ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 10

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione di D. f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il seguente limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

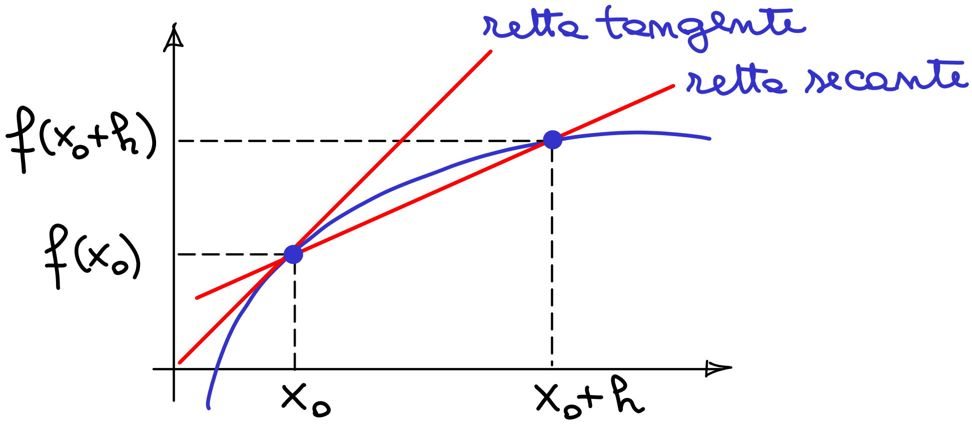
Il valore del limite $f'(x_0)$ si dice DERIVATA PRIMA DI f IN x_0

. Interpretazione geometrica:

retta secante $\quad y = \overbrace{\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)}^{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}(x-x_0)+f(x_0)$

RETTA TANGENTE $\quad y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



OSSERVAZIONE

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0:
per $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \overbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}^{\to f'(x_0)} \cdot \overbrace{(x-x_0)}^{\to 0} \longrightarrow f(x_0)$$

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = mx + q \Rightarrow f'(x) = m$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \to 0$

$$\frac{m(\cancel{x}+h)+\cancel{q}-(\cancel{mx}+\cancel{q})}{h} = m \to m \qquad \square$$

2) $f(x) = x^b \Rightarrow f'(x) = b\,x^{b-1}$

dim. Se $x \in D$ e $x \neq 0$ allora per $h \to 0$,

$$\frac{(x+h)^b - x^b}{h} = x^b \cdot \left(\underbrace{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^b - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to b} \right) \cdot \frac{1}{x} \to b x^{b-1}$$

Se $x=0$ e $b>0$ allora per $h \to 0$

$$\frac{h^b - 0^b}{h} = h^{b-1} \to \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \quad \text{NON DERIVABILE} \end{cases} \qquad \square$$

Ad esempio:

$f(x) = x^3 \xRightarrow{b=3} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \sqrt{x} \xRightarrow{b=\frac{1}{2}} \forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} \xRightarrow{b=-1} \forall x \neq 0 \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \to 0$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \left(\underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \right) \to e^x \qquad \square$$

4) $f(x)=\log(x) \implies f'(x)=\dfrac{1}{x}$

dim. Se $x>0$ allora per $h\to 0$

$$\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\left(\overbrace{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}^{\to 1}\right)\cdot\frac{1}{x}\longrightarrow\frac{1}{x}$$

$\square$

5) $f(x)=\mathrm{sen}(x) \implies f'(x)=\cos(x)$

dim. Se $x\in\mathbb{R}$ allora per $h\to 0$

$$\mathrm{sen}(x+h)=\mathrm{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\,\mathrm{sen}(h)$$

$$\frac{\mathrm{sen}(x+h)-\mathrm{sen}(x)}{h}=\mathrm{sen}(x)\cdot\left(\overbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}^{\to 0}\right)+\cos(x)\cdot\left(\overbrace{\frac{\mathrm{sen}(h)}{h}}^{\to 1}\right)$$

$$\longrightarrow\cos(x)$$

$\square$

6) $f(x)=\cos(x) \implies f'(x)=-\mathrm{sen}(x)$

dim. Se $x\in\mathbb{R}$ allora per $h\to 0$

$$\cos(x+h)=\cos(x)\cdot\cos(h)-\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(h)$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\cos(x)\cdot\left(\overbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}^{\to 0}\right)-\mathrm{sen}(x)\cdot\left(\overbrace{\frac{\mathrm{sen}(h)}{h}}^{\to 1}\right)$$

$$\longrightarrow-\mathrm{sen}(x)$$

$\square$

7) $f(x)=\mathrm{arcsen}(x) \implies f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $f(x)=\arccos(x) \implies f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $f(x)=\mathrm{arctg}(x) \implies f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

Siano f e g funzioni derivabili:

LINEARITÀ:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \quad (af+bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

DERIVATA DEL QUOZIENTE: se $g(x) \neq 0$ allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE $(g \circ f)(x) = g(f(x))$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ESEMPI

- $f(x) = 3\log(x) + 5\sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}}$
- $f(x) = x^2\cos(x) \Rightarrow f'(x) = 2x\cos(x) + x^2(-\operatorname{sen}(x))$
- $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2(x)$$ espressione alternativa

- $f(x) = x \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{arcsen}(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = (x \cdot \cos(x))' \cdot \operatorname{arcsen}(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= (\cos(x) + x(-\operatorname{sen}(x))) \cdot \operatorname{arcsen}(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \dfrac{\log(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \log(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

- $f(x) = a^x = e^{x \log(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \log(a)} \cdot \log(a)$

$$= a^x \cdot \log(a)$$

- $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}} \cdot \cos(x)$

- $f(x) = \overbrace{\operatorname{arctg}}^{g}\overbrace{(e^{x^2})}^{(f(x))} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{1 \cdot \dfrac{\overbrace{e^{x^2} \cdot 2x}^{f'(x)}}{1+(e^{x^2})^2}}_{g'(f(x))}$

- $f(x) = \overbrace{\log}^{g}\overbrace{(1+x \cdot \operatorname{tg}(x))}^{(f(x))}$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{1 \cdot \frac{\overbrace{0 + \operatorname{tg}(x) + x(1+\operatorname{tg}^2(x))}^{f'(x)}}{1+x \cdot \operatorname{tg}(x)}}_{g'(f(x))}$$

$e^{x \cdot \log(1+\frac{1}{x})}$

- $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow$

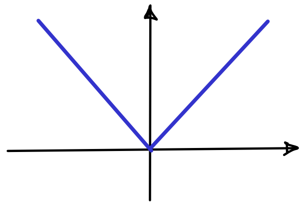
$$f'(x) = \exp\left(x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \, \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

OSSERVAZIONE

Se $f(x)=|x|$ allora per $x>0$, $f(x)=x$ e $f'(x)=1$ mentre per $x<0$, $f(x)=-x$ e $f'(x)=-1$.
Quindi $|x|$ è derivabile in $x\neq 0$:

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



In $x=0$, $|x|$ non è derivabile perché

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$ derivata destra in 0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$ derivata sinistra in 0

In generale, se i limiti esistono, si pone

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$ DERIVATA DESTRA di f in x_0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$ DERIVATA SINISTRA di f in x_0