a) $$\int_0^{+\infty} \frac{4x}{4x^8+1}\, dx$$

L'INTEGRALE È DEFINITO IN $[0,+\infty)$

IL PUNTO DA CONTROLLARE È $+\infty$

PER $x \to +\infty$

$$\frac{4x}{4x^8+1} \sim \frac{x}{x^8} = \frac{1}{x^7}$$

DATO CHE $7 > 1$, È GRAZIE AL CONFRONTO ASINTOTICO, L'INTEGRALE CONVERGE

---

b) $$\int_0^2 \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^\alpha}\, dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^\alpha}$$

LA FUNZIONE POSITIVA IN $(0,2]$

IL PUNTO DA VERIFICARE È $x = 0^+$

PER $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{\arctan\left(\frac{1}{0^+}\right)}{x^{\alpha}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha}}$$

CHE CONVERGE SOLO SE $\alpha < 1$

QUINDI PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

L'INTEGRALE DI PARTENZA CONVERGE SOLO E SOLTANTO SE $a < 1$

---

i) $$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^{\alpha}} \, dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^{\alpha}}$$

LA FUNZIONE È POSITIVA IN $[1, +\infty)$

IL PUNTO DA INDAGARE È $+\infty$

PER $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x^{a}} = \frac{1}{x^{a+\frac{1}{3}}}$$

è convergente solo se $a+\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow a < \frac{2}{3}$

quindi per il criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge solo se $a < \frac{2}{3}$

---

d) $$\int_0^4 \frac{(e^x-1)^a}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

Sia

$$f(x) = \frac{(e^x-1)^a}{e^x-e^{-x}}$$

La funzione è positiva per $[0,4]$

Il punto da controllare è 0^+

per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^a}{x+x} = \frac{1}{2x^{1-a}} = \frac{\frac{1}{2}}{x^{1-a}}$$

quindi converge se $1-a<1 \Rightarrow a>0$

QUINDI CONVERGE SE $1-a < 1$, $a > 0$

ALLORA PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE PER $a > 0$

---

e) $$\int_2^{+\infty} \frac{(e^x-1)^a}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{(e^x-1)^a}{e^x-e^{-x}}$$

LA FUNZIONE È POSITIVA IN $[2, +\infty)$

QUINDI È DA VERIFICARE $+\infty$

PER $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{e^{xa}}{e^x} = e^{xa-x} = e^{(a-1)x}$$

QUINDI CONVERGE SE $a-1<0$ OSSIA $a<1$

COSÌ PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE SE $a<1$

f) $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a}\,dx$

SIA

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)^2}{x(x^4-1)^a}$$

LA FUNZIONE È POSITIVA IN $(1,+\infty)$

I PUNTI DA INDAGARE SONO $+\infty$ E 1^+

PER $x\to+\infty$

$$f(x)\sim\frac{x\cdot x^2}{x\cdot x^{4a}}=\frac{x^3}{x^{4a+1}}=\frac{1}{x^{4a-2}}$$

È QUINDI È CONVERGENTE SE $4a-2>1$

OSSIA $a>\frac{3}{4}$

PER $x\to1^+$

$$f(x)\sim\frac{3(x-1)^2}{4^a(x-1)^a}=\overbrace{\frac{3}{4^a}}^{C}\,\frac{1}{(x-1)^{a-2}}$$

QUINDI PER LA CONVERGENZA È NECESSARIO

CHE $\alpha - 2 < 1 \rightarrow \alpha < 3$

ALLORA L'INTEGRALE IN $(1, +\infty)$ È

CONVERGENTE SOLO E SOLTANTO SE

$\frac{3}{4} < \alpha < 1$

---

g) $$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\frac{1}{(1+x^{-1})}}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^{\alpha}}\,dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{(1+x^{-1})}}}{\sqrt[3]{x}\,|\log(x)|^{\alpha}}$$

LA FUNZIONE È POSITIVA IN $(0,1) \cup (1,+\infty)$

I PUNTI DA CONTROLLARE SONO 0^+, 1, $+\infty$

PER $x \rightarrow 0^+$

$$f(x) \sim \frac{1 - e^{-1}}{x^{\frac{1}{3}}\,|\log(x)|^{\alpha}}$$

QUINDI DATO CHE $\frac{1}{3} < 1$

LA CONDIZIONE DI CONVERGENZA PER UN INTORNO DI 0^+ È SODDISFATTA PER OGNI a

PER $x \to 1$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{1+x^2}}}{\cancel{\sqrt[3]{x}}\,|\log(1+(x-1))|^a} \sim \frac{1 - e^{\frac{1}{2}}}{|x-1|^a}$$

QUINDI LA CONDIZIONE DI CONVERGENZA PER UN INTORNO DI 1 È SODDISFATTA PER $a<1$

PER $x \to \infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{1}{1+x^2}}{x^{\frac{1}{3}}|\log(x)|^a} \sim \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}}|\log(x)|^a} =$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{7}{3}}|\log(x)|^a}$$

Dato che $\frac{7}{3} > 1$ la condizione

è soddisfatta per ogni α

In conclusione l'integrale improprio

converge se e solo se $\alpha < 1$

---

d) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin(x)\left(1-\sin(x)\right)}}{\tan^2(x)\cdot\cos(x)}\,dx$$

Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)\left(1-\sin(x)\right)}}{\tan^2(x)\cdot\cos(x)}$$

La funzione è positiva in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

I punti da controllare sono 0^+ e $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

Per $x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

QUINDI PER LA CONVERGENZA $\alpha < \frac{3}{2}$

PER $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, $t = \frac{\pi}{2} - x \to 0^+$,

$\sin(x) = \cos(t)$, $\cos(x) = \sin(t)$

$\tan(x) = \frac{1}{\tan(t)}$

E

$$f(x) \sim \frac{(1-\cos(t))^{\frac{1}{2}}}{\tan^{-\alpha}(t)\sin^{2}(t)} \sim \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{t^{-\alpha+2}} =$$

$$= \frac{\frac{t}{\sqrt{2}}}{t^{-\alpha+2}} = \frac{(\sqrt{2})^{-1}}{t^{-\alpha+1}}$$

PER LA CONVERGENZA $-\alpha+1<1 \Rightarrow \alpha>0$

COSÌ L'INTEGRALE DATO È CONVERGENTE

SE E SOLO SE $0<\alpha<\frac{3}{2}$

---

b) $\int^{\frac{\pi}{2}}$

b) $$\int_{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x)-1)^a}\,dx$$

Sia

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x)-1)^a} = \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)^a(\tan(x)-1)^a}$$

La funzione è positiva in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

I punti da controllare sono $\left(\frac{\pi}{4}\right)^+$ e $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

Per $x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^+$

$t = \frac{\pi}{4} - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{1}{2^a(2t)^a} = \frac{\frac{1}{4^a}}{t^a}$$

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + o\left(x-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \boxed{1} + \boxed{2t} + o(t)$$

Per la convergenza $a < 1$

Per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

si ha che: $t = \frac{\pi}{2} - x \to 0^+$,

$$\tan(x) = \frac{1}{\tan(t)} \sim \frac{1}{t} \quad e$$

$$f(x) \sim \frac{t^{-1}}{(t^{-2}-1)^a} \sim \frac{1}{t \cdot t^{-2a}} = \frac{1}{t^{-2a+1}}$$

Per la convergenza $-2a+1 < 1 \to a > 0$

Quindi l'integrale improprio converge solo e soltanto se

$0 < a < 1$

---

c) $\int^3 \sqrt{x+2} \log(x+2) \, dx$

$$\int_0 \frac{\ldots}{(6+x-x^2)^a}$$

Sia

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}\,\log(x+2)}{(6+x-x^2)^a}=\frac{\log(x+2)}{(3-x)^a\,(x+2)^{a-\frac{1}{2}}}$$

La funzione è positiva in $[0,3)$

Il punto da controllare è 3^-

Per $x\to 3^-$, $t=3-x\to 0^+$ e

$$f(x)\sim\frac{\log(5)}{t^a\cdot 5^{a-\frac{1}{2}}}=\frac{C}{t^a}$$

L'integrale improprio converge solo e soltanto se $a<1$

d) $$\int_0^1 \frac{|\sin(a\cdot x)-\log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-2)}\,dx$$

Sia

$$f(x)=\frac{|\sin(a\cdot x)-\log(1+2x)|}{\ldots}$$

$$f(x) = \frac{\quad}{x^2(\sqrt{4+x} + \sqrt{x} - 2)}$$

La funzione è positiva in $(0,1]$

quindi il punto da controllare è 0^+

per $x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{|ax + o(x^2) - (2x - 2x^2 + o(x^2))|}{x^2(\cancel{2}(\cancel{1} + \frac{x}{8} + o(x)) + x^{\frac{1}{2}} - \cancel{2})} =$$

$$= \frac{|(a-2)x + 2x^2 + o(x^2)|}{x^2(\frac{x}{4} + o(x) + x^{\frac{1}{2}})}$$

quindi se $a \neq 2$

$$f(x) \sim \frac{2\cancel{x^2}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{x^2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

L'integrale converge solo se $a \neq 2$

---

1) $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\log^2(x)}{\quad} dx$

$$\int_1 \quad (x-1)^{\alpha} \log^5(1+x^4)$$

SIA

$$f(x) = \frac{\log^3(x)}{(x-1)^{\alpha} \log^5(1+x^4)}$$

LA FUNZIONE È CONTINUA IN $(1, +\infty)$

QUINDI I PUNTI DA ANALIZZARE SONO

1^+ E $+\infty$

PER $x \to 1^+$, $t = 1-x \to 0$

$$f(x) \sim \frac{\log^3(t+1)}{(t)^{\alpha} \log^5(2)} = \frac{t^3}{t^{\alpha}} \cdot C = \frac{C}{t^{\alpha-3}}$$

PER LA CONVERGENZA $\alpha - 3 < 1$ OSSIA $\alpha < 4$

PER $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\log^3(x)}{x^{\alpha} \log^5(x^4)} = \frac{\log^3(x)}{x^{\alpha} \cdot x^5 \cdot \log^5(x)} = \frac{1}{x^{\alpha+5} \cdot \log^2(x)}$$

PER LA CONVERGENZA $\alpha + 5 \geq 1$ OSSIA $\alpha \geq -4$

QUINDI L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE SE

E SOLTANTO SE $-4 \leq \alpha < 4$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^\alpha \log^2(1+x^3)}\, dx$$

SIA

$$f(x) = \frac{\arctan(x^8)}{x^\alpha \log^2(1+x^3)}$$

ALLORA LA FUNZIONE È POSITIVA IN

$(0, +\infty)$. I PUNTI DA INDAGARE SONO

0^+ E $+\infty$

PER $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^8}{x^\alpha \cdot (x^3)^2} = \frac{1}{x^{\alpha+6-8}} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

QUINDI CONVERGE SOLO SE $\alpha - 2 < 1$

ossia solo se $\alpha < 3$

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha} \log^2(x)} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha} \cdot 9 \cdot \log^2(x)} =$$

$$= \frac{\pi}{18} \cdot \frac{1}{x^{\alpha} \log^2(x)}$$

Quindi converge solo se $\alpha \geq 1$

Allora l'integrale improprio converge solo e soltanto se $1 \leq \alpha < 3$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^2(x))^{\alpha}}$$

Sia

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{(1-\cos^2(x))^a}$$

ALLORA LA FUNZIONE È POSITIVA IN

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. QUINDI IL PUNTO DA INDAGARE

È 0^+

PER $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{x^2}{\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right)^a} = \frac{x^2}{\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{x^2}{2}\right)^a} =$$

$$= \frac{x^2}{x^{2a}} \cdot 2 = 2 \cdot \frac{1}{x^{2a-2}}$$

QUINDI L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE

SOLO E SOLTANTO SE $2a-2<1$ OSSIA

SE $a < \frac{3}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \left(\sqrt{\quad (x)}\right.$$

$$\int_0 \frac{\arctan\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}{\sin^a(2x)\sqrt{\cos(x)}}\,dx$$

Sia

$$f(x) = \frac{\arctan\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}{\sin^a(2x)\sqrt{\cos(x)}}$$

Allora la funzione è positiva in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Quindi i punti da indagare sono 0^+ e $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$

Per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{\arctan\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{(2x)^a} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2^a \cdot x^a} =$$

$$= \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{x^{a-\frac{1}{2}}}$$

QUINDI PER LA CONVERGENZA $a - \frac{1}{2} < 1$,

OSSIA $a < \frac{3}{2}$

PER $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, $t = \frac{\pi}{2} - x \to 0^+$

E $\quad x = \frac{\pi}{2} - t$

$$f(x) \sim \frac{\arctan(\sqrt{1})}{\sin^a(\pi - 2t)\sqrt{\sin(t)}} \sim \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin^a(2t)\cdot t^{\frac{1}{2}}} \sim$$

$$\sim \frac{\frac{\pi}{4}}{(2t)^a \cdot t^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{4\cdot 2^a} \cdot \frac{1}{t^{a+\frac{1}{2}}}$$

QUINDI PER LA CONVERGENZA

$a + \frac{1}{2} < 1$, OSSIA $a < \frac{1}{2}$

QUINDI L'INTEGRALE CONVERGE SOLO E

SOLTANTO SE $a < \frac{1}{2}$

N°8

$$\int_1 \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cdot \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx$$

con $a = \frac{1}{2}$

Sia

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cdot \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Allora la funzione è positiva in $(1, +\infty)$ e i punti da indagare sono 1^+ e $+\infty$

Per $x \to 1^+$, $t = 1 - x \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{1}{t^a} \cdot \log\left(\frac{1+t}{t}\right) =$$

$$= \frac{1}{t^a} \cdot \log(1+t) - \log(t) \sim$$

$$\sim \frac{1}{t^a} \cdot (-\log(t)) = -\frac{1}{t^a \cdot \log^{-1}(t)}$$

Per la convergenza $a < 1$

Per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{1}{x^a} \cdot \lg^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{x^a} \cdot \left(-\lg\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{x^a} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^{a+1}}$$

Per la convergenza $a+1 < 1$ ossia $a < 0$

Quindi l'integrale converge solo e soltanto se $0 < a < 1$

Ora se $a = \frac{1}{2}$ si ha

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\ldots} \cdot \lg\left(\frac{x}{\ldots}\right) dx$$

$$\int_1 \frac{}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots (x-1)$$

Si $s = \sqrt{x-1}$, $ds = \frac{dx}{2x} \rightarrow 2s\,ds = dx$

Si ha ch:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \lg\left(\frac{x}{x-1}\right)dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \lg\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)(2\cancel{s}\,ds) =$$

$\sqrt{x-1}$

$\sqrt{1-1}$

$\sqrt{0}$

$$= 2\int_0^{+\infty} \lg\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} 1 \cdot \lg\left(1+\frac{1}{s^2}\right) ds =$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$= 2\left[s \cdot \lg\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]^{+\infty} - 2\int^{+\infty} s \cdot \frac{(-2s^{-3})}{} ds =$$

$$\left[s \log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right]_0 \quad \int_0 \quad \frac{\ }{1+\frac{1}{s^2}}$$

$$= 2\left(\lim_{s\to+\infty} \overbrace{\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)}_{\to 1}}^{\to 0} - 0\right) + 4\int_0^{+\infty} \frac{\cancel{s^2}}{\frac{s^2+1}{\cancel{s^2}}}\, ds =$$

$$= 0 + 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\, ds = 4\Big[\arctan(s)\Big]_0^{+\infty} =$$

$$= 4\left(\lim_{s\to+\infty} \arctan(s) - 0\right) = 4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2a-1}}{(4x-x^2)^{a}}\, dx$$

sia

$$f(x) = \frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2a-1}}{(4x-x^2)^{a}}$$

LA FUNZIONE E' POSITIVA PER $(0, 4)$,

QUINDI I PUNTI DA INDAGARE SONO 0^+ E 4^-

PER $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{5 \cdot x^{2\alpha-1}}{(4x)^{\alpha}} = \frac{5}{4^{\alpha}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-2\alpha+1}} = \frac{C}{x^{-\alpha+1}}$$

PER LA CONVERGENZA $-\alpha+1<1$ OSSIA

$\alpha>0$

PER $x \to 4^-$, $t = 4 - x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{\left(5+3\sqrt{4-t}\right)\left(\arctan(4-t)\right)^{2\alpha-1}}{\left(4(4-t)-(4-t)^2\right)^{\alpha}} \sim$$

$$\sim \frac{5 \cdot (4-t)^{2\alpha-1}}{4^{\alpha} \cdot (4-t)^{\alpha} - (4-t)^{2\alpha}} = \frac{5 \cdot (4-t)^{2\alpha-1}}{\cancel{(4-t)^{\alpha}}\left(4^{\alpha} - (4-t)^{\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{5 \quad (4-t)^{\alpha-1}}{4^{\alpha} - (4-t)^{\alpha}} = \frac{5}{4^{\alpha}(4-t)^{-\alpha+1} - (4-t)^{\alpha-\alpha+1}} =$$

CAVOLATA

$$= \frac{5}{(4-t)\left(4^a (4-t)^{-a} - 1\right)} \sim \frac{C}{t^a}$$

PER LA CONVERGENZA $a < 1$

QUINDI L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE

SOLO E SOLTANTO SE $0 < a < 1$

SE $a = \frac{1}{2}$ ALLORA

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})\left(\cosh(x)\right)^0}{(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx =$$

$$= \int_0^4 \frac{5+3\sqrt{x}}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx =$$

$t = \sqrt{x}$, $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \rightarrow 2t\,dt = dx$

$$= \int_0^2 \frac{5+3t}{\sqrt{4t^2-t^4}}\,2t\,dt = 2\int_0^2 \frac{t(5+3t)}{\cancel{|t|}\sqrt{4-t^2}}\,dt =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{5+3t}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$$

$$t = 2\sin(s) \quad , \quad dt = 2\cos(s)\, ds$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+6\sin(s)}{\sqrt{4-4\sin^2(s)}}\, 2\cos(s)\, ds =$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+6\sin(s)}{\cancel{2}\sqrt{1-\sin^2(s)}}\, \cos(s)\, ds =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+6\sin(s)}{\sqrt{\cos^2(s)}} \cdot \cos(s)\, ds =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5+6\sin(s)}{\cos(s)} \cdot \cancel{\cos(s)}\, ds =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5+6\sin(s)\, ds =$$

$$\int_0$$

$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\,dy + 10\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy =$$

$$= -12\left[\cos(y)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 10\left[y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -12\left(0 - 1\right) + \overset{5}{\cancel{10}}\left[\frac{\pi}{\cancel{2}} - 0\right] =$$

$$= 12 + 5\pi$$

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}$$

a) $$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6}x)\cdot x^{\alpha}}{x\sqrt{x}\,\left(\log(3+x^4)\right)^2}$$

NELL'INTERVALLO $(0, +\infty)$ I PUNTI DA INDAGARE

SONO 0^+ E $+\infty$

PER $x \to 0^+$

$$\frac{\arctan(\sqrt{6x})\cdot x^{a}}{x\sqrt{x}\,(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\sqrt{6x}\cdot x^{a}}{x\sqrt{x}\,\log^2(3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\cdot \cancel{x^{\frac{1}{2}}}\cdot x^{a}}{x\cdot \cancel{x^{\frac{1}{2}}}\cdot \log^2(3)} \sim \frac{\sqrt{6}}{x^{1-a}}$$

PER LA CONVERGENZA $1-a<1$ OSSIA $a>0$

PER $x \to +\infty$

$$\frac{\arctan(\sqrt{6x})\cdot x^{a}}{x\sqrt{x}\,(\log(3+x^4))^2} \sim \frac{\frac{\pi}{2}\cdot x^{a}}{x\cdot\sqrt{x}\cdot 8\log^2(x)} =$$

$$= \frac{C}{x^{1+\frac{1}{2}-a}\cdot \log^2(x)} = \frac{C}{x^{\frac{3}{2}-a}\cdot \log^2(x)}$$

PER LA CONVERGENZA $\frac{3}{2}-a \geq 1$

OSSIA $a \leq \frac{1}{2}$

DUNQUE L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE

SOLO CI SOLTANTO SE $0 < \alpha \leq \frac{1}{7}$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}}\,dx$

SIA

$t = \sqrt{6x}$, $x = \frac{t^2}{6}$, $dx = \frac{t\,dt}{3}$ è

$$\int_{\frac{1}{6}}^{+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{6x})}{x\sqrt{x}} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{\frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{6}}\sqrt{\frac{t^2}{6}}}\,\frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{3}} =$$

$$= 2\sqrt{6}\int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt =$$

$$= 2\sqrt{6}\int_{1}^{+\infty} \arctan(t)\,d\left(-\frac{1}{t}\right) =$$

$$= 2\sqrt{6}\left(\left[\frac{-\arctan(t)}{\ }\right]^{+\infty} + \int^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,d(t)\right) =$$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+Bt^2+Ct}{t(t^2+1)} \to$$

$$At^2 + A + Bt^2 + Ct = 1$$

$$(A+B)t^2 + Ct + A = 1$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ C = 0 \\ A+B = 0 \end{cases} \to \begin{cases} A = 1 \\ C = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t^2+1)}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1\cdot t+0}{t^2+1}\,dt =$$

allora

$$= \sqrt{6}\left(\left[\frac{-\arctan(t)}{t}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt\right) =$$

$$= 2\sqrt{6}\left(-0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2\sqrt{6}\left(\frac{\pi}{4} + \left[\ln|t|\right]_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\left[\ln(t^2+1)\right]_1^{+\infty}\right) =$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(b^2+1)\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(b^2+1)\right) - \left(\ln(1) - \frac{1}{2}\ln(2)\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(b^2+1)\right) + \frac{\ln(2)}{2} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\ln\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \right) \right) + \frac{\ln(2)}{2} =$$

$$= 0 + \frac{\ln(2)}{2}$$

QUINDI

$$2\sqrt{6} \left(\frac{\pi}{4} + \Big[\ln(t) \Big]_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \Big[\ln(t^2+1) \Big]_1 \right) =$$

$$= \cancel{2}\sqrt{6} \left(\frac{\pi}{\cancel{4}_2} + \frac{\ln(2)}{\cancel{2}} \right) = \sqrt{6} \left(\frac{\pi}{2} + \ln(2) \right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-x)\,(\tan(x))^a}{x^{\frac{2}{2}}\,(1-\tan(x))^{a-1}}\,dx$$

NELL' INTERVALLO $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ CI SONO 2 PUNTI

DA INDAGARE: 0^+ E $\left(\frac{\pi}{4}\right)^-$

Per $x \to 0^+$

$$\frac{(1-x)\,(\tan(x))^{a}}{x^{\frac{3}{2}}\,(1-\tan(x))^{a-1}} \sim \frac{x^{a}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}-a}}$$

Per la convergenza $\frac{3}{2}-a<1$ ossia

$a > \frac{1}{2}$

Per $x \to \left(\frac{\pi}{4}\right)^-$, $t = \frac{\pi}{4} - x \to 0$