1) $f(x) = \frac{1}{1+2\lg(x)} - \sqrt{1+4x(1-x)}$

2) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(1-(1+x))}$

Per $t = x-1 \to 0$

$\frac{1}{1+2\lg(x)} = \frac{1}{1+2\lg(1+t)} = \frac{1}{1+2\left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)} =$

$= \frac{1}{1+2t - t^2 + o(t^2)} = (1+2t-t^2+o(t^2))^{-1} =$

$= 1 - (2t - t^2 + o(t^2)) + (2t + o(t))^2 =$

$= 1 - 2t + t^2 + o(t^2) + 4t^2 + o(t^2) = 1-2t+5t^2+o(t^2)$

ii:

$\sqrt{1+4x(1-x)} = \sqrt{1+4(t+1)(1-t-1)} = \sqrt{1+(4t+4)(-t)} =$

$= \sqrt{1-4(t^2+t)} = (1-4(t^2+t))^{\frac{1}{2}} =$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(-4(t^2+t)\right) - \frac{1}{8}\left(-4(t^2+t)\right)^2 + o(t^2) =$

$$= 1 - 2t^2 - 2t - \frac{16^2}{8} t^2 + o(t^2) = 1 - 2t - 4t^2 + o(t^2)$$

Inoltre

$$(\sin(\pi x))^2 = (\sin(t\pi + \pi))^2 = (-\sin(t\pi))^2 =$$

$$= \pi^2 t^2 + o(t^2)$$

così

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{(\sin(\pi x))^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{2t} + 5t^2 - \cancel{1} + \cancel{2t} + 4t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{9t^2 + o(t^2)}{\pi^2 \cdot t^2 + o(t^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^2}(9) + o(t^2)}{\cancel{t^2}(\pi^2) + o(t^2)} =$$

$$= \frac{9}{\pi^2}$$

b) DAL POLINOMIO DI TAYLOR OTTENUTO

NEL PUNTO a)

$$f'(x) = 18t$$

$f'(1) = 0$, quindi $x_0 = 0$ è un punto stazionario,

ora

$\rightarrow t = x-1 = 0$

$f''(x) = 18$ e $f''(1) = 18 > 0$, quindi

la funzione nell'intorno $x = 0$ è strettamente

convessa. Quindi $x_0 = 0$ è un punto di minimo
relativo.

---

2) a)

$$t = x - \frac{\pi}{4}$$

Allora

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\ldots}\right)' \qquad (\cos^2(x))' = -2\cos(x)\cdot\sin(x)$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)' = -\frac{(\cos^2(x))'}{(\cos^2(x))^2} = +\frac{2\cos(x)\sin(x)}{\cos^4(x)} =$$

$$= \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} = 2\tan(x)\cdot\frac{1}{\cos^2(x)} = 2\tan(x)\cdot(1+\tan^2(x))$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = 2\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{4}{\cancel{2}} = 4$$

$$f'''(x) = 2\left(\tan(x)\cdot(1+\tan^2(x))\right)' =$$

$$= 2\left(\tan(x) + \tan^3(x)\right) =$$

$$= 2\left(1+\tan^2(x) + 3\cdot\frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\right) =$$

$$= 2\left(1+\tan^2(x) + 3\tan^2(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\right) =$$

$$= 2\left(1+\tan^2(x) + 3\tan^2(x) + 3\tan^4(x)\right) =$$

$$= 2\left(1+4\tan^2(x)+3\tan^4(x)\right)$$

f'''

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 + 4\frac{2}{4} + 3\cdot\frac{\pi}{16\cancel{8}_2}\right) = 2 + 4 + \frac{\pi}{\cancel{8}2} =$$

$$= \frac{4 + 8 + 3}{2} =$$

---

3)
$$x y'(x) = \frac{2x^2 y(x)}{1 - x^2} + 2$$

Riordino i termini

$$x y'(x) - \frac{2x^2}{1-x^2} y(x) = 2$$

$$y'(x) - \frac{2x}{1-x^2} y(x) = \frac{2}{x}$$

$$y'(x) + \frac{2x}{x^2-1} y(x) = \frac{2}{x}$$

Quindi

$$a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

a

$$A(x) = \int 2x \; (\quad 0 \quad |x^2 \quad |$$

$$A(x) = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \ln|x^2+1|$$

QUINDI IL FATTO DI INTEGRARE È

$$e^{A(x)} = x^2-1$$

L'INTEGRALE È

$$\int e^{A(x)} \cdot f(x)\, dx = \int (x^2-1)\frac{2}{x}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} - \frac{2}{x}\right) dx = \int \left(2x - \frac{2}{x}\right) dx =$$

$$= x^2 - 2\ln(x) + c$$

COSÌ LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} \cdot f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{x^2-1} \cdot \left(x^2 - 2\ln(x)\right) + c =$$

$$= x^2 - 2\ln(x) + c$$

$$\frac{\quad}{x^2-1}$$

IMPONENDO LA CONDIZIONE $y(2)=3$

$$\cancel{3} = y(2) = \frac{4-2\ln(2)+c}{\cancel{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c = 4-2\ln(2)+1$$

$$\Rightarrow c = 4-2\ln(2)+1$$

$$c = 5+2\ln(2)$$

COSÌ LA SOLUZIONE CERCATA È

$$y(x) = \frac{x^2-2\ln(x)+5+2\ln(2)}{x^2-1}$$

b) Lim $x \to +\infty$

$$y(x) = \frac{1+\frac{2\ln(x)+5+2\ln(2)}{x^2}}{x^2-1} =$$

$$\overline{\quad x^2 \quad}$$

$$= \frac{1 + \overbrace{\frac{2\lg(x) + 5 + 2\lg(2)}{x^2}}^{\to 0}}{1 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} \to \frac{1}{1} = 1$$

è dunque c'è asintoto orizzontale è

$y = 1$

---

1) $f(x,y) = xe^y - ye^x$

$f_x(x,y) = e^y - ye^x$

$f_y(x,y) = xe^y - e^x$

Quindi

$\nabla f(1,1) = \left(f_x(1,1), f_y(1,1)\right) =$

$= (0,0)$, quindi $(1,1)$ è un punto

critico

INOLTRE:

$$f_{xx}(x,y) = -y e^x$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^y - e^x$$

$$f_{yy}(x,y) = x e^y$$

E LA MATRICE HESSIANA $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$

NEL PUNTO CRITICO $(1,1)$ E'

$$H_f(1,1) \begin{bmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

DATO CHE $\det(H_f(1,1)) = -e^2 < 0$

ALLORA $(1,1)$ E' UN PUNTO DI SELLA

b) PER TROVARE TUTTI I PUNTI CRITICI

BISOGNA RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} e^y - y e^x = 0 \\ x e^y - e^x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^y = y e^x \\ x(y e^x) - e^x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^y = y e^x \\ x y e^x - e^x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} e^x \\ y = \frac{\cancel{e^x}}{x \cancel{e^x}} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} = e^x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg(x e^{\frac{1}{x}}) = \lg(e^x) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg(x) + \lg(e^{\frac{1}{x}}) = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(x) + \frac{1}{x} = x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Per dimostrare che $(1,1)$ è l'unico punto critico, basta far vedere che la funzione

$$h(x) := \lg(x) + \frac{1}{x} - x$$

ha un unico zero in $x = 1$.

Infatti $h(1) = 0 + 1 - 1 = 0$