$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{K})$$

a) Per determinare il rango di A riduco a scala la matrice nei due casi di $\mathbb{K}$.

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{Q}}$

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} =: S$$

Essendo che S è equivalente ad A

$$rg(S) = 4 = rg(A)$$

$\boxed{\text{Caso } \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5}$

Qui possiamo utilizzare la stessa matrice a scala ottenuta nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, con l'unica differenza che il quarto pivot in

R_5 DIVENTA 0, POICHÉ LA DIVISIONE DI 10 PER 5 DA RESTO 0.
QUINDI

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(D) = 3 = rg(A)$$

b) PER DETERMINARE SE LA MATRICE È INVERTIBILE IL $\det(A)$ DEVE ESSERE DIVERSO DA 0.

$\boxed{\text{CASO } \mathbb{K} = \mathbb{Q}}$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$ SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA 3° RIGA

$$= (1) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$ SVILUPPO DI LAPLACE LUNGO LA 2° RIGA

$$= (1)\cdot(-1)^{5}\cdot(-1)\cdot(+1)^{2+2}\cdot \det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(1)\cdot\left[(4\cdot 3)-((-2)\cdot(-1))\right] =$$

$$= 12-2 = 10 \neq 0$$

QUINDI A È INVERTIBILE IN $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$.

PER TROVARE L'INVERSA CONSIDERO LA MATRICE 4×8 $(A|I_4)$, E RIDUCO A SCALA PRIMA IN AVANTI E POI ALL'INDIETRO

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{10} & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{4}{10} \end{array}\right) =: \left(I_4 \,/\, A^{-1} \right)$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Caso } \mathbb{K} = \mathbb{Z}_5}$

Dato che A in $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ non ha rango massimo, infatti $rg(A) = 3 < 4 = \dim(\mathbb{Z}_5^4)$, e quindi non è invertibile.

Per calcolare il nucleo considero
omogeneo

IL SISTEMA È GIÀ RIDOTTO A SCALA $\circledast': Dx = 0$

CHE HA LO STESSO INSIEME DI SOLUZIONI DEL SISTEMA OMOGENEO $\circledast$ $Ax = 0$. QUINDI

$$\circledast': \begin{cases} -x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 3t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}_s)$$

QUINDI IL NUCLEO DI A È

$$\ker(A) = \{(3t, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}_s\}$$

---

4)

$$M := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

a) PER DETERMINARE SE $-3, -1, 0, 2, 3, 4$ SONO AUTOVALORI DI M, TROVO IL POLINOMIO CARATTERISTICO DI M.

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 & -6 \\ 5 & -3-\lambda & -5 \\ \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \big((6-\lambda)\cdot(-3-\lambda)\cdot(-4-\lambda)\big) + \big((-3)\cdot(-5)\cdot(4)\big) + \big((-6)\cdot 5\cdot(-3)\big) -$$

$$- \big((-6)\cdot(-3-\lambda)\cdot 4\big) - \big((-3)\cdot 5\cdot(-4-\lambda)\big) - \big((6-\lambda)\cdot(-5)\cdot(-3)\big) =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 30\lambda \cancel{+72} \cancel{+60} \cancel{+90} \cancel{-72} - 24\lambda \cancel{-60} \cancel{-18\lambda} -$$

$$\cancel{-90} \cancel{+15\lambda} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 6) =$$

$$= -\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)$$

Quindi

$$P_M(\lambda) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-2)$$

Perciò per verificare se $-3, -1, 0, 2, 3, 4$ sono autovalori, verifico se sono radici di $P_M(\lambda)$

- $P_M(-3) = 3(0)(-5) = 0 \rightarrow \lambda_1 = -3$ è autovalore
- $P_M(-1) = 1(2)(-3) \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1$ non è autovalore
- $P_M(0) = 0\cdot(3)(-2) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ è autovalore
- $P_M(2) = -2(5)(0) = 0 \rightarrow \lambda_4 = 2$ è autovalore
- $P_M(3) = -3(6)(1) \neq 0 \Rightarrow \lambda_5 = 3$ non è autovalore
- $P_M(4) = -4(7)(2) \neq 0 \Rightarrow \lambda_6 = 4$ non è autovalore

In conclusione

$$Sp(M) = \{-3, 0, -2\}$$

b) Dato che M ha 3 autovalori distinti, avrà anche 3 autospazi di dimensione 1, la cui somma coincide con l'ordine della matrice. Quindi M è diagonalizzabile

---

2)
$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V := Span(v_1, v_2, v_3, v_4)$$
$$W := Span(v_1, v_2, v_3, v_4, w)$$

a) Per determinare il rango di A

considero la matrice $A := (v_1 | v_2 | v_3 | v_4)$ che

ha per colonne i 4 vettori generatori di V.

Per trovare la dimensione di V riduco a scala

$$A_{V'} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{V'}$$

Dalla teoria si sa che

$$\dim(V') = rg(A_{V'}) = rg(S_{V'})$$

Quindi

$$\dim(V') = 3 = rg(S_{V'}) = rg(A_{V'})$$

b) Per determinare $\dim(W)$ procedo come in a) considerando la matrice

$$A_{W} := (v_1|v_2|v_3|v_4|w) := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_w$$

Quindi

$$\dim(W) = rg(A_w) = rg(S_w) = 3$$

c) Come visto nel punto a), i pivot si trovano nelle prime 3 colonne, quindi

$$B(V') = \{v_1, v_2, v_3\}$$

d) Come visto nel punto b), i pivot si trovano nelle prime 3 colonne, quindi

$\mathcal{B}(W) = \{v_1, v_2, v_3\}$

e)

Dai dati si ha che $V' \subseteq W$ e si è visto che $\dim(V') = \dim(W)$, quindi $V' = W$ e quindi $w \in W = V'$, concludendo w appartiene al sottospazio V'.

Per determinare un'equazione esplicita di w come combinazione lineare dei 4 vettori v_1, v_2, v_3, v_4 abbiamo bisogno di 4 scalari $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = w$$

Quindi risolvere il sistema

$$(*) : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

La cui matrice completa è $\hat{M}$

CHE HA LO STESSO INSIEME DI SOLUZIONI

DELLA MATRICE S_w. QUINDI

$$(*)': \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_3 + 12x_4 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2t = 4 \\ 4x_3 + 12t = 4 \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{C}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 2(1-3t) + 5 \\ 2x_2 = 4 - 2t - 2(1-3t) \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{C}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3(1+2t) - 2 + 6t + 5 \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{C}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{C})$$

$$\begin{cases} x_3 = 1-3t \\ x_4 = t \end{cases}$$

QUINDI L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (*) È

$$\{(0, 1+2t, 1-3t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

PERCIÒ LE ESPRESSIONI DI w COME COMBINAZIONI LINEARI DI v_1, v_2, v_3, v_4 SONO TUTTE DELLA FORMA

$$w = (1+2t)v_2 + (1-3t)v_3 + t v_4 \quad (\forall t \in \mathbb{C})$$

---

3)

$$C: \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 8x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

$$P: \begin{cases} x_1 = h+3k+1 \\ x_2 = -3h-5k+2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h+4k-1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R})$$

a) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE LA DIMENSIONE DEI SOTTOSPAZI DESCRITTI TRAMITE EQ. CARTESIANE È:

$$\dim(C) = \dim(V_C) = \dim(\ker(A)) = n - rg(A)$$

DOVE A È LA MATRICE DEI COEFFICIENTI

DI C

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 20 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

QUINDI

$$\dim(C) = 2$$

b) SAPPIAMO DALLA TEORIA CHE LA DIMENSIONE DEI SOTTOSPAZI DESCRITTI TRAMITE EQ. PARAMETRICHE È IL NUMERO DI PARAMETRI PRESENTI.

QUINDI $\dim(P) = 2$

c) POSSIAMO OTTENERE DELLE EQ. PARAMETRICHE SOSTITUENDO ALLE EQ. CARTESIANE DI C I VALORI DELLE VARIABILI NELLE EQ. PARAMETRICHE DI P.

$$C \cap P : \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \\ x \quad = h + 3k + \dots \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h + 3k + 1 - 4(-2k) - 2(2h + 4k - 1) = 3 \\ 5(h + 3k + 1) - (-3h + 5k + 2) - 3(2h + 4k - 1) = 6 \\ \vdots \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h + 3k + \cancel{1} + \cancel{8k} - 4h - \cancel{8k} + \cancel{2} = \cancel{3} \\ 5h + 15k + 5 - 3h - 5k - 2 - 6h - 12k + 3 = 6 \\ \vdots \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3h + 3k = 0 \\ 2h - 2k = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h = k = t \\ h = k = t \\ x_1 = t + 3t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -3t + 5t + 2 \\ x_3 = -2t \\ x_4 = 2t + 4t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4t + 1 \\ x_2 = 2t + 2 \\ x_3 = -2t \\ x_4 = 6t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

QUINDI

$$C \cap P : \begin{cases} x_1 = 4t + 1 \\ x_2 = 2t + 2 \\ x_3 = -2t \\ x_4 = 6t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c) DATO CHE L'EQ. PARAMETRICHE DI $C \cap P$ HA 1 PARAMETRO, ALLORA

$$\dim(C \cap P) = 1$$