ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 11

MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE

Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D$ e $x_0 \in A$.

x_0 si dice PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO di f in A
se $\quad \forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$
ossia $\max\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

x_0 si dice PUNTO DI MASSIMO RELATIVO di f in A
se $\exists r > 0 : \ \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \leq f(x_0)$.

x_0 si dice PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO di f in A
se $\quad \forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$
ossia $\min\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

x_0 si dice PUNTO DI MINIMO RELATIVO di f in A
se $\exists r > 0 : \ \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0)$.

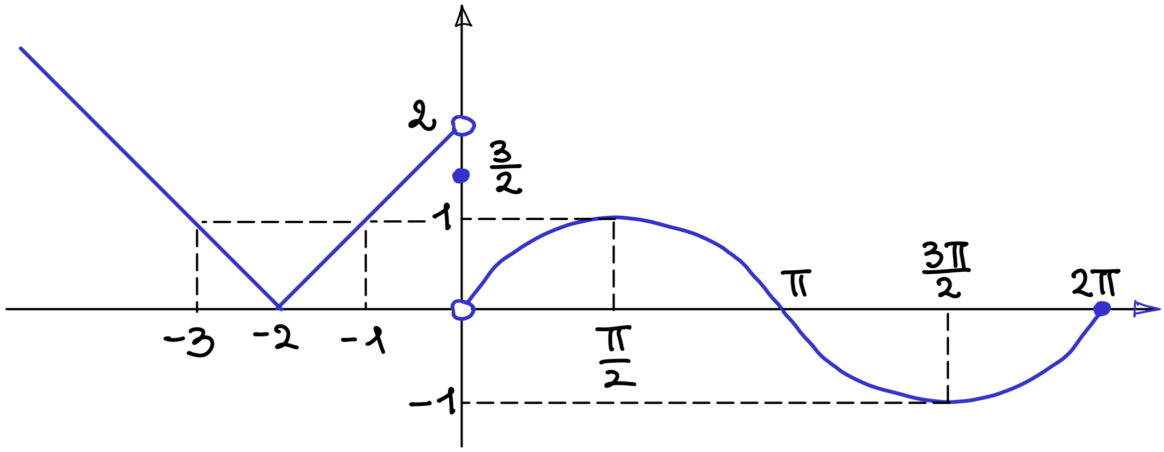
ESEMPIO

Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{se } x \in (0, 2\pi] \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = 0 \\ |x+2| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è definita in $D = (-\infty, 2\pi]$ e continua in $D \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0 \neq f(0) = \frac{3}{2}.$$



Se $A = D = (-\infty, 2\pi]$

i punti di max. relativo di f in A sono $\frac{\pi}{2}$ e 2π;

in A non ci sono punti di max. assoluto di f perché

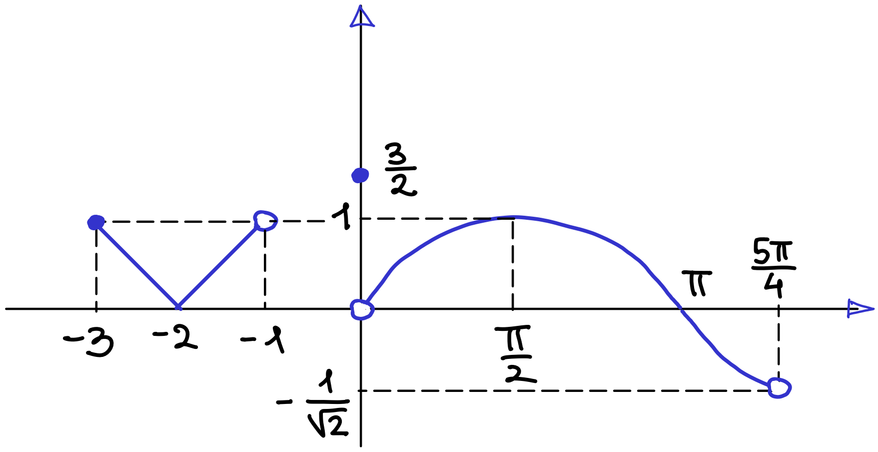
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \ ;$$

i punti di min. relativo di f in A sono -2 e $\frac{3\pi}{2}$;

in A c'è un punto di min. assoluto di f ed è $\frac{3\pi}{2}$ perché

$$\forall x \in (-\infty, 2\pi] \quad f(x) \geq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$ VALORE MINIMO

Se $A = [-3, -1) \cup [0, \frac{5\pi}{4})$ allora



punti di max. relativo di f in A: $-3, 0, \frac{\pi}{2}$;

0 è un punto di max. assoluto di f in A; VALORE MASSIMO $3/2$

punti di min. relativo di f in A: -2;

non ci sono punti di min. assoluto di f in A.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=0$ allora x_0 si dice PUNTO STAZIONARIO.

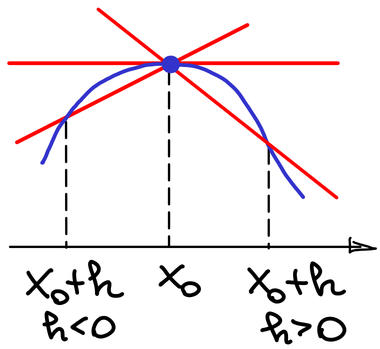
$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DI FERMAT)

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di max o min. relativo di f in (a,b).
Se f è derivabile in x_0 allora $f'(x_0)=0$ ossia x_0 è un punto stazionario.

dim. Caso x_0 punto di max. relativo.
Per definizione di punto di max. relativo
$\exists r>0$ tale che $(x_0-r, x_0+r) \subseteq (a,b)$ — x_0 è INTERNO ad (a,b)
e $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$ $f(x) \leq f(x_0)$. — x_0 è un punto di max relativo

Allora il segno del rapporto incrementale in x_0 è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} \underbrace{\left(\dfrac{\leq 0}{+}\right)}_{}^{\leq 0} & \text{se } h>0 \\ \left(\dfrac{\leq 0}{-}\right)_{\geq 0} & \text{se } h<0 \end{cases}$$



Quindi dato che f è derivabile in x_0, per la permanenza del segno

$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \\ f'(x_0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0$$

$\square$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (2ª PARTE)

TEOREMA (DI BOLZANO - WEIERSTRASS)

Se $\{x_n\}_n$ è una successione limitata allora $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

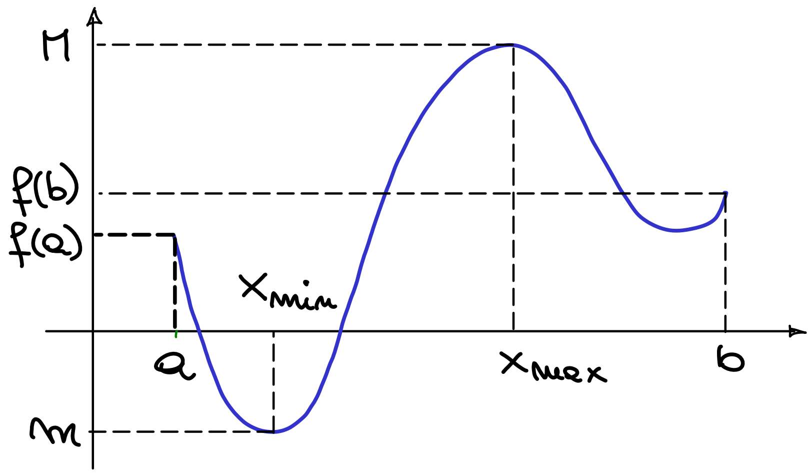
TEOREMA (DI WEIERSTRASS)

INSIEME COMPATTO

Se f è una funzione continua in $[a,b]$ allora $\exists\, x_{min} \in [a,b]$ e $\exists\, x_{max} \in [a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

ossia x_{min} è un punto di minimo assoluto e x_{max} è un punto di massimo assoluto di f in $[a,b]$.



OSSERVAZIONE Se f è continua in $[a,b]$ allora per il teo. dei valori intermedi e il teo. di Weierstrass f assume TUTTI i valori tra il valore massimo $M = f(x_{max})$ e il valore minimo $m = f(x_{min})$: $f([a,b]) = [m, M]$.

dim. Esistenza di x_{max} (per x_{min} è simile).

Sia $M = \sup\{ f(x) : x \in [a,b] \} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Per le proprietà dell'estremo superiore:

1) Se $M = +\infty$ allora $\forall n \in \mathbb{N}^+ \ \exists x_n \in [a,b]$
 tale che $f(x_n) > n$.

2) Se $M \in \mathbb{R}$ allora $\forall n \in \mathbb{N}^+ \ \exists x_n \in [a,b]$
 tale che $M - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\varepsilon > 0} < f(x_n) \leq M$.

Sia in 1) che in 2) si ha che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M \quad (*).$$

Siccome $\{x_n\}_n \subseteq [a,b]$, $\{x_n\}_n$ è limitata e per il teo. di Bolzano-Weierstrass $\exists$ una sotto-successione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

Chiamiamo x_{max} il suo limite:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_{max}.$$

Dato che $a \leq x_{n_k} \leq b$ anche $x_{max} \in [a,b]$.

Per ipotesi, f è continua in $[a,b]$.

Così, per la continuità di f in $x_{max} \in [a,b]$.

$$M \overset{(*)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \overset{\text{continuità}}{=} f(x_{max})$$

limite sottosuccessione

Si conclude che

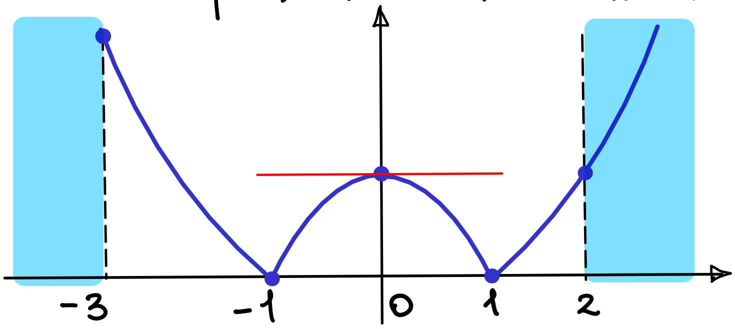
$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq M = f(x_{max}).$$

$\square$

OSSERVAZIONE Se f è continua in $[a,b]$ allora per individuare i punti di max/min assoluti in $[a,b]$ è necessario confrontare i valori di f nei punti stazionari interni (per il teo. di Fermat), negli estremi a e b e nei punti dove f non è derivabile (dove il teo. di Fermat non è applicabile).

ESEMPIO

Sia la funzione $f(x)=|x^2-1|$ in $[-3,2]$.



f è continua in $[-3,2]$ e $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } |x|>1 \\ -2x & \text{se } |x|<1 \end{cases}$

f non è derivabile in $x=1$ e $x=-1$ e l'unico punto stazionario è $x=0 \in (-3,2)$.

Quindi per individuare i max/min assoluti di f in $[-3,2]$ basta confrontare i valori

$$\underbrace{f(0)=1}_{\text{punto stazionario}}, \quad \underbrace{f(-3)=8, \ f(2)=3}_{\text{estremi di } [-3,2]}, \quad \underbrace{f(1)=f(-1)=0}_{\text{punti di non derivabilità}}$$

Così il punto di max. assoluto è $x=-3$ e i punti di minimo assoluto sono $x=1$ e $x=-1$.

$x=0$ e $x=2$ sono punti di max. relativo.