1) a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+4\log\left(1+2^{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

Per $x\to+\infty$

$$\frac{3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+4\log\left(1+2^{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=$$

$$=\frac{3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+4\log\left(2^{x}\left(2^{-x}+1\right)\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+4\log\left(2^{x}\right)+\log\left(2^{-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+4\log(2)\cancel{x}+\log\left(2^{-x}+1\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)}$$

$$= \frac{3\,\frac{\log(1+x)}{x} + 4\log(2) + \frac{\log(2^{x}+1)}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}$$

$$\to \frac{3\cdot 0 + 4\log(2) + 0}{1+1} = 2\log(2)$$

2) d)

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-4|+6 & \text{se } x<3 \\ ax & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} |x^2-4|+6 = \lim_{x\to 3^+} ax = f(3)$$

QUINDI

$$5+6 = 3a$$

IL RAM. DESTRO HA 2 PUNTI DI NON DERIVABILITÀ, OSSIA I PUNTI ANGOLOSI $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

$$f'_-(-2) = -4, \quad f'_+(-2) = -4, \quad f'_-(2) = -4$$

$f_+(2) = 4$

AFFINCHÉ f SIA DERIVABILE IN $x=3$, È NECESSARIO CHE LA FUNZIONE SIA CONTINUA IN $x=3$, OSSIA $3a = 5+b$ E

$$\boxed{a} = f'_+(3) = f'_-(3) = 2 \cdot 3 = \boxed{6}$$

QUINDI,

$$3 \cdot (6) = 5+b \rightarrow 18 = 5+b \rightarrow \boxed{b = 13}$$

QUINDI f È DERIVABILE IN 3 SE E SOLO SE $a = 6$ E $b = 13$

b) $$f(x) = \begin{cases} 2\arcsin(x) & \text{SE } x \in [-1, 1] \\ ax + bx^2 & \text{SE } x \in (1, 2) \\ \sqrt{|x-3|} & \text{SE } x \in [2, 4] \end{cases}$$

CONTINUITÀ

LA FUNZIONE È CONTINUA NEGLI INTERVALLI

FUNZIONE È CONTINUA NELL'INTERVALLO

$[-1,1] \cup (1,2) \cup [2,4]$.

IN $x=1$ AFFINCHÉ SIA CONTINUA DEVO AVERE CHE

$$\lim_{x\to 1^-} 2\arcsin(x) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$=$$

$$\lim_{x\to 1^+} ax+bx^2 = a+b$$

E QUINDI $a+b=\pi$

IN $x=2$ PER LA CONTINUITÀ DOBBIAMO AVERE CHE

$$\lim_{x\to 2^-} ax+bx^2 = 2a+4b$$

$$=$$

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{|2-3|} = 1$$

E QUINDI CHE $2a+4b=1$

DERIVABILITÀ

La derivata di $2\arcsin(x)$ è

$\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ che non è definita in $x = \pm 1$

e quindi in tali punti f non è derivabile.

In $x=1$ la derivata destra è $a+2b$

quindi $x=1$ è un punto angoloso.

Nel punto $x=2$ per la derivabilità

è necessario che $2a+4b=1$ e

$$f'_-(2) = a+4b = f'_+(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2}$$

quindi

$$\begin{cases} 2a+4b=1 \\ a+4b = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} - 2b \\ 4b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} - 2b \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ \ldots \end{cases}$$

$\left(b = -\frac{\ }{4} = -\frac{\ }{4} \right. \qquad \left(b = -\frac{1}{2} \right.$

QUINDI f È DERIVABILE IN 2 SOLO E SOLTANTO SE $a = \frac{3}{4}$ E $b = -\frac{1}{2}$

INFINE IN $x=3$ LA FUNZIONE HA UN PUNTO DI NON DERIVABILITÀ, OSSIA UN PUNTO DI CUSPIDE

$$f'_-(3) = -\infty \quad e \quad f'_+(3) = +\infty$$

---

3) a) $$f(x) = \frac{\log(x)}{2^x + x^2}$$

DETERMINARE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO $(1, f(1))$

$$f'(x) = \frac{(\log(x))' \cdot (2^x + x^2) - \log(x) \cdot (2^x + x^2)'}{(2^x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (2^x + x^2) - \log(x) \cdot \left(\left(e^{x \log(2)}\right)' + 2x \right)}{(2^x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{(2^x + x^2) - \log(x) \cdot (2^x \cdot \log(2) + 2x)}{x (2^x + x^2)^2}$$

E QUINDI

$$f'(1) = \frac{2+1 - 0 \cdot (2 \cdot \log(2) + 2)}{1 \cdot (2+1)^2} =$$

$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

E

$$f(1) = \frac{\log(1)}{2+1} = \frac{0}{3} = 0$$

ALLORA LA RETTA TANGENTE CERCATA È

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 0 =$$

$$y = \frac{x-1}{3}$$

b) $$f(x) = \frac{\pi^2 \sqrt{3+e^x}}{\arctan(x+1)}$$

DETERMINARE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO NEL PUNTO $(0, f(0))$

$$f'(x) = \frac{(\pi^2\sqrt{3+e^x})' \cdot \arctan(x+1) - (\pi^2\sqrt{3+e^x}) \cdot (\arctan(x+1))'}{(\arctan(x+1))^2} =$$

$$= \frac{\pi^2\left(\left(3+e^x\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot \arctan(x+1) - (\pi^2\sqrt{3+e^x}) \frac{1}{1+(x+1)^2}}{(\arctan(x+1))^2} =$$

$$= \frac{\frac{\pi^2}{2\sqrt{3+e^x}} \cdot e^x \cdot \arctan(x+1) - \frac{\pi^2\sqrt{3+e^x}}{1+(x+1)^2}}{} =$$

$$\left(\arctan(x+1)\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{\arctan^2(x+1)} \cdot \left(\frac{e^x \arctan(x+1)}{2\sqrt{3+e^x}} - \frac{\sqrt{3+e^x}}{1+(x+1)^2} \right)$$

quindi

$$f'(0) = \frac{\pi^2}{\frac{\pi^2}{16}} \cdot \left(\frac{1 \cdot \frac{\pi}{4}}{2 \cdot 2} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+1}} \right) =$$

$$= \cancel{16} \cdot \left(\frac{\pi}{\cancel{16}} - 1 \right) = \pi - 1$$

e

$$f(0) = \frac{\pi^{\cancel{2}} \sqrt{4}}{\frac{\cancel{\pi}}{4}} = 8\pi$$

Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(0)(x-1) + f(0) = (\pi - 1)(x-1) + 8\pi$$

4) a) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(x)}$

Dominio:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad D = (0, +\infty)$$

Limiti

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}\log(x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\log(x)} = e^{0} = 1$$

Quindi $y = 1$ è l'asintoto per $x \to +\infty$

Monotonia

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\log(x)}{x}}\right)' = e^{\frac{\log(x)}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log(x) \cdot 1}{} =$$

x^2

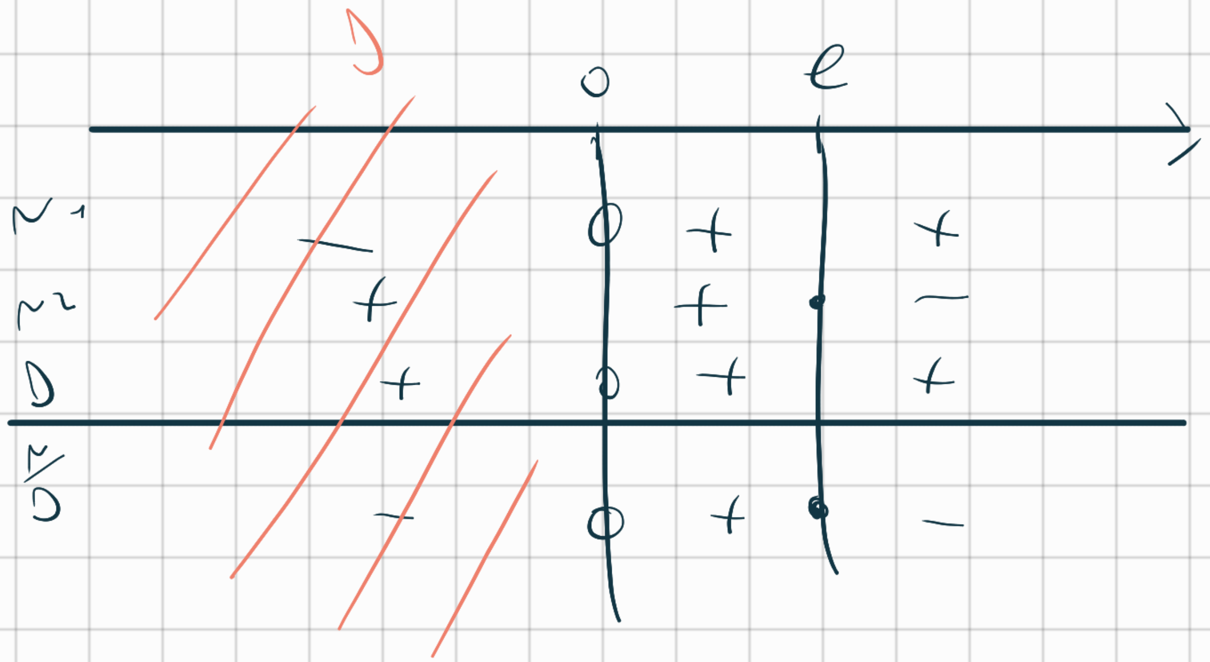
$$= \frac{x^{\frac{1}{x}}\left(1-\log(x)\right)}{x^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \to \frac{x^{\frac{1}{x}}\left(1-\log(x)\right)}{x^2} \geq 0$$

N1: $x^{\frac{1}{x}} \geq 0 \to x \in (0, +\infty)$

N2: $\log(x) \leq 1 \to x \leq e$

D: $x^2 > 0 \to x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



f è crescente in $(0, e]$ e

decrescente in $[e, +\infty)$

MASSIMI E MINIMI

$x = e$ è un punto di massimo assoluto

non ci sono punti di minimo relativo

GRAFICO

b) $f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$

Dominio

$$D = \mathbb{R}$$

Asintoti

I limiti agli estremi sono

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{e^{\infty}} \cdot +\infty = 0$$

Quindi $y=0$ è l'asintoto per $x \to \pm\infty$

Monotonia

$$f'(x) = \left(e^{-x^2}(-2x)\right) \cdot \left(x^4 - 3x^2 + 1\right) + \left(e^{-x^2} \cdot \left(4x^3 - 6x \cdot 1\right)\right)$$

$$= e^{-x^2}\left((-2x)(x^4 - 3x^2 + 1) + 4x^3 - 6x \cdot 1\right) =$$

$$= e^{-x^2}\left(-2x^5 + 6x^3 - 2x + 4x^3 - 6x + 1\right) =$$

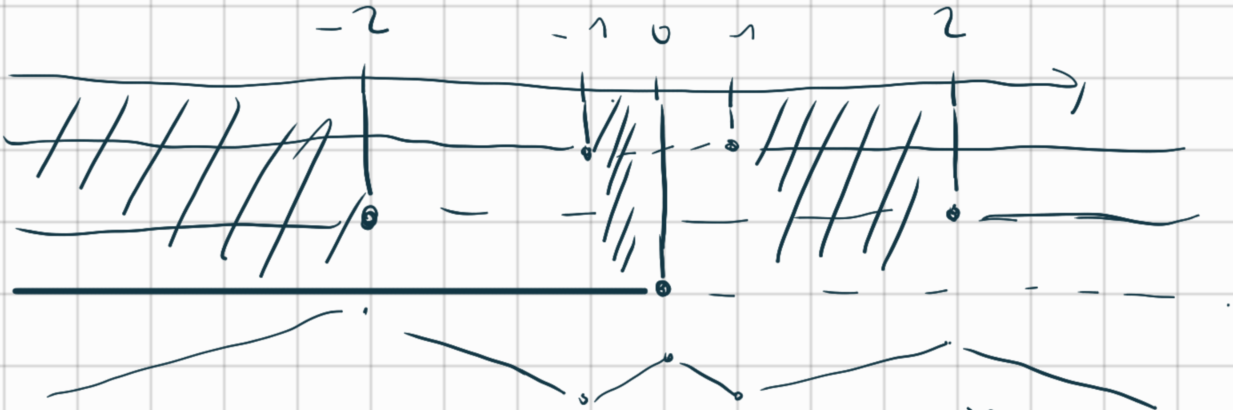
$$= e^{-x^2}\left(-2x^5 + 10x^3 - 8x\right) =$$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot \left(x^4 + 5x^2 - 4\right) =$$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (x^2-1)(x^2-4)$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \to e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (x^2-1)(x^2-4) \geq 0$$



Quindi f è crescente in $(-\infty, -2]$, $[-1, 0]$ e $[1, 2]$,

è decrescente in $[-2, -1]$, $[0, 1]$, $[2, +\infty)$

<u>minimo e massimo</u>

$$f(-1) = e^{-1}(1-3+1) = -\frac{1}{e}$$

$$f(1) = e^{-1}(1-3+1) = -\frac{1}{e}$$

$x = \pm 1$ è un punto di minimo assoluto

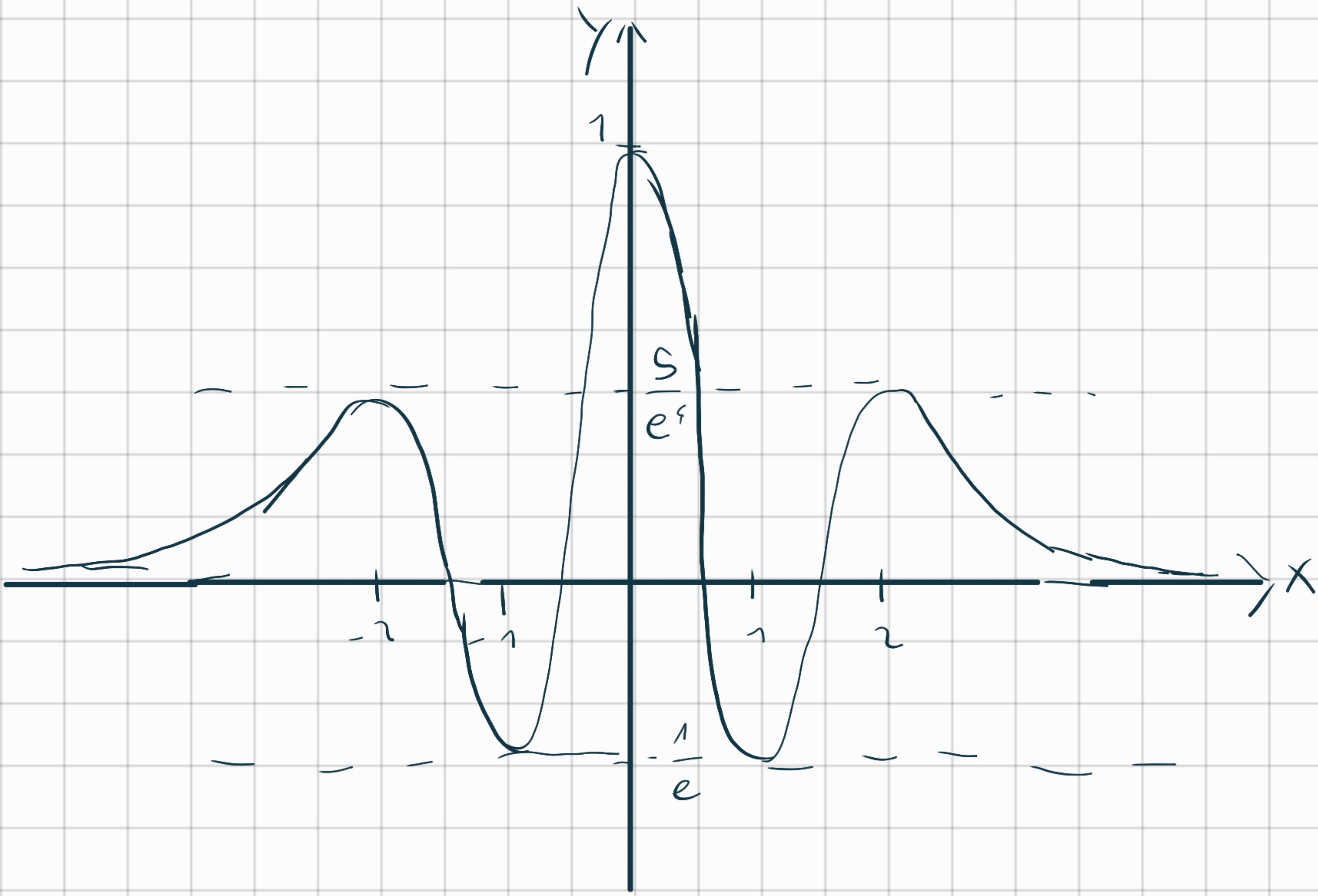
$$f(-2) = e^{-4}(16-12+1) = \frac{5}{e^4}$$

$$f(2) = \frac{5}{e^4}$$

$$f(0) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$X = \pm 2$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

$X = 0$ È UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO



5) a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{1-x}$

Dominio

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2) \leq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} [0, 2] \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$D = [0, 1) \cup (1, 2]$$

Monotonia

La funzione è derivabile in $(0,1) \cup (1,2)$

$$f'(x) = \left[(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' \cdot (1-x) - \left[\sqrt{2x-x^2} \cdot -1\right] -$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\over{(1-x)^2}$$

$$= \frac{\frac{2-2x}{2\left(\sqrt{2x-x^2}\right)} \cdot (1-x) + 2x - x^2}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2x - 2x + 2x^2}{2\left(\sqrt{2x-x^2}\right)(1-x)^2} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(x^2 - 2x + 1\right)}{\cancel{2}\left(\sqrt{2x-x^2}\right)(1-x)^2} + \frac{\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{x^2 \cancel{-2x} + 1 + 2x \cancel{-x^2}}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)(1-x)^2} =$$

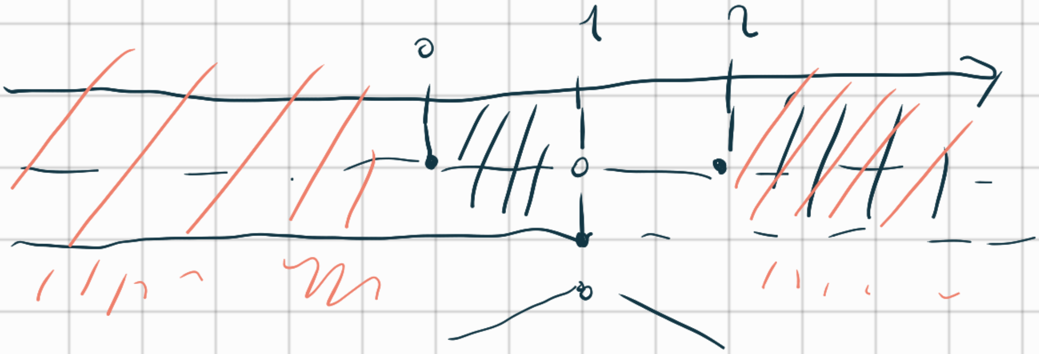
$$= \frac{1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)(1-x)^2}$$

$f' \qquad 1$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{\quad}{(\sqrt{2x-x^2})(1-x)^2} \geq 0$$

$$D1: \sqrt{2x-x^2} \geq 0 \Rightarrow 2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow [0,1) \cup (1,2]$$

$$D2: (1-x)^2 \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$



La funzione cresce in $[0,1)$

e decresce in $(1,2]$

Massimi - minimi

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{4-4}}{1-4} = 0$$

$$f(1) =$$

CONCAVITÀ - CONVESSITÀ

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^2} \right)' =$$

$$= \frac{\cancel{0 \cdot \left[(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} (x-1)^2\right]} - 1 \cdot \left[(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^2\right]'}{\left[(2x-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x-1)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x-1)^2}{2\sqrt{2x-x^2}} + \left(\sqrt{2x-x^2} \cdot 2(x-1)\right)}{(2x-x^2) \cdot (x-1)^4} =$$

$$\frac{\dfrac{(x-1)^2+\left(1\cdot(2x-x^2)\cdot 4(x-1)\right)}{2\sqrt{2x-x^2}}}{(2x-x^2)\cdot(x-1)^5} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\cdot\left((x-1)+(16x-8x^2)\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2x-x^2}\right)\left(2x-x^2\right)(x-1)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{8x^2+17x-1}{2\cdot}$$