An introductory examination of the Finite Element Method

10. Juni, 2024

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

Agenda

PDE og grænsebetingelser
- Basis om PDE
- Dirichlet
- Neumann

Finite Element Method
- Opdeling
- Finite Elements
- Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse
- Plot af fejl

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Basis om PDE

$$f(x) = c(x)u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)u_{x_i x_k}$$

Elliptisk i x, hvis $A(x)$ er positiv definit

PDE og grænsebetingelser
2 Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Sobolev rum

Lad $m \geq 0$ være et heltal, så er $H^m(\Omega)$

$$H^m(\Omega) = \{f \in L_2(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L_2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Jacob Engberg, Patrick Guldberg, William Dam

PDE og grænsebetingelser
3 Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Homogene Dirichlet Grænsebetingelser

AALBORG UNIVERSITY
DENMARK

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

$$
\begin{aligned}
Lu &= f \quad \text{in } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet
Danmark

Minimal egenskab

Lad en elliptisk PDE være givet, og lad a_{ik} være indgangene i den positivt definite matrix A for PDE'en. Alle klassiske løsninger af grænseværdi betingelsen givet ved

$$-\sum_{i,k} \partial_i(a_{ik}\partial_k u) + a_0 u = f \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2}$$

er en løsning til variational problemet givet ved

$$J(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}\partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - fv \right] dx \longrightarrow \min,$$

blandt alle funktioner i $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ med nul grænse værdier.

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
5 Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Eksistens sætning

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Lad L være en anden ordens uniformt elliptisk differential operator. Så har det homogene Dirichlet problem altid en svag løsning i $H_0^1(\Omega)$. Det er et minimum af variational problemet

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v)_0 \rightarrow \min \tag{3}$$

på $H_0^1(\Omega)$.

Eksistens sætning
Bevis

Den uniforme ellipticitet medfører følgende punktvise estimat

$$\sum_{i,k} a_{ik} \partial_i v \partial_k v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2,$$

for $C^1(\Omega)$ funktioner.
Pr tæthedsargumentet er $C^1(\Omega)$ tæt i $H^1(\Omega)$, kan vi generelaisere antagelserne til $H^1(\Omega)$.

$$a(v,v) \geq \alpha \sum_i \int_\Omega (\partial_i v)^2 dx = \alpha |v|_1^2, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \qquad (4)$$

Fra Lax-Milgram findes der en entydig svag løsning til variational problemet.

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam
PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
7 Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Neumann Grænsebetingelser

Lad $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ være den afledede af normalen. Så er Neumann grænsebetingelsen givet ved

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g \quad \text{on } \partial\Omega. \tag{5}$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
8 Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Neumann Grænsebetingelser
Løsning

Lad Ω være begrænset, have en stykkevis glat rand, og opfylde cone condition. Lad $f \in L_2(\Omega)$ og $g \in L_2(\partial\Omega)$. Der eksisterer en entydig $u \in H^1(\Omega)$ som løser variational problemet

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f,v)_{0,\Omega} - (g,v)_{0,\partial\Omega} \to \min .$$

Ydermere, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ hvis og kun hvis en klassisk løsning af

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \sum_{i,k} \mathbf{n}_i a_{ik} \partial_k u &= g \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6}$$

eksisterer, og i så fald er de to løsninger de samme. Her er $\mathbf{n}$ den udadgående normal på $\partial\Omega$, defineret næsten overalt.

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
9 Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Finite Element Method
General Idea

- Partition the domain Ω.
- Define subspace with finite dimension S_h.

Jacob Engberg, Patrick Guldberg, William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
10 Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

S_h

Ud fra $H^m(\Omega)$ or $H_0^m(\Omega)$ definer et endeligt underrum

- Splicing functions over each cell.
- Edge restrictions.
- Solve the varational problem over S_h.

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v) \to \min_{S_h} . \tag{7}$$

- Solution $u_h \in S_h$,

$$a(u_h, v) = \ell(v) \quad \forall v \in S_h. \tag{8}$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
11 Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Basisvektorer

- Let $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N\}$ be a basis for S_h
- $a(u_h, \psi_i) = \ell(\psi_i) \quad i = 1, 2, \ldots, N$
- $\sum_{k=1}^{N} z_k a(\psi_k, \psi_i) = \ell(\psi_i) \quad i = 1, 2, \ldots, N$

$$Az = b$$

Sammenhæng mellem H^k og C^{k-1}

An introductory examination of the Finite Element Method

Jacob Engberg, Patrick Guldberg, William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
13 Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Theorem

Let $k \geq 1$ and suppose Ω is bounded. Then a piecewise infinitely differentiable function $v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ belongs to $H^k(\Omega)$ if and only if $v \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$.

Bevis

Vi begrænser os til $\mathbb{R}^2$ og starter med $k = 1$. Antag $v \in C^0(\bar{\Omega})$. Lad $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi w_i dxdy &= \sum_j \int_{T_j} \phi \partial_i v dxdy \\ &= \sum_j \left(-\int_{T_j} \partial_i \phi v dxdy + \int_{\partial T_j} \phi v \mathbf{n}_i ds \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Hvilket resulterer i:

$$\int_\Omega \phi w_i dxdy = -\int_\Omega \partial_i \phi v dxdy. \tag{10}$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Bevis

- Antag $v \in H^1(\Omega)$
- Roter kanten så vi ligger på y-aksen
- Definer $[y_1 - \delta, y_2 + \delta]$, $y_1 < y_2$ på kanten

Definer

$$\psi(x) = \int_{y_1}^{y_2} v(x,y)dy. \tag{11}$$

$v \in C^\infty(\Omega)$

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)|^2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \partial_1 v dx dy \right|^2 \tag{12}$$

$$\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} 1 dx dy \right|^2 \cdot |v|^2_{1,\Omega} \tag{13}$$

$$\leq |x_2 - x_1|^2 \cdot |y_2 - y_1|^2 \cdot |v|^2_{1,\Omega}, \tag{14}$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
15 Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

A finite element is a triple (T, Π, Σ) which has the following properties:

1. $T \subset \mathbb{R}^d$ is a polyhedron
2. $\Pi \subset C(T)$ with finite dimension s
3. Σ is a set of s linearly independent functionals on Π. Every $p \in \Pi$ is uniquely defined by the values of the s functionals in Σ.

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
16 Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Finite Element Method

Reference Finite Element

- Why do we need a Reference Finite Element?
- Let $(T_{\text{ref}}, \Pi_{\text{ref}}, \Sigma_{\text{ref}})$ be a finite element with $T_{\text{ref}} \in \mathcal{T}$ for som admissible partition of Ω, and F an affine transformation. Assume that for $T_i \in \mathcal{T}$ the following is true for the corresponding finite element (T_i, Π_i, Σ_i):
  - $F(T_{\text{ref}}) = T_i$
  - $\{f \circ F \mid f \in \Pi_i\} = \Pi_{\text{ref}}$
  - $\{s(f \circ F) \mid f \in \Pi_i, s \in \Sigma_{\text{ref}}\} = \Sigma_i$

  If the previous equalities are true for all $T_i \in \mathcal{T}$ we call $(T_{\text{ref}}, \Pi_{\text{ref}}, \Sigma_{\text{ref}})$ the finite reference element.

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
17 Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Eksempel på konstruktion

1. Lad $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, og $\mathcal{T}$ være en admissible partition for trekanter
2. Lad $t > 0$ og $\Pi = \mathcal{P}_t$ for alle finite elements
3. Placer $s = (t+1)(t+2)/2$ punkter, med $t+1$ på hver kant

Kontinuitet vs. differentiabilitet

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
18 Konstruktion
Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Teoretisk Fejl

Theorem

Let $t \geq 2$, and suppose $\mathcal{T}_h$ is a shape-regular triangulation of Ω. Then there exists a constant c such that

$$\|u - I_h u\|_{m,h} \leq c h^{t-m} |u|_{t,H^t(\Omega)}, \quad \forall u \in H^t(\Omega), \quad 0 \leq m \leq t,$$

where $I_h u$ denotes the interpolation by a piecewise polynomial of degree $t-1$.

An introductory examination of the Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
19 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

H-regularitet

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^k &= \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ for alle } T \in \mathcal{T}_h\} \cap C^0(\Omega) \\ &= \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ for alle } T \in \mathcal{T}_h\} \cap H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Theorem

Suppose $\mathcal{T}_h$ is a family of shape-regular triangulation of Ω. Then the finite element approximation $u_h \in S_h = \mathcal{M}_0^k$, $k \geq 1$ satisfies

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq ch\|u\|_2 \\ &\leq ch\|f\|_0.\end{aligned} \tag{15}$$

An introductory examination of the Finite Element Method

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
20 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Aubin–Nitsche

Theorem

Let H be a Hilbert space with norm $|\cdot|$ and a scalar product $(\cdot,\cdot)$. Let $V \subset H$ be a Hilbert space for another norm $\|\cdot\|$, let the imbedding $V \hookrightarrow H$ be continuous, and $\forall g \in H$, let $\varphi_g \in V$ denote the unique weak solution to

$$a(w, \varphi_g) = (g, w) \quad \forall w \in V. \tag{16}$$

Here $a(\cdot,\cdot)$ is a bilinear continuous form. Then the finite element solution $u_h \in S_h \subset V$ obeys

$$|u - u_h| \leq C\|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\| \right\},$$

where $\sup$ is over all $g \in H$ such that $|g| \neq 0$.

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
21 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Bevis

Jacob Engberg,
Patrick Guldberg,
William Dam

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
22 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Undersøg finite element solution

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$
$$a(u_h, v) = f(v) \quad \forall v \in S_h$$
$$\Downarrow$$
$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in S_h$$

Bevis

$$
\begin{aligned}
|u - u_h| &= \sup_{g \in H} \frac{(g, u - u_h)}{|g|} \\
&\leq C \|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\| \right\} .
\end{aligned}
$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
23 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Anvendt Aubin-Nitsche

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
24 Teoretiske fejl
Numerisk Analyse
Plot af fejl

Theorem

Assume $\mathcal{T}_h$ is a family of shape regular triangulations of Ω. If $u \in H^1(\Omega)$ is the solution of the variational problem, then

$$\|u - u_h\|_0 \leq cCh\|u - u_h\|_1.$$

If $f \in L_2(\Omega)$ and $u \in H^2(\Omega)$, then

$$\|u - u_h\|_0 \leq cC^2h^2\|f\|_0.$$

Bevis

$$H = H^0(\Omega) = L_2(\Omega) \quad \text{and} \quad V = H_0^1(\Omega).$$

$$|\cdot| = \|\cdot\|_0 \quad \text{and} \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_1,$$

$$\|u - u_h\|_0 \leq C\|u - u_h\|_1 \sup_{g \in H} \left\{ \frac{1}{|g|} \inf_{v \in S_h} \|\varphi_g - v\|_1 \right\},$$

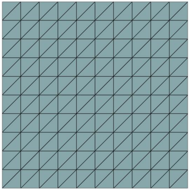
Opstilling af problem

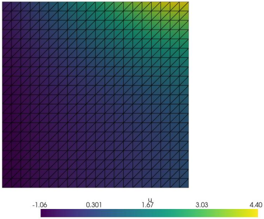
$$k(x, y) = e^{x+y}\cos(x)\sin(y) + x \quad \text{on } \Omega$$

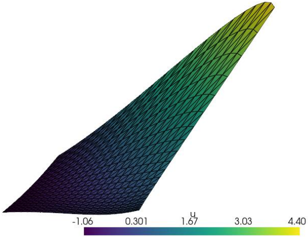
$$\begin{aligned} Lu &= -\operatorname{div} \nabla k && \text{on } \Omega \\ u &= k && \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann
Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion
Teoretiske fejl
26 Numerisk Analyse
Plot af fejl

Domæne







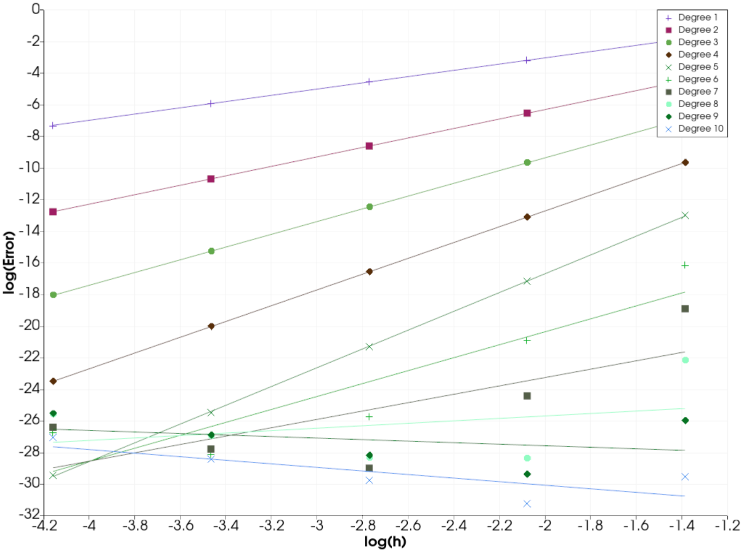
PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann

Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

Teoretiske fejl

27 Numerisk Analyse
Plot af fejl

Brug af L_2



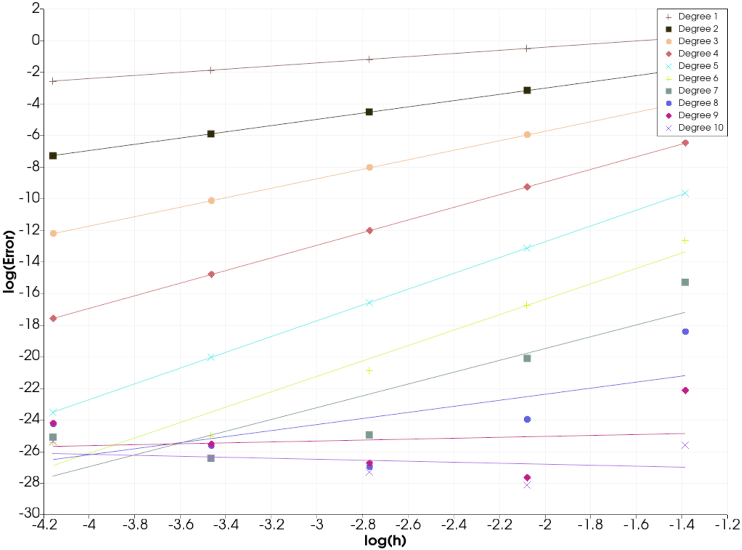
PDE og grænsebetingelser
Basis om PDE
Dirichlet
Neumann

Finite Element Method
Opdeling
Finite Elements
Konstruktion

Teoretiske fejl

Numerisk Analyse
28 Plot af fejl

Brug af H^1


Degree 1
Degree 2
Degree 3
Degree 4
Degree 5
Degree 6
Degree 7
Degree 8
Degree 9
Degree 10
log(Error)
log(h)
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
-22
-24
-26
-28
-30
-4.2
-4
-3.8
-3.6
-3.4
-3.2
-3
-2.8
-2.6
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2