ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 1

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

NUMERI INTERI: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

NUMERI RAZIONALI: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \underset{\text{TALE CHE}}{:} m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

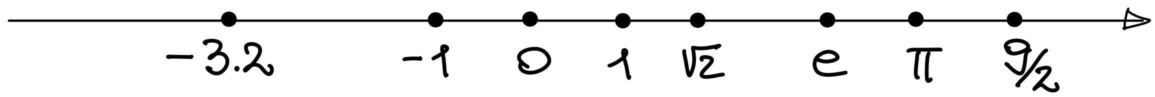
NUMERI REALI:

$$\mathbb{R} = \{ \underbrace{n.c_1c_2c_3c_4\dots}_{\text{rappresentazione decimale}} : n \in \mathbb{Z},\ c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \ \underset{\text{PER OGNI}}{\forall} i \geq 1 \}$$

$$\to n + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \frac{c_4}{10^4} + \dots$$

OSSERVAZIONI

- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata



Inoltre

$$1.25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$$

$$1.252525\dots = 1.\underbrace{\overline{25}}_{\text{periodo}} = 1 + \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \dots = \frac{124}{99} \in \mathbb{Q}$$

$\uparrow +1$

Se $0.\overline{25} = x$ allora

$$100x = 25.\overline{25} = 25 + x \Rightarrow 99x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{99}$$

Esistono numeri reali non razionali?

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ — $\sqrt{2}$ è un numero reale positivo tale che il suo quadrato vale 2

dim. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Allora $\exists m \in \mathbb{N}^+$ e $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

ESISTE — NATURALI POSITIVI

Quindi $\sqrt{2}n = m$ e elevando al quadrato si ha

intero con un numero DISPARI di fattori 2 $\rightarrow$ $2n^2 = m^2$ $\leftarrow$ intero con un numero PARI di fattori 2

Il fatto che il numero di fattori 2 a destra e a sinistra siano diversi contraddice l'unicità della fattorizzazione in fattori primi.
Così l'ipotesi di partenza $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ deve essere falsa e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

OSSERVAZIONE: la rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ è illimitata e NON periodica

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

Questa proprietà vale per tutti i

NUMERI IRRAZIONALI $= \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

sottrazione insiemistica

Si dimostra che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono insiemi DENSI in $\mathbb{R}$ ossia

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a<b \quad \begin{cases} \exists q \in \mathbb{Q} : a<q<b \\ \exists r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : a<r<b \end{cases}$$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un CAMPO: ci sono due operazioni, SOMMA e PRODOTTO tali che:

- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}(a+b)+c=a+(b+c)\\(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\end{array}\right\}$ P. ASSOCIATIVA
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}a+b=b+a\\a\cdot b=b\cdot a\end{array}\right\}$ P. COMMUTATIVA
- $\forall a \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{array}{l}a+0=a\\a\cdot 1=a\end{array}\right\}$ ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : a+b=0$ $\quad b=-a$ ESISTENZA DELL'OPPOSTO
- $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists b \in \mathbb{R} : a\cdot b=1$ $\quad b=\frac{1}{a}$ ESISTENZA DEL RECIPROCO
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ P. DISTRIBUTIVA

In $\mathbb{R}$ c'è una RELAZIONE D'ORDINE $\leq$ tale che:

- $\forall a \in \mathbb{R}$ $\quad a \leq a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ oppure $b \leq a$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ e $b\leq a \overset{\text{IMPLICA}}{\Longrightarrow} a=b$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a\leq b$ e $b \leq c \Longrightarrow a \leq c$
- $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ $\quad a \leq b \overset{\text{SE E SOLO SE}}{\Longleftrightarrow} a+c \leq b+c$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall c>0$ $\quad a\leq b \Longleftrightarrow c\cdot a \leq c\cdot b$
- $\forall a,b \in \mathbb{R}$ e $\forall c<0$ $\quad a\leq b \Longleftrightarrow c\cdot a \geq c\cdot b$

OSSERVAZIONE: $\forall a,b \geq 0$ $\quad a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$

Si noti che $-3 \leq 2$ ma $(-3)^2 \leq 2^2$ non vale

In $\mathbb{R}$ vale l'ASSIOMA DI CONTINUITÀ che assicura la corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{R}$ e i punti della retta orientata. Per questo $\mathbb{R}$ si dice anche COMPLETO.

INTERVALLI

Notazioni: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a<b$.

Intervalli LIMITATI:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$$ APERTO

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a<x\leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a\leq x<b\}$$

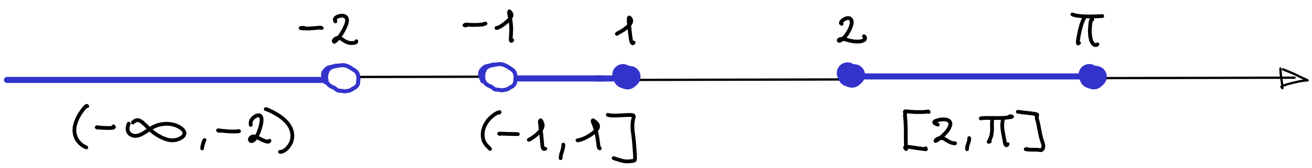
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$$ CHIUSO

Intervalli NON LIMITATI:

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x<a\} \\ (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a<x\}\end{array}\right\} \text{APERTI}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x\leq a\} \\ [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a\leq x\}\end{array}\right\} \text{CHIUSI}$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$ APERTO e CHIUSO



OSSERVAZIONE. $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $\forall a,b \in I$ si ha che $[a,b] \subseteq I$.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Descrivere l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \right\}$$

come unione di intervalli.

Per le proprietà di $\mathbb{R}$ è necessario che

$1-x \neq 0$ denominatore $\neq 0$ $\iff x \neq 1$

$4-x^2 \geq 0$ argomento della radice quadrata ≥ 0

$\iff (2+x)(2-x) \geq 0 \iff x \in [-2,2]$

$\rightarrow x^2-4 \leq 0 \iff (x+2)(x-2) \leq 0 \iff x \in [-2,2]$

Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \end{cases}$$

Non si può elevare al quadrato altrimenti si perde il segno di $1-x$

Distinguiamo due casi a seconda del segno di $1-x$: $x>1$ oppure $x<1$

$$\begin{cases} x > 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \underbrace{\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}}_{\leq 0} < 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \underbrace{\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}}_{\geq 0} < 2 \end{cases}$$

$\uparrow$ sempre vero

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$ elevo al quadrato

$x \in (1,2]$ $\qquad$ $\begin{cases} x \in [-2,1) \\ 4-x^2 < 4(1-x)^2 \end{cases}$

$\cancel{4}-x^2 < \cancel{4} - 8x + 4x^2$

$5x^2 - 8x > 0$

$x(5x-8) > 0$

$x < 0 \ \vee \ x > \frac{8}{5}$

$\Updownarrow$

$x \in [-2,0)$

Quindi $A = [-2,0) \cup (1,2]$.