

15.3 - Integrais duplas em coordenadas polares

Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

1. $\iint_D x^2 y \, dA$, D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5 Resposta: $\frac{1250}{3}$
2. $\iint_R (2x - y) \, dA$, R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e pelas retas $x = 0$ e $y = x$ Resposta: $\frac{4(4-3\sqrt{2})}{3}$
3. $\iint_R \sin(x^2 + y^2) \, dA$, R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centros na origem e raios 1 e 3 Resposta: $\frac{[\cos(1) - \cos(9)]\pi}{4}$
4. $\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, dA$, R é a região que fica entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$, com $0 < a < b$ Resposta: $\frac{(b^2 - a^2)\pi}{2}$
5. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} \, dA$, D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e pelo eixo y Resposta: $\frac{(1 - e^{-4})\pi}{2}$
6. $\iint_D \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dA$, D é o disco com centro na origem e raio 2 Resposta: $2\pi[2\sin(2) + \cos(2) - 1]$
7. $\iint_R \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \, dA$, $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ Resposta: $\frac{3\pi^2}{64}$
8. $\iint_D x \, dA$, D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$ Resposta: $\frac{16 - 3\pi}{6}$

Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

9. Um laço da rosácea $r = \cos(3\theta)$ Resposta: $\frac{\pi}{12}$
10. A região limitada por ambos os cardioides $r = 1 + \cos \theta$ e $r = 1 - \cos \theta$ Resposta: $\frac{3\pi - 8}{2}$
11. A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$ Resposta: $\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$
12. A região dentro do cardioide $r = 1 + \cos \theta$ e fora do círculo $r = 3 \cos \theta$ Resposta: $\frac{\pi}{4}$

Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

13. Sob o parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 25$ Resposta: $\frac{625\pi}{2}$

14. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do anel $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ Resposta: $\frac{14\pi}{3}$
15. Abaixo do plano $2x + y + z = 4$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leq 1$ Resposta: 4π
16. Abaixo do parabolóide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy Resposta: 81π
17. Uma esfera de raio a Resposta: $\frac{4\pi a^3}{3}$
18. Limitado pelo parabolóide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante
Resposta: $\frac{9\pi}{4}$
19. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Resposta: $\frac{(2-\sqrt{2})\pi}{3}$
20. Limitado pelos parabolóides $z = 6 - x^2 - y^2$ e $z = 2x^2 + 2y^2$ Resposta: 6π
21. Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$
Resposta: $\frac{64\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$

Referência

STEWART, James. Cálculo: volume 2. 8ª ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016. ISBN 9788522125845.