

An introductory examination of the Finite Element Method

10. Juni, 2024

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

PDE og grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

2 Basis om PDE

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

$$f(x) = c(x)u + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)u_{x_i x_k}$$

Elliptisk i x , hvis $A(x)$ er positiv definit

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

3

Basis om PDE

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Lad $m \geq 0$ være et heltal, så er $H^m(\Omega)$

$$H^m(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L_2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Homogene Dirichlet Grænsebetingelser



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

4

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

$$\begin{aligned}Lu &= f && \text{in } \Omega \\u &= 0 && \text{on } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Minimal egenskab



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

5 Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Lad en elliptisk PDE være givet, og lad a_{ik} være indgangene i den positivt definite matrix A for PDE'en. Alle klassiske løsninger af grænseværdi betingelsen givet ved

$$-\sum_{i,k} \partial_i(a_{ik} \partial_k u) + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (2)$$

er en løsning til variational problemet givet ved

$$J(v) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - f v \right] dx \longrightarrow \min,$$

blandt alle funktioner i $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ med nul grænse værdier.

Lad L være en anden ordens uniformt elliptisk differential operator. Så har det homogene Dirichlet problem altid en svag løsning i $H_0^1(\Omega)$. Det er et minimum af variational problemet

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_0 \rightarrow \min \quad (3)$$

på $H_0^1(\Omega)$.

Den uniforme ellipticitet medfører følgende punktvis estimat

$$\sum_{i,k} a_{ik} \partial_i v \partial_k v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2,$$

for $C^1(\Omega)$ funktioner. Ved at følge de samme tætheds argumenter som i beviset for Friedrichs ulighed, er $C^1(\Omega)$ tæt i $H^1(\Omega)$, og derfor er alle $u \in H^1(\Omega)$ repræsenteret i $C^1(\Omega)$, og dermed kan den tidligere antagelse generaliseres til $H^1(\Omega)$.

Ved at integrere begge sider og anvende $a_0 \geq 0$ får vi

$$a(v, v) \geq \alpha \sum_i \int_{\Omega} (\partial_i v)^2 dx = \alpha |v|_1^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (4)$$

Vi ved fra Friedrichs ulighed at $|\cdot|_1$ og $\|\cdot\|_1$ er ækvivalente normer på H_0^1 , hvilket medfører at a er en H^1 -elliptisk bilinear form på $H_0^1(\Omega)$. Fra Lax-Milgram findes der en entydig svag løsning til variational problemet, som også er en løsning til variations problemet.

An introductory examination of the Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

7

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Neumann Grænsebetingelser



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

8

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Lad $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ være den afledede af normalen. Så er
Neumann grænsebetingelsen givet ved

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (5)$$

Neumann Grænsebetingelser



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark

Lad Ω være begrænset, have en stykkevis glat rand, og opfylde cone condition. Lad $f \in L_2(\Omega)$ og $g \in L_2(\partial\Omega)$. Der eksisterer en entydig $u \in H^1(\Omega)$ som løser variational problemet

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_{0,\Omega} - (g, v)_{0,\partial\Omega} \rightarrow \min.$$

Ydermere, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ hvis og kun hvis en klassisk løsning af

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{in } \Omega, \\ \sum_{i,k} \mathbf{n}_i a_{ik} \partial_k u &= g & \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

eksisterer, og i så fald er de to løsninger de samme. Her er \mathbf{n} den udadgående normal på $\partial\Omega$, defineret næsten overalt.

Finite Element Method

General Idea



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

10 Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

- ▶ Partition the domain Ω .
- ▶ Define subspace with finite dimension S_h .

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

11

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Ud fra $H^m(\Omega)$ or $H_0^m(\Omega)$ definer et endeligt underrum

- ▶ Splicing functions over each cell.
- ▶ Edge restrictions.
- ▶ Solve the variational problem over S_h .

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v) \rightarrow \min_{S_h}. \quad (7)$$

- ▶ Solution $u_h \in S_h$,

$$a(u_h, v) = \ell(v) \quad \forall v \in S_h. \quad (8)$$

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

12

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

- ▶ Let $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ be a basis for S_h
- ▶ $a(u_h, \psi_i) = \ell(\psi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$
- ▶ $\sum_{k=1}^N z_k a(\psi_k, \psi_i) = \ell(\psi_i) \quad i = 1, 2, \dots, N$

$$Az = b$$

Sammenhæng mellem H^k og C^{k-1}



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

13

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Theorem

Let $k \geq 1$ and suppose Ω is bounded. Then a piecewise infinitely differentiable function $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to $H^k(\Omega)$ if and only if $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$.

Vi begrænser os til \mathbb{R}^2 og starter med $k = 1$. Antag $v \in C^0(\bar{\Omega})$.
Lad $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi w_i dx dy &= \sum_j \int_{T_j} \phi \partial_i v dx dy \\ &= \sum_j \left(- \int_{T_j} \partial_i \phi v dx dy + \int_{\partial T_j} \phi v n_i ds \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Hvilket resulterer i:

$$\int_{\Omega} \phi w_i dx dy = - \int_{\Omega} \partial_i \phi v dx dy. \quad (10)$$

- Antag $v \in H^1(\Omega)$
- Roter kanten så vi ligger på y -aksen
- Definer $[y_1 - \delta, y_2 + \delta]$, $y_1 < y_2$ på kanten

Definer

$$\psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} v(x, y) dy. \quad (11)$$

$c \in C^\infty(\Omega)$

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)|^2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \partial_1 v dx dy \right|^2 \quad (12)$$

$$\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} 1 dx dy \right|^2 \cdot |v|_{1,\Omega}^2 \quad (13)$$

$$\leq |x_2 - x_1|^2 \cdot |y_2 - y_1|^2 \cdot |v|_{1,\Omega}^2, \quad (14)$$

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

16 Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

A finite element is a triple (T, Π, Σ) which has the following properties:

1. $T \subset \mathbb{R}^d$ is a polyhedron
2. $\Pi \subset C(T)$ with finite dimension s
3. Σ is a set of s linearly independent functionals on Π . Every $p \in \Pi$ is uniquely defined by the values of the s functionals in Σ .

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

17 Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

- ▶ Why do we need a Reference Finite Element?
- ▶ Let $(T_{\text{ref}}, \Pi_{\text{ref}}, \Sigma_{\text{ref}})$ be a finite element with $T_{\text{ref}} \in \mathcal{T}$ for some admissible partition of Ω , and F an affine transformation. Assume that for $T_i \in \mathcal{T}$ the following is true for the corresponding finite element (T_i, Π_i, Σ_i) :

- ▶ $F(T_{\text{ref}}) = T_i$
- ▶ $\{f \circ F \mid f \in \Pi_i\} = \Pi_{\text{ref}}$
- ▶ $\{s(f \circ F) \mid f \in \Pi_i, s \in \Sigma_{\text{ref}}\} = \Sigma_i$

If the previous equalities are true for all $T_i \in \mathcal{T}$ we call $(T_{\text{ref}}, \Pi_{\text{ref}}, \Sigma_{\text{ref}})$ the finite reference element.

Eksempel på konstruktion



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

1. Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, og \mathcal{T} være en admissible partition for trekanter
2. Lad $t > 0$ og $\Pi = \mathcal{P}_t$ for alle finite elements
3. Placer $s = (t + 1)(t + 2)/2$ punkter, med $t + 1$ på hver kant

Kontinuitet vs. differentiabilitet

18

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

19 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Theorem

Let $t \geq 2$, and suppose \mathcal{T}_h is a shape-regular triangulation of Ω . Then there exists a constant c such that

$$\|u - I_h u\|_{m,h} \leq c h^{t-m} |u|_{t,H^t(\Omega)}, \quad \forall u \in H^t(\Omega), \quad 0 \leq m \leq t,$$

where $I_h u$ denotes the interpolation by a piecewise polynomial of degree $t - 1$.

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

20 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse
Plot af fejl

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^k &= \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ for alle } T \in \mathcal{T}_h\} \cap C^0(\Omega) \\ &= \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ for alle } T \in \mathcal{T}_h\} \cap H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Theorem

Suppose \mathcal{T}_h is a family of shape-regular triangulation of Ω .
Then the finite element approximation $u_h \in S_h = \mathcal{M}_0^k$, $k \geq 1$
satisfies

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq ch\|u\|_2 \\ &\leq ch\|f\|_0.\end{aligned}\tag{15}$$

Theorem

Let H be a Hilbert space with norm $|\cdot|$ and a scalar product (\cdot, \cdot) . Let $V \subset H$ be a Hilbert space for another norm $\|\cdot\|$, let the imbedding $V \hookrightarrow H$ be continuous, and $\forall g \in H$, let $\varphi_g \in V$ denote the unique weak solution to

$$a(w, \varphi_g) = (g, w) \quad \forall w \in V. \quad (16)$$

Here $a(\cdot, \cdot)$ is a bilinear continuous form. Then the finite element solution $u_h \in S_h \subset V$ obeys

$$|u - u_h| \leq C \|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\| \right\},$$

where \sup is over all $g \in H$ such that $|g| \neq 0$.

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann

Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

22 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse
Plot af fejl

Undersøg finite element solution

$$\begin{aligned}a(u, v) &= f(v) \quad \forall v \in V, \\a(u_h, v) &= f(v) \quad \forall v \in S_h\end{aligned}$$

\Downarrow

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in S_h$$

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

23 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

$$\begin{aligned}(g, u - u_h) &= a(u - u_h, \varphi_g) \\ &= a(u - u_h, \varphi_g - v) \\ &\leq C \|u - u_h\| \cdot \|\varphi_g - v\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|u - u_h| &= \sup_{g \in H} \frac{(g, u - u_h)}{|g|} \\ &\leq C \|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\| \right\}.\end{aligned}$$

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet
Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

24 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

Theorem

Assume \mathcal{T}_h is a family of shape regular triangulations of Ω . If $u \in H^1(\Omega)$ is the solution of the variational problem, then

$$\|u - u_h\|_0 \leq cCh \|u - u_h\|_1.$$

If $f \in L_2(\Omega)$ and $u \in H^2(\Omega)$, then

$$\|u - u_h\|_0 \leq cC^2 h^2 \|f\|_0.$$

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

25 Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl

$$H = H^0(\Omega) = L_2(\Omega) \quad \text{and} \quad V = H_0^1(\Omega).$$

$$|\cdot| = \|\cdot\|_0 \quad \text{and} \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_1,$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq C \|u - u_h\|_1 \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\|_1 \right\},$$

Opstilling af problem



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

26 Numerisk Analyse

Plot af fejl

$$k(x, y) = e^{x+y} \cos(x) \sin(y) + x \quad \text{on } \Omega$$

$$\begin{aligned} Lu &= -\operatorname{div} \nabla k && \text{on } \Omega \\ u &= k && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Domæne



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

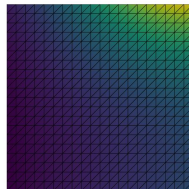
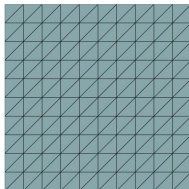
Finite Elements

Konstruktion

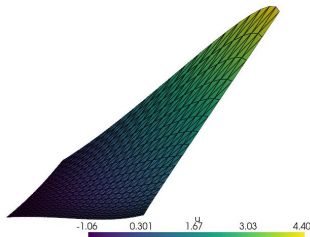
Teoretiske fejl

27 Numerisk Analyse

Plot af fejl



-1.06 0.301 1.67 3.03 4.40



-1.06 0.301 1.67 3.03 4.40

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark

Brug af L_2



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

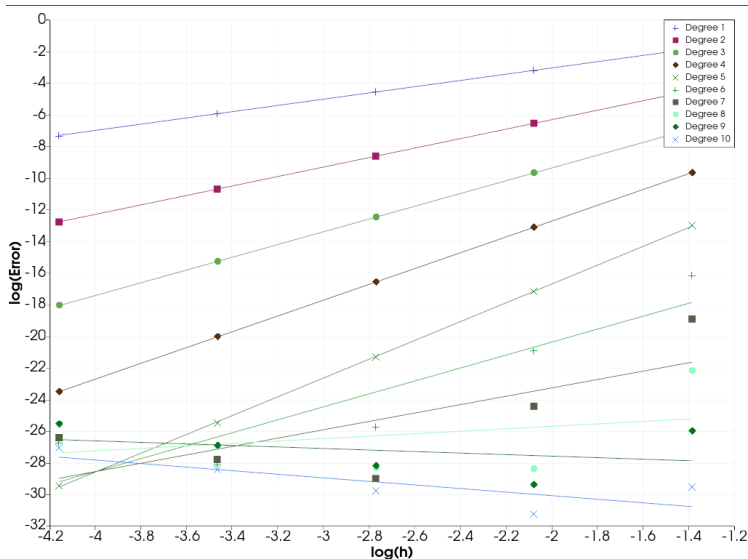
Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl



28

29

Brug af H^1



AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

An introductory
examination of the
Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og
grænsebetingelser

Basis om PDE

Dirichlet

Neumann

Finite Element Method

Opdeling

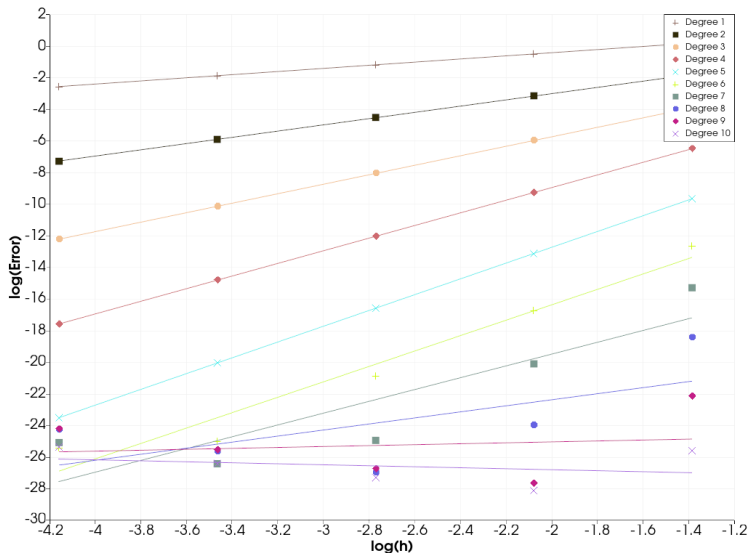
Finite Elements

Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse

Plot af fejl



29

29