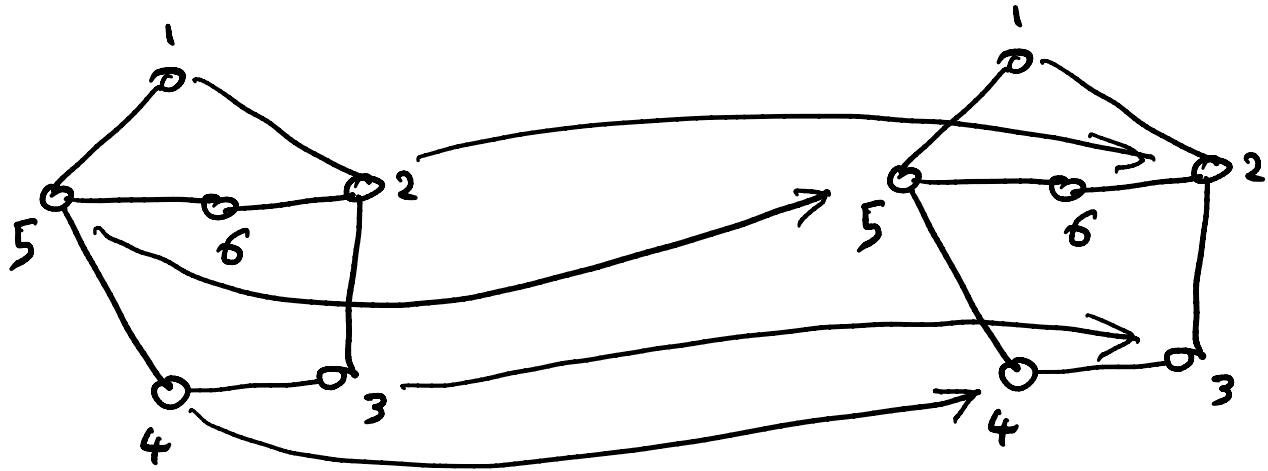
O

$$f(1)=6,\ f(2)=5,\ f(3)=4,\ f(4)=3,\ f(5)=2,\ f(6)=1.$$

È FACILE VEDERE CHE ENTRAMBI SONO ISOMORFISMI.

2) $f(5)=5$ E $f(2)=2$.

POICHÉ $\{4,5\}\in E$ E $\{4,2\}\notin E \Rightarrow$
$\{f(4),5\}\in E$ E $\{f(4),2\}\notin E \Rightarrow f(4)=4$.



SIMIL. $\Rightarrow f(3)=3$. INFINE $\{1,5\}\in E$ E $\{1,2\}\in E \Rightarrow \{f(1),5\}\in E$ E $\{f(1),2\}\in E$ $\Rightarrow f(1)\in\{1,6\}$. SIMIL. $f(6)\in\{1,6\}$. PER =

TANTO O

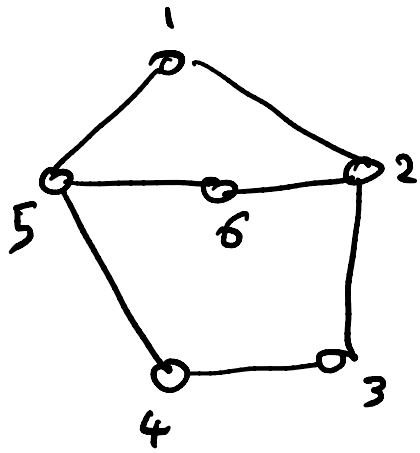
$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4,\ f(5)=5,\ f(6)=6$

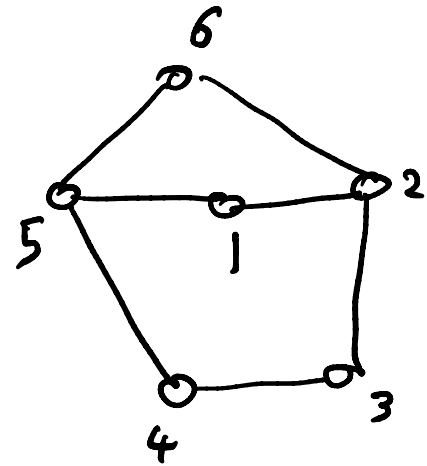
O

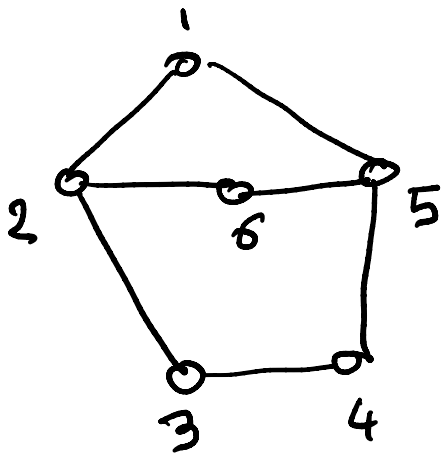
$f(1)=6,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4,\ f(5)=5,\ f(6)=1.$

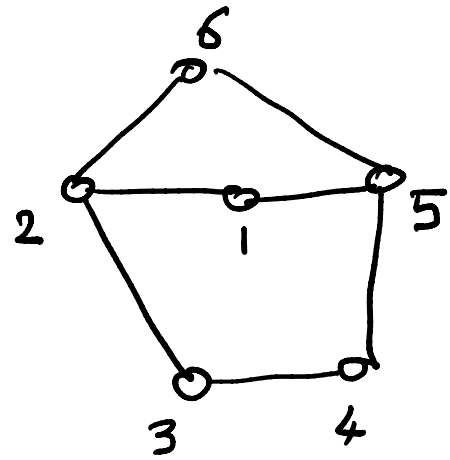
È FACILE VEDERE CHE QUESTI SONO ISOMORFISMI.

GRAFICAMENTE QUESTI ISOMORFISMI SONO:



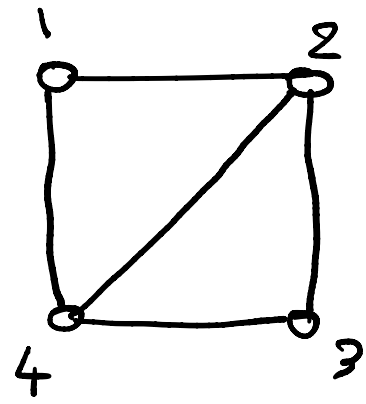






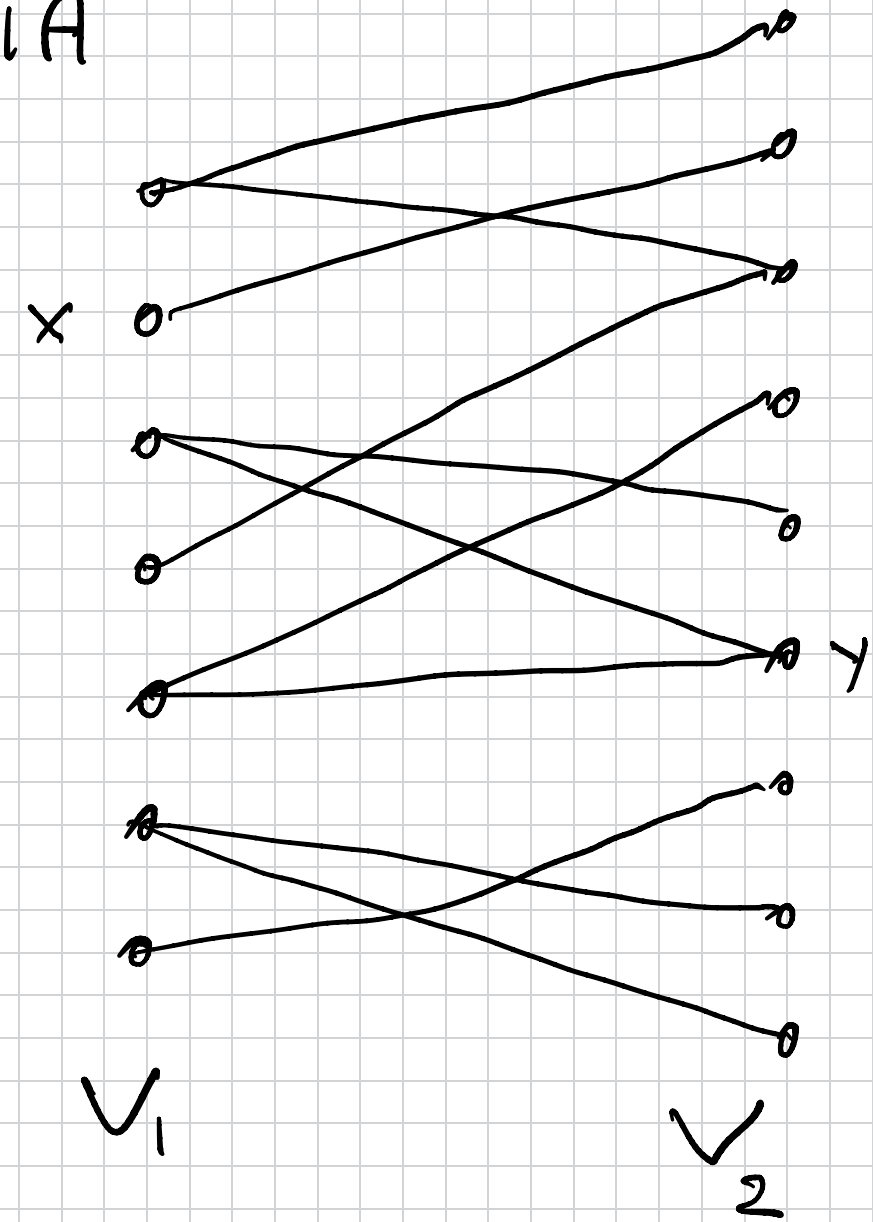
(TUTTI QUESTI 4 GRAFI SONO UGUALI.)

ES. [1+]: TROVARE TUTTI GLI ISOMORFISMI DI G IN G DOVE

$G =$ 

ES. SIA

$G =$



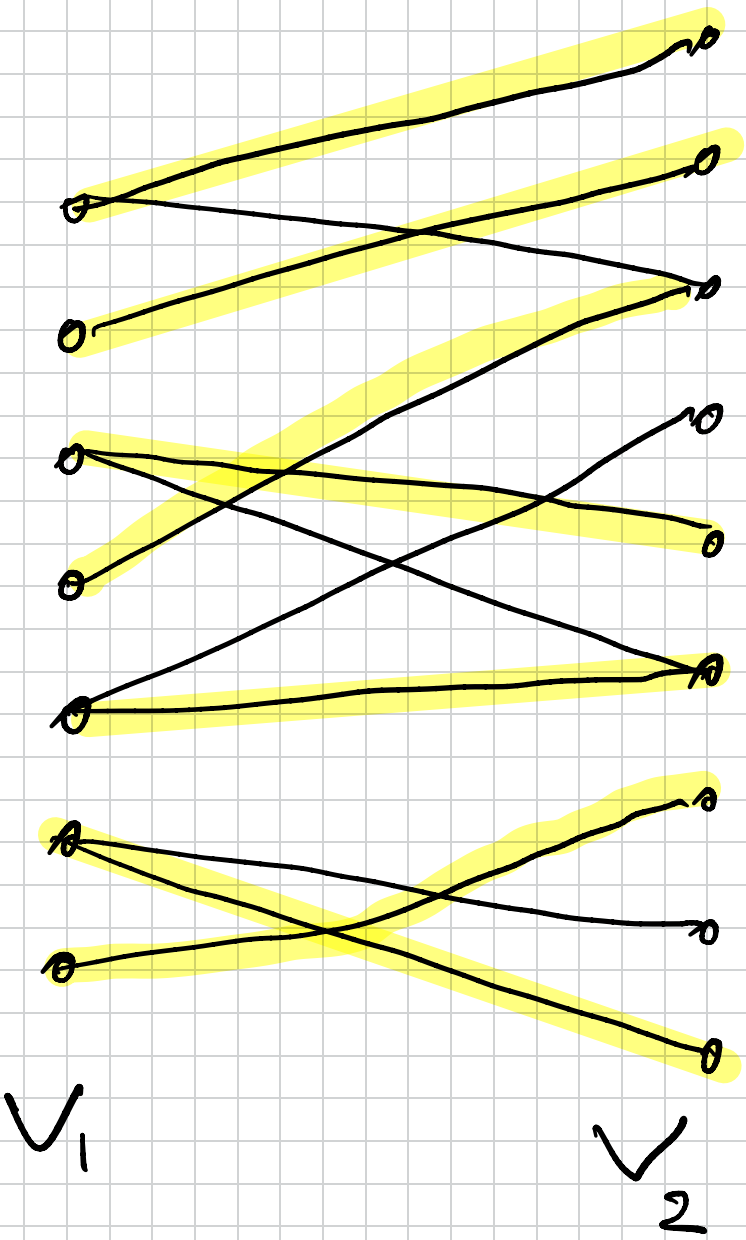
ESISTE UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2?

- USARE IL TEOREMA DI HALL? (2^7, UN PÒ LUNGO)
- COSTRETTO NEI GRADI DA V_1 A V_2?

  NO, $d(x) = 1 \not\geq 2 = d(y)$ $(x \in V_1, y \in V_2)$

- LO VEDIAMO AD OCCHIO?

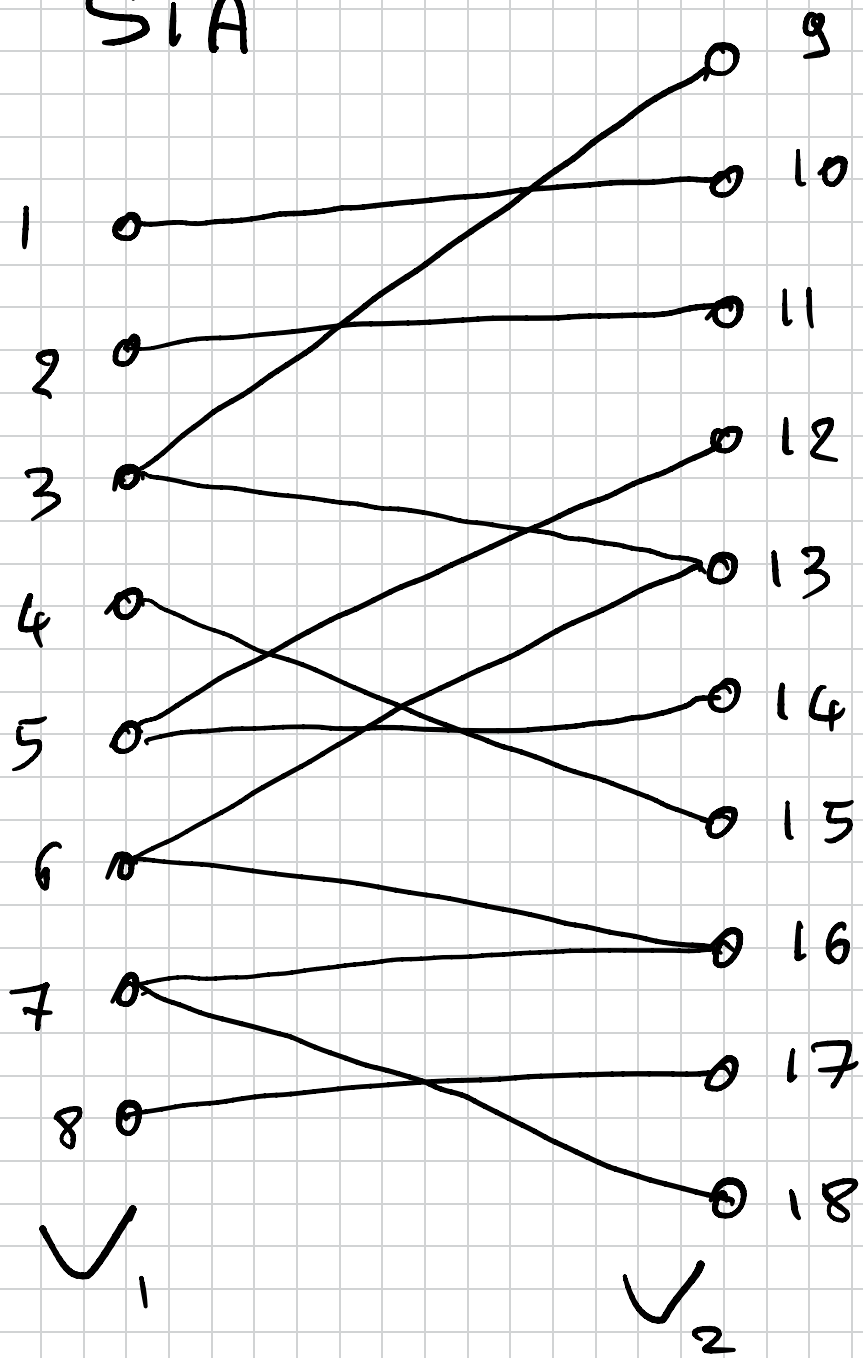
Sì!



È UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2

ES. [1]: SIA

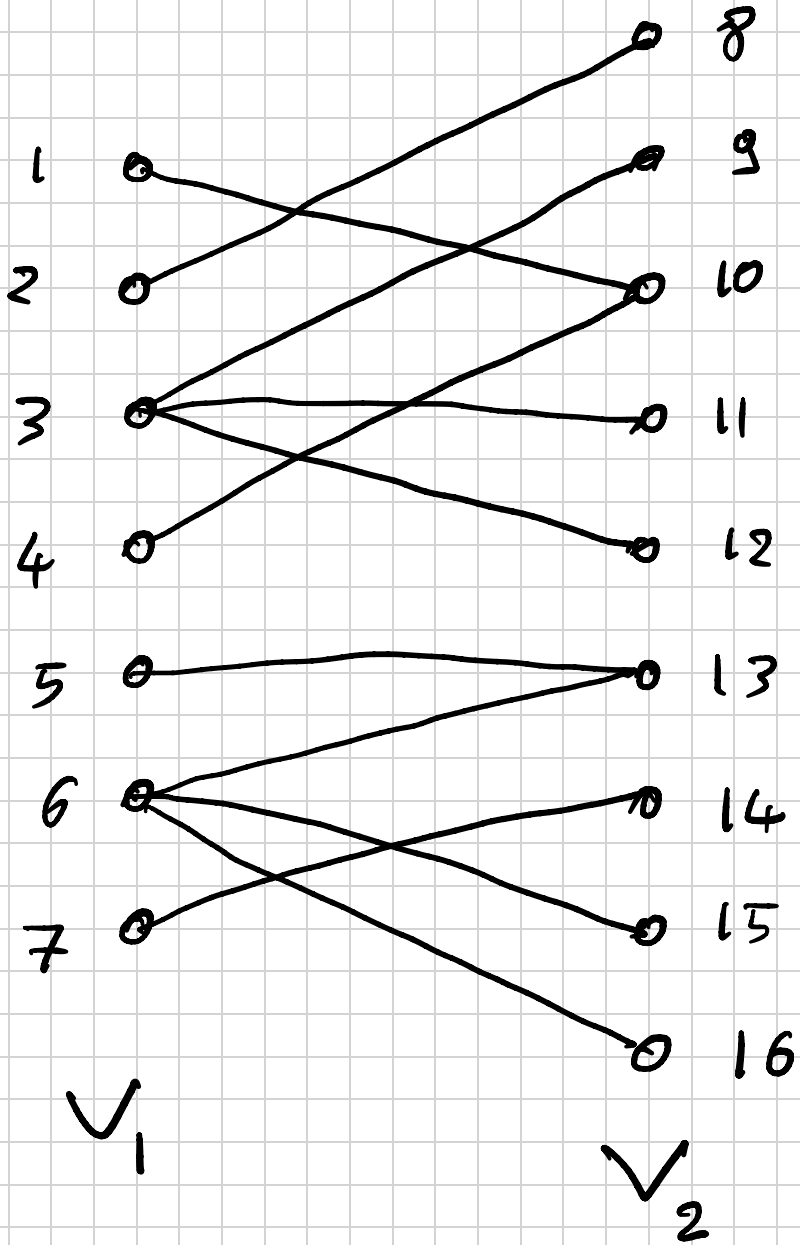
$G =$



ESISTE UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2?

ES. SIA

$G =$



ESISTE UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2 ?

- TEOREMA DI HALL? WELL...

- COSTRETTO NEI GRADI DA V_1 IN V_2?

  (NO $\quad d(2)=1 \not\geq 2 = d(13)$)

- LO VEDIAMO AD OCCHIO?

  NO, IN EFFETTI UN ACCOPPIAMENTO DA V_1 A V_2 NON ESISTE PERCHÈ, SE

$$S \overset{def}{=} \{1,4\} \implies N_G(S) = \{10\} \text{ E}$$

$$|S| = 2 \not\leq 1 = |N_G(S)| .$$

ES. SIA $G=(V,E)$ DOVE

$$V \overset{def}{=} \binom{[9]}{2} \cup \binom{[9]}{3}$$

$\left(\binom{S}{k} \overset{def}{=} \{A \subseteq S : |A| = k\} \right)$, E SE $X, Y \in V$

ALLORA

$$\{X, Y\} \in E$$

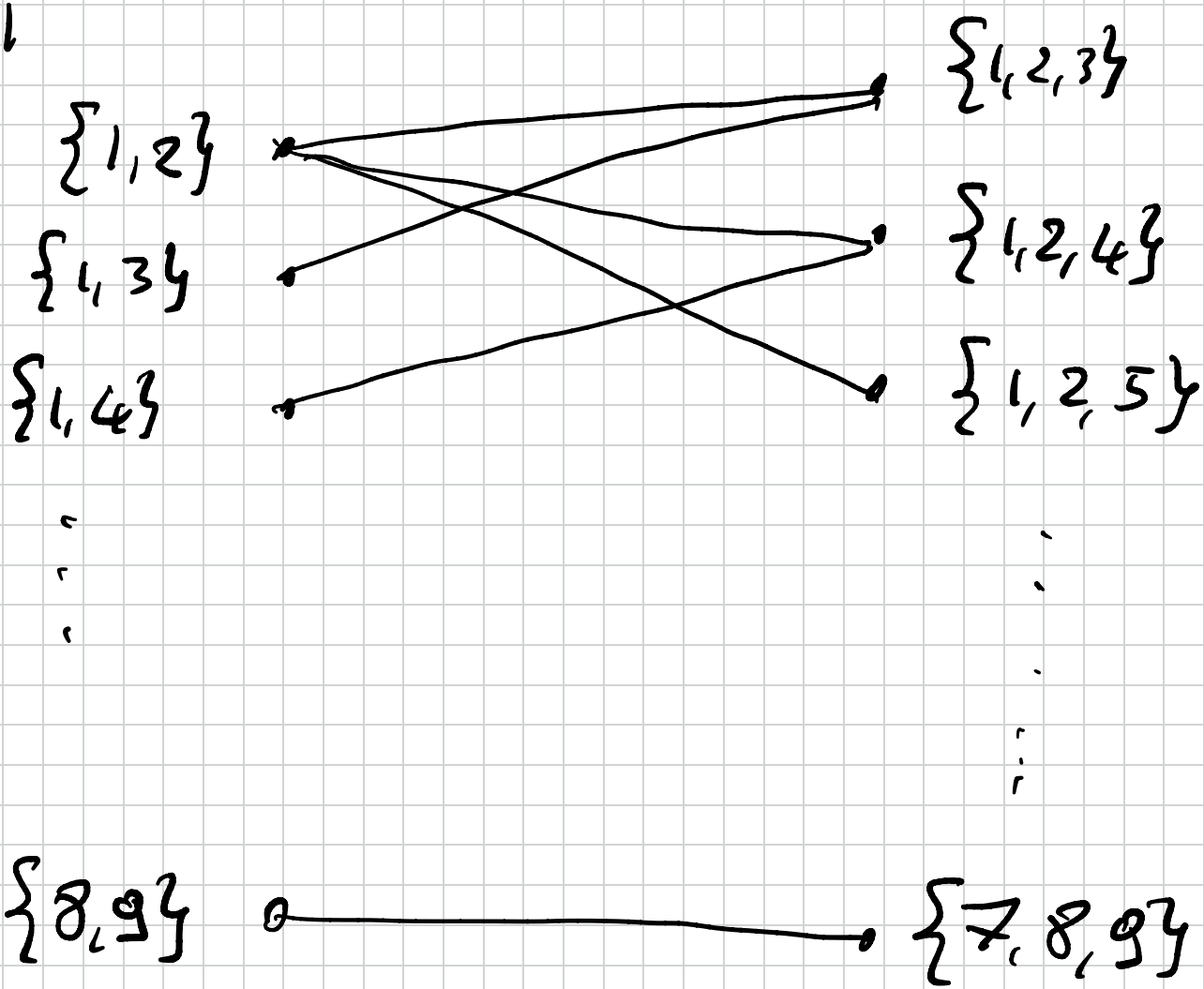
$$\Updownarrow$$

$$X \subsetneq Y \quad \text{o} \quad Y \subsetneq X$$

(PER ES.

$$\{\{1,3\},\{1,3,7\}\} \in E, \quad \{\{1,3\},\{2,3,7\}\} \notin E)$$

QUINDI



ESISTE UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2?

BEH...

$$|V_1| = \left|\binom{[9]}{2}\right| = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 45$$

$$|V_2| = \left|\binom{[9]}{3}\right| = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7$$

$$= 84$$

- TEOREMA DI HALL? FORSE NO

- COSTRETTO NEI GRADI DA V_1 IN V_2?

SIA $X \in V_1 \Rightarrow X = \{a, b\}$ CON $a, b \in [9]$, $a \neq b$. ALLORA

$$d(X) = \left| \{ Y \in V_2 : \{X, Y\} \in E \} \right|$$

$$= \left| \left\{ Y \in \binom{[9]}{3} : X \subseteq Y \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ \{c, d, e\} \in \binom{[9]}{3} : \{a, b\} \subseteq \{c, d, e\} \right\} \right|$$

$$= \left| \{ \{a, b, c\} : c \in [9] \setminus \{a, b\} \} \right| = 7$$

SIA $Y \in \binom{[9]}{3}$, $Y = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in [9]$,

ALLORA

$$d(Y) = \left| \left\{ X \in \binom{[9]}{2} : X \subseteq Y \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ X \subseteq [9] : |X| = 2, X \subseteq \{a, b, c\} \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \right\} \right| = 3.$$

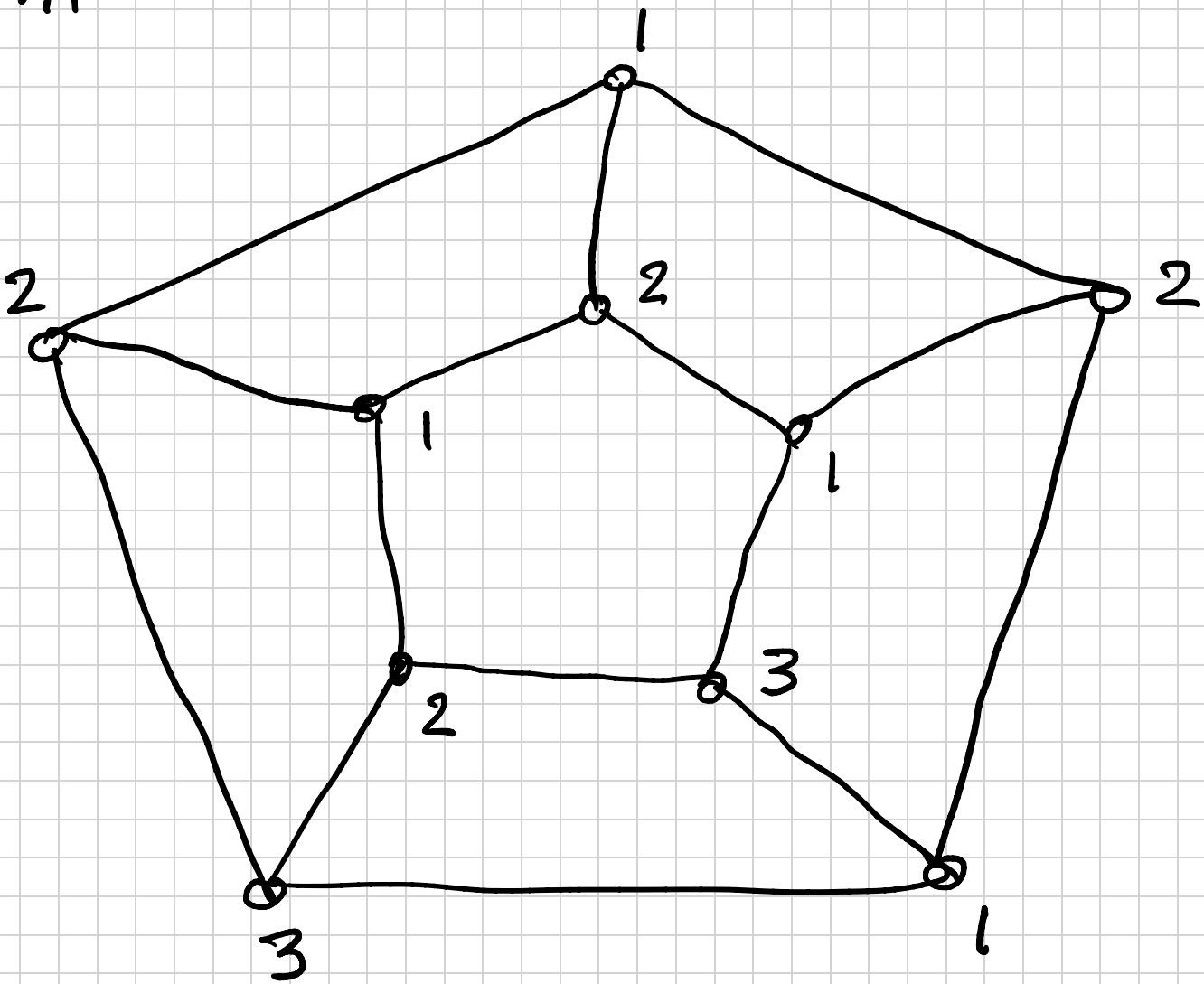
PERTANTO

$$d(X) = 7 \geq 3 = d(Y)$$

PER $\forall\, x \in V_1$ E $y \in V_2 \Rightarrow G$ È COSTRETTO NEI GRADI DA V_1 IN $V_2 \Rightarrow$ SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE $\exists$ UN ACCOPPIAMENTO DI V_1 IN V_2.

ES. SIA

$G =$



CALCOLARE $\chi(G)$. QUELLA SOPRA È UNA COLORAZIONE $\Rightarrow \chi(G) \leq 3$, MA

G NON È COLORABILE CON 2 COLORI

$\Rightarrow \chi(G) = 3.$

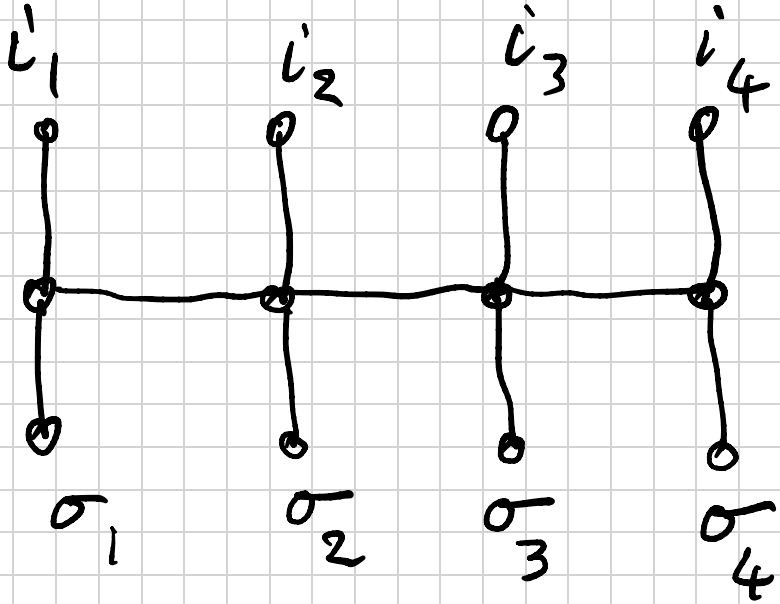
(NOTATE CHE $\max_{v \in V} \{d(v)\} = 3 \overset{(5.3)}{\Longrightarrow}$

$\chi(G) \leq 4$).

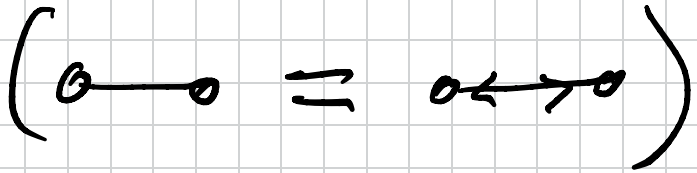
<u>ES. [2-]</u>: SIA G UN GRAFO, DIMOSTRARE CHE G È BIPARTITO SE E SOLO SE

$$\chi(G) = 2.$$

ES. SIA



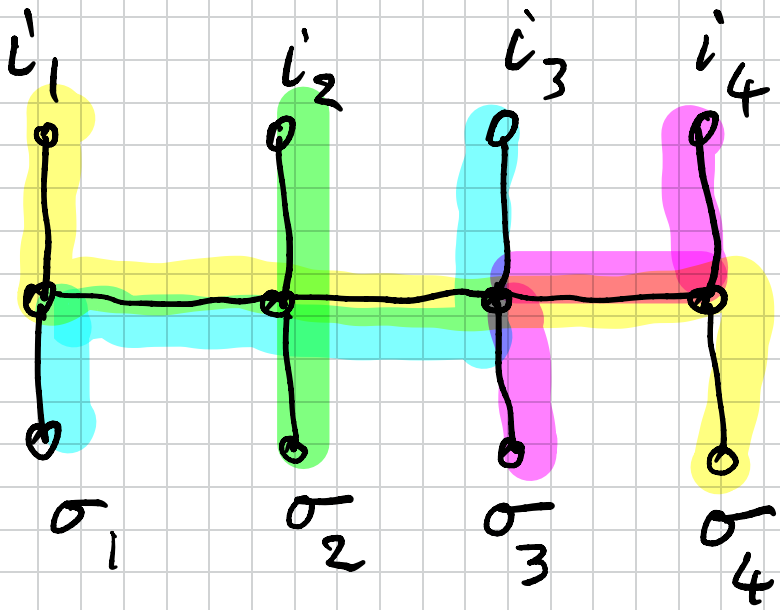
UNA RETE DI COMUNICAZIONE



CALCOLARE LA CONGESTIONE E IL DIAMETRO. ABBIAMO CHE

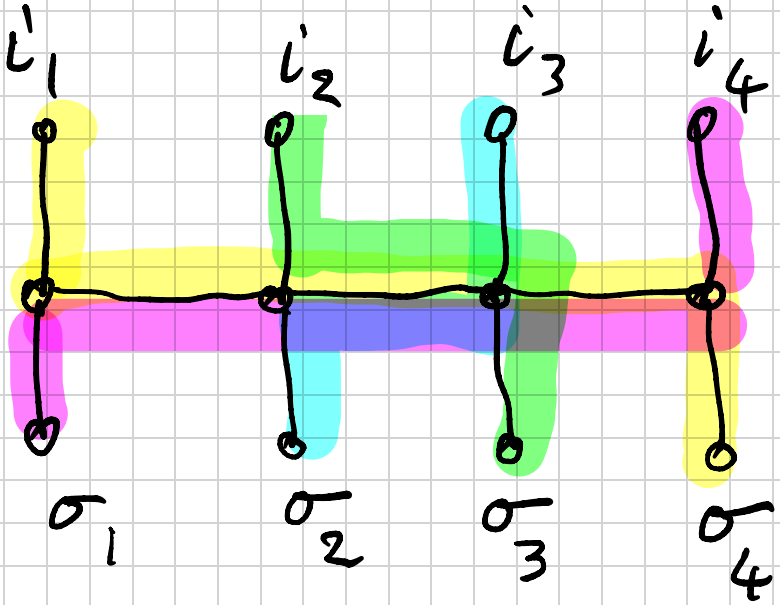
$$\text{diametro} = \max\{d(i_a, \sigma_b) : a, b \in [4]\}$$
$$= 5.$$

SiA $\pi = 4213$



$\Rightarrow$ CONG $= 3$.

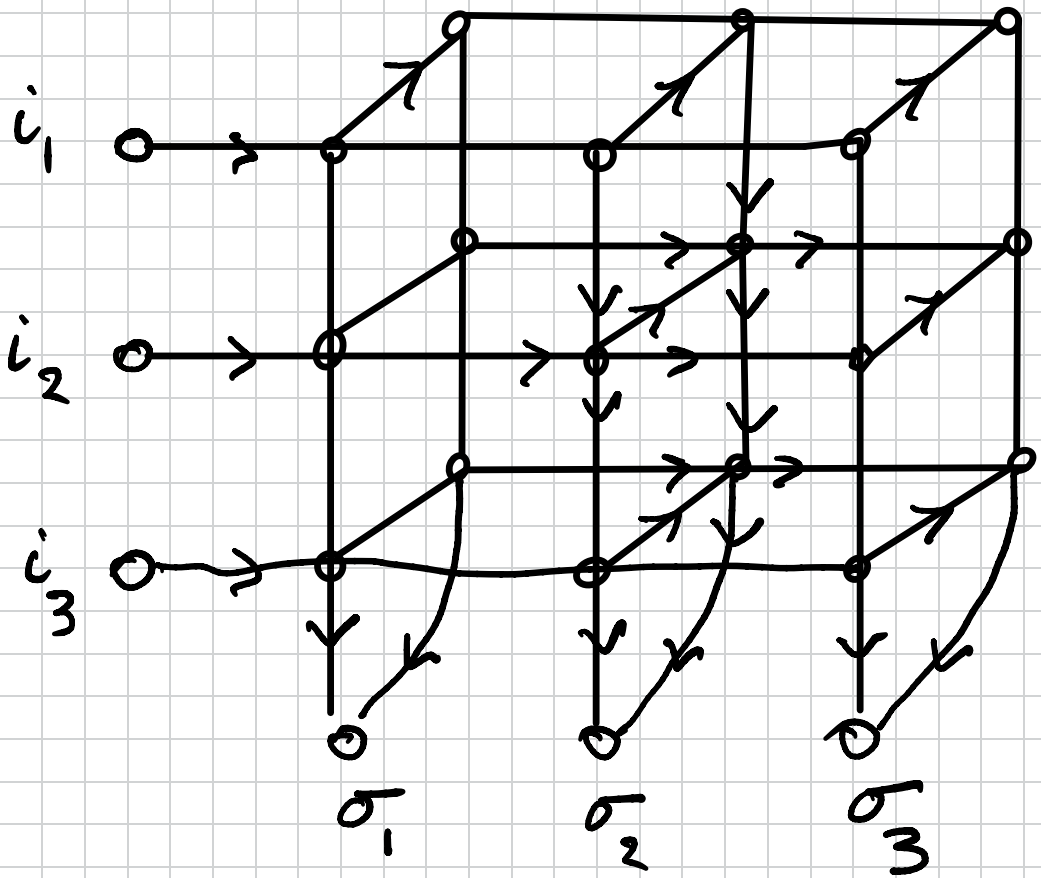
SIA $\pi = 4321$



$\Rightarrow$ CONG $= 4$

MA $N = 4 \Rightarrow$ CONG $\leq 4 \Rightarrow$ CONG $= 4$.

ES. CALCOLARE LA CONGESTIONE, IL DIA=
METRO, IL NUMERO DI SWITCHES, E LA MAS=
SIMA GRANDEZZA DI UN SWITCH DELLA
RETE DI COMUNICAZIONE:

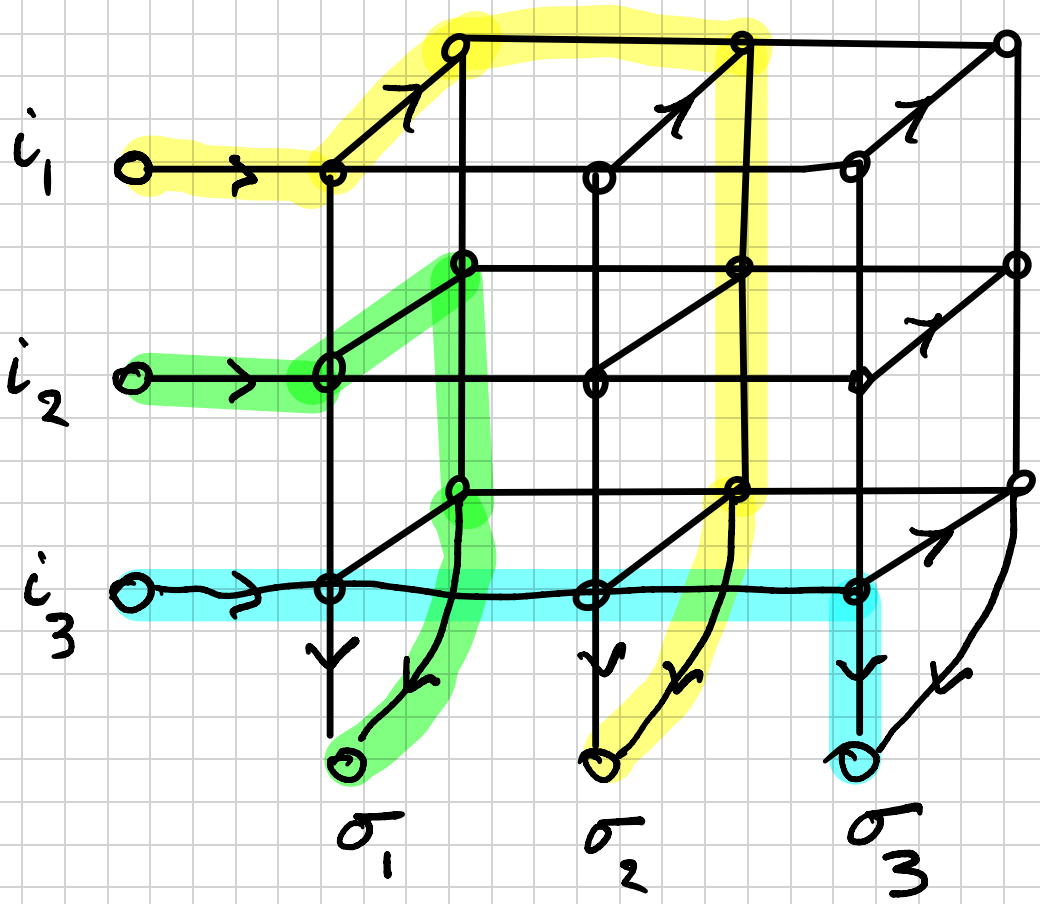


(TUTTI I LATI SONO DIRETTI VERSO DESTRA O VERSO IL BASSO)

ALLORA DIAMETRO $= 6$ $(= d(i_1, \sigma_3))$, IL NUMERO DI SWITCHES È 18, LA MASSIMA GRANDEZZA DI UN SWITCH È $(2,3)$.

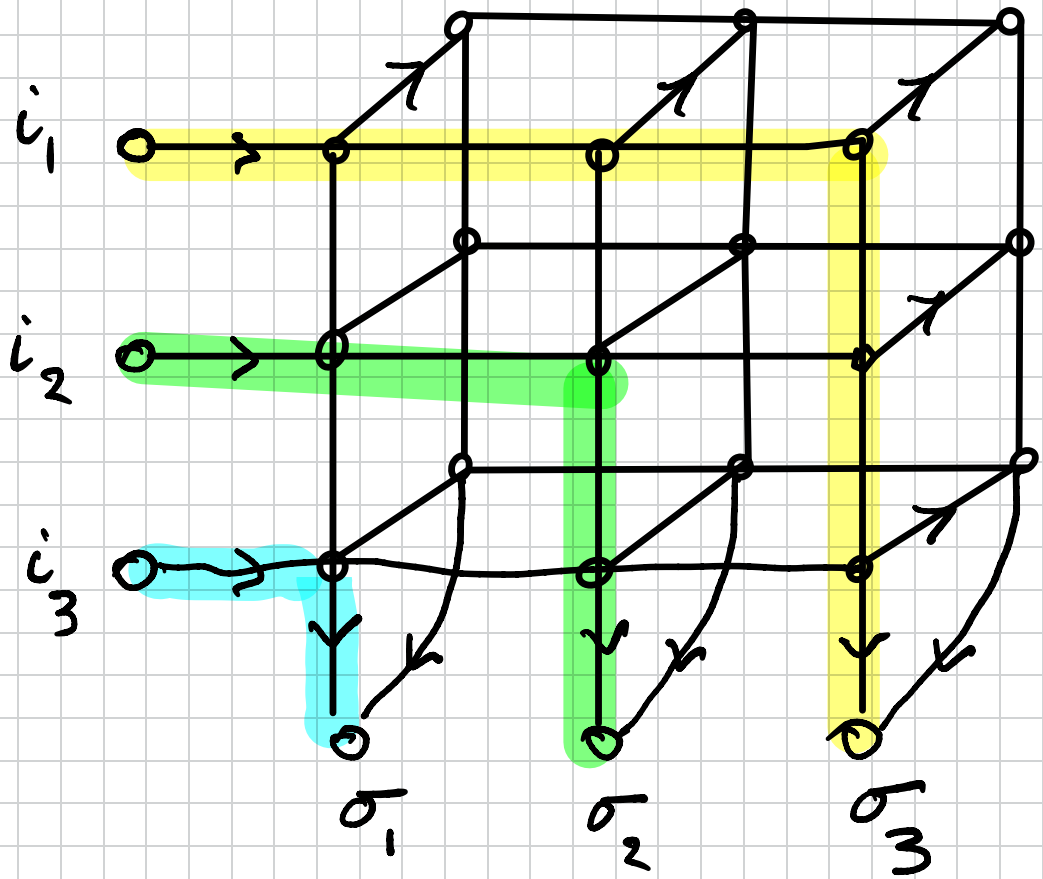
$(\sigma(3,2)\ ?)$

SIA $\pi = 213$ ALLORA



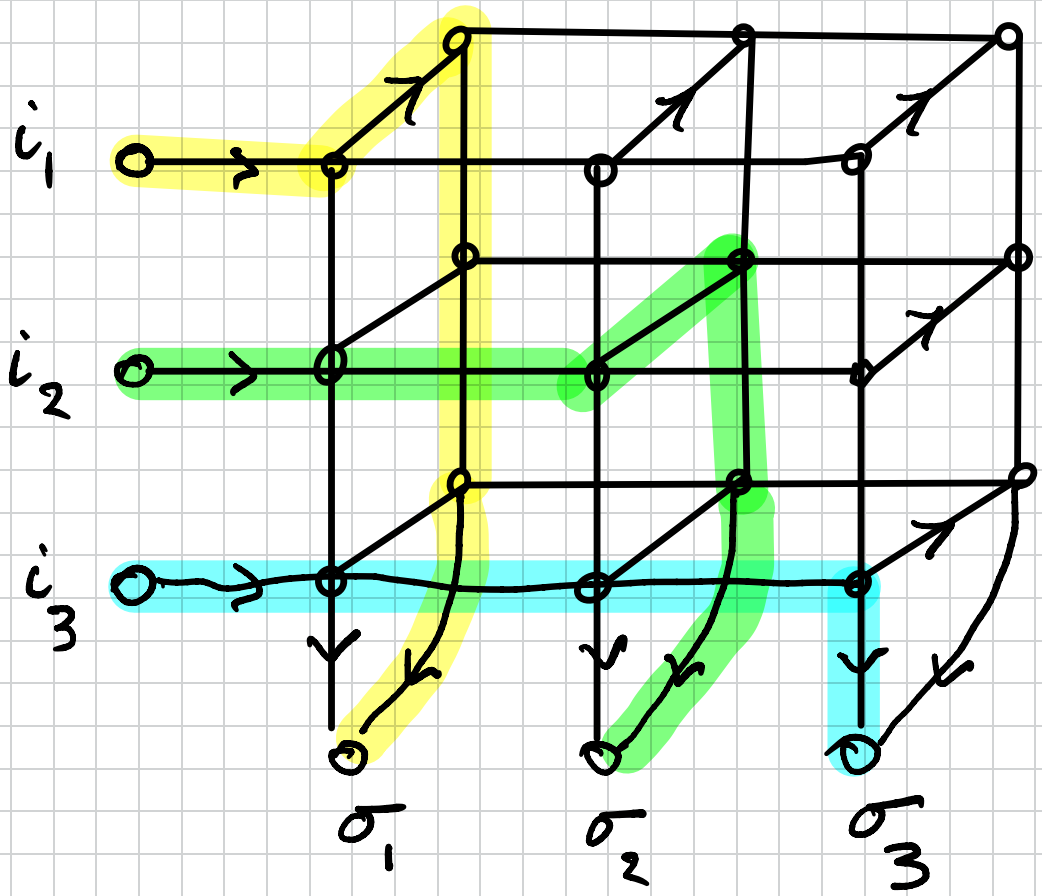
$$\Rightarrow \quad c(213) = 1$$

SIA $\pi = 321$ ALLORA



$\Rightarrow \quad c(321) = 1$

SIA $\pi = 123$ ALLORA

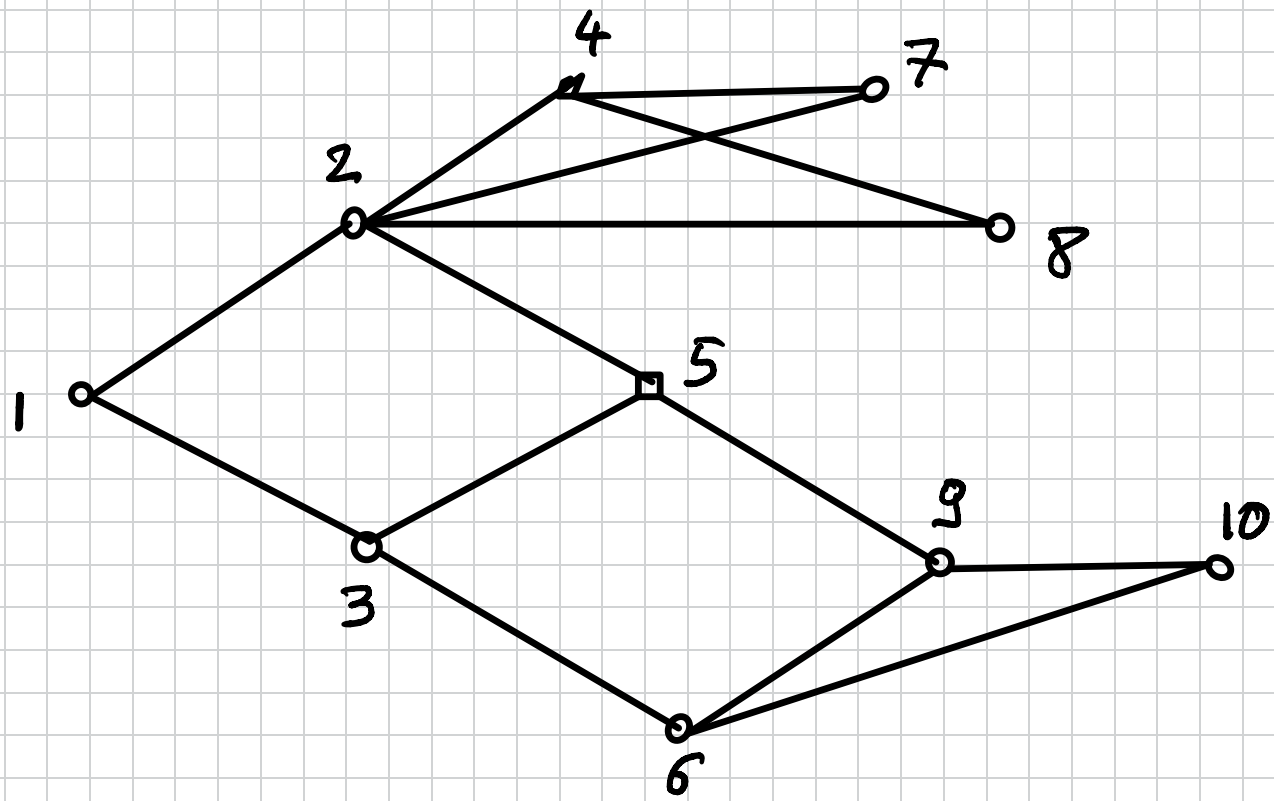


$\Rightarrow \quad c(123) = 1$

ES. [1]: COMPLETARE IL CALCOLO DELLA CONGESTIONE (RISPOSTA: 1).

ES. [2]: DIMOSTRARE CHE LA CONGESTIONE È 1 PER OGNI $N \in \mathbb{P}$ ($N = \#$ DI INPUT).

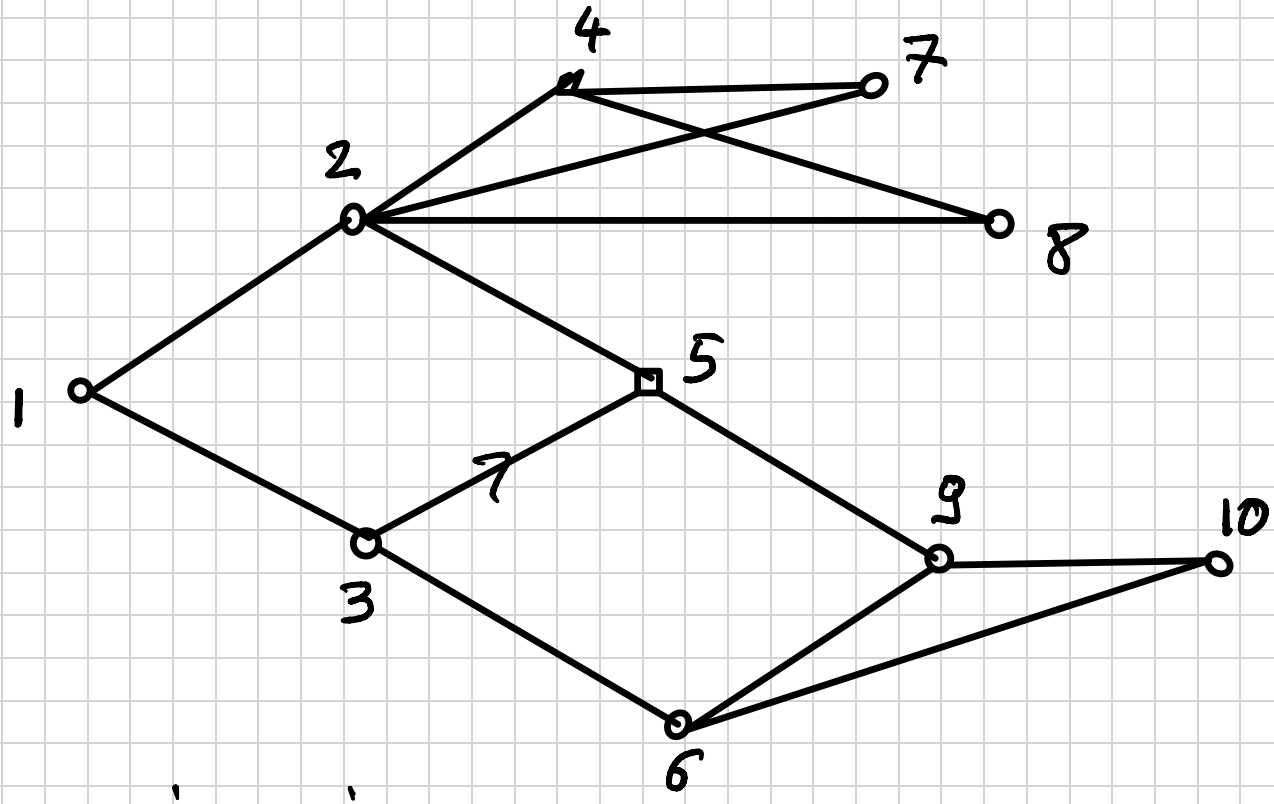
ES. CALCOLARE UN ORARIO PARALLELO DI TEMPO MINIMO PER



(TUTTI I LATI SONO DIRETTI VERSO DESTRA)

SAPPIAMO DALLA TEORIA (5.6.1) CHE DOBBIAMO CALCOLARE LA PROFONDITÀ

DI OGNI VERTICE, ABBIAMO



$d_p(1) = 0$

$d_p(2) = 1$

$d_p(3) = 1$

$d_p(4) = 2$

$d_p(5) = 2$

$d_p(6) = 2$

$d_p(7) = 3$

$d_p(8) = 3$

$d_p(9) = 3$

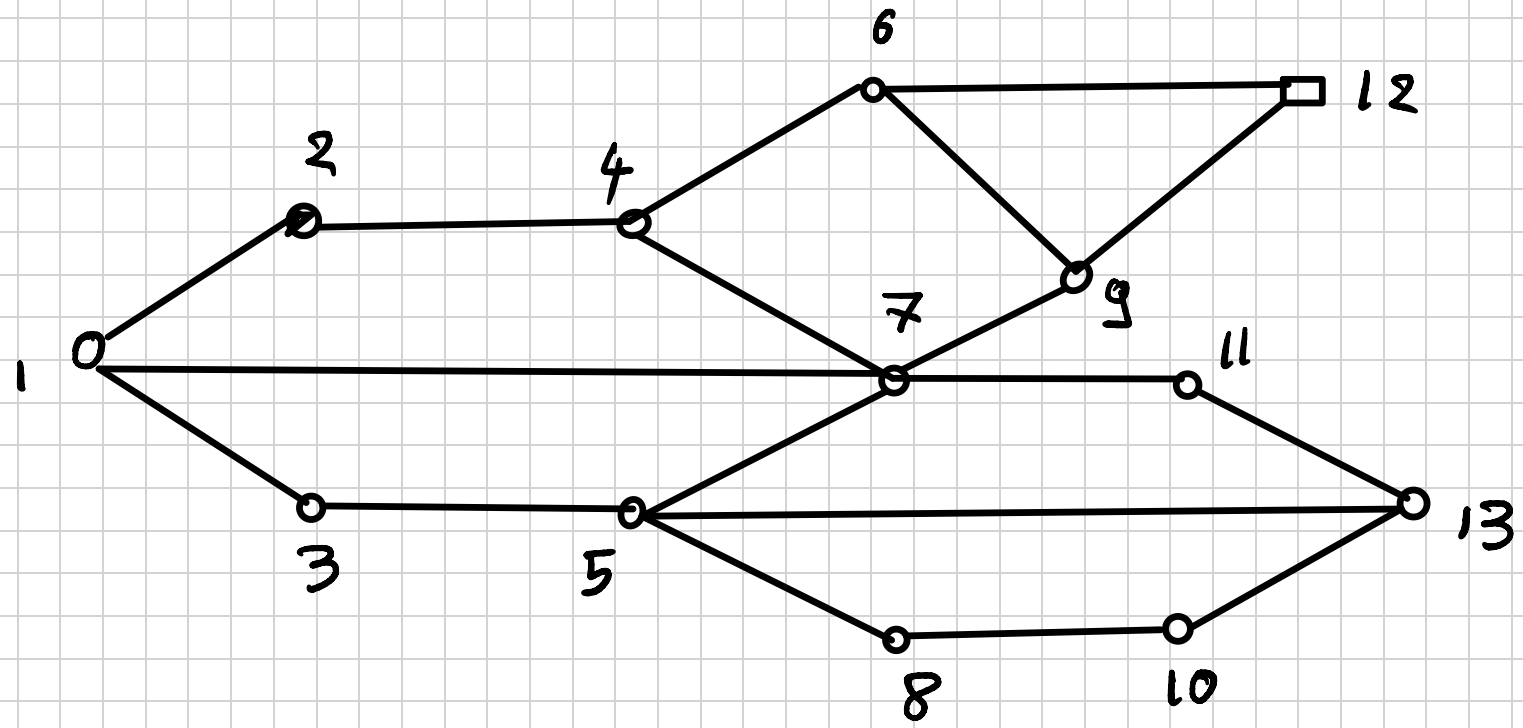
$d_p(10) = 4$

QUINDI

$(\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9\}, \{10\})$

È UN O.P. DI TEMPO MINIMO.

ES. [1]: CALCOLARE UN ORARIO PARALLELO DI TEMPO MINIMO PER



(TUTTI I LATI ORIENTATI VERSO DESTRA)

SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE DOBBIAMO CALCOLARE LA PROFONDITÀ DI OGNI VERTICE.

$dp(1)=0$, $dp(2)=1$, $dp(3)=1$, $dp(4)=2$ = DOCS

$dp(6)=3$, $dp(7)=3$, $dp(8)=3$, $dp(9)=4$, $dp(10)=4$

$dp(11)=4$, $dp(12)=5$, $dp(13)=5$

QUINDI

$(\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6,7,8\}, \{9,10,11\}, \{12,13\})$

È UN ORARIO PARALLELO DI TEMPO MINIMO