<u>Cálculo III</u>

Lista 9 - Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

1. $\mathbf{F}(x,y) = (xy + y^2)\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\mathbf{j}$ Resposta: $\nexists f$
2. $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 - 2x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ Resposta: **FAZER**
3. $\mathbf{F}(x,y) = y^2e^{xy}\mathbf{i} + (1 + xy)e^{xy}\mathbf{j}$ Resposta: $f(x,y) = ye^{xy} + C$
4. $\mathbf{F}(x,y) = ye^x\mathbf{i} + (e^x + e^y)\mathbf{j}$ Resposta: **FAZER**
5. $\mathbf{F}(x,y) = (ye^x + \sin y)\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\mathbf{j}$ Resposta: $f(x,y) = ye^x + x\sin y + C$
6. $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2 - 2y^2)\mathbf{i} + (4xy + 3)\mathbf{j}$ Resposta: **FAZER**
7. $\mathbf{F}(x,y) = (y^2\cos x + \cos y)\mathbf{i} + (2y\sin x - x\sin y)\mathbf{j}$ Resposta: $f(x,y) = y^2\sin x + x\cos y + C$
8. $\mathbf{F}(x,y) = \left(\ln y + \dfrac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \left(\ln x + \dfrac{x}{y}\right)\mathbf{j}$ Resposta: $f(x,y) = x\ln y + y\ln x + C$

Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e use esse resultado para calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

9. $\mathbf{F}(x,y) = (3 + 2xy^2)\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$,
   C é o arco da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de $(1,1)$ a $(4, \frac{1}{4})$ Resposta: $f(x,y) = 3x + x^2y^2 + C;\quad 9$
10. $\mathbf{F}(x,y) = x^2y^3\mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j}$,
    $C : \mathbf{r}(t) = \langle t^3 - 2t,\, t^3 + 2t\rangle,\quad 0 \le t \le 1$ Resposta: $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{3} + C;\quad -9$
11. $\mathbf{F}(x,y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$,
    C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1,2)$ a $(2,8)$ Resposta: **FAZER**
12. $\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$,
    C é o segmento de reta de $(1,0,-2)$ a $(4,6,3)$ Resposta: $f(x,y,z) = xyz + z^2 + C;\quad 77$
13. $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z + 2xz^2)\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z)\mathbf{k}$,
    $C : x = \sqrt{t},\quad y = t + 1,\quad z = t^2,\quad 0 \le t \le 1$ Resposta: $f(x,y,z) = xy^2z + x^2z^2 + C;\quad 5$
14. $\mathbf{F}(x,y,z) = yze^{xz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + xye^{xz}\mathbf{k}$,
    $C : \mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k},\quad 0 \le t \le 2$ Resposta: $f(x,y,z) = ye^{xz} + C;\quad 4$
15. $\mathbf{F}(x,y,z) = \sin y\mathbf{i} + (x\cos y + \cos z)\mathbf{j} - y\sin z\mathbf{k}$,
    $C : \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ Resposta: $f(x,y,z) = x\sin y + y\cos z + C;\quad 1 - \frac{\pi}{2}$

Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule-a.

16. $\displaystyle\int_C \tan y\,dx + x\sec^2 y\,dy$, C é qualquer caminho de $(1,0)$ a $(2, \frac{\pi}{4})$ Resposta: **FAZER**

17. $\displaystyle\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$, C é qualquer caminho de $(0,1)$ a $(1,2)$ Resposta: **FAZER**

Referência

STEWART, James. Cálculo: volume 2. 8ª ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016. ISBN 9788522125845.