Cálculo III

Lista 7 - Mudança de variáveis em integrais múltiplas

Utilize a transformação dada para calcular a integral.

1. $\displaystyle\iint_R (x-3y)\,dA$, R é a região triangular com vértices $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$;
$T(x,\,y) = (2u+v,\,u+2v)$ Resposta: -3

2. $\displaystyle\iint_R (4x+8y)\,dA$, R é o paralelogramo com vértices $(-1,3)$, $(1,-3)$, $(3,-1)$ e $(1,5)$;
$T(x,\,y) = (\frac{u-v}{4},\,\frac{v-3u}{4})$ Resposta: 192

3. $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, R é a região limitada pela elipse $9x^2+4y^2=36$;
$T(x,\,y) = (2u,\,3v)$ Resposta: 6π

4. $\displaystyle\iint_R (x^2-xy+y^2)\,dA$, R é a região limitada pela elipse $x^2-xy+y^2=2$;
$T(x,\,y) = (u\sqrt{2}-v\sqrt{\frac{2}{3}},\,u\sqrt{2}+v\sqrt{\frac{2}{3}})$ Resposta: $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$

5. $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y=x$ e $y=3x$ e pelas hipérboles $xy=1$ e $xy=3$; $T(x,\,y) = (\frac{u}{v},\,v)$ Resposta: $2\ln(3)$

Resolva os problemas.

6. A Terra não é perfeitamente esférica, sendo que seu formato pode ser aproximado por um elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, em que $a \approx b \approx 6378$ km e $c \approx 6356$ km. Com essas informações, estime o volume da Terra, utilizando a transformação $x=au$, $y=bv$ e $z=cw$ para calcular a integral. Resposta: $\frac{4\pi abc}{3} \approx 1,083 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}^3$

7. O trabalho realizado por um motor de Carnot ideal é igual à área da região R limitada por duas curvas isotérmicas $xy=a$ e $xy=b$ e duas curvas adiabáticas $xy^{1,4}=c$ e $xy^{1,4}=d$, em que $0 \le a \le b$ e $0 \le c \le d$. Calcule o trabalho realizado determinando a área de R.
Resposta: $2,5 \cdot (b-a)\ln(\frac{d}{c})$

Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

8. $\displaystyle\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dA$, R é o paralelogramo limitado pelas retas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$ e $3x-y=8$ Resposta: $\frac{8\ln(8)}{5}$

9. $\displaystyle\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA$, R é o retângulo limitado pelas retas $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$ e $x+y=3$ Resposta: $\frac{e^6-7}{4}$

10. $\displaystyle\iint\limits_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, $\quad R$ é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,1)$

Resposta: $\frac{3\sin(1)}{2}$

11. $\displaystyle\iint\limits_R \sin(9x^2+4y^2)\, dA$, $\quad R$ é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2+4y^2=1$

Resposta: $\left(\frac{1-\cos(1)}{24}\right)\pi$

12. $\displaystyle\iint\limits_R e^{x+y}\, dA$, $\quad R$ é dada pela inequação $|x|+|y| \leq 1$ Resposta: $e-\frac{1}{e}$

Referência

STEWART, James. Cálculo: volume 2. 8ª ed. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2016. ISBN 9788522125845.