$$L_n : \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4 \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

2) IL $\ker(L_n)$ È LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CIOÈ DEL SISTEMA (*): $AX = 0$, DOVE

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ E $0 = (0,0,0,0)^T$

QUINDI PER RISOLVERE TALE SISTEMA RIDUCIAMO A SCALA LA MATRICE A UTILIZZANDO L'ELIMINAZIONE DI GAUSS

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := A'$$

IL SISTEMA ORIGINALE (*) È EQUIVALENTE AL NUOVO SISTEMA (*)': $A'X = 0$.

POICHÉ LA MATRICE A' È A SCALA E HA PIVOT $P_1 = 1$ SULLA 1° COLONNA, E $P_2 = 3$ SULLA 4°, LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL NUOVO SISTEMA (*) È QUINDI ANCHE QUELLO DI (*), CIOÈ

$$\{\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_1 = 0, \alpha_4 = 0\} =$$

$$= \{(0, t_1, t_2, 0) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{Q}\}$$

DUNQUE

$$\boxed{\ker(L_A) = \{(0, t_1, t_2, 0) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{Q}\}}$$

PER CALCOLARE $\operatorname{Im}(L_A)$, LA TEORIA CI GARANTISCE CHE ESSO È IL SOTTOSPAZIO DI $\mathbb{Q}^4$ CHE HA PER BASE LE COLONNE DI A CORRISPONDENTI A QUELLE DI A' IN CUI COMPAIONO I PIVOT,

QUINDI LA 1° E LA 4° COLONNA.

QUINDI

$$\mathrm{Im}(L_1) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \{(c_1 + 4c_2, 3c_2, 2c_2, c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

---

2)

$$(*): \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

IL SISTEMA È $(*)$: $(A|b)$ CON MATRICE COMPLETA

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

RIDUCIAMO LA A SCALA UTILIZZANDO L'ALGORITMO DELLE ELIMINAZIONI DI GAUSS

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ \end{array}\right) = (S|c)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =: (S|C)$$

ORA IL SISTEMA $\circledast'$: $(S|C)$ È EQUIVALENTE AL SISTEMA DI PARTENZA $\circledast$. RISOLVIAMO $\circledast'$

$$\circledast': \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_3 - 2x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4t_1 - x_3 + 2t_2 = 7 \\ x_2 = t_1 \\ -x_3 - 2t_2 = -3 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 7 - 4t_1 - 2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -3 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3 - 2t_2 = 7 - 4t_1 - 2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -3 + 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t_1 - 2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -3 - 2t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{Q})$$

x_2 E x_4 SONO VARIABILI LIBERE

---

3)

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (\in M_{4\times 4}(\mathbb{Q}))$$

INANZITUTTO CALCOLO A

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -8 & 6 \\ -6 & 3 & -12 & 9 \\ -8 & 4 & -16 & 12 \end{pmatrix}$$

2)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -8 & 6 \\ -6 & 3 & -12 & 9 \\ -8 & 4 & -16 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -8 & 6 \\ -6 & 3 & -12 & 9 \\ -8 & 4 & -16 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: 0$$

b) DATO CHE IL GRUPPO $GL_n(\mathbb{Q})$ È CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO RIGHE PER COLONNE, ALLORA SE A FOSSE INVERTIBILE ANCHE A^2 LO SAREBBE, MA DATO CHE $\det(A^2) = 0$ È QUINDI NON È INVERTIBILE, MANCHE LA MATRICE A È INVERTIBILE

c) DATO CHE NON È INVERTIBILE BISOGNA CALCOLARE L'INSIEME DI TUTTI I VALORI $v \in \mathbb{Q}^4$ TALI CHE $Av = (0,0,0,0)$, CHE È PROPRIO IL $\ker(A)$, DUNQUE È ESATTAMENTE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE OMOGENEO AVENTE COME A LA MATRICE DEI COEFFICIENTI. QUINDI DOBBIAMO RISOLVERE TALE SISTEMA, RIDUCIAMO A SCALA LA MATRICE UTILIZZANDO L'ALGORITMO DELLE ELIMINAZIONI DI GAUSS

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & -8 & 6 \\ -6 & 3 & -12 & 9 \\ -8 & 4 & -16 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

Il sistema omogeneo $Sx = 0$ è equivalente ad $Ax = 0$, ed ha come spazio di soluzioni quello che è:

$$\ker(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4 \mid -2x + y - 4z + 3w = 0\} =$$

$$= \{(x, 2x + 4z - 3w, z, w) \mid x, z, w \in \mathbb{Q}\}$$

---

4)

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q})$$

a) Per determinare gli autovalori di M bisogna prima calcolare il suo polinomio caratteristico.

$$P_M(x) := \det(M - xI_4)$$

Quindi calcolando lo sviluppo di Laplace lungo la 4ª riga

$$\det(M - xI_4) = \det \begin{pmatrix} 1-x & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4}(-1-x)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-x & -5 & 0 \\ -5 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} =$$

SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA 3° RIGA

$$= (-1)^{4+4}(-1-x)\cdot(-1)^{3+3}\cdot(3-x)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-x & -5 \\ -5 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{4+4}(-1-x)\cdot(-1)^{3+3}(3-x)\left((1-x)^2-(-5)^2\right) =$$

$$= (-1-x)\cdot(3-x)\left((1-x)^2+5^2\right) =$$

$$= (x+1)\cdot(x-3)\left((x-1)^2-5^2\right)$$

QUINDI ABBIAMO CHE

$$P_M(x) = (x+1)\cdot(x-3)\cdot\left(\underbrace{(x-1)^2-5^2}_{x^2-2x-24}\right)$$

$$x_1 = -4 \qquad x_2 = 6$$

LE CUI RADICI, CIOÈ AUTOVALORI, SONO

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -4, \quad \lambda_4 = 6$$

b) L'AUTOSPAZIO È UN INSIEME DEFINITO

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid M \cdot v = \lambda v \} =$$

$$= \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$$

QUINDI PER TROVARE L'INSIEME DI SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO ⊛: $M_\lambda X = 0$, DOVE

$M_\lambda = M - \lambda I_4$. RISOLVIAMO RIDUCENDO A SCALA TRAMITE L'ALGORITMO DELLE ELIMIN. DI GAUSS

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5+(1-\lambda)}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \end{pmatrix} =: T_\lambda$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

ORA RISOLVENDO I VARI SISTEMI A SCALA

$T_\lambda X = 0$ SI TROVANO I VARI AUTOSPAZI

T_{-1}:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 = 0 \\ -\frac{21}{5} x_2 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{2}\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$

QUINDI $V_{-1} = \{(0, 0, -\frac{1}{2}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}$

POI

$$T_3 := \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{21}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{21}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 = 0 \\ -\frac{21}{5} x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = b \end{cases}$$

Quindi

$$V_3 = \{(0,0,b,0) \mid b \in \mathbb{Q}\}$$

<u>P01</u>

$$T_{-4} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = -c \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_{-4} = \boxed{\{(c, c, 0, 0) \mid c \in \mathbb{Q}\}}$$

Poi

$$T_6 : \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cancel{\rho_2}} \begin{pmatrix} -5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 9x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = d \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$V_6 = \{(-d, d, 0, 0) \mid d \in \mathbb{Q}\}$$