MATEMATICA DISCRETA

- Prof. F. Brenti
- Studio: 1213
- Tel. x 4671
- Ricevimento: ME 16-17 (o su Appuntamento) (online su TEAMS)
- e-mail: BRENTI@MAT.UNIROMA2.IT
- WWW.MAT.UNIROMA2.IT
- TESTO: VEDI PAGINA DEL CORSO

CONSIGLIATI: G.M. PIACENTINI CATTANEO, MATEMATICA DISCRETA, ZANICHELLI, 2008

S. LIPSCHUTZ, M.L. LIPSON, DISCRETE MATHEMATICS, SCHAUM, 2009

- ESAME: SCRITTO + ORALE (DETTAGLI DOPO)

- MATEMATICA $\emptyset$: "IN TUTTI GLI SCRITTI" (INCORRETTA $\Rightarrow$ NON AMMESSO ALL'ESAME)

$$\left(ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \ln(x) < e^x \; ? \right)$$

ESERCIZI: GRADUATI ([1], [2], [3])

[1]: 10-20 MIN

[2]: 20-60 MIN

[3]: ORE 1-4

- ESONERI: NON CI SONO ESONERI

PREAMBOLO: COS'È LA MATEMATICA?

- ES. 1: WIMBLEDON

128 GIOCATRICI, ELIMINAZIONE DIRETTA

64 +

DOMANDA: QUANTE PARTITE VENGONO GIOCATE IN TOTALE?

$64 + 32 + \dots + 2 + 1$

D'ALTRA PARTE: OGNI PARTITA HA ESATTAMENTE 1 PERDENTE, E OGNI GIOCATORE (TRANNE IL VINCITORE) PERDE 1 E 1 SOLA VOLTA

$$\Rightarrow \quad \# \text{PARTITE} = \# \text{PERDENTI}$$

$$= 128 - 1 = 127.$$

ES. 8: I TEST SIEROLOGICI CONDOTTI DAL GOVERNO ITALIANO IN ESTATE STIMANO CHE CI SONO ≅ 0,5 MILIONE DI PERSONE (IN ITALIA) CHE HANNO COVID, E SONO ASINTOMATICHE.

POPOLAZ. ITALIANA ≅ 60 M.

DOMANDA: IN UN GRUPPO DI 110 PERSONE, QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE CI SIA ALMENO UNA PERSONA CON COVID E ASINTOMATICA?

VEDREMO NEL CAP. 4, CHE QUESTA PROBABILITÀ È

$$\cong 0,64$$

CAPITOLO 1: TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1 INSIEMI

TUTTO IN MATEMATICA È UN INSIEME.

LA MATEMATICA PRENDE COME CONCETTI FONDAMENTALI I SEGUENTI:

INSIEME, ELEMENTO, APPARTENENZA

(INTUITIVAMENTE: UN INSIEME È UNA COLLEZIONE DI OGGETTI, DETTI ELEMENTI, APPARTENENTI ALL'INSIEME)

SOLITAMENTE SI SCRIVE UN INSIEME ELENCANDO GLI ELEMENTI, SEPARATI DA VIRGOLE E RACCHIUSI DA PARENTESI GRAFFE.

E.g. $A = \{1, 2, 5\}$

OSS. UN INSIEME PUÒ ESSERE ELEMENTO DI UN ALTRO INSIEME

E.g. $\{1, 3, \{1,2,3\}, \{3,6\}\}$

OSS. IN UN INSIEME L'ORDINE NON CONTA

E.g. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$

OSS. IN UN INSIEME NON CI SONO RIPETIZIONI

E.g. $\{1, 2, 2\}$ NON È UN INSIEME.

SCRIVIAMO

$$A \overset{def}{=} \{ \ldots \}$$

PER DIRE CHE A È L'INSIEME SCRITTO A DESTRA. SCRIVIAMO

$x \in A$ SE x È ELEMENTO DI A

$x \notin A$ " " NON È " " "

NOTAZIONI:

$$\mathbb{N} \overset{def}{=} \{0, 1, 2, \ldots\} \qquad (:=)$$

$$\mathbb{P} \stackrel{def}{=} \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} \stackrel{def}{=} \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z} \stackrel{def}{=} \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

SE $a \in \mathbb{N}$ allora

$$[a] \stackrel{def}{=} \{1, 2, \dots, a-1, a\}.$$

<u>DEF.</u> L'INSIEME CHE NON HA ELEMENTI SI DICE <u>INSIEME VUOTO</u>, SCRITTO $\emptyset$.

QUINDI $\emptyset = \{\}$.

1.2 OPERAZIONI TRA INSIEMI

SCRIVIAMO $A = B$ (A, B insiemi)

PER DIRE CHE A e B HANNO GLI STESSI ELEMENTI.

SIANO A, B INSIEMI.

DEF. A È **INCLUSO** IN B (O È UN **SOTTO-INSIEME** DI B) SE OGNI ELEMENTO DI A È ANCHE ELEMENTO DI B.

SCRIVIAMO $A \subseteq B$.

NOTAZIONE

$A \subsetneqq B$ SIGNIFICA $A \subseteq B$ e $A \neq B$

OSS. $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

DEF. L'INTERSEZIONE DI A E B È

$$A \cap B \stackrel{def}{=} \{ x \in A \underset{\text{(TALE CHE)}}{:} x \in B \}$$

DEF. L'UNIONE DI A E B È

L'INSIEME, SCRITTO $A \cup B$, CHE HA COME ELEMENTI TUTTI GLI ELEMENTI DI A E TUTTI GLI ELEMENTI DI B.

PROP 1.2.1 A, B, C INSIEMI. Allora

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(PROP. ASSOCIATIVA)

DIM. OMESSA. $\square$

ES. [1]: A, B INSIEMI.

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B \ ?$$

OSS.

$$A = B \iff \begin{matrix} A \subseteq B \\ e \\ B \subseteq A. \end{matrix}$$

PROP. 1.2.2: A, B, C INSIEMI. ALLORA:

i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; (PROP. DISTRIBUTIVE)

ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

DIM: i)

SIA $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C$.

SE $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow$
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

SE $x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$.

VICEVERSA. SIA $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. Se $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. Se $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ e $x \in C \Rightarrow x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

ii) SIMILE. $\square$

E.g. SIA

$$\mathcal{A} \overset{def}{=} \{A : A \notin A\}$$

(E.g. $\mathbb{N} \in \mathcal{A}$) ($\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$)

DOMANDA: $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$?

- SE $\mathcal{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \notin \mathcal{A}$

- SE $\mathcal{A} \notin \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{A}$ $\lightning$

DEF. DI $\mathcal{A}$

IL PARADOSSO SI EVITA SE ASSUMIAMO CHE TUTTI GLI INSIEMI CHE CONSIDERIAMO SIANO SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME UNIVERSO, $\mathcal{U}$.

SIA A INSIEME.

<u>DEF.</u> IL <u>COMPLEMENTARE</u> DI A È

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

(SI SCRIVE ANCHE $\complement A$)

PROP. DISTRIBUTIVA:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

SIA $x \in \mathcal{U}$, ALLORA

o $x \in A$ o $x \notin A$

o $x \in B$ o $x \notin B$

o $x \in C$ o $x \notin C$

$\Rightarrow$ 8 POSSIBILITÀ.

<u>TAVOLE DI VERITÀ:</u>

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap B$	$A \cap C$	$A \cap (B \cup C)$	
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

LE COLONNE CORRISPONDENTI =

SONO UGUALI $\Rightarrow$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$ ✓

PROP. 1.2.3: A, B INSIEMI. ALLORA:

i) $$(A \cap B)' = (A') \cup (B')$$ (LEGGI DI DE MORGAN)

ii) $$(A \cup B)' = (A') \cap (B')$$

DIM: USIAMO LE TAVOLE DI VERITÀ.

Es. [1]. II

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B)'$	A'	B'	$A' \cup B'$	$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$(A') \cap (B')$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

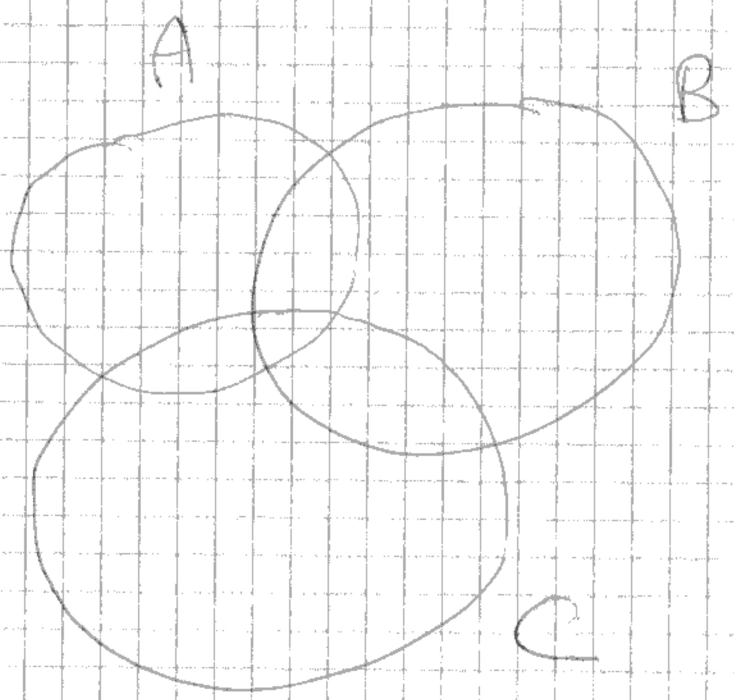
UGUALI

UGUALI

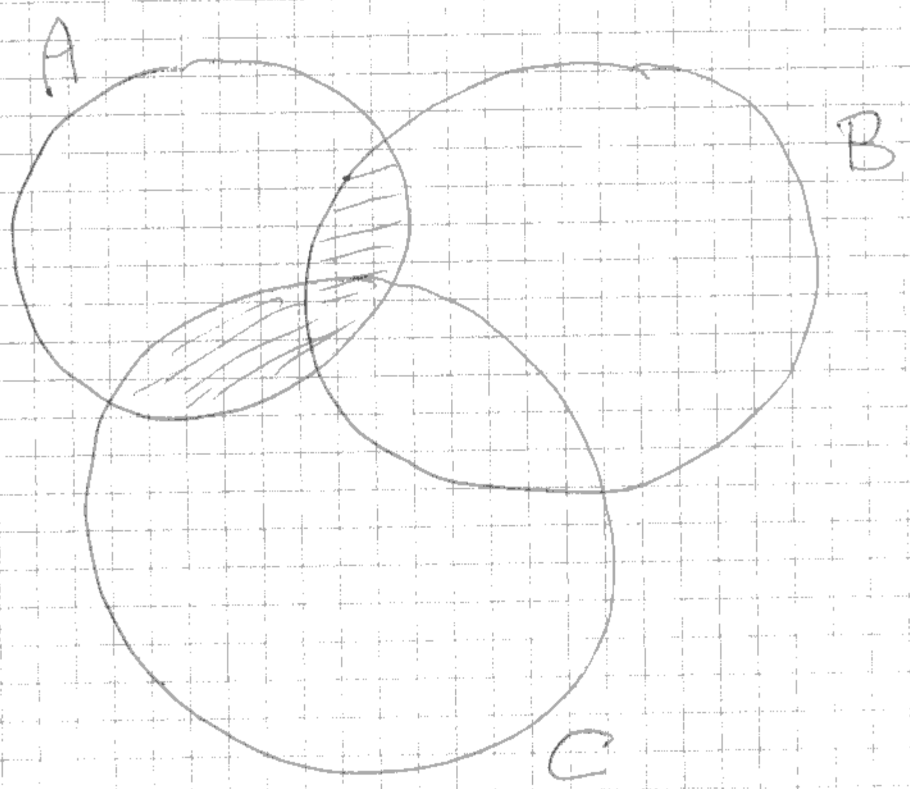
DIAGRAMMI DI VENN

SI RAPPRESENTA OGNI INSIEME CON I PUNTI RACCHIUSI DA UNA CURVA.

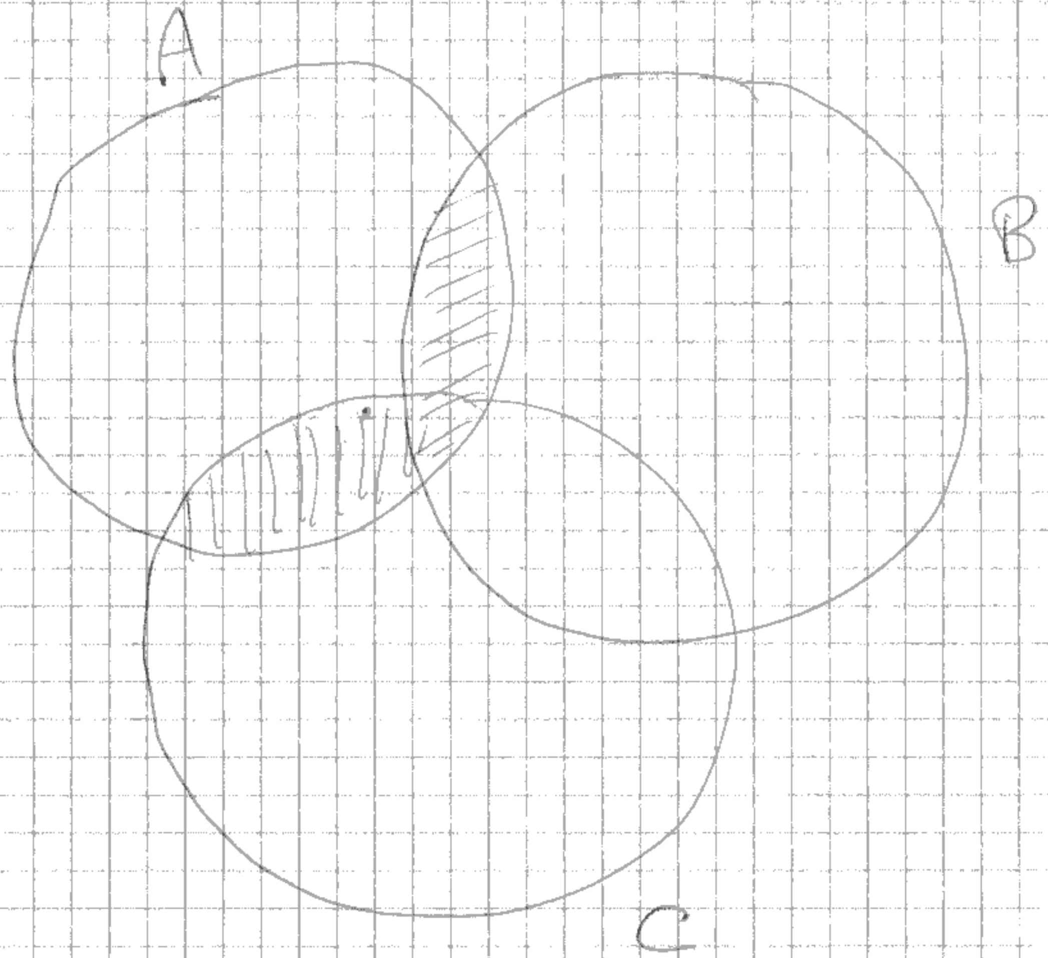
E.g.



PROP. DISTRIBUTIVA:



$A \cap (B \cup C)$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

OSS.

TAVOLA DI VERITÀ: DIMOSTRA (NON AIUTA L'INTUIZIONE)

DIAGRAMMA DI VENN: AIUTA L'INTUIZIONE (NON DIMOSTRA)

~~DIMOS~~ RAGIONAMENTO: DIMOSTRA (HA BISOGNO DELL'INTUIZIONE)

A, B INSIEMI

DEF. LA DIFFERENZA TRA A E B È

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{ x \in A : x \notin B \}$$

DEF: LA DIFFERENZA SIMMETRICA DI A E B È

$$A \Delta B \overset{\text{def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\left(= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \right).$$

<u>DEF</u>: IL <u>PRODOTTO CARTESIANO</u> DI A E B È

$$A \times B \stackrel{def}{=} \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

coppia ordinata

$$(= \{a, \{a,b\}\})$$

<u>E.g.</u> $(1,2) \neq (2,1)$.

SIMILMENTE, SE A, B, C SONO INSIEMI, ALLORA

$$A \times B \times C \overset{def}{=} \{ (a,b,c) : a \in A, \ b \in B, \ c \in C \}$$

ETC...

ES. [2]: È VERO (SEMPRE VERO) CHE

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \ ?$$

X	A	B	$A \cap B$	$X \setminus (A \cap B)$	$X \setminus A$	$X \setminus B$	$(X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

ES. [1]: A, B, C INSIEMI, CON, $C \subseteq A$. È VERO CHE

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \quad ?$$

ES. [2]: CHI È

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \quad ?$$

A INSIEME.

DEF. L'INSIEME DELLE PARTI DI A (o INSIEME POTENZA) è

$$\mathcal{P}(A) \overset{def}{=} \{B : B \subseteq A\}.$$

PROP. 1.2.3 A, B, C INSIEMI. ALLORA

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

DIM. SIA $(x,y) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ e $y \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ e $y \in B$ e $y \in C$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

VICEVERSA. SIA $(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$

e $y \in B$ e $x \in A$ e $y \in C \Rightarrow x \in A$ e

$y \in B \cap C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cap C)$. $\square$

<u>PROBLEMA SAT</u>: DATE DUE FORMULE

COMPOSTE DA UN NUMERO FINITO

DI INSIEMI, $\cap$ e $\cup$, DECIDERE

SE SONO UGUALI COME INSIEMI.

IN UN TEMPO "RAGIONEVOLE"

1.3 APPLICAZIONI TRA INSIEMI

A, B INSIEMI. UNA APPLICAZIONE DA A IN B È UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI $a \in A$ UN UNICO ELEMENTO $b \in B$.

DEF. UNA APPLICAZIONE (o FUNZIONE o MAPPA) $f: A \to B$ è UN SOTTOINSIEME $f \subseteq A \times B$ TALE CHE PER OGNI $a \in A$ ESISTE UN UNICO $b \in B$ TALE CHE $(a,b) \in f$ (SCRIVIAMO $f(a) = b$).

Si A $f: A \to B$.

DEF. f è SURIETTIVA SE PER OGNI $b \in B$ ESISTE $a \in A$ TALE CHE

$f(a) = b$.

<u>DEF.</u> f è <u>INIETTIVA</u> SE

$$x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

<u>DEF.</u> f è <u>BIUNIVOCA</u> SE f è INIETTIVA e f è SURIETTIVA.

SIANO A, B, C INSIEMI e

$f: A \to B$ e $g: B \to C$.

DEF. LA COMPOSIZIONE DI f e g è

$g \circ f : A \to C$ DEFINITA PONENDO

$$(g \circ f)(a) \stackrel{def}{=} g(f(a)),$$

PER OGNI $a \in A$.

NOTAZIONI:

$\forall$ SIGNIFICA "PER OGNI"

$\exists$ SIGNIFICA "ESISTE"

$\exists!$ " "ESISTE UN UNICO"

PROP. 1.3.1 A, B, C INSIEMI, $f: A \to B$, $g: B \to C$. ALLORA:

i) f e g INIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ INIETTIVA

ii) f e g SURIETTIVE $\Rightarrow$ $g \circ f$ SURIETTIVA

iii) " " BIUNIVOCHE $\Rightarrow$ $g \circ f$ BIUNIVOCA.

DIM. i) SIANO $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow$ POICHÈ f È INIETTIVA $\Rightarrow f(x) \neq f(y)$. MA g È INIETTIVA $\Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$.

ii) SIA $c \in C \Rightarrow$ POICHÈ g È SURIETTIVA $\Rightarrow \exists\, b \in B$ tale che $g(b) = c$. Ma f È SURIETTIVA $\Rightarrow \exists\, a \in A$ tale che $f(a) = b$. Quindi $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.

iii) SEGUE DA i) e ii). $\square$

<u>ES. [1+]</u>: QUANTE FUNZIONI $f : [3] \to [4]$ CI SONO CHE SONO INIETTIVE?

(RISPOSTA: 24)

ES. [17]: QUANTE FUNZIONI $f:[4]\to[3]$ CI SONO CHE SONO SURIETTIVE?

(RISPOSTA: 36).

A, B INSIEMI, $f: A \to B$, f BIUNIVOCA.

DEF. L' INVERSA DI f È $f^{-1}: B \to A$ DEFINITA PONENDO

$$f^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in f\}$$

OSS. QUINDI

$$f(a) = b \iff f^{-1}(b) = a.$$

DEF. LA FUNZIONE IDENTITÀ SU A è

$I_A : A \to A$ (o 1_A, o I, o 1) DEFINITA

PONENDO

$$I_A(a) \overset{def}{=} a$$

$\forall a \in A$.

PROP. 1.3.2: A INSIEME, $f: A \to A$, $g: A \to A$,

$h: A \to A$. ALLORA:

i) $f \circ g : A \to A$;

ii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f \circ (g \circ h))(a) = f((g \circ h)(a)) = f(g(h(a)))$$

MENTRE

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a)))$$

✓

iii) SIA $a \in A$. ALLORA

$$(f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a)$$

MENTRE

$$(I_A \circ f)(a) = I_A(f(a)) = f(a)$$ ✓

ii) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$;

iii) $f \circ I_A = I_A \circ f = f$;

iv) f BIUNIVOCA $\Rightarrow f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_A$.

<u>DIM.</u> i) E' CHIARO.

~~ii~~)

<u>OSS.</u> DATE $f, g : A \to B$ SI DICE CHE f e g SONO <u>UGUALI</u> (SCRITTO $f = g$) SE

$$f(a) = g(a) \quad \forall a \in A.$$

iv) SIA f BIUNIVOCA E $a \in A$. ALLORA

$$(f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a))$$

SIA $b \overset{def}{=} f^{-1}(a) \Rightarrow f(b) = a \Rightarrow$

$$f(f^{-1}(a)) = a \Rightarrow (f \circ f^{-1})(a) = a = I_A(a)$$

SIMILMENTE

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)).$$

SIA $c \overset{def}{=} f(a) \Rightarrow f^{-1}(c) = a \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow (f^{-1} \circ f)(a) = a = I_A(a). \square$$

ESEMPI E CONTROESEMPI:

<u>ESEMPIO:</u> NON DIMOSTRA

<u>CONTROESEMPIO:</u> DIMOSTRA CHE NON È SEMPRE VERO.

<u>E.g.</u> CONSIDERIAMO L'ENUNCIATO:

"OGNI PRIMO È DISPARI" (P1)

<u>ESEMPIO:</u> 3 È PRIMO ED È DISPARI.

<u>CONTROESEMPIO:</u> 2 È PRIMO ED È PARI.

$\left(\Longrightarrow (P1) \text{ È FALSA} \right).$

SIA $n \in \mathbb{P}$. PONIAMO

$$S_n \stackrel{def}{=} \left\{ f : [n] \to [n] \,,\ f \overset{\text{BIUNIVOCA}}{\cancel{\text{biunivoca}}} \right\}$$

(S_n È IL <u>GRUPPO SIMMETRICO</u>)

SIA $f \in S_n$

SCRIVIAMO

$$f = a_1 a_2 \cdots a_n$$

PER DIRE CHE

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n$$

<u>E.g.</u>

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

OSS. SE $f, g \in S_n$, $f = a_1 \cdots a_n$,

$g = b_1 \cdots b_n$ ALLORA

$$f \circ g = a_{b_1} \, a_{b_2} \cdots a_{b_n}$$

E.g. $f = 7153426$ $g = 6712534$
$(n=7)$

$\Rightarrow$ $f \circ g = 2671453$

OSS. SE $f \in S_n$, $f = a_1 \cdots a_n$ ALLORA

$f^{-1} = b_1 \ldots b_n$ DOVE b_i È LA

POSIZIONE DI i IN $a_1 \cdots a_n$.

E.g. $n = 7$, $f = 5132647$ ALLORA

$$f^{-1} = 2436157$$

IN EFFETTI

$$5132647 \circ 2436157 = \underbrace{1234567}_{Id_{[n]}}$$

$2436157 \circ 5132647 = 1234567$ ✓

DEF GLI ELEMENTI DI S_n SI DICONO

PERMUTAZIONI

A, B INSIEMI, $f: A \to B$.

SIA $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

DEF L'IMMAGINE DI X MEDIANTE f

È $f(X) \overset{\text{def}}{=} \{ f(a) : a \in X \}$.

DEF LA <u>CONTROIMMAGINE</u> (o <u>RETROIMMAGINE</u>) DI Y MEDIANTE f È

$$f^{-1}(Y) \overset{def}{=} \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

OSS. $f^{-1}(Y)$ È DEFINITA ANCHE SE f <u>NON</u> È BIUNIVOCA.

E.g. $A = [3]$, $B = [2]$,

$f : A \to B$ TALE CHE

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$.

$Y = \{2\}$. ALLORA

$f^{-1}(Y) = \{1, 3\}$.

PROP. 1.3.3: A, B INSIEMI, $f: A \to B$, $X, Y \subseteq B$. ALLORA:

i) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

ii) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

DIM.

i) SIA $a \in f^{-1}(X \cap Y) \Rightarrow f(a) \in X \cap Y \Rightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \in Y$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

VICEVERSA, SIA $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \in f^{-1}(Y) \Rightarrow$

$f(a) \in X$ e $f(a) \in Y \Rightarrow f(a) \in$

$X \cap Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X \cap Y)$.

ii) ANALOGO. $\square$

ES. [1+]: A, B INSIEMI, $f: A \to B$.
DIMOSTRARE CHE

$$f(f^{-1}(B)) = B \iff f \text{ è SURIETTIVA.}$$

1.4 RELAZIONI

A INSIEME

DEF. UNA RELAZIONE SU A

È UN SOTTOINSIEME $R \subseteq A \times A$.
SCRIVIAMO aRb PER DIRE CHE $(a,b) \in R$ $(a, b \in A)$ (LETTO "a È IN RELAZIONE CON b")

SIA R UNA RELAZIONE SU A.

DEF.

i) R È RIFLESSIVA SE

$$a \in A \Rightarrow aRa \quad (\Leftrightarrow (a,a) \in R)$$

ii) R È SIMMETRICA SE

$aRb \iff bRa$

$(\forall a, b \in A)$

iii) R È TRANSITIVA SE

$$\begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array} \Rightarrow aRc$$

$(\forall a, b, c \in A)$

DEF. R È UNA RELAZIONE DI **EQUIVALENZA** SE È RIFLESSIVA, SIMMETRICA E TRANSITIVA.

E.g. $A = [5]$, $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (1,2), (2,3), (1,3), (3,2)\}$ $(\subseteq A \times A)$. ALLORA R **NON** È RIFLESSIVA, PERCHÈ $(3,3) \notin R$.

INOLTRE R NON È SIMMETRICA PERCHÈ

$(1,2) \in R$ MA $(2,1) \notin R$.

($\Rightarrow R$ NON È DI EQUIVALENZA)

SIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. SIA $a \in A$.

<u>DEF.</u> LA <u>CLASSE DI EQUIVALENZA</u> DI a È

$$[a] = \{b \in A : aRb\}.$$

PROP. 1.4.1: R RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. SIANO $a, b \in A$. ALLORA O $[a]=[b]$ O $[a] \cap [b] = \emptyset$.

DIM. SUPPONIAMO CHE $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. SIA $c \in [a] \cap [b]$. ALLORA cRa e cRb. MA R È SIMMETRICA

$\Rightarrow aRc$ e cRb. MA R È TRANSITIVA $\Rightarrow aRb$ $(\Rightarrow bRa)$.

SIA $x \in [a] \Rightarrow xRa$. MA aRb $\underset{\text{(TRANSITIVA)}}{\Rightarrow} xRb \Rightarrow x \in [b]$. VICEVERSA.

SIA $y \in [b] \Rightarrow yRb \overset{(bRa)}{\Rightarrow} yRa \Rightarrow$

$y \in [a]$. $\square$

i) $B_i \subseteq A$ $(\forall i = 1, \dots, k)$

ii) $B_i \neq \emptyset$ $(\forall i = 1, \dots, k)$

iii) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = A$

iv) $1 \leq i < j \leq k \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$.

$B_1, \dots, B_k$ SI DICONO I <u>BLOCCHI</u> DELLA PARTIZIONE π e SI DICE CHE π HA k BLOCCHI.

ES. [1]: QUANTE RELAZIONI DI EQUIVALENZA CI SONO SU [3]?
(RISPOSTA: 5).

SIA A INSIEME.

DEF. UNA PARTIZIONE (O PARTIZIONE INSIEMISTICA) DI A È UN INSIEME $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ TALE CHE:

E.g. $A = [8]$ ALLORA

$$\pi = \{\{1,3\},\{4\},\{2,5,7\},\{6,8\}\}$$

È UNA PARTIZIONE DI A IN 4 BLOCCHI.

1.4.2

COR: SIA R UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU A. ALLORA LE CLASSI DI EQUIVALENZA DI R SONO UNA PARTIZIONE DI A.

DIM: SIA $a \in A \Rightarrow [a] \neq \emptyset$ (PERCHÉ $a \in [a]$). INOLTRE $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

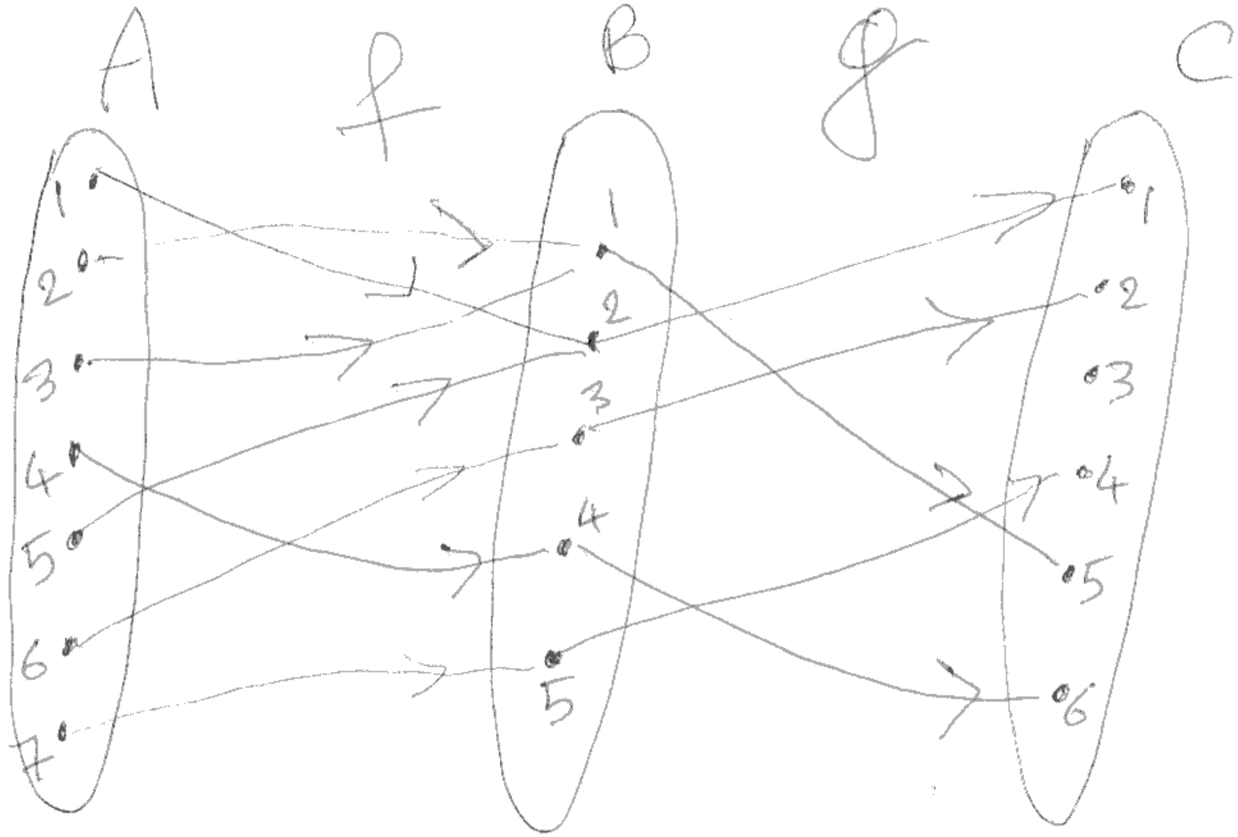
$\left(\text{SE } x \in A \Rightarrow x \in [x] \Rightarrow x \in \bigcup_{a \in A} [a] \right)$.

SEGUE QUINDI DA 1.4.1. $\square$

<u>ES. 5</u>: $f, \cancel{g}: A \to B$, $g: B \to C$, f SURIETTIVA, g INIETTIVA. ALLORA

$$g \circ f \text{ INIETTIVA ?}$$

VEDIAMO:



A
f
B
g
C
1
2
3
4
5
6
7
1
2
3
4
5
1
2
3
4
5
6

SIA $A=[7]$, $B=[5]$, $C=[6]$,

$f: A \to B$ DEFINITA DA

$f(1)=2$, $f(2)=1$, $f(3)=1$, $f(4)=4$

$f(5)=2$, $f(6)=3$, $f(7)=5$ e

g DEFINITA DA:

$g(1)=5$, $g(2)=1$, $g(3)=2$,

$g(4)=6$, $g(5)=4$

ALLORA f È SURIETTIVA E

g È INIETTIVA MA

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$

$(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(2) = 1$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ NON È INIETTIVA

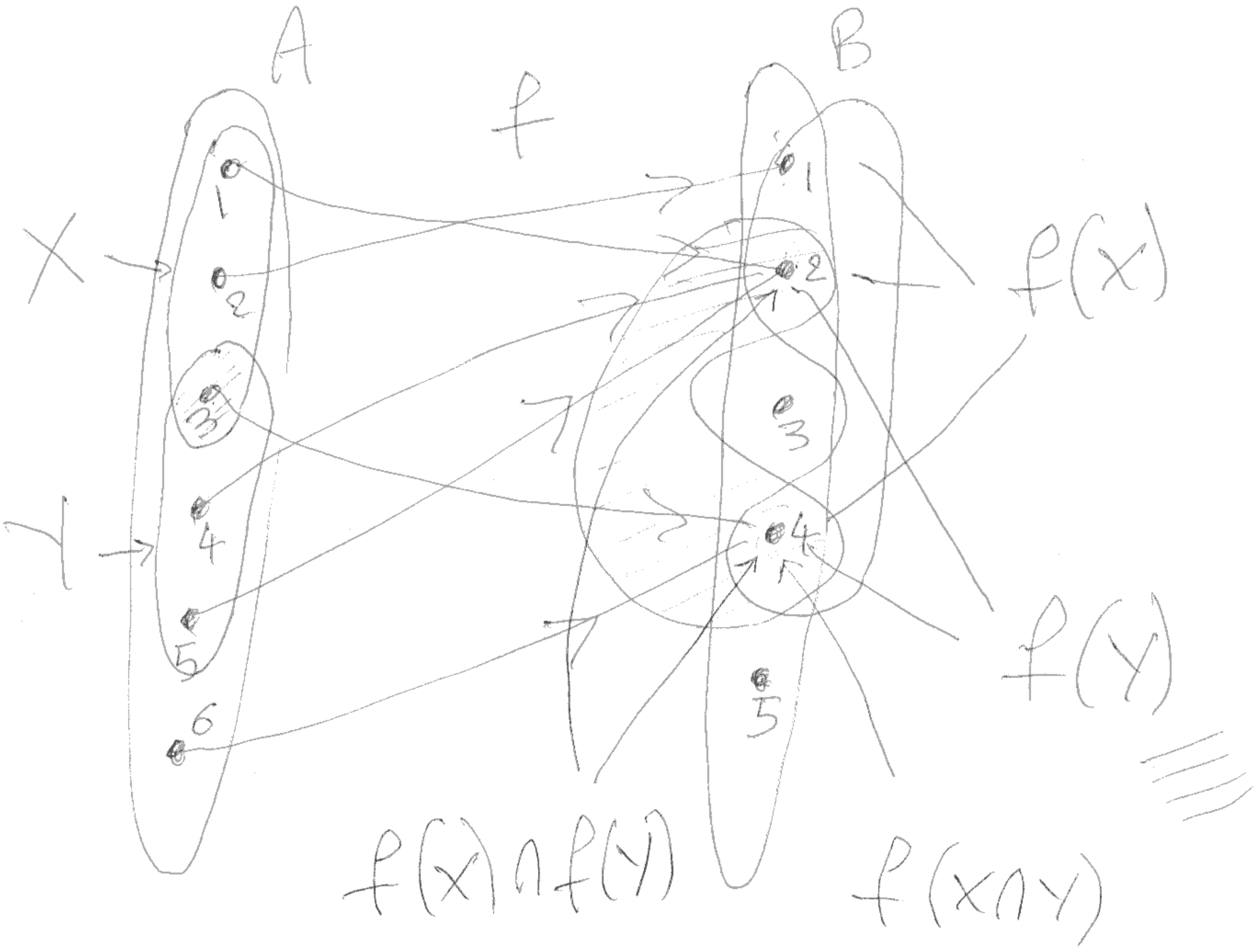
$\Rightarrow$ No.

ES.6: $f: A \to B$, $X, Y \subseteq A$.

È VERO CHE

$$f(X) \cap f(Y) = f(X \cap Y) ?$$

VEDIAMO:


A
B
f
X
Y
1
2
3
4
5
6
f(X)
f(Y)
f(X)∩f(Y)
f(X∩Y)

QUINDI NO, ANCHE SE SEMBRA CHE

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

COSTRUIAMO UN CONTROESEMPIO DAL DISEGNO.

SIA $A = [6]$, $B = [5]$ E $f : A \to B$

DEFINITA DA

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4$$

$$f(4) = 2, \quad f(5) = 2, \quad f(6) = 4$$

E

$$X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{3, 4, 5\}$$

ALLORA

$$f(X) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 1, 4$$

$$f(Y) = \{f(3), f(4), f(5)\} = \{4, 2\}$$

$$f(X \cap Y) = f(\{3\}) = \{f(3)\} = \{4\}$$

$$f(X) \cap f(Y) = \{2, 4\}$$

$\Rightarrow$ NO.

DIMOSTRIAMO CHE

$$f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y).$$

SIA $a \in f(X \cap Y) \Rightarrow \exists\, b \in X \cap Y$ TALE CHE $f(b) = a$. MA $b \in X \Rightarrow f(b) \in f(X) \Rightarrow a \in f(X)$. MA $b \in Y \Rightarrow f(b) \in f(Y) \Rightarrow a \in f(Y)$

$\Rightarrow a \in f(X) \cap f(Y)$. $\square$

<u>ES. 8:</u> CHI È

$$(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \;?$$

MI PARE CHE SIA

$$\mathbb{N} \times \mathbb{P}.$$

VEDIAMO. SIA

$(x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P}) \Rightarrow$

$(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ e $(x,y) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$, e $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{P}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{P}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{P} \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}$.

VICEVERSA. SIA $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{P}$ $\Rightarrow x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{P} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ e $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{P} \Rightarrow (x,y) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{P})$.

ES. 9: $f: A \to B$, $X, Y \subseteq B$.

DIMOSTRARE CHE

$$f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y).$$

DIM. SIA $a \in f^{-1}(X \setminus Y) \Rightarrow$

$f(a) \in X \setminus Y \Rightarrow f(a) \in X$ e

$f(a) \notin Y \Rightarrow a \in f^{-1}(X)$ e

$a \notin f^{-1}(Y) \Longrightarrow a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$.

VICEVERSA, SIA $a \in f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y) \Longrightarrow a \in f^{-1}(X)$ e $a \notin f^{-1}(Y)$ $\Longrightarrow f(a) \in X$ e $f(a) \notin Y \Longrightarrow f(a) \in X \setminus Y \Longrightarrow a \in f^{-1}(X \setminus Y)$. $\square$

— o —

E.g. SIA $A=\mathbb{Z}$. SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

(CIOÈ $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ TALE CHE $b-a=3\cdot k$)

$$aRb \iff 3 \mid (b-a)$$

DIVIDE

$\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$ (CIOÈ $b-a$ È MULTIPLO DI 3)

QUINDI, PER ES. $2 R 5$ MA $3 \not R 7$.

ALLORA R È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA. INFATTI.

SIA $a \in \mathbb{Z}$ ALLORA $a-a=0$ e $3 \mid 0$ (INFATTI $0 = 3 \cdot 0$) $\Rightarrow$ $3 \mid a-a \Rightarrow aRa$ ✓

SIANO $a, b \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $aRb \Rightarrow$
$3 \mid (b-a) \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ TALE CHE
$b - a = 3 \cdot k \Rightarrow a - b = 3 \cdot (-k)$
$\Rightarrow 3 \mid a - b$ (SE $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -k \in \mathbb{Z}$)
$\Rightarrow bRa$. QUINDI R È
SIMMETRICA.

SIANO $a, b, c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE

aRb e $bRc \Rightarrow 3 \mid b-a$ e $3 \mid c-b$

$\Rightarrow \exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ TALI CHE $b-a = 3 \cdot k$

e $c-b = 3 \cdot l \Rightarrow c-a = c-b+b-a$

$= 3 \cdot l + 3 \cdot k = 3(l+k)$. MA $l+k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3 \mid c-a \Rightarrow aRc$. QUINDI

R È TRANSITIVA.

CHI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

$$[0] = \{a \in \mathbb{Z} : aR0\} =$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-0)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid a\}$$

$$= \{3 \cdot k : k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\}$$

$$[1] = \{a \in \mathbb{Z} : a R 1\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-1)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : a - 1 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{3 \cdot k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{1, -2, 4, -5, 7, \ldots\}$$

$$[2] = \{a \in \mathbb{Z} : a R 2\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : 3 \mid (a-2)\}$$

$$= \{a \in \mathbb{Z} : a-2 = 3 \cdot k \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{3 \cdot k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{2, -1, 5, -4, 8, \dots\}$$

IN GENERALE

$$[i] = \{3 \cdot k + i : k \in \mathbb{Z}\}$$

$(i \in \mathbb{Z})$. QUINDI

$$[0] = [3] = [-3] = [6] = [-6] = \dots$$

$$[1] = [4] = [-2] = [7] = [-5] = \dots$$

$$[2] = [5] = [-1] = [8] = [-4] = \dots$$

QUINDI R HA 3 CLASSI DI EQUIVALENZA DISTINTE.

<u>ES. [2-]</u>: SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

$$aRb \iff b-a \text{ È PARI}$$

$(\forall a,b \in \mathbb{Z})$. EQUIVALENZA ?

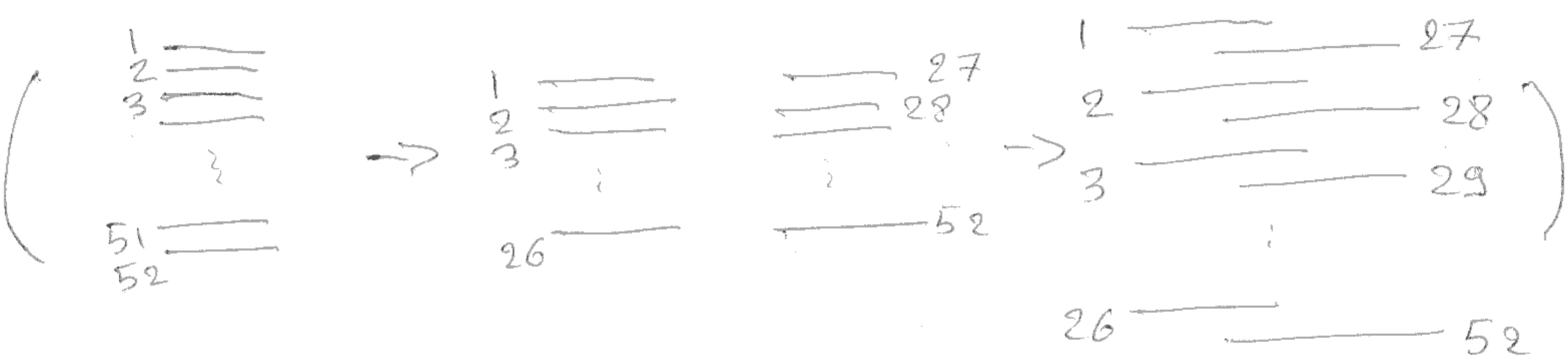
ES. [2]: SIA

$$p = 1\ 27\ 2\ 28\ 3\ 29\ \dots\ 25\ 51\ 26\ 52$$

($\Rightarrow p \in S_{52}$). CALCOLARE IL MINIMO $k \in \mathbb{P}$ TALE CHE

$$\underbrace{p \circ p \circ p \circ \dots \circ p}_{k} = Id_{[52]} = 1\,2\,3\,4 \dots 51\ 52.$$

<u>OSS.</u> φ È LA "SMAZZATA PERFETTA"



QUINDI k È IL MINIMO NUMERO DI SMAZZATE PERFETTE DOPO LE QUALI IL MAZZO TORNA NELL'ORDINAMENTO INIZIALE

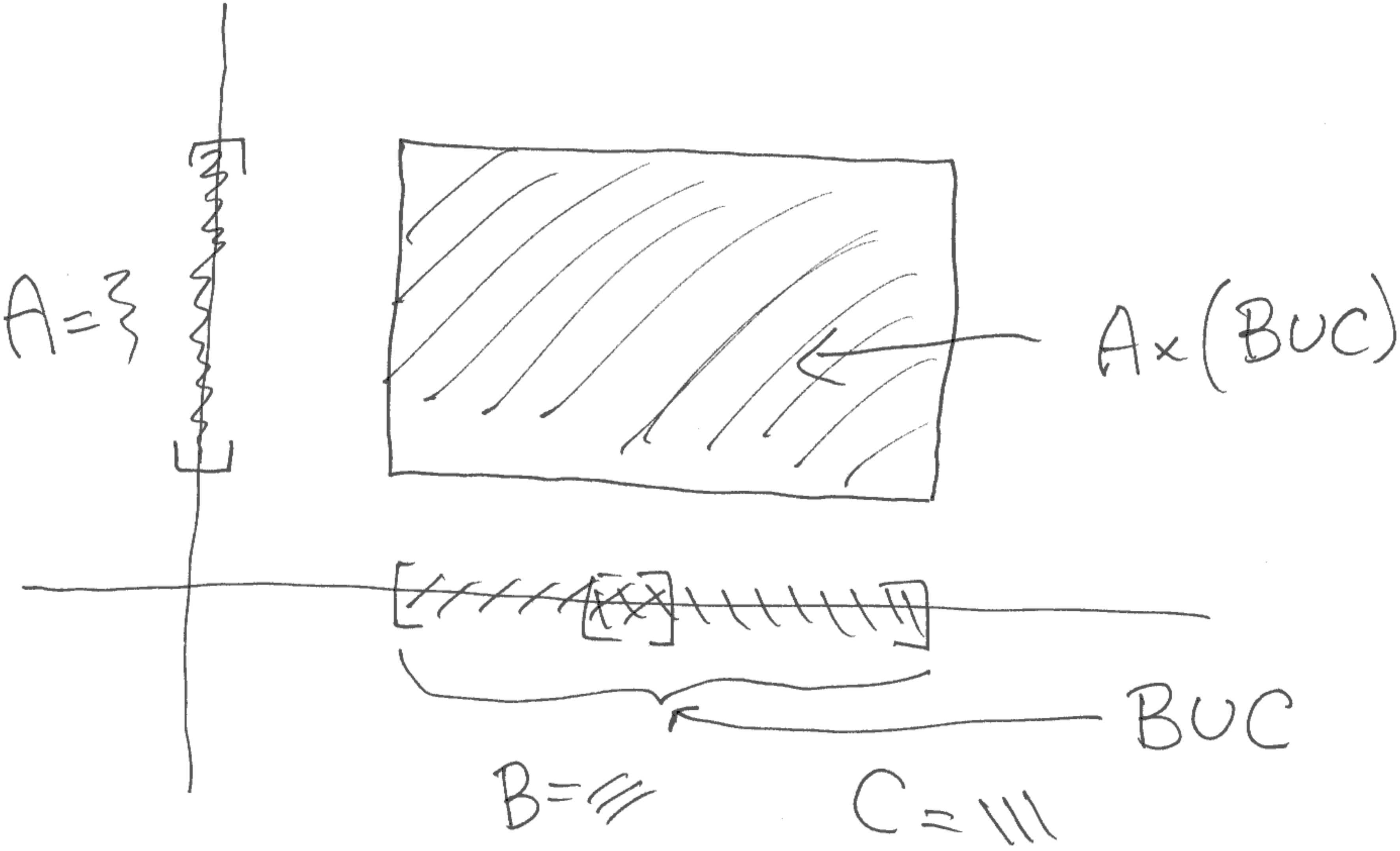
ES. 10: A, B, C INSIEMI.

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \ ?$$

INTUIZIONE: POSSO USARE I DIAGRAMMI DI VENN?

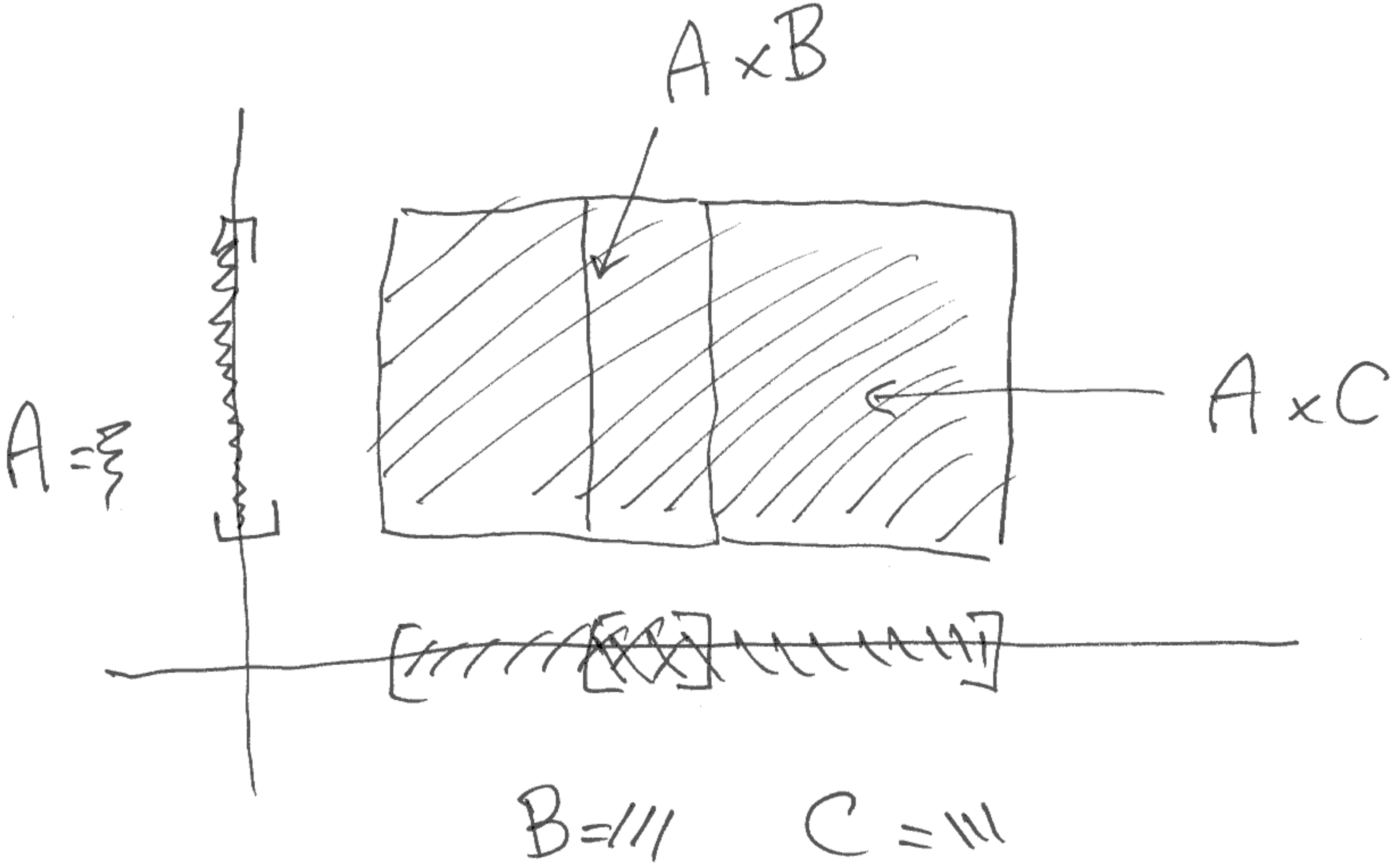
AVREI BISOGNO DI 4 DIMENSIONI...

MA A VOLTE SI PUÒ FARE



$A \times (B \cup C)$

DIAGRAMMA DI VENN:



$$(A \times B) \cup (A \times C)$$

SEMBRA DI SÌ.

DIMOSTRIAMOLO. SIA $(x,y) \in A \times (B \cup C)$ $\Rightarrow x \in A$ e $y \in B \cup C$. SE $y \in B \Rightarrow$ $(x,y) \in A \times B \Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

SE $y \in C \Rightarrow (x,y) \in A \times C \Rightarrow (x,y) \in$ $(A \times B) \cup (A \times C)$.

VICEVERSA. SIA $(x,y) \in (A \times B) \cup$

$\cup (A \times C) \Rightarrow (x,y) \in A \times B$ o $(x,y) \in A \times C$. SE $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A$ e $y \in B \Rightarrow y \in B \cup C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cup C)$.

SE $(x,y) \in A \times C \Rightarrow x \in A$ e $y \in C \Rightarrow y \in B \cup C \Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cup C)$. $\square$

POSSO USARE LE TAVOLE DI VERITÀ?

Si, MA CON ATTENZIONE.

SOLUZ. 2 (NOT RECOMMENDED)

$x \in A$	$y \in B$	$y \in C$	$y \in B \cup C$	$(x,y) \in A \times B$	$(x,y) \in A \times C$	$(x,y) \in A \times (B \cup C)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$$(A\times B)\overset{(x,y)\in}{\cup}(A\times C)$$

|
|
|
O
O
O
O
O

LE COLONNE CORRISPONDENTI A $A\times(B\cup C)$ e $(A\times B)\cup(A\times C)$ SONO OGUALI $\Rightarrow$ SI, È SEMPRE VERO. $\square$

ES. 11: QUANTE $f:[3]\to[4]$ CI SONO CHE SONO INIETTIVE?

SIA $f:[3]\to[4]$. ALLORA CI SONO 4 POSSIBILITÀ PER $f(1)$, QUINDI CI SONO 3 POSSIBILITÀ PER $f(2)$ (PERCHÈ $f(1)\neq f(2)$),

E QUINDI CI SONO 2 POSSIBILITÀ PER $f(3)$ (PERCHÈ $f(3) \neq f(1)$ e $f(3) \neq f(2)$). PERTANTO, IN TOTALE, CI SONO $4 \times 3 \times 2 = 24$ TALI FUNZIONI f.

ES. 12: SIANO A, B, C INSIEMI, TALI CHE $C \subseteq A$. È VERO CHE

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) ?$$

INTUIZIONE (VENN): SEMBRA VERO.

DIM. SIA $x \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow$ o

$x \in A \cap B$ o $x \in C$. SE $x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ e $x \in B \Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. SE $x \in C$ $\Rightarrow x \in B \cup C$ e $x \in A$ (PERCHÈ $C \subseteq A$) $\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

VICEVERSA. SIA $x \in A \cap (B \cup C)$ $\Rightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C$. SE $x \in B$ $\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$.

SE $x \in C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup C$. $\square$

OSS. NON SI USA "$C \subseteq A$" NEL VICEVERSA.

POSSO USARE LE TAVOLE DI VERITÀ?

SI, CON ATTENZIONE

VEDIAMO

A	B	C	$A \cap B$	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
~~0~~	~~1~~	~~1~~			
0	1	0	0	1	0
~~0~~	~~0~~	~~1~~			
0	0	0	0	0	0

CASI IMPOSSIBILI PERCHÈ
$C \subseteq A$

$(A\cap B)\cup C$

1
1
1
0
0
0

LE COLONNE CORRISPONDENTI SONO UGUALI $\Rightarrow$ $(A\cap B)\cup C$ e $A\cap(B\cup C)$ SONO UGUALI (SE $C\subseteq A$). $\square$

ES. 13: SIA R LA RELAZIONE SU $\mathbb{Z}$ DEFINITA PONENDO

$$m R n \iff \begin{array}{c} m = n \\ \text{o} \\ m + n = 5 \end{array}$$

$\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$

(Es. $5 R 5$, $5 \not{R}\, 7$)

EQUIVALENZA ?

RIFLESSIVA?

SIA $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = m \Rightarrow mRm$ ✓

($\Rightarrow$ SI)

SIMMETRICA?

SIANO $m, n \in \mathbb{Z}$ TALI CHE mRn

$\Rightarrow m = n$ o $m + n = 5$. SE $m = n$

$\Rightarrow n = m \Rightarrow nRm$. SE $m + n = 5$

$\Rightarrow n+n=5 \Rightarrow nRn$ ✓ ($\Rightarrow$ SI)

<u>TRANSITIVA</u>?

SIANO $a,b,c \in \mathbb{Z}$ TALI CHE aRb

e bRc. ALLORA $(a=b \vee a+b=5)$

e $(b=c \vee b+c=5)$. SE $a=b$ e

$b=c \Rightarrow a=c \Rightarrow aRc \Rightarrow$ O.K.

SE $a=b$ e $b+c=5 \Rightarrow a+c=5$

$\Rightarrow aRc \Rightarrow$ O.K. SE $a+b=5$ e

$b=c \Rightarrow a+c=5 \Rightarrow aRc \Rightarrow$ O.K.

SE $a+b=5$ e $b+c=5 \Rightarrow \cancel{a+2b+c=10}$

$\cancel{\Rightarrow a+c=5 \Leftrightarrow 2b=5 \Leftrightarrow \text{MAI}}$

$\cancel{\Rightarrow}$ ~~NO~~ $\cancel{aRc}$ ~~QUINDI NO, PERCHÈ~~

~~NON È TRANSITIVA.~~

$\Rightarrow a = 5 - b$ e $c = 5 - b \Rightarrow a = c \Rightarrow$

aRc. QUINDI SÌ È TRANSITIVA.

QUINDI È DI EQUIVALENZA.

QUALI SONO LE CLASSI DI EQUIVALENZA?

SIA $a \in \mathbb{Z}$. ALLORA

$$[a]_R = \{b \in \mathbb{Z} : aRb\} = \left\{b \in \mathbb{Z} : \begin{array}{c} a = b \\ o \\ a + b = 5 \end{array}\right\}$$

$$= \{ a, 5-a \}$$

QUINDI

$$[a]_R = \{ a, 5-a \}$$

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$(\Rightarrow [14]_R = \{ 14, -9 \}$ ETC...$)$.

ES. 14: SIA R LA RELAZIONE SU

$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ DEFINITA PONENDO

$$(a,b) \, R \, (c,d) \iff a \cdot d = b \cdot c$$

$\forall \, (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad (\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

EQUIVALENZA?

RIFLESSIVA ?

SIA $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \Rightarrow a \cdot b = a \cdot b \Rightarrow$

$(a,b) R (a,b) \Rightarrow$ si

SIMMETRICA ?

SIANO $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ TALI CHE

$(a,b) R (c,d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = d \cdot a$

$\Rightarrow (c,d) R (a,b) \Rightarrow$ si

TRANSITIVA?

SIANO $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ TALI CHE

$(a,b)R(c,d)$ e $(c,d)R(e,f) \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$

e $c\cdot f=d\cdot e \Rightarrow a\cdot d\cdot f=b\cdot c\cdot f$ e

$b\cdot c\cdot f=b\cdot d\cdot e \Rightarrow a\cdot d\cdot f=b\cdot d\cdot e$. MA

$d\neq 0$ $(d\in\mathbb{Z}^*) \Rightarrow a\cdot f=b\cdot e \Rightarrow (a,b)R$

$(e,f) \Rightarrow$ Si.

QUINDI È DI EQUIVALENZA. $\square$

ES. : QUANTE RELAZIONI DI EQUIV. CI SONO SU $A = [3]$ $(= \{1,2,3\})$?

SIA R UNA RELAZ. DI EQUIV. SU $[3]$. ALLORA $R \subseteq [3] \times [3] = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. POICHÉ R È DI EQUIV. $\Rightarrow$ È RIFLESSIVA $\Rightarrow$

$$\{(1,1), (2,2), (3,3)\} \subseteq R.$$

SE $R \supsetneq \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$

$\Rightarrow \exists\ (c,d)\in R$ com $(c,d)\neq (1,2),(2,1)$

e $(c,d)\neq(1,1),(2,2),(3,3)$ SiA

$(c,d)=(2,3) \Rightarrow (3,2)\in R \Rightarrow (1,3)\in R$

$\Rightarrow (3,1)\in R \Rightarrow$

R È Di

$R=[3]\times[3] \Rightarrow$ EQUIV.

SE $R = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} \Rightarrow R$ È DI EQUIV.
(FACILE)

SIA $R \supsetneq \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. ALLORA ESISTE

$(a,b) \in R$, CON $a \neq b$.

SIA $(a,b) = (1,2) \Rightarrow$ POICHÈ R È SIMM.

$\Rightarrow (2,1) \in R \Rightarrow R \supseteq \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$.

SE $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\} \Rightarrow$ R È DI EQUIV.

SE $(a,b)=(2,1) \Rightarrow$ COME PRIMA

($\Rightarrow$ NON TROVO NIENTE DI NUOVO).

SE $(a,b)=(2,3) \Rightarrow (3,2)\in R \Rightarrow$

$$R \supseteq \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$$

SE

$$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$$

$\Rightarrow$ R È DI EQUIV.

SE $R \supsetneq \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$

$\Rightarrow \exists (c,d) \in R$ CON $c \neq d$ $(c,d) \neq (2,3)$, $(c,d) \neq (3,2)$. SE $(c,d) = (1,2)$

$\Rightarrow (2,1) \in R \Rightarrow (3,1) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$

$\Rightarrow R = [3] \times [3]$. SE $(c,d) = (1,3)$

$\Rightarrow (3,1) \in R \Rightarrow (1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$\Rightarrow R = [3] \times [3]$.

INFINE, SE $(a,b) = (1,3) \Rightarrow$

$(3,1) \in R \Rightarrow R \supseteq \{(1,1), (2,2), (3,3),$
$(1,3), (3,1)\}$. SE

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)\}$$

$\Rightarrow R$ È DI EQUIV.

SE $R \supsetneq \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1)\}$

$\Rightarrow$ o $(1,2) \in R$ o $(2,1) \in R$ o $(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \in R$. IN QUESTI CASI $\Rightarrow R = [3] \times [3]$.

QUINDI $\Rightarrow$ 5 REL. DI EQUIV. SU $[3]$.

C'È UN MODO PIÙ VELOCE?
SÌ, PIÙ CONCETTUALE.
SAPPIAMO DA 1.4.2 CHE LE
CLASSI DI EQUIVALENZA DI
UNA RELAZ. DI EQUIV. SONO
UNA PARTIZIONE DELL'INSIEME
(A)

QUANTE PARTIZIONI CI SONO DI $[3]$? BEH...

- $\{\{1,2,3\}\}$
- $\{\{1,3\},\{2\}\}$
- $\{\{1,2\},\{3\}\}$
- $\{\{1\},\{2,3\}\}$
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

QUINDI IL NUMERO DI RELAZ. DI EQUIV. SU $[3]$ È ≤ 5.

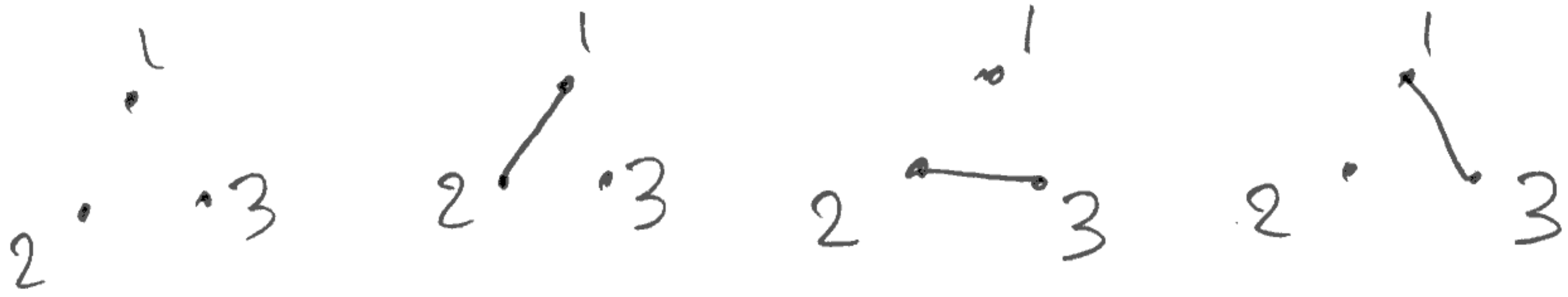
MA OGNI PARTIZIONE "VIENE" DA UNA REL. DI EQUIV. (PER ES.

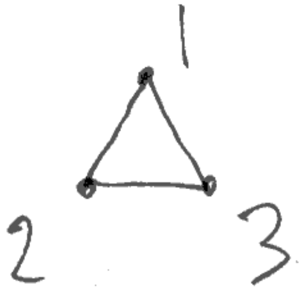
$$\{\{1\},\{2,3\}\} \longleftrightarrow \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$$

)

$\Rightarrow 5$.

GRAFICAMENTE:





$$\left(a \text{ — } b \iff aRb \right)$$

COSÌ SONO INDICATI I CAPITOLI DEI RACCONTI DEL GENJI 

SONDAGGIO:

SIA $f:[5]\to[5]$ LA FUNZIONE DEFINITA DA $f(1)=2$, $f(2)=5$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=4$. ALLORA:

a) f È INIETTIVA MA NON SURIETTIVA.
9 %

b) f È SURIETTIVA MA NON INIETTIVA.
12,5 %

c) f È SURIETTIVA E INIETTIVA.
1,25 %

d) NESSUNA DI QUESTE. ✓
77,5 %