X でバズってた問題

うぃりあむ

2024 年 3 月 31 日

概要

提起された問題は次の通り.
$a+b+c=3, a^2+b^2+c^2=3$ のとき，a, b, c の値を求めよ.
Twitter では種々の証明が見られたため，それをまとめておこうと考えた.

目次

1　解答編

1.1　不等式

今回使用するのは $n = 3$ の場合なので，定理の主張を限定的に述べる．多くの場合は一般の n に拡張しても問題ない．証明は省略している．必要なら各自で適宜参照のこと．

定理 1.1. （相加相乗平均の不等式）正の実数 a, b, c に対して次が成り立つ．

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

等号成立は $a = b = c$ のとき．

証明. （略）

せっかくなので例題.

例 1.2. （北海道大 2021）正の実数 x, y が次を満たすとき，y^2 を x を用いて表せ．

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2}$$

証明. 両辺を 3 をかけて，式を整理すれば,

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{2} = 3^{4x+y^2+1}$$

で相加相乗平均の不等式が常に成立している．したがって，等号成立条件より $3^{4x} = 3^{y^2+1} \iff y^2 = 4x - 1$.

定理 1.3. （コーシーシュワルツの不等式）実数 a, b, c, x, y, z に対して次が成り立つ．

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

等号成立は $a/x = b/y = c/z$ のとき．

証明. （略）

$x = y = z = 1$ とすれば，$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \iff 9 = 9$ となるので常に等号成立．したがって，$a = b = c = 1$ が得られる．

なお，シュワルツの不等式を簡単に変形すれば次の不等式が得られる．

定理 1.4. （Angle form/Titu の不等式）

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

証明． コーシーシュワルツの不等式において $a' = a/\sqrt{x}, x' = \sqrt{x}$ のようにおいて式を整理すればよい．

$x = y = z = 1$ とすれば自明．

定理 1.5. （凸不等式）$a + b + c = 1$ を満たす正の実数 a, b, c と凸な関数 f について，次が成り立つ．

$$af(x) + bf(y) + cf(z) \geq f(ax + by + cz)$$

証明． （略）

$f = x^2$ と取れば，これは凸だから

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \iff 1 = 1$$

より常に等号成立．よって $a = b = c = 1$

凸不等式について別で盛り上がっていたので簡単に図形的解釈を書いておく．いま，二次関数 $f = x^2$ を考えると，3 変数の凸不等式は放物線上の 3 点で作られる三角形の重心 g は常に関数上の点 g' よりも高い位置にあることを指している．図によるイメージは次の通りである．

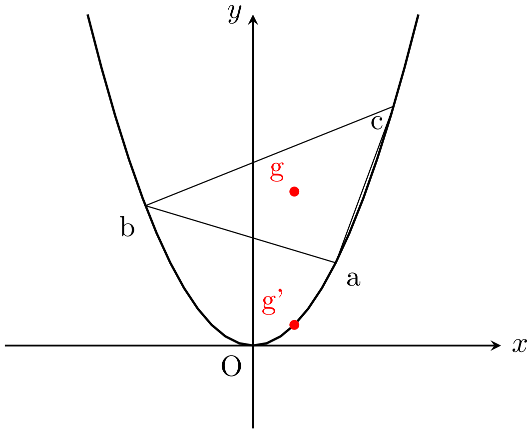

図 1　凸不等式について

以上，有名不等式の利用である．大変勉強になった．

1.2　文字消去

$a + b = 3 - c,\ a^2 + b^2 = 3 - c^2$ のようにして，

$$3 - c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (3-c)^2 - 2ab \iff ab = c^2 - 3c + 3$$

なので解と係数の関係から t に関する 2 次方程式

$$t^2 - (3-c)t + (c^2 - 3c + 3) = 0$$

は a, b という実数解を持つため，判別式 D を考えれば,

$$D = (3-c)^2 - 4(c^2 - 3c + 3) = -3(c-1) \geq 0$$

が成り立つことが必要で，これは $c = 1$ のときに限る．方程式を解けば，ただちに $a = b = c = 1$ が従う．

1.3　式変形

式を単純に変形して

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a + b + c) + 3 \iff (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 0$$

なので $a = b = c = 1$

1.4　図形

いま $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ と $x + y + z = 3$ は，それぞれ原点を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球と，3 点 $(3,0,0), (0,3,0), (0,0,3)$ を通る平面である．

定理 1.6. （平面と点の距離）平面の方程式 $ax + by + cz + d = 0$ と点 (x_0, y_0, z_0) との距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

である．

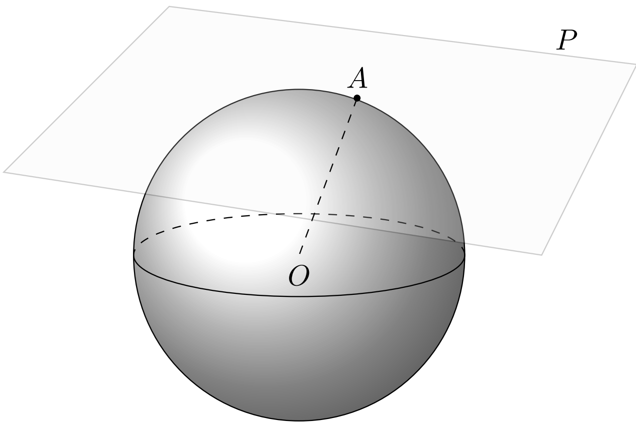

図 2　平面と球

したがって，原点から平面までの距離は $\sqrt{3}$ なのでただ 1 点 $(1,1,1)$ で接する．

2　解釈編

まず，3 次元ベクトル $\mathbf{x} = (a, b, c)$ を考える．

シュワルツの不等式の素朴な解釈として，次が挙げられる．いま $\mathbf{y} = (x, y, z)$ との内積と見做せば，

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos\theta \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}| (\because \cos\theta \leq 1)$$

が得られて，各成分を見れば定理 1.2 の式が得られる．まず，このことから自然にベクトルの内積をとる解法とシュワルツの解法との繋がりが見える．また，統計的な解釈

$$\overline{x^2} - \bar{x}^2 = 0 \iff \sigma_x^2 = 0$$

についても説明がつく．つまり，いま 3 次元のデータ空間は自然に 3 次元ベクトルと対応付けられる ($\mathbb{R}^3$ が実データ集合と言える) ので，その偏差を並べたベクトルを偏差ベクトルと呼ぶ．偏差ベクトル $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ の大きさ（ノルム）は分散そのものである．つまり，このノルムを直接計算して ($ab + bc + ca = 3$ は先の計算の通り)

$$\frac{6(a^2 + b^2 + c^2) - 6(ab + bc + ca)}{9} = 0$$

とわかる．これを効率よく計算したのがますたべ氏の解答であると考えられる．

3　発想編

個人的に納得したことをまとめてみる．

まず問題を見た際に，どのような発想をするのかは個人の自由だが，おおよそ次のように大別できそうだ．

図形的解釈に落とす

平面と球の式をしていると見做せれば，ベクトルや座標などの図形問題を処理する道具が並べられる．

代数的処理に落とす

この問題は対称性が高い問題だと言える．この場合，「対称性を崩して解く」か「対称性を保ったまま解く」ことが考えられる．前者の場合は，文字消去の解法であり，後者は不当式やらの解法であるといえるだろう．

ここまで読んでくださった方には感謝の意を捧げます．