Modul 4

RUANG VEKTOR

Pada bab ini dibahas tentang perumuman konsep vektor dengan memanfaatkan sifat-sifat aljabar dari vektor di $\mathbb{R}^n$. Dengan perumuman ini, objek yang dinamakan vektor bukan lagi terbatas pada garis berarah (anak panah), tetapi mencakup semua objek yang berada dalam suatu himpunan yang didefinisikan sebagaimana himpunan vektor.

Untuk pembahasan kali ini, ingat kembali istilah-istilah yang telah dibahas pada saat membicarakan vektor di $\mathbb{R}^n$.

4.1 Ruang Vektor Real

DEFINISI 4.1 Pandang suatu himpunan tak-kosong V yang didalamnya didefinisikan dua operator, yaitu *penjumlahan* dan *perkalian dengan skalar*. Jika sifat-sifat berikut ini dipenuhi oleh $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dan semua skalar k dan m, maka V disebut *ruang vektor* dan anggota V disebut vektor:

1. Jika $\vec{u}, \vec{v} \in V$, maka $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
4. $\exists \vec{0} \in V$, disebut *vektor nol* untuk V, dengan sifat $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \ \forall \vec{u} \in V$.
5. $\forall \vec{u} \in V, \ \exists - \vec{u} \in V$, disebut *negatif dari* $\vec{u}$, dengan sifat $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.
6. Jika k sebarang skalar dan $\vec{u} \in V$, maka $k\vec{u} \in V$.
7. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
8. $(k + m)\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$
9. $k(m\vec{u}) = (km)\vec{u}$
10. $1\vec{u} = \vec{u}$

CONTOH 4.1 **Ruang Vektor Nol**
Himpunan V yang hanya memuat satu anggota, dinotasikan dengan $\vec{0}$, dan didefinisikan

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}, \qquad \text{dan} \qquad k\vec{0} = \vec{0}$$

untuk semua skalar k, adalah ruang vektor yang disebut *ruang vektor nol*. ◀

CONTOH 4.2 **Ruang Vektor $\mathbb{R}^n$**
Pandang $V = \mathbb{R}^n$ dan didefinisikan dua operasi ruang vektor pada V dengan operasi-operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar dari pasangan-n, yaitu

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)\\ k\vec{u} &= (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)\end{aligned}$$

Dapat diperiksa bahwa sepuluh sifat pada Definisi 4.1 semuanya dipenuhi. ◀

CONTOH 4.3 **Ruang Vektor dari Barisan Tak-Hingga**
Misal V memuat anggota-anggota berbentuk

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

dengan $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ adalah barisan tak-hingga dengan $u_i \in \mathbb{R}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Kemudian didefinisikan operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar dengan

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= (u_1, u_2, \ldots) + (v_1, v_2, \ldots) = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots)\\ k\vec{u} &= (ku_1, ku_2, \ldots)\end{aligned}$$

Mudah diperiksa bahwa V adalah ruang vektor, dan selanjutnya dinotasikan dengan $\mathbb{R}^\infty$. ◀

CONTOH 4.4 **Ruang Vektor Matriks 2×2**
Pandang V himpunan matriks 2×2 dengan menerapkan operasi jumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar sebagai operasi ruang vektor pada V, yaitu

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v21 & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}$$

$$k\vec{u} = k\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian V merupakan ruang vektor. ◀

Contoh 4.4 juga dapat diperumum untuk $V = M_{mn}$, yaitu himpunan semua matriks berukuran $m \times n$.

CONTOH 4.5 **Ruang Vektor Fungsi Bernilai-Real**
Pandang V himpunan semua fungsi bernilai-real yang terdefinisi di semua x dalam $(-\infty, +\infty)$. Jika $\vec{f} = f(x)$ dan $\vec{g} = g(x)$ fungsi-fungsi di V dan k sebarang skalar, maka didefinisikan operasi jumlahan dan perkalian dengan skalar sebagai berikut:

$$(\vec{f}+\vec{g})(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(k\vec{f})(x) = kf(x).$$

Operasi-operasi tersebut dapat dipahami dengan memandang $f(x)$ dan $g(x)$ sebagai "komponen" dari $\vec{f}$ dan $\vec{g}$ di titik x. Dengan operasi-operasi tersebut dapat ditunjukkan bahwa V merupakan ruang vektor, dan selanjutnya dinotasikan dengan $F(-\infty, +\infty)$. ◀

Beberapa Sifat Ruang Vektor

TEOREMA 4.2 Jika V ruang vektor, $\vec{u} \in V$, dan k skalar, maka

(a) $0\vec{u} = \vec{0}$

(b) $k\vec{0} = \vec{0}$

(c) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

(d) Jika $k\vec{u} = \vec{0}$, maka $k = 0$ atau $\vec{u} = \vec{0}$.

Bukti: [Untuk latihan]

Latihan 4.1

1. Misal V himpunan semua pasangan terurut bilangan real, dan didefinisikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dengan

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1) \qquad \text{dan} \qquad k\vec{u} = (ku_1, ku_2).$$

   (a) Hitung $\vec{u} + \vec{v}$ dan $k\vec{u}$ untuk $\vec{u} = (0, 4)$, $v = (1, -3)$, dan $k = 2$.
   (b) Tunjukkan bahwa $(0, 0) \neq \vec{0}$.
   (c) Tunjukkan bahwa $(-1, -1) = \vec{0}$.
   (d) Tunjukkan sifat 5 dari Definisi 4.1 dapat berlaku dengan membuat suatu pasangan terurut $-\vec{u}$ sehingga $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ untuk $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
   (e) Dapat dua sifat pada Definisi 4.1 yang tidak berlaku pada V.

2. Diberikan $V = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i \in \mathbb{R} \text{ untuk } i = 1, 2, 3\}$ dan didefinisikan dua operasi $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ dan $k(a_1, a_2, a_3) = (k^2a_1, k^2a_2, k^2a_3)$ pada V. Apakah V ruang vektor? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.

3. Diberikan $V = \{(1, x) : x \in \mathbb{R}\}$ dan didefinisikan operasi $(1, x) + (1, y) = (1, x + y)$ dan $k(1, x) = (1, kx)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dan k skalar. Tunjukkan V adalah ruang vektor.

4. Diberikan $V = M_{mn}$, yaitu himpunan semua matriks berukuran $m \times n$, dan dilengkapi denga operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar pada matriks. Tunjukkan bahwa V ruang vektor.

5. Tunjukkan bahwa $V = \left\{\vec{0}\right\}$ adalah ruang vektor.

6. Argumentasi berikut ini membuktikan bahwa jika V ruang vektor dan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ dengan $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$, maka $\vec{u} = \vec{v}$. Sebagaimana dicontohkan, lengkapilah langkah-langkah pembuktiannya dengan mengisikan keterangan yang tepat.

$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$	hipotesis
$(\vec{u} + \vec{w}) + (-\vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}) + (-\vec{w})$	masing-masing sisi ditambah $-\vec{w}$
$\vec{u} + [\vec{w} + (-\vec{w})] = \vec{v} + [\vec{w} + (-\vec{w})]$	
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{v} + \vec{0}$	
$\vec{u} = \vec{v}$	

7. Misal v sebarang vektor di ruang vektor V. Buktikan bahwa $0\vec{v} = \vec{0}$.

8. Susunlah langkah-langkah pembuktian formal untuk argumentasi berikut ini:
   Hipotesis: Jika $\vec{u}$ vektor di ruang vektor V, $\vec{0}$ vektor nol di V, k skalar.
   Kesimpulan: Maka $k\vec{0} = \vec{0}$.

9. Diketahui V ruang vektor. Buktikan: $\vec{v} \in V \implies -\vec{v} = (-1)\vec{v}$.

10. Buktikan: Jika $\vec{u}$ vektor di ruang vektor V dan k skalar sehingga $k\vec{u} = \vec{0}$, maka $k = 0$ atau $\vec{u} = \vec{0}$.

4.2 Subruang

DEFINISI 4.3 Himpunan bagian W dari ruang vektor V disebut *subruang* dari V jika W juga ruang vektor dengan operasi ruang vektor yang diterapkan pada V.

Jika W himpunan bagian dari V, maka beberapa sifat yang berlaku untuk anggota-anggota V juga berlaku untuk anggota-anggota W. Sebagai contoh, jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka $\vec{u}, \vec{v} \in V$, sehingga berlaku $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Tidak semua sifat yang berlaku pada V akan berlaku juga pada W. Sebagai contoh, jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$ maka tidak ada jaminan $\vec{u} + \vec{v} \in W$ dan $k\vec{u} \in W$. Namun demikian, jika sifat-1 dan sifat-6 berlaku di W, maka dapat dipastikan sifat-sifat ruang vektor yang lain juga berlaku di W. Hal ini dirumuskan dalam teorema berikut ini.

TEOREMA 4.4 Jika $W \neq \varnothing$ himpunan di ruang vektor V, maka W merupakan *subruang* dari V jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat berikut:

(a) Jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$, maka $\vec{u} + \vec{v} \in W$;

(b) Jika k sebarang skalar dan $\vec{u} \in W$, maka $k\vec{u} \in W$.

Bukti. Jika W subruang dari ruang vektor V, maka sepuluh sifat ruang vektor dipenuhi oleh W, termasuk sifat-1 dan sifat-6. Jadi syarat (a) dan (b) dipenuhi oleh W.

Sebaliknya, misal syarat (a) dan (b) dipenuhi oleh W, berarti sifat-1 dan 6 dipenuhi oleh W. Sifat-sifat 2, 3, 7, 8, 9, dan 10 diturunkan oleh V untuk W karena $W \subseteq V$. Jadi tinggal sifat-4 dan 5 yang perlu ditunjukkan berlaku di W.

Misal $\vec{u} \in W$. Berdasarkan syarat (b) didapat $k\vec{u} \in W$ untuk sebarang skalar k, khususnya $0\vec{u} = \vec{0}$ dan $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ berada di W. Hal ini menunjukkan sifat-4 dan 5 berlaku di W. ■

CONTOH 4.6 **Subruang Nol**

Jika V sebarang ruang vektor, dan $W = \left\{\vec{0}\right\}$, maka W tertutup terhadap jumlahan dan perkalian dengan skalar, sebab

$$\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \qquad \text{dan} \qquad k\vec{0} = \vec{0}$$

untuk sebarang skalar k. Untuk selanjutnya W disebut *subruang nol* dari V. ◀

Perhatikan bahwa setiap ruang vektor selalu mempunyai subruang; paling sedikit terdapat dua subruang, yaitu dirinya sendiri dan subruang nol untuk ruang vektor tersebut.

CONTOH 4.7 Himpunan semua garis lurus yang melalui titik asal merupakan subruang dari ruang vektor $\mathbb{R}^2$ dan juga subruang dari $\mathbb{R}^3$.
Himpunan semua bidang datar yang melalui titik asal merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$. ◀

CONTOH 4.8 Perhatikan himpunan W dari semua titik (x, y) di $\mathbb{R}^2$ untuk $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Himpunan W tidak dapat menjadi subruang dari $\mathbb{R}^2$ karena tidak tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Sebagai contoh, misal $\vec{v} = (1, 1)$ adalah vektor di

W, tetapi $(-1)\vec{v} = (-1, -1)$ tidak berada di W. ◀

CONTOH 4.9 Mudah diperiksa bahwa jumlahan dari dua matriks simetrik adalah simetrik, dan perkalian skalar dengan matriks simetrik menghasilkan matriks simetrik. Jadi himpunan semua matriks simetrik $n \times n$ merupakan subruang dari M_{nn}.
Demikian pula himpunan semua matriks segitiga atas, segitiga bawah, dan diagonal adalah subruang-subruang dari M_{nn}. ◀

CONTOH 4.10 Himpunan W dari semua matriks $n \times n$ yang invertible, bukan subruang dari M_{nn}. Hal ini dapat dilihat dari contoh berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matriks $0A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ jelas bukan matriks invertible, dan $A + B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 10 \end{smallmatrix}\right]$ mempunyai kolom nol sehingga tidak invertible. Dengan demikian didapat contoh $A, B \in W$ tetapi $0A$ dan $A + B$ tidak di W. ◀

CONTOH 4.11 **Subruang $C(-\infty, +\infty)$**
Ingat sifat fungsi kontinu: jumlahan fungsi kontinu adalah kontinu dan konstan dikalikan fungsi kontinu menghasilkan fungsi kontinu. Dalam bahasa vektor, hal tersebut menyatakan bahwa himpunan fungsi kontinu pada $(-\infty, +\infty)$ adalah subruang dari $F(-\infty, +\infty)$. Subruang ini dinotasikan dengan $C(-\infty, +\infty)$. ◀

CONTOH 4.12 **Fungsi dengan Turunan Kontinu**
Himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan ke-m kontinu dinotasikan dengan $C^m(-\infty, +\infty)$. Dengan sifat-sifat fungsi kontinu mudah ditunjukkan bahwa jika $\vec{f}, \vec{g} \in C^m(-\infty, +\infty)$ dan k konstanta sebarang, maka $\vec{f} + \vec{g} \in C^m(-\infty, +\infty)$ dan $k\vec{f} \in C^m(-\infty, +\infty)$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $C^m(-\infty, +\infty)$ merupakan subruang dari $F(-\infty, +\infty)$.

Selanjutnya hasil tersebut dapat diperumum untuk $C^\infty(-\infty, +\infty)$, yaitu himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan kontinu sampai turunan ke-takhingga. ◀

CONTOH 4.13 **Subruang dari Ruang Polinomial**
Ingat kembali bahwa *polinomial* adalah fungsi dalam bentuk

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ kontanta-konstanta. Mudah diperiksa bahwa jumlahan dua polinomial menghasilkan polinomial dan hasil kali kontanta dengan polinomial adalah polinomial. Dengan demikian himpunan semua polinomial merupakan subruang dari $F(-\infty, +\infty)$. Ruang tersebut dinotasikan dengan P_∞. ◀

CONTOH 4.14 **Subruang Polinomial Berderajat $\leq n$**
Misalkan W_n adalah himpunan semua polinomial dengan derajat n. Perhatikan bahwa

$$1 + 2x + 3x^2 \qquad \text{dan} \qquad 1 + 2x - 3x^2$$

adalah polinomial di W_2. Tetapi jumlahan dua polinomial tersebut berupa polinomial dengan derajat 1, yang berarti tidak berada di W_2. Secara umum W_n *bukan* subruang dari $F(-\infty, +\infty)$.

Sekarang perhatikan P_n himpunan semua polinomial dengan derajat tidak lebih dari n. Dengan mudah dapat diperiksa bahwa P_n merupakan subruang dari $F(-\infty, +\infty)$. ◀

■ *Membangun Subruang*

Teorema berikut ini dapat digunakan untuk membangun subruang baru dari subruang yang sudah diketahui.

TEOREMA 4.5 Jika $W_1, W_2, \ldots W_r$ adalah subruang-subruang dari ruang vektor V, maka irisan dari subruang-subruang tersebut juga merupakan subruang dari V.

Bukti. Misal $W = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_r$. Jelas bahwa W tidak kosong, sebab setiap W_j memuat vektor nol dari V, untuk $j = 1, 2, \ldots, r$. Selanjutnya tinggal ditunjukkan bahwa W tertutup terhadap jumlahan dan perkalian dengan skalar.

Perhatikan untuk $j = 1, 2, \ldots, r$. Misal $\vec{u}, \vec{v} \in W$, berarti $\vec{u}, \vec{v} \in W_j$ untuk semua j. Karena W_j subruang dari V berarti $\vec{u} + \vec{v} \in W_j$ dan $k\vec{u} \in W_j$ untuk sebarang skalar k. Dengan demikian $\vec{u}, \vec{v} \in W$ dan $k\vec{u} \in W$. ■

DEFINISI 4.6 Jika $\vec{w}$ suatu vektor di ruang vektor V, maka $\vec{w}$ disebut *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$ di V apabila $\vec{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_r\vec{v}_r \tag{4.1}$$

dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ skalar-skalar. Skalar-skalar tersebut dinamakan *koefisien-koefisien* dari kombinasi linear.

TEOREMA 4.7 Jika $S = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ adalah himpunan tak-kosong dari vektor-vektor di V, maka

(a) himpunan W yang terdiri dari semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S merupakan subruang dari V.

(b) himpunan W pada (a) merupakan subruang "terkecil" dari V yang memuat semua vektor di S, yakni semua subruang yang memuat vektor-vektor di S akan memuat W.

Bukti

(a) Jika $\vec{u}, \vec{v} \in W$, yaitu

$$\vec{u} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + \cdots + a_r\vec{w}_r \quad \text{dan} \quad \vec{v} = b_1\vec{w}_1 + b_2\vec{w}_2 + \cdots + b_r\vec{w}_r$$

yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S, maka

$$\vec{u}+\vec{v}=(a_1+b_1)\vec{w}_1+(a_2+b_2)\vec{w}_2+\cdots+(a_r+b_r)\vec{w}_r$$

yang juga merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Jadi $\vec{u}+\vec{v}\in W$. Selanjutnya, untuk k sebarang skalar diperoleh

$$k\vec{u}=(ka_1)\vec{w}_1+(ka_2)\vec{w}_2+\cdots+(ka_r)\vec{w}_r$$

yang jelas merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Jadi $k\vec{u}\in W$. Dengan demikian W adalah subruang dari V.

(b) Jika W' adalah subruang dari V dan memuat semua vektor di S, maka semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S juga berada di W'. Hal ini berarti semua vektor di W juga termuat di W', atau dengan kata lain W merupakan subruang dari W'. ■

Berikut ini didefinisikan notasi dan terminologi penting yang berkaitan dengan Teorema 4.7.

DEFINISI 4.8 Misal S himpunan tak-kosong di ruang vektor V. Subruang dari V yang terdiri dari semua kombinasi linear dari vektor-vektor di S disebut *rentangan* (*span*) dari S, dan dikatakan vektor-vektor di S *merentang* (*span*) subruang tersebut. Jika $S=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_r\}$, maka rentangan dari S dinotasikan dengan

$$\text{span}\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\ldots,\vec{w}_r\} \qquad \text{atau} \qquad \text{span}(S)$$

CONTOH 4.15 **Vektor-vektor Satuan Baku Merentang $\mathbb{R}^n$**
Vektor-vektor satuan baku di $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\vec{e}_1=(1,0,0,\ldots,0),\ \vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ \vec{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$$

Jika $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, yaitu $\vec{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, maka $\vec{v}$ dapat ditulis sebagai

$$\vec{v}=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+\cdots+v_n\vec{e}_n$$

yang merupakan kombinasi linear dari $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$. Jadi $\mathbb{R}^n$ direntang oleh vektor-vektor satuan baku, yaitu

$$\mathbb{R}^n=\text{span}\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}.$$ ◀

CONTOH 4.16 **Himpunan yang Merentang P_n**
Polinomial-polinomial 1, x, x^2, …, x^n merentang ruang vektor P_n yang didefinisikan pada Contoh 4.14, sebab setiap polinomial $\vec{p}$ di P_n dapat ditulis sebagai

$$\vec{p}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

yang merupakan kombinasi linear dari 1, x, x^2, …, x^n. Dengan demikian dapat ditulis

$$P_n=\text{span}\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$$ ◀

CONTOH 4.17 **Kombinasi Linear**
Pandang $\vec{u} = (1, 2, -3)$ dan $\vec{v} = (-3, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa $\vec{w} = (5, 3, -8)$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, dan $\vec{w}' = (2, 5, -1)$ bukan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

Penyelesaian. Untuk menunjukkan bahwa $\vec{w}$ kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, harus dicari skalar-skalar k_1 dan k_2 sehingga $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$, yaitu

$$(5, 3, -8) = k_1(1, 2, -3) + k_2(-3, 1, 2)$$

atau

$$(5, 3, -8) = (k_1 - 3k_2,\ 2k_1 + k2,\ -3k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak, diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} k_1 - 3k_2 &= 5 \\ 2k_1 + \ k2 &= 3 \\ -3k_1 + 2k_2 &= -8 \end{aligned}$$

Sistem tersebut dapat diselesaikan dengan eliminasi Gauss, diperoleh $k_1 = 2$ dan $k_2 = -1$.

Dengan cara serupa, untuk $\vec{w}'$ harus didapatkan k_1 dan k_2 sehingga $\vec{w}' = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$, yaitu

$$(2, 5, -1) = k_1(1, 2, -3) + k_2(-3, 1, 2)$$

atau

$$(2, 5, -1) = (k_1 - 3k_2,\ 2k_1 + k2,\ -3k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak, diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} k_1 - 3k_2 &= 2 \\ 2k_1 + \ k2 &= 5 \\ -3k_1 + 2k_2 &= -1 \end{aligned}$$

Sistem linear tersebut tidak konsisten (tunjukkan), sehingga tidak didapatkan skalar-skalar k_1 dan k_2. Akibatnya $\vec{w}'$ bukan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. ◀

CONTOH 4.18 Selidiki apakah $\vec{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan $\vec{v}_3 = (2, 1, 3)$ merentang ruang vektor $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian. Harus ditunjukkan apakah terdapat skalar-skalar k_1, k_2, dan k_3 sehingga sebarang vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$, yaitu

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3.$$

Dengan menyatakan persamaan di atas dengan suku-suku komponen vektor didapat

$$(u_1, u_2, u_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

atau

$$(u_1, u_2, u_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3,\ k_1 + k_3,\ 2k_1 + k_2 + 3k_3).$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak dihasilkan sistem persamaan linear

$$\begin{array}{rcrcrcl} k_1 & + & k_2 & + & 2k_3 & = & u_1 \\ k_1 & & & + & k_3 & = & u_2 \\ 2k_1 & + & k_2 & + & 3k_3 & = & u_3 \end{array}$$

Jadi permasalahannya adalah: apakah sistem linear tersebut konsisten untuk semua nilai u_1, u_2, dan u_3. Kenyataannya adalah sistem tersebut tidak konsisten, sebab determinan dari matriks koefisiennya adalah nol. Dengan demikian tidak mungkin diperoleh k_1, k_2, dan k_3 yang memenuhi sistem tersebut. Jadi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ tidak merentang $\mathbb{R}^3$. ◀

■ *Ruang Penyelesaian dari Sistem Homogen*

Penyelesaian dari sistem linear homogen $A\vec{x} = \vec{0}$ dengan m persamaan dan n variabel dapat dipandang sebagai vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 4.9 Himpunan penyelesaian dari sistem linear homogen $A\vec{x} = \vec{0}$ dengan n variabel merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

Bukti. Misal W himpunan penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{0}$. Jelas W tidak kosong, sebab paling tidak memuat penyelesaian trivial $\vec{x} = \vec{0}$.

Misal $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in W$. Karena $\vec{x}_1$ dan $\vec{x}_2$ penyelesaian, berarti berlaku $A\vec{x}_1 = \vec{0}$ dan $A\vec{x}_2 = \vec{0}$ sehingga

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W$. Selanjutnya, jika k sebarang skalar, maka

$$A(k\vec{x}_1) = kA\vec{x}_1 = k\vec{0} = \vec{0};$$

dan ini menunjukkan bahwa $k\vec{x}_1 \in W$. Jadi W tertutup terhadap jumlahan dan perkalian dengan skalar, sehingga W subruang dari $\mathbb{R}^n$. ■

CONTOH 4.19 **Ruang Penyelesaian Sistem Homogen**

(a) Sistem linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

mempunyai penyelesaian $x = 2s - 3t$, $y = s$, $z = t$ (silakan ditunjukkan untuk latihan), atau

$$x = 2y - 3z \qquad \text{atau} \qquad x - 2y + 3z = 0.$$

Jadi ruang penyelesaian untuk sistem (4.2) berupa bidang datar di $\mathbb{R}^3$ yang melalui titik asal dan mempunyai normal $\vec{n} = (1, -2, 3)$.

(b) Perhatikan sistem linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Silakan untuk latihan dan menunjukkan bahwa penyelesaian dari sistem (4.3) adalah

$$x = -5t, \;\; y = -t, \;\; z = t.$$

Ini adalah persamaan parametrik untuk garis yang melalui titik asal dan sejajar dengan vektor $\vec{v} = (-5, -1, 1)$.

(c) Sistem linear homogen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -8 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

hanya satu penyelesaian, yaitu penyelesaian trivial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Dengan demikian, ruang penyelesaian dari sistem (4.4) adalah $\left\{\vec{0}\right\}$.

(d) Sistem linear homogen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian (x, y, z) untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jadi ruang penyelesaiannya adalah keseluruhan $\mathbb{R}^3$. ◄

Perlu diperhatikan bahwa himpunan penyelesaian dari sistem linear ***homogen*** *dengan m persamaan dan n variabel adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$. Tetapi tidak demikian dengan himpunan penyelesaian sistem linear* ***tak-homogen***.

Perlu juga diingat bahwa himpunan yang merentang suatu ruang vektor tidaklah tunggal. Dengan kata lain, ada kemungkinan dua himpunan yang berbeda akan merentang satu ruang vektor yang sama.

TEOREMA 4.10 Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ dan $S' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$ dua himpunan tak-kosong yang terdiri dari vektor-vektor di ruang vektor V, maka

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\} = \text{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}$$

jika dan hanya jika setiap vektor di S merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S', dan setiap vektor di S' merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S.

Bukti. [Untuk latihan] ■

■ *Latihan 4.2*

1. Selidiki apakah himpunan-himpunan berikut ini merupakan subruang dari M_{nn}.

   (a) Himpunan semua matriks diagonal $n \times n$.

   (b) Himpunan semua matriks singular (determinannya nol) $n \times n$.

(c) Himpunan semua matriks A berukuran $n \times n$ dengan $\text{tr}(A) = 0$.

(d) Himpunan semua matriks A berukuran $n \times n$ dengan $A\vec{x} = \vec{0}$ hanya mempunyai penyelesaian trivial.

(e) Himpunan semua matriks A berukuran $n \times n$ yang memenuhi $AB = BA$ dengan B suatu matriks berukuran $n \times n$.

2. Manakah di antara vektor-vektor berikut ini yang merupakan kombinasi linear dari $\vec{u} = (0, -2, 2)$ dan $\vec{u} = (1, 3, -1)$?

   (a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$ (c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

3. Nyatakan vektor-vektor berikut ini sebagai kombinasi linear dari $\vec{u} = (2, 1, 4)$, $\vec{v} = (1, -1, 3)$, dan $\vec{w} = (3, 2, 5)$

   (a) $(-9, -7, -15)$ (b) $(6, 11, 6)$ (c) $(1, 1, 1)$ (d) $(0, 0, 0)$

4. Misal $\vec{v}_1 = (2, 1, 0, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, -1, 5, 2)$, dan $\vec{v}_3 - (-1, 0, 2, 1)$. Manakah di antara vektor-vektor berikut ini yang terletak di ruang $\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

   (a) $(2, 3, -7, 3)$ (b) $(0, 0, 0, 0)$ (c) $(1, 1, 1, 1)$ (d) $(-4, 6, -13, 4)$

5. Selidiki apakah polinomial-polinomial $\vec{p}_1 = 1 - x + 2x^2$, $\vec{p}_2 = 3 + x$, $\vec{p}_3 = 5 - x + 4x^2$, dan $\vec{p}_4 = -2 - 2x + 2x^2$, merentang P_2.

6. Misal $\vec{f} = \cos^2 x$ dan $\vec{g} = \sin^2 x$. Manakah di antara yang berikut ini yang terletak di ruang yang direntang oleh $\vec{f}$ dan $\vec{g}$?

7. Tunjukkan bahwa $W = \left\{\vec{f} : \vec{f} \text{ dapat diturunkan pada } (-\infty, +\infty) \text{ dan } \vec{f}' + 2\vec{f} = 0\right\}$ adalah subruang dari $F(-\infty, +\infty)$.

8. Tunjukkan bahwa $W = \left\{\vec{f} : \vec{f} \in C[a, b] \text{ dan } \int_a^b f(x)\,dx = 0\right\}$ adalah subruang dari $C[a, b]$.

9. Tunjukkan bahwa himpunan penyelesaian dari sistem linear *tak-homogen* $A\vec{x} = \vec{b}$, dengan A matriks $m \times n$, bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

10. Diketahui $\vec{v}_1 = (1, 6, 4)$, $\vec{v}_2 = (2, 4, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 2, 5)$, $\vec{w}_1 = (1, -2, -5)$, dan $\vec{w}_2 = (0, 8, 9)$. Tunjukkan $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dan $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ merentang satu subruang yang sama di $\mathbb{R}^3$, yaitu $\text{span}\{V\} = \text{span}\{W\}$.

4.3 Vektor-vektor Bebas Linear

Di ruang vektor $\mathbb{R}^2$ setiap vektor dapat dinyatakan secara tunggal sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan $\vec{\imath}$ dan $\vec{\jmath}$. Sebagai contoh, vektor $(-2, 5)$ dapat dinyatakan sebagai

$$(-2,5) = -2(1,0) + 5(0,1) = -2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} \tag{4.5}$$

Apabila ditambahkan satu vektor satuan yang lain, misal $\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, vektor $(-2, 5)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, dan $\vec{w}$ yang tak-hingga banyaknya; sebagai contoh:

$$\begin{aligned}
-2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 0\vec{w} &= -2(1,0) + 5(0,1) + 0\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2,5) \\
-3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{w} &= -3(1,0) + 4(0,1) + \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2,5) \\
-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\sqrt{2}\vec{w} &= -4(1,0) + 3(0,1) + 2\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = (-2,5)
\end{aligned}$$

Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa penambahan satu vektor $\vec{w}$ di atas adalah berlebihan. Kenyataannya, vektor $\vec{w}$ sendiri dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\vec{\imath}$ dan $\vec{\jmath}$ secara tunggal, yaitu

$$\vec{w} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{\imath} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\vec{\jmath}.$$

DEFINISI 4.11 Misal $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ himpunan tak-kosong di ruang vektor V, dan $I = \{1, 2, \ldots, r\}$. Himpunan S dikatakan *bebas linear*, jika persamaan

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

hanya mempunyai penyelesaian $k_i = 0$ untuk *semua* $i \in I$. Jika ada penyelesaian lain, yaitu $k_i \neq 0$ untuk *suatu* $i \in I$, maka S dikatakan *tak-bebas linear* atau *bergantung linear*.

*Istilah **bebas linear** dan **bergantung linear** biasanya juga digunakan untuk vektor-vektor di suatu himpunan, bukan hanya untuk himpunan itu sendiri.*

CONTOH 4.20 **Vektor-vektor satuan baku di $\mathbb{R}^n$ adalah bebas linear**

Salah satu contoh vektor-vektor yang bebas linear di $\mathbb{R}^n$ adalah vektor-vektor satuan baku

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

Perhatikan persamaan

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

yang dapat diuraikan menjadi

$$(k_1,0,0,\ldots,0) + (0,k_2,0,\ldots,0) + \cdots + (0,0,0,\ldots,k_n) = (0,0,0,\ldots,0)$$

atau

$$(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n) = (0,0,0,\ldots,0)$$

yang berakibat $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. ◀

CONTOH 4.21 Selidiki apakah vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = (2, -1, 3), \quad \vec{v}_2 = (-1, 2, -1), \quad \vec{v}_3 = (3, -3, 4)$$

bebas linear atau bergantung linear di $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian. Perhatikan persamaan

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = 0 \tag{4.6}$$

atau dapat diuraikan menjadi

$$k_1(2, -1, 3) + k_2(-1, 2, -1) + k_3(3, -3, 4) = (0, 0, 0).$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak, diperoleh sistem linear homogen:

$$\begin{aligned} 2k_1 - \ k_2 \ + 3k_3 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ 3k_1 - \ k_2 \ + 4k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dengan menyelesaian sistem homogen (4.7) diperoleh penyelesaian

$$k_1 = -t, \quad k_2 = t, \quad k_3 = t.$$

(Penyelesaian lengkapnya silakan untuk latihan). Hasil ini menunjukkan bahwa sistem homogen tersebut mempunyai penyelesaian tak-trivial. Jadi $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ bergantung linear.

Cara lain dapat dilakukan dengan menyelidiki matriks koefisien dari sistem tersebut; yaitu matriks koefisien dari sistem (4.7) adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

dan $\det(A) = 0$ (silakan dihitung). Hal ini menunjukkan bahwa sistem homogen (4.7) atau Persamaan (4.6) mempunyai tak-hingga banyak penyelesaian. Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bergantung linear. ◀

Perhatikan hubungan yang terlihat pada Contoh 4.21 dari kolom-kolom matriks A dengan komponen-komponen vektor-vektor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$.

CONTOH 4.22 Selidiki apakah vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = (2, -2, 3, 2), \quad \vec{v}_2 = (-1, 2, -1, -2), \quad \vec{v}_3 = (3, -3, 4, 3)$$

bebas linear atau bergantung linear di $\mathbb{R}^4$.

Penyelesaian. Perhatikan persamaan

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 = 0$$

atau dapat diuraikan menjadi

$$k_1(2,-2,3,2)+k_2(-1,2,-1,-2)+k_3(3,-3,4,3)=(0,0,0,0).$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak, diperoleh sistem linear homogen:

$$\begin{aligned} 2k_1 - k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 2k_2 - 3k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + 4k_3 &= 0 \\ 2k_1 - 2k_2 + 3k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sistem homogen di atas hanya mempunyai penyelesaian trivial (silakan untuk menyelesaikannya), yaitu

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0.$$

Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linear. ◀

CONTOH 4.23 Tunjukkan bahwa himpunan polinomial $\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}$ bebas linear di P_n.

Penyelesaian. Misalkan polinomial-polinomial tersebut dinotasikan dengan

$$\vec{p}_0 = 1, \quad \vec{p}_1 = x, \quad \vec{p}_2 = x^2, \quad \ldots, \quad \vec{p}_n = x^n,$$

berarti harus ditunjukkan bahwa persamaan vektor

$$a_0\vec{p}_0 + a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + \cdots + a_n\vec{p}_n = \vec{0} \tag{4.8}$$

hanya mempunyai penyelesaian trivial.

Persamaan 4.8 ekivalen dengan pernyataan

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0, \quad \text{untuk semua } x \in (-\infty, +\infty). \tag{4.9}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri dari (4.9) adalah polinomial dengan derajat paling tinggi n. Dengan demikian Persamaan (4.9) mempunyai akar paling banyak n akar, sehingga persamaan tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial, yaitu $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. Jadi $\{1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n\}$ bebas linear di P_n. ◀

Contoh berikut ini menunjukkan bahwa permasalahan bebas linear dari vektor-vektor di P_n dapat direduksi menjadi permasalahan bebas linear dari dari himpunan vektor di $\mathbb{R}^n$.

CONTOH 4.24 Selidiki apakah polinomial-polinomial

$$\vec{p}_1 = 1 - x, \quad \vec{p}_2 = 5 + 3x - 2x^2, \quad \vec{p}_3 = 1 + 3x - x^2$$

bebas linear atau bergantung linear di P_2.

Penyelesaian. Akan diselidiki apakah persamaan vektor

$$k_1\vec{p}_1 + k_2\vec{p}_2 + k_3\vec{p}_3 = \vec{0} \tag{4.10}$$

mempunyai penyelesaian tak-trivial. Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$k_1(1-x)+k_2(5+3x-2x^2)+k_3(1+3x-x^2)=0$$

yang ekivalen dengan bentuk

$$(k_1+5k_2+k_3)+(-k_1+3k_2+3k_3)x+(-2k_2-k_3)x^2=0$$

yang berlaku untuk semua $x \in (-\infty,+\infty)$. Berdasarkan hasil Contoh 4.23 semua koefisien harus sama dengan nol. Dengan demikian diperoleh sistem homogen:

$$\begin{aligned} k_1+5k_2+\ k_3 &= 0 \\ -k_1+3k_2+3k_3 &= 0 \\ -2k_2-\ k_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dapat diperoleh penyelesaian trivial dari sistem homogen tersebut, dan itu satu-satunya penyelesaian. (Silakan penyelesaian lengkapnya untuk latihan). Jadi $\{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\}$ merupakan himpunan yang bebas linear. ◀

Pada Contoh 4.24 perhatikan hubungan yang terlihat dari kolom-kolom matriks A dengan koefisien-koefisien polinomial $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, dan $\vec{p}_3$.

■ *Interpretasi Alternatif dari Sifat Bebas Linear*

TEOREMA 4.12 Himpunan S yang terdri dari dua vektor atau lebih adalah:

(a) bergantung linear jika dan hanya jika ada vektor di S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain di S.

(b) bebas linear jika dan hanya jika tidak ada vektor di S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor lain di S.

CONTOH 4.25 Pada Contoh 4.21 telah ditunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\vec{v}_1=(2,-1,3),\quad \vec{v}_2=(-1,2,-1),\quad \vec{v}_3=(3,-3,4)$$

adalah bergantung linear. Jadi, berdasarkan Teorema 4.12 paling tidak ada satu vektor yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari dua vektor yang lain. Vektor-vektor tersebut memenuhi persamaan

$$\vec{v}_1-\vec{v}_2-\vec{v}_3=0$$

(Silakan pastikan persamaan tersebut). Dari persamaan tersebut diperoleh

$$v_1=\vec{v}_2+\vec{v}_3 \quad \text{atau} \quad \vec{v}_2=\vec{v}_1-\vec{v}_3 \qquad \text{atau} \qquad \vec{v}_3=\vec{v}_1-\vec{v}_2,$$

yang menunjukkan satu vektor sebagai kombinasi linear dari dua vektor yang lain. ◀

TEOREMA 4.13

(a) Himpunan berhingga yang memuat $\vec{0}$ adalah tidak bebas linear.

(b) Himpunan yang hanya memuat satu vektor adalah bebas linear jika dan hanya jika vektor tersebut bukan $\vec{0}$.

(c) Himpunan yang memuat hanya dua vektor adalah bebas linear jika dan hanya jika salah satu vektor bukan kelipatan skalar vektor yang lain.

CONTOH 4.26 Fungsi-fungsi $\vec{f_1} = x$ dan $\vec{f_2} = \sin x$ adalah vektor-vektor yang bebas linear di $F(-\infty, +\infty)$, sebab satu fungsi tersebut bukan kelipatan skalar dari fungsi yang lain. Sedangkan fungsi $\vec{g_1} = \sin 2x$ dan $\vec{g_2} = \sin x \cos x$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear, sebab $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. ◀

TEOREMA 4.14 Misal $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ adalah himpunan vektor di $\mathbb{R}^n$. Jika $r > n$, maka S tidak bebas linear.

Bukti. Misalkan

$$\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}) \\ \vec{v}_2 & = & (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v}_r & = & (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn}) \end{array}$$

dan perhatikan persamaan

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_r\vec{v}_r = \vec{0}.$$

Jika persamaan tersebut ditulis dengan suku-suku komponen vektor dan kemudian disamakan komponen-komponen yang seletak, maka diperoleh sistem persamaan homogen:

$$\begin{array}{rcl} v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \cdots + v_{r1}k_r & = & 0 \\ v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \cdots + v_{r2}k_r & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \cdots + v_{rn}k_r & = & 0 \end{array}$$

Sistem tersebut terdiri dari n persamaan dengan r bilangan tak-diketahui $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Dengan demikian, jika $r > n$ maka sistem tersebut mempunyai penyelesaian tak-trivial. Jadi $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ tidak bebas linear. ■

Kadang sifat bebas linear dari fungsi-fungsi dapat ditentukan dari kesamaan fungsi yang diketahui. Sebagai contoh, fungsi-fungsi

$$\vec{f_1} = \sin^2 x, \quad \vec{f_2} = \cos^2 x, \quad \vec{f_3} = 3$$

membentuk himpunan yang tidak bebas linear di $F(-\infty, +\infty)$, sebab

$$3\vec{f_1} + 3\vec{f_2} - \vec{f_3} = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x - 3 = \vec{0}$$

yaitu kombinasi linear dari $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$ sama dengan $\vec{0}$ dapat dibuat dengan koefisien-koefisien yang tidak semua nol.

DEFINISI 4.15 Jika $\vec{f_1} = f_1(x)$, $\vec{f_2} = f_2(x)$, $\dots$, $\vec{f_n} = f_n(x)$ fungsi-fungsi yang dapat diturunkan hingga $(n-1)$ kali pada selang $(-\infty, +\infty)$, maka determinan

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

disebut *Wronskian* dari $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Misalkan $\vec{f_1} = f_1(x)$, $\vec{f_2} = f_2(x)$, $\dots$, $\vec{f_n} = f_n(x)$ adalah vektor-vektor yang *bergantung linear* di $C^{(n-1)}(-\infty, +\infty)$. Akibatnya persamaan vektor

$$k_1\vec{f_1} + k_2\vec{f_2} + \cdots + k_n\vec{f_n} = \vec{0}$$

mempunyai penyelesaian tak-trivial, atau persamaan

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x) = 0$$

dipenuhi untuk semua $x \in (-\infty, +\infty)$. Dengan demikian dapat diperoleh sistem linear

$$\begin{array}{ccccccc} k_1 f_1(x) & + & k_2 f_2(x) & \cdots + & k_n f_n(x) & = & 0 \\ k_1 f_1'(x) & + & k_2 f_2'(x) & \cdots + & k_n f_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_1 f_1^{(n-1)}(x) & + & k_2 f_2^{(n-1)}(x) & \cdots + & k_n f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

Karena $\vec{f_1} = f_1(x)$, $\vec{f_2} = f_2(x)$, $\dots$, $\vec{f_n} = f_n(x)$ bergantung linear, akibatnya sistem linear

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

mempunyai penyelesaian tak-trivial. Dengan demikian determinan dari matriks koefisien sistem tersebut sama dengan nol untuk semua x. Hasil ini membuktikan teorema berikut ini.

TEOREMA 4.16 Jika fungsi-fungsi $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$, $\dots$, $\vec{f_n}$ mempunyai turunan kontinu hingga turunan ke $(n-1)$ pada selang $(-\infty, +\infty)$, dan Wronskian dari fungsi-fungsi tersebut tidak nol pada $(-\infty, +\infty)$, maka fungsi-fungsi tersebut membentuk himpunan vektor yang bebas linear di $C^{(n-1)}(-\infty, +\infty)$.

CONTOH 4.27 Telah disebutkan pada Contoh 4.26 bahwa $\vec{f_1} = x$ dan $\vec{f_2} = \sin x$ adalah fungsi-fungsi yang bebas linear. Hal ini dapat ditunjukkan dengan memeriksa Wronskian dari fungsi-fungsi tersebut,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x\cos x - \sin x.$$

Fungsi ini tidak sama dengan nol pada $(-\infty, +\infty)$, sebab (sebagai contoh)

$$W(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1.$$

Jadi, fungsi-fungsi tersebut bebas linear. ◀

■ Latihan 4.3

1. Misalkan $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^3$ dengan titik pangkal di titik asal. Selidikilah vektor-vektor pada tiap soal berikut ini apakah terletak di satu bidang.
   (a) $\vec{v}_1 = (2, -2, 0),\ \vec{v}_2 = (6, 1, 4),\ \vec{v}_3 = (2, 0, -4)$
   (b) $\vec{v}_1 = (-6, 7, 2),\ \vec{v}_2 = (3, 2, 4),\ \vec{v}_3 = (4, -1, 2)$
   (c) $\vec{v}_1 = (1, -2, -1),\ \vec{v}_2 = (-1, 8, -1),\ \vec{v}_3 = (-1, 2, 1)$

2. Tunjukkan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1 = (0, 3, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$, dan $\vec{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$ membentuk himpunan yang tidak bebas linear di $\mathbb{R}^4$. Kemudian nyatakan tiap vektor sebagai kombinasi linear dari dua vektor yang lain.

3. Diberikan $\vec{v}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $\vec{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2})$, dan $\vec{v}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$. Dapatkan nilai λ real sehingga $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ merupakan himpunan yang bergantung linear.

4. Tunjukkan bahwa jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ himpunan vektor yang bebas linear, maka setiap himpunan bagian tak-kosong dari S juga bebas linear.

5. Tunjukkan bahwa jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ himpunan vektor yang bergantung linear, maka $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n\}$ dengan $\vec{v}_{r+1}, \ldots, \vec{v}_n \notin S$ juga bergantung linear.

6. Tunjukkan bahwa jika $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linear dan $\vec{v}_3 \notin \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, maka $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bebas linear.

7. Tunjukkan bahwa di P_2 setiap himpunan yang mempunyai lebih dari dua anggota adalah himpunan yang tidak bebas linear.

8. Buktikan: Untuk sebarang vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ di ruang vektor V, vektor-vektor $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, dan $\vec{w} - \vec{u}$ membentuk himpunan yang yang bergantung linear.

9. Buktikan: Ruang yang direntang oleh dua vektor di $\mathbb{R}^3$ berupa satu garis lurus yang melalui titik asal, satu bidang datar yang melalui titik asal, atau titik asal sendiri.

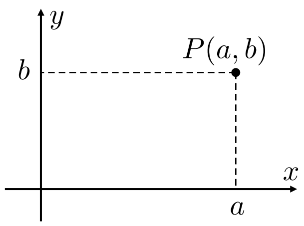
10. Syarat apakah yang diperlukan agar himpunan yang beranggota satu vektor bebas linear?

4.4 Koordinat dan Basis

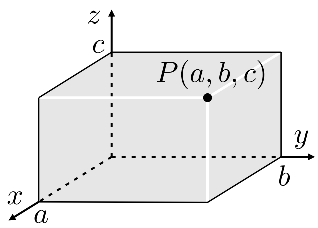
Biasanya suatu garis dipahami sebagai objek berdimensi satu, bidang datar sebagai objek berdimensi dua, dan ruang di alam ini sebagai objek berdimensi tiga. Tujuan dari bahasan bagian ini adalah untuk mendapatkan pengertian dimensi secara umum dan tepat.

Sistem Koordinat dalam Aljabar Linear

Dalam geometri analitik, lebih umum digunakan sistem koordinat siku untuk menghubungkan satu-satu antara titik di ruang-2 dengan pasangan dua bilangan real, atau antara titik dan pasangan tiga bilangan real di ruang-3 (Gambar 4.1). Selain sistem koordinat siku, masih dimungkinkan membangun sistem koordinat lain. Sebagai contoh, Gambar 4.2 menyajikan sistem koordinat di ruang-2 dan ruang-3 yang bukan sistem koordinat siku.

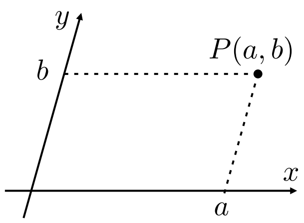


Koordinat P dalam sistem koordinat siku di ruang-2

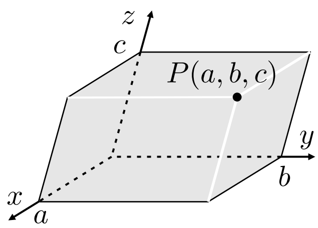


Koordinat P dalam sistem koordinat siku di ruang-3

Gambar 4.1



Koordinat P dalam sistem koordinat miring di ruang-2



Koordinat P dalam sistem koordinat miring di ruang-3

Gambar 4.2

Dalam aljabar linear, sistem koordinat dibangun menggunakan vektor-vektor sebagai pengganti sumbu-sumbu koordinat. Sebagai contoh, pada Gambar 4.3 sistem koordinat dalam Gambar 4.2 dibangun ulang dengan menggunakan vektor-vektor satuan untuk menunjuk arah positif dan kemudian dengan menempatkan koordinat-koordinat titik P menggunakan koefisien-koefisien skalar dalam persamaan

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \qquad \text{dan} \qquad \overrightarrow{OP} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$

Selanjutnya pengertian sistem koordinat demikian dapat diperumum untuk sebarang ruang vektor, termasuk ruang-ruang vektor (seperti $\mathbb{R}^n$ dengan $n > 3$) yang tidak dapat digambarkan secara geometrik.

Gambar 4.3

■ *Basis untuk Ruang Vektor*

DEFINISI 4.17 Jika V suatu ruang vektor dan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ himpunan berhingga vektor-vektor di V, maka S disebut *basis* untuk V jika memenuhi syarat berikut ini:

(a) S bebas linear.

(b) S merentang V.

CONTOH 4.28 **Basis Baku untuk $\mathbb{R}^n$**
Pada bahasan bagian sebelumnya telah disebutkan bahwa vektor-vektor satuan baku

$$\vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

merentang $\mathbb{R}^n$ dan vektor-vektor tersebut bebas linear. Dengan demikian $\{\vec{e}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^n$, dan disebut *basis baku untuk* $\mathbb{R}^n$. Khususnya,

$$\vec{\imath} = (1,0,0), \quad \vec{\jmath} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

adalah basis baku untuk $\mathbb{R}^3$. ◀

CONTOH 4.29 **Basis Baku untuk P_n**
Telah dibahas pada contoh-contoh bagian sebelumnya bahwa $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ adalah himpunan yang bebas linear, dan juga S merentang P_n. Jadi S adalah basis untuk P_n, dan disebut *basis baku untuk* P_n. ◀

CONTOH 4.30 Tunjukkan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1 = (1,-2,-1)$, $\vec{v}_2 = (1,-4,4)$, dan $\vec{v}_3 = (-1,2,3)$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian. Misal $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Pertama, akan ditunjukkan bahwa S bebas linear. Perhatikan persamaan vektor

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0}. \tag{4.12}$$

Persamaan tersebut dapat diuraikan menjadi persamaan

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, -2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0,0,0).$$

Dengan menyamakan semua komponen vektor yang bersesuaian, diperoleh sistem persamaan linear homogen

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & - & \alpha_3 & = & 0 \\ -2\alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Matriks koefisien dari sistem homogen tersebut adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

dan dapat dihitung $\det(A) = 2$. Karena $\det(A) \neq 0$, berarti Persamaan (4.12) hanya mempunyai penyelesaian trivial, dan dengan demikian S bebas linear.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa S merentang $\mathbb{R}^3$, yaitu setiap $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Perhatikan persamaan

$$\beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \beta_3\vec{v}_3 = (b_1, b_2, b_3). \tag{4.14}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan linear

$$\begin{array}{rcrcrcl} \beta_1 & + & \beta_2 & - & \beta_3 & = & b_1 \\ -2\beta_1 & - & \beta_2 & + & 2\beta_3 & = & b_2 \\ -\beta_1 & + & 2\beta_2 & + & 3\beta_3 & = & b_3 \end{array}$$

dengan matriks koefisien sama dengan A pada (4.13). Karena $\det(A) \neq 0$, berarti Persamaan 4.14 konsisten. Dengan kata lain $\vec{b}$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Jadi S bebas linear dan merentang $\mathbb{R}^3$, yakni S membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$. ◀

CONTOH 4.31 **Basis Baku untuk M_{mn}**

Tunjukkan bahwa $M = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ dengan

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang M_{22} dari matriks-matriks berukuran 2×2.

Penyelesaian.

Akan ditunjukkan bahwa M bebas linear dan merentang M_{22}, yaitu persamaan

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = \vec{0}. \tag{4.15}$$

dengan $\vec{0} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ hanya mempunyai penyelesaian trivial, dan setiap matriks $B = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$B = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2 + \beta_3 M_3 + \beta_4 M_4 \tag{4.16}$$

Persamaan (4.15) dan (4.16) dapat ditulis dalam persamaan matriks

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\beta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

atau disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

dan diperoleh penyelesaian

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \qquad \text{dan} \qquad \beta_1 = a,\ \beta_2 = b,\ \beta_3 = c,\ \beta_4 = d$$

Hasil ini menunjukkan bahwa Persamaan (4.15) hanya mempunyai penyelesaian trivial, yang berarti M bebas linear; dan Persamaan 4.16 konsisten yang menyatakan M merentang M_{22}. Jadi dapat disimpulkan bahwa M merupakan basis untuk M_{22}.

Hasil tersebut dapat diperumum untuk matriks-matriks berbeda $m \times n$ yang mempunyai entri-entri nol kecuali satu entri 1, akan membentuk basis untuk M_{mn}. ◀

CONTOH 4.32 Ruang vektor P_∞ dari semua polinomial dengan koefisien konstan tidak mempunyai himpunan berhingga yang merentang ruang vektor tersebut.

Hal tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika $S = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$, maka kombinasi linear dari S akan menghasilkan polinomial dengan derajat paling tinggi n. Dengan demikian, ada polinomial berderajat $n+1$ yang tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S. Jadi S tidak merentang ruang vektor P_{n+1}. Demikian seterusnya, tidak ada himpunan S berhingga yang merentang P_∞. ◀

DEFINISI 4.18 Jika suatu ruang vektor V mempunyai basis yang terdiri dari n vektor, maka bilangan n disebut *dimensi* dari V, ditulis $\dim(V) = n$. Jika V ruang vektor nol, maka didefinisikan $\dim(V) = 0$.

■ *Koordinat Relatif Terhadap Suatu Basis*

TEOREMA 4.19 **Ketunggalan Penyajian Basis**
Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ suatu basis untuk ruang vektor V, maka setiap vektor di V dapat ditulis secara tunggal sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S.

Bukti. Karena S merentang V, berarti untuk $\vec{v} \in V$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n.$$

Misal $\vec{v}$ juga dapat disajikan sebagai kombinasi linear

$$\vec{v} = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \cdots + \beta_n\vec{v}_n.$$

Dari dua persamaan tersebut diperoleh

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{v}_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{v}_n$$

Karena S bebas linear, persamaan di atas hanya mempunyai penyelesaian trivial, yaitu

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 - \beta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0$$

yang berarti $\alpha_k = \beta_k$ untuk semua $k = 1, 2, \ldots, n$. ■

Koefisien-koefisien yang digunakan untuk menyajikan $\vec{v}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S dinotasikan dengan

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \text{atau} \qquad (\vec{v})_S = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

dan disebut *matriks koordinat* atau *vektor koordinat* dari $\vec{v}$.

DEFINISI 4.20 Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ suatu basis untuk ruang vektor V, dan

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n$$

penyajian $\vec{v}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis S, maka $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ disebut *koordinat-koordinat* dari $\vec{v}$ relatif terhadap basis S. Vektor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ di $\mathbb{R}^n$ disebut *vektor koordinat dari $\vec{v}$ relatif terhadap S*, dinotasikan dengan

$$(\vec{v})_S = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

CONTOH 4.33 **Koordinat Relatif terhadap Basis Baku untuk $\mathbb{R}^n$**

Untuk $\vec{v}$ di $V = \mathbb{R}^n$ dan S basis baku, vektor koordnat $(\vec{v})_S$ sama dengan vektor itu sendiri, yaitu

$$\vec{v} = (\vec{v})_S.$$

Sebagai contoh, di $\mathbb{R}^3$ penyajian vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis baku $S = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ adalah

$$\vec{v} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

sehingga vektor koordinat relatifnya terhadap basis baku adalah $(v)_S = (a, b, c)$, yang sama dengan vektor $\vec{v}$. ◀

CONTOH 4.34

(a) Diketahui vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{v}_2 = (2, 9, 0), \quad \vec{v}_3 = (3, 3, 4)$$

membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$. Dapatkan koordinat relatif dari $\vec{v} = (5, -1, 9)$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

(b) Dapatkan vektor $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^3$ yang mempunyai vektor koordinat $(\vec{v})_S = (-1, 3, 2)$ relatif terhadap $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Penyelesaian.

(a) Kombinasi linear untuk $\vec{v}$ atas vektor-vektor di S adalah

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$$

atau dalam suku-suku komponen vektor

$$(5, -1, 9) = \alpha_1(1, 2, 1) + \alpha_2(2, 9, 0) + \alpha_3(3, 3, 4).$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang seletak diperoleh sistem persamaan

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & 5 \\ 2\alpha_1 & + & 9\alpha_2 & + & 3\alpha_3 & = & -1 \\ \alpha_1 & & & + & 4\alpha_3 & = & 9 \end{array}$$

Dengan menyelesaikan sistem tersebut diperoleh $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, dan $\alpha_3 = 2$. Dengan demikian vektor koordinat yang dicari adalah

$$(\vec{v})_S = (1, -1, 2).$$

(b) Berdasarkan definisi untuk $(\vec{v})_S$, didapat

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (-1)\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) \\ &= (11, 31, 7). \end{aligned}$$

◀

Latihan 4.4

1. Selidiki, manakah di antara himpunan vektor berikut ini yang membentuk basis untuk P_2.

   (a) $\{1 - 3x + 2x^2,\ 1 + x + 4x^2,\ 1 - 7x\}$

   (b) $\{4 + 6x + x^2,\ -1 + 4x + 2x^2,\ 5 + 2x - x^2\}$

   (c) $\{-4 + x + 3x^2,\ 6 + 5x + 2x^2,\ 8 + 4x + x^2\}$

   (d) $\{1 + x + x^2,\ x + x^2,\ x^2\}$

2. Tunjukkan bahwa matriks-matriks berikut ini membentuk basis untuk M_{22}:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Dapatkan vektor koordinat dari $\vec{w}$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$

   (a) $\vec{v}_1 = (1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1)$; $\vec{w} = (3, -7)$.

(b) $\vec{v}_1 = (2, -4),\ \vec{v}_2 = (3, 8);\ \vec{w} = (1, 1)$.

(c) $\vec{v}_1 = (1, 1),\ \vec{v}_2 = (0, 2);\ \vec{w} = (a, b)$.

4. Dapatkan vektor koordinat dari $\vec{w}$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$

   (a) $\vec{v}_1 = (2, -1, 3),\ \vec{v}_2 = (1, 0, 0),\ \vec{v}_3 = (2, 2, 0);\ \vec{w} = (3, 3, 3)$.

   (b) $\vec{v}_1 = (5, -12, 3),\ \vec{v}_2 = (1, 2, 3),\ \vec{v}_3 = (-4, 5, 6);\ \vec{w} = (7, -8, 9)$.

5. Dapatkan vektor koordinat dari $\vec{p}$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$.

   (a) $\vec{p}_1 = 1,\ \vec{p}_2 = x,\ \vec{p}_3 = x^2;\ \vec{p} = 4 - 3x + x^2$.

   (b) $\vec{p}_1 = 1 + x,\ \vec{p}_2 = 1 + x^2,\ \vec{p}_3 = x + x^2;\ \vec{p} = 2 - x + x^2$.

6. Tunjukkan bahwa $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ membentuk basis untuk M_{22}, dan nyatakan A sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis tersebut.

   (a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

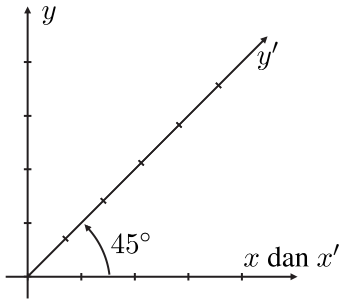
   (b) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

7. Tunjukkan bahwa $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ membentuk basis untuk P_2, dan nyatakan $\vec{p}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis tersebut.

   (a) $\vec{p}_1 = 1 + 2x + x^2,\ \vec{p}_2 = 2 + 9x,\ \vec{p}_3 = 3 + 3x + 4x^2;\ \vec{p} = 2 + 17x - 3x^2$.

   (b) $\vec{p}_1 = 1 + x + x^2,\ \vec{p}_2 = x + x^2,\ \vec{p}_3 = x^2;\ \vec{p} = 7 - x + 2x^2$.

8. Gambar berikut ini menunjukkan sistem koordinat-xy dan sistem koordinat-$x'y'$. Asumsikan digunakan skala 1 satuan pada tiap sumbu koordinat.



Dapatkan koordinat-$x'y'$ dari titik-titik dengan koordinat-xy yang diketahui berikut ini.

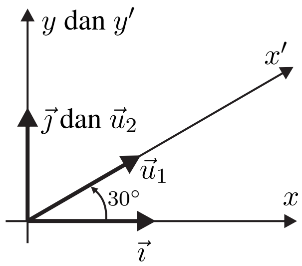
   (a) $(1, 1)$

   (b) $(1, 0)$

   (c) $(0, 1)$

   (d) (a, b)

9. Gambar berikut ini menunjukkan sistem koordinat-xy siku yang ditentukan oleh vektor-vektor basis $\vec{\imath}$ dan $\vec{\jmath}$, dan sistem koordinat-$x'y'$ yang ditentukan oleh vektor-vektor basis $\vec{u}_1$ dan $\vec{u}_2$.



Dapatkan koordinat-$x'y'$ dari titik-titik dengan koordinat-xy yang diketahui berikut ini.

   (a) $(\sqrt{3}, 1)$

   (b) $(1, 0)$

   (c) $(0, 1)$

   (d) (a, b)

4.5 Dimensi Ruang Vektor

Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai dimensi ruang vektor sebagai banyaknya vektor di dalam basisnya. Bagian ini menguraikan beberapa sifat penting berkaitan dengan basis dan dimensi ruang vektor.

Banyaknya Vektor di dalam Basis

TEOREMA 4.21 Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, maka setiap himpunan yang memuat lebih dari n vektor adalah tidak bebas linear.

Bukti. Misal $S_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ suatu himpunan di V, dengan $m > n$. Perhatikan persamaan

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + \cdots + k_m\vec{u}_m = \vec{0} \tag{4.17}$$

Karena S adalah basis untuk V, berarti setiap $\vec{u}_i$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di S, yaitu

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \alpha_{11}\vec{v}_1 + \alpha_{21}\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n1}\vec{v}_n \\
\vec{u}_2 &= \alpha_{12}\vec{v}_1 + \alpha_{22}\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{n2}\vec{v}_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\vec{u}_m &= \alpha_{1m}\vec{v}_1 + \alpha_{2m}\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_{nm}\vec{v}_n.
\end{aligned}$$

Substitusi masing-masing persamaan untuk $\vec{u}_i$ ke Persamaan 4.17 dan dengan mengelompokkan suku-sukunya menghasilkan

$$d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

dengan $d_i = \alpha_{i1}k_1 + \alpha_{i2}k_2 + \cdots + \alpha_{im}k_m$. Padahal S bebas linear, sehingga dapat diperoleh $d_i = 0$, untuk semua $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan demikian diperoleh sistem persamaan

$$\begin{array}{ccccccccc}
\alpha_{11}k_1 & + & \alpha_{12}k_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1m}k_m & = & 0 \\
\alpha_{21}k_1 & + & \alpha_{22}k_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2m}k_m & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{n1}k_1 & + & \alpha_{n2}k_2 & + & \cdots & + & \alpha_{nm}k_m & = & 0
\end{array}$$

yang berupa sistem linear homogen dengan n persamaan dan m variabel. Karena $n < m$, akibatnya sistem tersebut mempunyai penyelesaian tak-trivial, dan S_1 tidak bebas linear. ■

Berdasarkan Teorema 4.21 di atas dapat dibuktikan teorema berikut ini.

TEOREMA 4.22 Jika ruang vektor V mempunyai satu basis dengan n vektor, maka setiap basis untuk V terdiri dari n vektor.

CONTOH 4.35	$\dim(\mathbb{R}^n) = n$	Basis bakunya terdiri dari n vektor
	$\dim(P_n) = n + 1$	Basis bakunya terdiri dari $n + 1$ vektor.
	$\dim(M_{mn}) = mn$	Basis bakunya terdiri dari mn vektor.

◀

CONTOH 4.36 Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ himpunan yang *bebas linear* di ruang vektor V, maka dengan sendirinya S adalah basis untuk span(S), dan $\dim(\text{span}(S)) = r$. ◀

CONTOH 4.37 **Dimensi Ruang Penyelesaian**
Dapatkan basis dan dimensi ruang penyelesaian dari sistem homogen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \end{array}$$

Penyelesaian. Dengan eliminasi Gauss-Jordan (silakan untuk latihan) diperoleh penyelesaian umum dari sistem homogen tersebut, yaitu

$$x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = t$$

yang dapat ditulis dalam bentuk vektor

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-s - t, s, -t, 0, t) = s(-1, 1, 0, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 0, 1).$$

Hasil ini menunjukkan bahwa penyelesaian tersebut merupakan kombinasi linear dari $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$ dan $\vec{v}_2 = (-1, 0, -1, 0, 1)$, yang berarti ruang penyelesaiannya direntang oleh $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Karena $\vec{v}_1$ bukan kelipatan skalar dari $\vec{v}_2$, berarti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linear. Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ adalah basis ruang penyelesaian sistem homogen tersebut, dan mempunya dimensi 2. ◀

■ *Beberapa Teorema Fundamental*

Berikut ini diberikan beberapa teorema pokok yang mengaitkan basis dan dimensi ruang vektor. Bukti masing-masing teorema silakan untuk latihan.

TEOREMA 4.23 Misal S himpunan tak-kosong dari vektor-vektor di ruang vektor V.

(a) Jika S bebas linear dan $\vec{v}$ vektor di V yang berada di luar span(S), maka himpunan $S \cup \{\vec{v}\}$ bebas linear.

(b) Jika $\vec{v}$ vektor di S yang merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang lain di S, maka span(S) = span$(S - \{\vec{v}\})$

CONTOH 4.38 Tunjukkan bahwa $\vec{p}_1 = 1 - x^2$, $\vec{p}_2 = 2 - x^2$, dan $\vec{p}_3 = x^3$ adalah vektor-vektor yang bebas linear.

Penyelesaian. Himpunan $S = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ adalah bebas linear, sebab satu vektor di S bukan kelipatan skalar dari vektor yang lain. Vektor $\vec{p}_3$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor di S, sehingga dapat digabungkan ke dalam S untuk menghasilkan himpunan $S' = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ yang bebas linear. ◀

TEOREMA 4.24 Misal V ruang vektor berdimensi n. Jika S himpunan di V dengan n anggota, maka S adalah basis untuk V jika dan hanya jika S merentang Vatau S bebas linear.

CONTOH 4.39

(a) Jelaskan mengapa $\vec{v}_1 = (-3, 7)$ dan $\vec{v}_2 = (55)$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^2$.

(b) Jelaskan mengapa $\vec{v}_1 = (2, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0 - 3)$, dan $\vec{v}_3 = (-1, -1, 2)$ membentuk basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

(a) Karena satu vektor bukan kelipatan skalar dari vektor yang lain, berarti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linear di ruang $\mathbb{R}^2$ yang berdimensi 2. Oleh karena itu himpunan tersebut membentuk basis untuk $\mathbb{R}^2$.

(b) Himpunan $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bebas linear di bidang-xz, sedangkan $\vec{v}_3$ tidak berada di bidang-xz. Dengan demikian $S' = S \cup \{\vec{v}_3\}$ juga bebas linear di $\mathbb{R}^3$. Karena $\mathbb{R}^3$ berdimensi 3, akibatnya S' merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$. ◀

TEOREMA 4.25 Misal S himpunan dari vektor-vektor di ruang vektor V yang berdimensi n, dengan $n < +\infty$.

(a) Jika S merentang V tetapi bukan basis untuk V, maka S dapat dijadikan basis untuk V dengan menghapus beberapa vektor dari S yang sesuai.

(b) Jika S bebas linear tetapi bukan basis untuk V, maka S dapat dijadikan basis untuk V dengan menyisipkan beberapa vektor yang sesuai ke dalam S.

Bahasan pada bagian ini ditutup dengan teorema berikut ini, yang menunjukkan hubungan dimensi ruang vektor dengan dimensi ruang bagiannya.

TEOREMA 4.26 Jika W subruang dari ruang vektor V yang berdimensi hingga, maka

(a) $\dim(W) \leq \dim(V)$

(b) $W = V$ jika dan hanya jika $\dim(W) = \dim(V)$.

■ *Latihan 4.5*

1. Dapatkan basis dan dimensi dari ruang penyelesaian sistem linear homogen berikut ini.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 5x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 4x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ 6x & + & 5y & + & z & = & 0 \end{array}$$

2. Dapatkan basis subruang dari $\mathbb{R}^3$ berikut ini.

   (a) Bidang datar $3x - 2y + 5z = 0$
   (b) Bidang datar $x - y = 0$.
   (c) Garis $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$.

3. Dapatkan dimensi subruang dari $\mathbb{R}^4$ berikut ini.

   (a) Semua vektor berbentuk $(a, b, c, 0)$.
   (b) Semua vektor berbentuk (a, b, c, d) dengan $d = a + b$ dan $c = a - b$.
   (c) Semua vektor berbentuk (a, b, c, d) dengan $a = b = c = d$.

4. Dapatkan dimensi dari masing-masing ruang vektor berikut ini.

   (a) Ruang vektor dari semua matriks diagonal $n \times n$.
   (b) Ruang vektor dari semua matriks simetrik $n \times n$.
   (c) Ruang vektor dari semua matriks segitiga-atas $n \times n$.

5. Dapatkan dimensi subruang dari P_3, yang memuat semua polinomial $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ dengan $a_0 = 0$.

6. Misal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ basis untuk ruang vektor V. Tunjukkan bahwa $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, dengan $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, dan $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, adalah juga basis untuk V.

7. (a) Tunjukkan bahwa himpunan W yang memuat semua polinomial dengan $p(1) = 0$ di P_2 adalah subruang dari P_2.
   (b) Buatlah dugaan tentang dimensi W.
   (c) Pastikan kebenaran dugaan Anda dengan mendapatkan basis untuk W.

8. Misal S basis untuk ruang vektor V yang berdimensi n. Tunjukkan bahwa:

   (a) jika $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ suatu himpunan bebas linear di V, maka himpunan vektor koordinat $\{(\vec{v}_a)_S, (\vec{v}_2)_S, \ldots, (\vec{v}_r)_S\}$ merupakan himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$, dan sebaliknya.
   (b) jika $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ merentang V, maka himpunan vektor koordinat $\{(\vec{v}_1)_S, (\vec{v}_2)_S, \ldots, (\vec{v}_r)_S\}$ merentang $\mathbb{R}^n$, dan sebaliknya.

9. Dapatkan basis untuk subruang dari P_2 yang direntang oleh vektor-vektor berikut ini.

   (a) $-1 + x - 2x^2, \quad 3 + 3x + 6x^2, \quad 9.$
   (b) $1 + x, \quad x^2, \quad -2x + 2x^2, \quad -3x.$
   (c) $1 + x - 3x^2, \quad 2 + 2x - 6x^2, \quad 3 + 3x - 9x^2.$

10. Buktikan: Jika W subruang dari V dan $\dim(V) < \infty$, maka $\dim(W) < \infty$.

4.6 Perubahan Basis

Pemetaan Koordinat

Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor berdimensi-hingga V, dan jika

$$(\vec{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

adalah vektor koordinat dari $\vec{v}$ relatif terhadap S, maka pemetaan

$$\vec{v} \mapsto (\vec{v})_S \tag{4.18}$$

merupakan pemetaan satu-satu antara ruang vektor V dan ruang vektor $\mathbb{R}^n$, dan disebut *pemetaan koordinat* dari V ke $\mathbb{R}^n$. Pada bagian ini, vektor koordinat akan dituliskan dalam bentuk matriks

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Perubahan Basis

Permasalahan: Misal $\vec{v}$ suatu vektor di ruang vektor berdimensi-hingga V. Jika basis untuk V diubah dari basis B ke basis B', bagaimana hubungan vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ dan vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$?

Untuk memudahkan pemahaman, permasalahan tersebut dipandang untuk ruang vektor dua-dimensi. Sedangkan untuk n-dimensi dapat diperoleh dari perumumannya. Misalkan

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \qquad \text{dan} \qquad B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$$

berturut-turut sebagai basis lama dan basis baru. Karena $B' \subseteq V$ dan B basis untuk V, maka

$$\begin{aligned} \vec{u}'_1 &= a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 \\ \vec{u}'_2 &= c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2 \end{aligned} \tag{4.20}$$

sehingga vektor-vektor koordinat dari vektor-vektor basis baru relatif teradap basis lama adalah

$$[\vec{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Sekarang misal $\vec{v} \in V$, dan misal

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

vektor koordinat baru dari $\vec{v}$, sehingga

$$\vec{v} = k_1\vec{u}'_1 + k_2\vec{u}'_2. \tag{4.23}$$

Untuk mendapatkan koordinat lama dari $\vec{v}$, haruslah dengan menyatakan $\vec{v}$ dalam suku-suku basis lama B. Dengan substitusi (4.20) ke (4.23), diperoleh

$$\vec{v} = k_1(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) + k_2(c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2) = (k_1a + k_2c)\vec{u}_1 + (k_1b + k_2d)\vec{u}_2.$$

Jadi vektor koordinat lama dari $\vec{v}$ adalah

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan (4.22) dapat ditulis

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\vec{v}]_{B'}$$

Persamaan ini menyatakan bahwa vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ dapat diperoleh dari vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$ yang dikalikan dari kiri dengan matriks

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa kolom-kolom matriks P adalah koordinat-koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama. Hasil tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

Penyelesaian Masalah Perubahan Basis: Jika basis untuk ruang vektor V diubah dari basis lama $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ menjadi basis baru $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$, maka untuk setiap vektor $\vec{v} \in V$, vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ berhubungan dengan vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$ dalam persamaan

$$[\vec{v}]_b = P[\vec{v}]_{B'} \tag{4.24}$$

dengan kolom-kolom matriks P merupakan vektor-vektor koordinat dari vektor-vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yaitu matriks P adalah

$$P = \big[[\vec{u}'_1]_B \;\; [\vec{u}'_2]_B \;\; \ldots \;\; [\vec{u}'_n]_B \big] \tag{4.25}$$

■ *Matriks Transisi*

Matriks P dalam Persamaan 4.24 dinamakan *matriks transisi* dari B' ke B. Untuk memperjelas, sering dinotasikan dengan $P_{B' \to B}$. Jadi

$$P_{B' \to B} = \big[[\vec{u}'_1]_B \;\; [\vec{u}'_2]_B \;\; \ldots \;\; [\vec{u}'_n]_B \big] \tag{4.26}$$

dan matriks transisi dari B ke B' adalah

$$P_{B \to B'} = \big[[\vec{u}_1]_{B'} \;\; [\vec{u}_2]_{B'} \;\; \ldots \;\; [\vec{u}_n]_{B'} \big] \tag{4.27}$$

Dengan notasi ini didapat vektor koordinat dari vektor $\vec{v}$ yang diakibatkan adanya perubahan basis dari B ke B' dan sebaliknya, yaitu

$$[\vec{v}]_B = P_{B' \to B}\,[\vec{v}]_{B'} \tag{4.28}$$

$$[\vec{v}]_{B'} = P_{B \to B'}\,[\vec{v}]_B \tag{4.29}$$

CONTOH 4.40 Perhatikan basis-basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dan $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dengan

$$\vec{u}_1(1,0), \quad \vec{u}_2 = (0,1), \quad \vec{u}'_1 = (1,1), \quad \vec{u}'_2 = (2,1).$$

(a) Dapatkan matriks transisi $P_{B' \to B}$ dari B' ke B.

(b) Dapatkan matriks transisi $P_{B \to B'}$ dari B ke B'.

Penyelesaian.

(a) Untuk soal ini, akan dicari matriks-matriks koordinat dari vektor-vektor $\vec{u}_1'$ dan $\vec{u}_2'$ relatif terhadap vektor-vektor basis $\vec{u}_1$ dan $\vec{u}_2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\vec{u}_1' &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2\\ \vec{u}_2' &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2\end{aligned}$$

yang berarti

$$[\vec{u}_1']_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}_2']_B = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

dan dengan demikian didapat

$$P_{B'\to B} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) Untuk bagian ini, diperoleh

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= -\vec{u}_1' + \vec{u}_2'\\ \vec{u}_2 &= 2\vec{u}_1' - \vec{u}_2'\end{aligned}$$

yang menghasilkan

$$[\vec{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}.$$

◀

Sekarang perhatikan B dan B' basis-basis untuk ruang vektor V yang berdimensi hingga. Karena perkalian $P_{B'\to B}$ memetakan vektor-vektor koordinat relatif terhadap basis B' menjadi vektor-vektor koordinat relatif terhadap basis B, dan $P_{B\to B'}$ memetakan vektor-vektor koordinat relatif terhadap basis B menjadi vektor-vektor koordinat relatif terhadap basis B', berarti untuk setiap vektor $\vec{v}$ di V diperoleh

$$\left[\vec{v}\right]_B = P_{B'\to B}\left[\vec{v}\right]_{B'} \tag{4.30}$$

$$\left[\vec{v}\right]_{B'} = P_{B\to B'}\left[\vec{v}\right]_B \tag{4.31}$$

CONTOH 4.41 Misal B dan B' basis-basis pada Contoh 4.40. Gunnakan rumus yang sesuai untuk mendapatkan $[\vec{v}]_B$ jika diketahui

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Dari Contoh 4.40 dan Rumus 4.30 diperoleh

$$[v]_B = P_{B'\to B}[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$ ◀

■ *Invers dari Matriks Transisi*

Jika B dan B' basis-basis untuk ruang vektor V yang berdimensi hingga, maka

$$(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'}) = P_{B\to B}$$

sebab perkalian dengan $(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'})$ pertama memetakan koordinat-B dari suatu vektor menjadi koordinat-B', kemudian dilanjutkan memetakan koordinat-B' tersebut kembali ke koordinat-B semula. Dengan demikian $P_{B\to B}$ pastilah matriks identitas, yaitu

$$(P_{B'\to B})\,(P_{B\to B'}) = I \tag{4.32}$$

TEOREMA 4.27 Jika P adalah matriks transisi dari basis B' ke basis B untuk ruang vektor V yang berdimensi hingga, maka P invertibel dan P_{-1} adalah matriks transisi dari B ke B'.

Cara untuk mendapatkan matriks transisi dapat dirangkum dalam langkah-langkah berikut ini:

Langkah 1. Membentuk matriks $\left[B' \middle| B\right]$.

Langkah 2. Melakukan operasi baris elementer untuk mereduksi matriks pada Langkah 1 menjadi bentuk eselon baris tereduksi.

Langkah 3. Matriks yang dihasilkan adalah $\left[I \middle| P_{B\to B'}\right]$.

Langkah 4. Mendapatkan $P_{B\to B'}$ dari hasil Langkah 3.

Prosedur tersebut dapat digambarkan dalam bentuk diagram seperti berikut:

$$\left[\text{basis baru} \;\middle|\; \text{basis lama}\right] \xrightarrow{\text{OBE}} \left[I \;\middle|\; \text{transisi dari lama ke baru}\right] \tag{4.33}$$

CONTOH 4.42 (Mengulang Contoh 4.40)
Pada Contoh 4.40 telah dibahas basis-basis $B = \{\vec{u}_1, vu_2\}$ dan $B' = \{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dengan

$$\vec{u}_1 = (1,0),\ \vec{u}_2 = (0,1),\ \vec{u}_1' = (1,1),\ \vec{u}_2' = (2,1).$$

(a) Gunakan Rumus 4.33 untuk mendapatkan matriks transisi dari B' ke B.

(b) Gunakan Rumus 4.33 untuk mendapatkan matriks transisi dari B ke B'.

Penyelesaian.

(a) Disini B' sebagai basis lama dan B sebagai basis baru, sehingga

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Karena matriks sisi kiri sudah berupa matriks identitas, tidak perlu dilakukan reduksi lagi. Dengan ini mudah diperoleh matriks transisinya, yaitu

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

yang sesuai dengan hasil pada Contoh 4.40.

(b) Disini B sebagai basis lama dan B' sebagai basis baru, sehingga

$$[\text{basis baru} \mid \text{basis lama}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dengan mereduksi matriks ini, sampai matriks sisi kiri menjadi matriks identitas, diperoleh

$$[I \mid \text{transisi dari lama ke baru}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

sehingga matriks transisinya adalah

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

yang juga sesuai dengan hasil pada Contoh 4.40 ◀

■ *Matriks Transisi ke Basis Baku untuk* $\mathbb{R}^n$

TEOREMA 4.28 Misal $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ basis untuk ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dan misal $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ basis baku untuk $\mathbb{R}^n$. Jika vektor-vektor dalam basis-basis tersebut ditulis dalam bentuk kolom, maka

$$P_{B' \to S} = [\vec{u}_1 \; \vec{u}_2 \; \cdots \vec{u}_n] \tag{4.34}$$

Berdasarkan teorema di atas, jika

$$A = [\vec{u}_1 \; \vec{u} \; \cdots \; \vec{u}_n]$$

suatu matriks yang invertible $n \times n$, maka A dapat dipandang sebagai matriks transisi dari basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ untuk $\mathbb{R}^n$ ke basis baku untuk $\mathbb{R}$. Sebagai contoh, matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

yang invertible, merupakan matriks transisi dari basis

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{u}_2 = (2, 5, 0), \quad \vec{u}_3 = (3, 3, 8)$$

ke basis

$$ve_1 = (1,0,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,0,1)$$

◀

Latihan 4.6

1. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{w}$ relatif ke basis $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$.
   (a) $\vec{u}_1 = (1,0),\ \vec{u}_2 = (0,1);\ \vec{w} = (3,-7)$
   (b) $\vec{u}_1 = (2,-4),\ \vec{u}_2 = (3,8);\ \vec{w} = (1,1)$
   (c) $\vec{u}_1 = (1,1),\ \vec{u}_2 = (0,2);\ \vec{w} = (a,b)$
2. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{w}$ relatif ke basis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\vec{w} = (2,-1,3); \vec{u}_1 = (1,1,0),\ \vec{u}_2 = (2,2,0);\ \vec{v}_3 = (3,3,3)$
   (b) $\vec{w} = (5,-12,3); \vec{u}_1 = (1,2,3),\ \vec{u}_2 = (-4,5,6);\ \vec{v}_3 = (7,-8,9)$
3. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{p}$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ untuk P_2.
   (a) $\vec{p} = 4 - 3x + x^2; \vec{p}_1 = 1,\ \vec{p}_2 = x;\ \vec{v}_3 = x^2$
   (b) $\vec{p} = 2 - x + x^2; \vec{p}_1 = 1 + x,\ \vec{p}_2 = 1 + x^2;\ \vec{v}_3 = x + x^2$
4. Dapatkan vektor koordinat untuk A relatif terhadap basis $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ untuk ruang vektor M_{22}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Pandang vektor-vektor koordinat

$$[\vec{w}]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\vec{q}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dapatkan $\vec{w}$ jika S basis dalam Soal 2.(a)
   (b) Dapatkan $\vec{q}$ jika S basis dalam Soal 3.(a)
   (c) Dapatkan B jika S basis dalam Soal 4.
6. Perhatikan basis-basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dan $B' = \{\vec{u}_1', \vec{u}_2'\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dengan

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2' = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dapatkan matriks transisi dari B' ke B.

(b) Dapatkan matriks transisi dari B ke B'.

(c) Dapatkan vektor koordinat $[\vec{w}]_B$, dengan $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ dan gunakan (4.27) untuk mendapatkan $[\vec{w}]_{B'}$.

(d) Bandingkan hasil pekerjaan di atas dengan $[\vec{w}]_{B'}$ yang dihitung secara langsung.

7. Jika P matriks transisi dari basis B' ke basis B, dan Q matriks transisi dari B ke basis C, dapatkan matriks transisi dari B' ke C, dan dapatkan pula matriks transisi dari C ke B'.

8. Diberikan matriks

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Jika P matriks transisi dari suatu basis B ke basis baku $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$, dapatkan B.

(b) Jika P matriks transisi dari basis baku $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}3\}$ ke suatu basis B untuk $\mathbb{R}^3$, dapatkan B.

9. Misal B basis untuk $\mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_k$ membentuk himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika vektor-vektor $[\vec{v}_1]_B$, $[\vec{v}_2]_B$, $\ldots$, $[\vec{v}_k]_B$ membentuk himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$.

10. Misal B basis untuk $\mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_k$ merentang $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika vektor-vektor $[\vec{v}_1]_B$, $[\vec{v}_2]_B$, $\ldots$, $[\vec{v}_k]_B$ merentang $\mathbb{R}^n$.

4.7 Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

Pada bagian ini dibahas beberapa ruang vektor yang berkaitan dengan suatu matriks. Pembahasan ini akan memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang hubungan antara penyelesaian sistem linear dengan sifat-sifat matriks koefisiennya.

DEFINISI 4.29 Untuk matriks $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vektor-vektor

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \\ \vec{r}_2 &= \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \vec{r}_m &= \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

di $\mathbb{R}^n$ disebut *vektor-vektor baris* dari A, dan vektor-vektor

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

di $\mathbb{R}^m$ disebut *vektor-vektor kolom* dari A.

CONTOH 4.43 Untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vektor-vektor barisnya adalah

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dan vektor-vektor kolomnya adalah

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ ◀

DEFINISI 4.30 Jika A matriks $m \times n$, maka subruang dari $\mathbb{R}^n$ yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut *ruang baris* dari A, dan subruang $\mathbb{R}^m$ yang direntang oleh vektor-vektor kolom dari A disebut *ruang kolom* dari A. Ruang penyelesaian dari sistem homogen $A\vec{x} = 0$, yang merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$, disebut *ruang null* dari A.

Pada bagian ini dibahas mengenai hubungan antara penyelesaian sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dan ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks koefisien A.

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Jika $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah vektor-vektor kolom dari A, maka hasil kali $A\vec{x}$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor tersebut dengan koefisien-koefisien dari $\vec{x}$, yaitu

$$A\vec{x} = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n \tag{4.35}$$

Dengan demikian, sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$, dari m persamaan dalam n variabel, dapat ditulis sebagai

$$x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n = \vec{b}, \tag{4.36}$$

bentuk penyajian ini menunjukkan bahwa $A\vec{x} = \vec{b}$ konsisten jika dan hanya jika $\vec{b}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A. Hasil ini dirumuskan dalam teorema berikut:

TEOREMA 4.31 Sistem persamaan linear $A\vec{x} = \vec{b}$ konsisten jika dan hanya jika $\vec{b}$ berada di ruang kolom dari A.

CONTOH 4.44 Misal $A\vec{x} = \vec{b}$ adalah sistem persamaan linear

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa $\vec{b}$ berada di ruang kolom dari A dengan menyatakan $\vec{b}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A.

Penyelesaian. Dengan mengerjakan eliminasi Gauss (silakan untuk latihan) diperoleh

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Selanjutnya dengan hasil tersebut, dapat diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

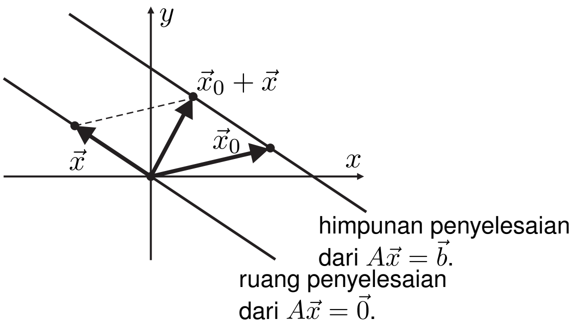
yang berarti $\vec{b}$ merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A. ◀

Pada bagian terdahulu telah dibahas bahwa penyelesaian umum dari sistem linear yang konsisten $A\vec{x} = \vec{b}$ dapat diperoleh dengan menambahkan penyelesaian tertentu dari sistem tersebut ke penyelesaian umum sistem homogen yang bersesuaian $A\vec{x} = \vec{0}$. Dengan menggunakan pengertian ruang null dari A, sifat tersebut dapat dinyatakan juga sebagai teorema berikut ini.

TEOREMA 4.32 Jika $\vec{x}_0$ sebarang penyelesaian dari sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$, dan jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ basis ruang null dari A, maka setiap penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{b}$ dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k \tag{4.37}$$

Sebaliknya, untuk setiap pemilihan skalar-skalar $c_1, c_2, \ldots, c_k$, vektor $\vec{x}$ dalam (4.37) adalah penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{b}$.



Gambar 4.4

Persamaan 4.37 merupakan rumus penyelesaian umum dari $A\vec{x} = \vec{b}$. Vektor $\vec{x}_0$ dalam rumus tersebut dinamakan *penyelesaian khusus* dari $A\vec{x} = \vec{b}$, sedangkan bagian selebihnya dalam rumus tersebut dinamakan *penyelesaian umum* dari $A\vec{x} = \vec{0}$.

Secara geometrik, himpunan penyelesaian dari sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dapat dipandang sebagai pergeseran (translasi) ruang penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{0}$ sejauh $\vec{x}_0$. Lihat Gambar 4.4.

CONTOH 4.45 Telah dibahas pada bagian sebelumnya, penyelesaian sistem linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh bahwa penyelesaian umum $\vec{x}$ dari sistem tak-homogen dan penyelesaian umum $\vec{x}_h$ dari sistem homogen yang terkait mempunyai hubungan

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\vec{x}_0} + \underbrace{r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{x}_h}$$

Perhatikan bahwa vektor-vektor anggota $\vec{x}_h$, yaitu untuk semua skalar r, s, dan t, membentuk basis untuk ruang penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{0}$. ◀

■ *Basis-basis untuk Ruang Baris, Ruang kolom, dan Ruang Null*

Dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks A tidak akan berpengaruh pada himpunan penyelesaian dari sistem linear $A\vec{x} = \vec{0}$, atau dengan kata lain, tidak mengubah ruang null dari A. Hal ini dirumuskan dalam teorema berikut ini.

TEOREMA 4.33 Operasi-operasi baris elementer pada suatu matriks tidak berpengaruh pada ruang null maupun ruang baris dari matriks tersebut.

Dengan memperhatikan teorema di atas, tentu akan memunculkan pertanyaan tentang ruang kolom. Memang, yang sebenarnya adalah operasi baris elementer akan berpengaruh pada ruang kolom suatu matriks. Untuk meyakinkan akan hal tersebut, bandingkan dua matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks B dapat diperoleh dari matriks A dengan menambahkan -2 kali baris-1 ke baris-2. Jelas bahwa operasi tersebut mengubah ruang kolom matriks A, karena ruang kolom dari A memuat semua kelipatan skalar dari $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, sedangkan ruang kolom matriks B memuat semua kelipatan skalar dari $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

CONTOH 4.46 Dapatkan basis ruang null dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Ruang null dari A adalah ruang penyelesaian dari sistem homogen $A\vec{x} = \vec{0}$, yang telah ditunjukkan dalam Contoh 4.45 mempunyai basis

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

◀

Perhatikan bahwa vektor-vektor basis $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ pada Contoh 4.46 adalah vektor-vektor yang dihasilkan dengan menetapkan salah satu parameter dalam penyelesaian umum sama dengan 1 dan yang lainnya sama dengan 0.

TEOREMA 4.34 Jika matriks R dalam bentuk eselon baris, maka vektor-vektor baris dengan 1 utama (vektor baris tak-nol) membentuk basis untuk ruang baris dari R, dan vektor-vektor kolom dengan 1 utama membentuk basis untuk ruang kolom dari R.

CONTOH 4.47 Matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dalam bentuk eselon baris. Dengan demikian mudah diperoleh bahwa vektor-vektor

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang baris dari R, dan vektor-vektor

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{c}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang kolom dari R. ◀

CONTOH 4.48 Dapatkan basis untuk ruang baris dari matriks

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4\\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2\\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7\\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4\end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Karena operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu matriks, basis ruang baris matriks A dapat diperoleh dengan melakukan operasi baris elementer pada matriks A terlebih dahulu, untuk membawa matriks A ke bentuk eselon baris, yaitu

$$R = \begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh vektor-vektor

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4\end{bmatrix}\\ \vec{r}_2 &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6\end{bmatrix}\\ \vec{r}_3 &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

yang membentuk basis untuk ruang baris matriks A. ◀

Untuk memperoleh basis ruang kolom matriks A, dapat dimulai dengan Teorema 4.34 yang menunjukkan bahwa *operasi baris elementer tidak mempengaruhi kebergantungan antar vektor-vektor kolom.* Untuk jelasnya, misalkan $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ vektor-vektor kolom yang bergantung linear dari A, yang berarti $c_1, c_2, \ldots, c_k$ yang tidak semua nol sehingga

$$c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + \cdots + c_k\vec{w}_k = \vec{0}. \tag{4.38}$$

Ketika dilakukan operasi baris elementer pada A, vektor-vektor tersebut berubah menjadi vektor-vektor kolom baru $\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, \ldots, \vec{w}'_k$. Vektor-vektor baru ini pasti juga bergantung linear; untuk menunjukkan hal tersebut perhatikan persamaan

$$c_1\vec{w}'_1 + c_2\vec{w}'_2 + \cdots + c_k\vec{w}'_k = \vec{0}$$

dengan koefisien-koefisien sebagaimana dalam Persamaan (4.38). Dengan cara serupa, dapat pula ditunjukkan bahwa operasi baris elementer mempertahankan hubungan bebas linear antar vektor-vektor kolom. Hasil ini dapat dirumuskan dalam teorema berikut ini.

TEOREMA 4.35 Jika A dan B dua matriks yang ekivalen baris, maka

(a) Suatu himpunan vektor kolom dari A adalah bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang bersesuaian dari B adalah bebas linear.

(b) Suatu himpunan vektor kolom dari A membentuk basis untuk ruang kolom dari A jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang bersesuaian dari B membentuk basis untuk ruang kolom dari B.

CONTOH 4.49 Dapatkan basis ruang kolom dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Telah diuraikan dalam Contoh 4.48 bahwa matriks

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

adalah bentuk eselon baris dari A. Berdasarkan Teorema 4.35(b), jika dapat diperoleh himpunan vektor di R yang membentuk basis untuk ruang kolom dari R, maka vektor-vektor kolom yang bersesuaian di A akan membentuk basis untuk ruang kolom dari A.

Perhatikan bahwa kolom-1, kolom-3, dan kolom-5 dari R memuat 1 utama dari vektor-vektor barisnya, sehingga vektor-vektor

$$\vec{c}_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2' = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_5' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

membentuk basis ruang kolom dari R. Dengan demikian veketor-vektor kolom yang bersesuaian dari A, yaitu

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

merupakan basis untuk ruang kolom matriks A. ◀

CONTOH 4.50 Dapatkan basis subruang di $\mathbb{R}^5$ yang direntang oleh vektor-vektor:

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3),\ \vec{v}_2 = (2, -5, -3, -2, -6),\ \vec{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0),\ \vec{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6).$$

Penyelesaian. Subruang yang direntang oleh vektor-vektor tersebut adalah ruang baris dari matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi matriks ini menjadi bentuk eselon baris, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor-vektor baris tak-nol pada matriks tersebut adalah

$$\vec{w}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \quad \vec{w}_2 = (0, 1, 3, 2, 0), \quad \vec{w}_3 = (0, 0, 1, 1, 0).$$

Vektor-vektor tersebut membentuk basis untuk ruang baris, yang berarti juga membentuk basis untuk subruang di $\mathbb{R}^5$ yang direntang oleh $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, dan $\vec{v}_4$. ◀

■ *Basis yang Dibentuk dari Vektor-vektor Baris dan Kolom Suatu Matriks*

Bagian ini membahas cara mendapatkan basis untuk ruang baris dari matriks A yang terdiri dari vektor-vektor baris dari A, dan basis untuk ruang kolom matriks A yang terdiri dari vektor-vektor kolom dari A.

Pada Contoh 4.49 dihasilkan basis untuk ruang kolom dari A yang terdiri dari vektor-vektor kolom dari A, sedangkan pada Contoh 4.48 dihasilkan basis untuk ruang baris dari A, tetap tidak memuat vektor-vektor baris dari A. Contoh berikut ini menunjukkan cara mendapatkan basis untuk ruang baris dari suatu matriks yang dibentuk dari vektor-vektor barisnya sendiri.

CONTOH 4.51 Dapatkan basis untuk ruang baris dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian. Terlebih dahulu akan dicari basis untuk ruang kolom matriks A^T, yaitu

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 15 & 18 \\ 0 & -2 & 10 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

dan dengan mereduksi matriks tersebut menjadi bentuk eselon baris, diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tampak bahwa kolom-1, kolom-2, dan kolom-4 memuat 1 utama, sehingga vektor-vektor kolom yang bersesuaian di A^T membentuk basis untuk ruang kolom dari A^T; yaitu

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Trnaspose dari vektor-vektor kolom tersebut mengasilkan vektor-vektor baris

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \; \vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

yang membentuk basis untuk ruang baris dari matriks A. ◀

Contoh berikut ini adalah perumuman dari pembahasan contoh-contoh di atas.

Permasalahan di $\mathbb{R}^n$
Diketahui himpunan vektor $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ di $\mathbb{R}^n$, dapatkan himpunan bagian dari S yang membentuk basis untuk span(S), dan nyatakan vektor-vektor di S yang bukan vektor basis sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis.

CONTOH 4.52

(a) Dapatkan himpunan bagian dari himpunan vektor $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ dengan

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \quad \vec{v}_2 = (2, -5, -3, 6), \quad \vec{v}_3 = (0, 1, 3, 0),$$
$$\vec{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \quad \vec{v}_5 = (5, -8, 1, 2),$$

yang membentuk basis untuk span(S).

(b) Nyatakan masing-masing vektor di S yang bukan vektor basis, sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis.

Penyelesaian.

(a) Terlebih dahulu dibangun matriks dengan kolom-kolom $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_5$, yaitu

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 & \vec{v}_5 \end{matrix} \end{array} \tag{4.39}$$

Dengan mereduksi matriks (4.39) ke bentuk eselon baris tereduksi dan dengan memisalkan vektor-vektor kolom yang dihasilkan sebagai $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$, $\vec{w}_4$, dan $\vec{w}_5$ diperoleh

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{w}_4 & \vec{w}_5 \end{matrix} \end{array} \tag{4.40}$$

Perhatikan bahwa 1 utama muncul di kolom-1, kolom-2, dan kolom-4, yang berarti

$$\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_4\}$$

adalah basis untuk ruang kolom matriks (4.40), dan akibatnya

$$\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_4\}$$

adalah basis untuk ruang kolom dari matriks (4.39).

(b) Dari matriks (4.40) dapat diperoleh hubungan berikut:

$$\begin{aligned}\vec{w}_3 &= 2\vec{w}_1 - \vec{w}_2\\ \vec{w}_5 &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_4\end{aligned}$$

Hubungan yang bersesuaian pada (4.39) adalah

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2\\ \vec{v}_5 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_4\end{aligned}$$

◀

■ Latihan 4.7

1. Jelaskan apakah $\vec{b}$ berada di ruang kolom dari A; dan jika ya, nyatakan $\vec{b}$ sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A.

   (a) $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & -6\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}-2\\ 10\end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$;

   (c) $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix}4\\ 3\\ 5\\ 7\end{bmatrix}$;

2. Misal $\vec{x}_1 = -1$, $\vec{x}_2 = 2$, $\vec{x}_3 = 4$, $\vec{x}_4 = -3$ adalah penyelesaian sistem linear tak-homogen $A\vec{x} = \vec{b}$, dan diketahui penyelesaian dari sistem homogen $A\vec{x} = \vec{0}$, yaitu

   $$\vec{x}_1 = -3r + 4s, \quad \vec{x}_2 = r - s, \quad \vec{x}_3 = r, \quad \vec{x}_4 = s.$$

   (a) Dapatkan bentuk vektor untuk penyelesaian umum dari $A\vec{x} = \vec{0}$.
   (b) Dapatkan bentuk vektor untuk penyelesaian umum dari $A\vec{x} = \vec{b}$.

3. Dapatkan bentuk vektor dari penyelesaian umum sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$; kemudian gunakan hasilnya untuk mendapatkan bentuk vektor dari penyelesaian umum sistem homogen $A\vec{x} = \vec{0}$.

   (a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1\\ 2x_1 - 6x_2 &= 2\end{aligned}$

   (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1\\ x_1 \qquad + x_3 &= -2\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3\end{aligned}$

   (c) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1\\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1\\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= -3\end{aligned}$

   (d) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4\\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1\\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3\\ 4x_1 - 7x_2 \qquad - 5x_4 &= -5\end{aligned}$

4. Dapatkan basis untuk ruang null dari matriks A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

5. Untuk matriks-matriks pada Soal 4.

   (a) Dapatkan basis untuk ruang baris dari A dengan mereduksi matriks A ke bentuk eselon baris.

   (b) Dapatkan vektor-vektor baris dari matriks A yang membentuk basis untuk ruang baris dari A.

6. Dapatkan basis untuk subruang di $\mathbb{R}^4$ yang direntang oleh vektor-vektor berikut ini.

   (a) $(1, 1, -4, -3),\ (2, 0, 2, -2),\ (2, -1, 3, 2)$.

   (b) $(-1, 2, -2, 0),\ (3, 3, 6, 0),\ (9, 0, 0, 3)$.

   (c) $(1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1),\ (-2, 0, 2, 2),\ (0, -3, 0, 3)$.

7. Diberikan himpunan $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ dari vektor-vektor berikut ini. Dapatkan himpunan bagian dari S yang membentuk basis untuk ruang vektor yang direntang oleh vektor-vektor di S. Kemudian nyatakan vektor di S yang bukan vektor basis, sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor basis.

   (a) $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-3, 3, 7, 1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 3, 9, 3)$, $\vec{v}_4 = (-5, 3, 5, -1)$.

   (b) $\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\vec{v}_2 = (2, -4, 0, 6)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, 2, 0)$, $\vec{v}_4 = (0, -1, 2, 3)$.

   (c) $\vec{v}_1 = (1, -1, 5, 2)$, $\vec{v}_2 = (-2, 3, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (4, -5, 9, 4)$, $\vec{v}_4 = (0, 4, 2, -3)$, $\vec{v}_5 = (-7, 18, 2, -8)$.

8. Buktikan bahwa vektor-vektor baris dari matriks A berukuran $n \times n$ yang invertible membentuk basis untuk $\mathbb{R}^n$.

9. Bangunlah suatu matriks yang memiliki ruang null yang terdiri dari semua kombinasi linear dari vektor-vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

10. Dapatkan matriks 3×3 yang mempunyai ruang null berupa:

    (a) satu titik (b) satu garis lurus (c) satu bidang datar

4.8 Rank, Nullity, dan Ruang Matriks Fundamental

Pada bagian sebelumnya telah dibahas hubungan antara sistem persamaan linear dengan ruang baris, ruang kolom, dan ruang null dari matriks koefisiennya. Bagian ini membahas tentang dimensi ruang-ruang tersebut.

■ Dimensi Ruang Baris dan Ruang Kolom

Pada Contoh 4.48 dan 4.49 diketahui bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

mempunyai ruang baris dan ruang kolom dengan tiga vektor basis dan ini berarti dua ruang tersebut berdimensi-3. Hal ini bukanlah suatu kebetulan, tetapi memang susuai dengan teorema berikut ini.

TEOREMA 4.36 Ruang baris dan ruang kolom dari matriks A mempunyai dimensi yang sama.

Bukti. Misal R adalah bentuk eselon baris dari A. Berdasarkan Teorema 4.33 dan Teorema 4.34 bahwa

$$\dim(\text{ruang baris dari } A) = \dim(\text{ruang baris dari } R)$$
$$\dim(\text{ruang kolom dari } A) = \dim(\text{ruang kolom dari } R)$$

sehingga tinggal ditunjukkan bahwa ruang baris dan ruang kolom dari R mempunyai dimensi sama. Dimensi ruang baris dari R adalah banyaknya baris tak-nol di R, dan dimensi ruang ruang kolom adalah banyaknya 1 utama. Padahal banyaknya baris tak-nol adalah sama dengan banyaknya 1 utama, sehingga dapat disimpulkan dimensi ruang baris dan ruang kolom dari R adalah sama. ■

■ Rank dan Nullity

DEFINISI 4.37 Dimensi ruang baris dan ruang kolom dari matriks A disebut *rank* dari A, dan notasikan dengan $\text{rank}(A)$; dimensi ruang null dari A disebut *nullity* dari A dan dinotasikan dengan $\text{nullity}(A)$.

CONTOH 4.53 Dapatkan rank dan nullity dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian. Bentuk eselon baris tereduksi dari A adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

Karena matriks tersebut mempunyai dua 1 utama, berarti rank$(A) = 2$. Untuk mengetahui nullity dari A, harus diketahui dimensi ruang penyelesaian dari sistem linear $A\vec{x} = \vec{0}$. Sistem tersebut dapat diselesaikan dengan mereduksi matriks augmented ke bentuk eselon baris terduksi, dan hasilnya adalah sama dengan matriks pada (4.41), kecuali ada tambahan satu kolom nol pada kolom terakhir. Dengan demikian diperoleh sistem persamaan yang bersesuaian, yaitu

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + \ \ 5x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut untuk variabel utama, diperoleh

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6 \\ x_2 &= 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - \ \ 5x_6 \end{aligned}$$

yang menghasilkan penyelesaian umum

$$\begin{aligned} x_1 &= 4r + 28s + 37t - 13u \\ x_2 &= 2r + 12s + 16t - 5u \\ x_3 &= r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= t \\ x_6 &= u \end{aligned}$$

atau dalam bentuk vektor kolom, diperoleh

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Karena empat vektor di ruas kanan (4.42) membentuk basis untuk ruang penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{0}$, berarti nullity$(A) = 4$. ◄

CONTOH 4.54 **Nilai Maksimum untuk Rank**

Berapakah nilai maksimum yang mungkin dari rank matriks $m \times n$ yang tidak persegi?

Penyelesaian. Karena vektor-vektor baris dari A berada di $\mathbb{R}^n$ dan veketor-vektor kolom dari A berada di $\mathbb{R}^m$, berarti dimensi ruang baris dari A maksimum adalah n dan dimensi ruang kolom dari A maksimum adalah m. Sedangkan dimensi ruang baris dan ruang kolom dari A adalah sama, dan sama dengan rank(A). Dengan demikian diperoleh

$$\text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$ ◄

TEOREMA 4.38 Teorema Dimensi untuk Matriks
Jika A matriks dengan n kolom, maka

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n. \tag{4.43}$$

Bukti: [silakan untuk latihan]

CONTOH 4.55 Matriks

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

mempunyai 6 kolom, sehingga $\text{rank}(A)+\text{nullity}(A) = 6$. Hal ini sesuai dengan Contoh 4.53, yang menunjukkan bahwa $\text{rank}(A) = 2$ dan $\text{nullity}(A) = 4$. ◀

TEOREMA 4.39 Jika A matriks $m \times n$, maka

(a) $\text{rank}(A)$ sama dengan banyaknya variabel utama dalam penyelesaian umum dari sistem homogen $A\vec{x} = \vec{0}$.

(b) $\text{nullity}(A)$ sama dengan banyaknya parameter dalam penyelesaian umum dari sistem homogen $A\vec{x} = \vec{0}$.

Berikut ini, ditambahkan delapan sifat dari A matriks persegi yang invertibel dengan yang kesemuanya ekivalen dengan tujuh sifat matriks invertibel yang telah dibahas pada Bab 2.

TEOREMA 4.40 Jika A matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekivalen

(a) A invertibel.

(b) Vektor-vektor kolom dari A bebas linear.

(c) Vektor-vektor baris dari A bebas linear.

(d) Vektor-vektor kolom dari A merentang $\mathbb{R}^n$.

(e) Vektor-vektor baris dari A merentang $\mathbb{R}^n$.

(f) Vektor-vektor kolom dari A membentuk basis dari $\mathbb{R}^n$.

(g) Vektor-vektor baris dari A membentuk basis dari $\mathbb{R}^n$.

(h) $\text{rank}(A) = n$.

(i) $\text{nullity}(A) = 0$.

Dua teorema yang berikut ini mengemukakan sifat penyelesaian suatu sistem linear yang berkaitan dengan banyaknya persamaan dan banyaknya variabel dalam sistem tersebut.

TEOREMA 4.41 Jika $A\vec{x} = \vec{b}$ sistem linear yang konsisten dari m persamaan dan n variabel, dan $\text{rank}(A) = r$, maka penyelesaian umum dari sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ memuat $n - r$ parameter.

TEOREMA 4.42 Misal A matriks berukuran $m \times n$.

(a) Jika $m > n$, maka sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ konsisten untuk sekurang-kurangnya satu vektor $\vec{b}$ di $\mathbb{R}^n$.

(b) Jika $m < n$, maka untuk setiap vektor $\vec{b}$ di $\mathbb{R}^m$ sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ mempunyai tak-hingga banyak penyelesaian atau tidak konsisten.

CONTOH 4.56

(a) Bagaimana tentang penyelesaian sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dari 7 persamaan dalam 5 variabel jika rank$(A) = 4$?

(b) Bagaimana tentang penyelesaian sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ dari 5 persamaan dalam 7 variabel jika rank$(A) = 4$?

Penyelesaian.

(a) Sistem tersebut mempunyai penyelesaian untuk vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^7$, dan untuk $\vec{b}$ tersebut banyaknya parameter dalam penyelesaian umumnya adalah $n - r = 5 - 4 = 1$.

(b) Sistem tersebut kemungkinan kosisten atau tidak konsisten; jika konsisten untuk suatu vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$, maka penyelesaian umum dari sistem tersebut memuat $n - r = 7 - 4 = 3$ parameter. ◀

CONTOH 4.57 Sistem linear

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= b_1 \\ x_1 - x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 + 2x_2 &= b_4 \\ x_1 + 3x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

memuat persamaan lebih banyak dibandingkan variabelnya, sehingga tidak konsisten untuk semua kemungkinan nilai $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{b}_4$, dan $\vec{b}_5$. Tetapi sistem tersebut konsisten untuk nilai $\vec{b}$ tertentu. Syarat-syarat agar sistem tersebut konsisten dapat diperoleh dengan menyelesaikan sistem tersebut menggunakan eliminasi Gauss-Jordan (Silakan untuk latihan); dan diperoleh matriks augmented dari sistem tersebut menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 3b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - 4b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_5 - 5b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$$

Jadi, sistem tersebut konsisten jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat:

$$\begin{aligned} 2b_1 - 3b_2 + b_3 &= 0 \\ 3b_1 - 4b_2 + b_4 &= 0 \\ 4b_1 - 5b_2 + b_5 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaian sistem linear homogen ini, dihasilkan

$$b_1 = 5r - 4s,\quad b_2 = 4r - 3s,\quad b_3 = 2r - s,\quad b_4 = r,\quad b_5 = s,$$

dengan r dan s sebarang skalar. ◀

■ *Ruang Fundamental suatu Matriks*

Mudah ditunjukkan bahwa ruang kolom dari matriks A adalah sama dengan ruang baris dari A^T, dan ruang baris dari A sama dengan ruang kolom dari A^T. Secara umum, terdapat empat ruang yang berbeda yang berkaitan dengan matriks A, yaitu

ruang baris dari A ruang kolom dari A

ruang null dari A ruang null dari A^T.

Empat ruang tersebut dinamakan *ruang-ruang fundamental* dari A.

TEOREMA 4.43 Untuk sebarang matriks A, berlaku $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$

DEFINISI 4.44 Misal W subruang dari $\mathbb{R}^n$. Himpunan semua vektor di $\mathbb{R}^n$ yang ortogonal pada tiap vektor di W disebut *komplemen ortogonal* dari W dan dinotasikan dengan $W^\perp$.

TEOREMA 4.45 Jika W subruang dari $\mathbb{R}^n$, maka

(a) $W^\perp$ adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$.

(b) $W \cap W^\perp = \left\{\vec{0}\right\}$.

(c) $(W^\perp)^\perp = W$.

TEOREMA 4.46 Jika A matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekivalen:

(a) A invertbel.

(b) Komplemen ortogonal untuk ruang null dari A adalah $\mathbb{R}^n$.

(c) Komplemen ortogonal untuk ruang baris dari A adalah $\{\vec{0}\}$.

■ *Latihan 4.8*

1. Dapatkan rank dan nullity dari matriks A, dan tentukan dimensi ruang-ruang fundamentalnya.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -6 & 0 & 6 & 5 \\ -2 & 9 & 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

2. Untuk matriks-matriks pada Soal 1, dapatkan banyaknya variabel utama dan banyaknya parameter dalam penyelesaian dari $A\vec{x} = \vec{0}$ tanpa menyelesaikan sistem persamaannya.

3. Apakah syarat-syarat untuk $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{b}_4$, dan $\vec{b}_5$ agar sistem linear

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= b_1 \\ x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \\ x_1 - 4x_2 &= b_4 \\ x_1 + 5x_2 &= b_5 \end{aligned}$$

mempunyai penyelesaian?

4. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa rank$(A) = 2$ jika dan hanya jika sekurang-kurangnya salah satu determinan berikut ini

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix},$$

tidak nol.

5. Jelaskan bahwa untuk matriks A berikut ini, rank(A) bergantung pada t.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{bmatrix}$

6. Dapatkan nilai-nilai r dan s sehingga matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) mempunyai rank 1; (b) mempunyai rank 2.

7. Buktikan: Jika $k \neq 0$, maka A dan kA mempunyai rank yang sama.

8. (a) Berikan contoh matriks A berukurran 3×3 yang mempunyai ruang kolom berupa bidang datar yang melalui titik asal di ruang-3.
   (b) Berupa objek geometrik apakah ruang null dari matriks A?
   (c) Berupa objek geometrik apakah ruang baris dari matriks A?

9. Buatlah contoh matriks-matriks A dan B dengan rank$(A) =$ rank(B), tetapi rank$(A^2) \neq$ rank(B^2).

10. Buktikan: Jika suatu matriks A tidak persegi, maka salah satu vektor-vektor baris atau vektor-vektor kolom dari A bebas linear.

4.9 Transformasi Matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$

Bagian ini membahas tentang fungsi dalam bentuk $\vec{w} = F(\vec{x})$, dengan variabel bebas $\vec{x}$ berupa vektor di $\mathbb{R}^n$ dan variabel tak-bebas $\vec{w}$ berupa vektor di $\mathbb{R}^m$.

Fungsi dan Transformasi

DEFINISI 4.47 Pandang V dan W dua ruang vektor. Suatu fungsi f dengan domain V dan kodomain W, disebut *transformasi* dari V ke W atau f *memetakan* V ke W, dan dituliskan dengan

$$f : V \to W$$

Khusus untuk $V = W$, transfirmasi juga disebut *operator* pada V.

Pada bagian khusus dibahas transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$; transformasi dari ruang vektor yang lebi umum dibahas pada bagian selanjutnya. Untuk menggambarkan transformasi tersebut, misalkan $f_1, f_2, \ldots, f_m$ fungsi-fungsi bernilai-real dalam n variabel, yaitu

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 & = & f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ w_m & = & f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \tag{4.44}$$

yang menunjukkan m persamaan yang mengaitkan satu titik $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ di $\mathbb{R}^m$ dengan titik $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$, yakni mendefinisikan suatu transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$. Jika transformasi tersebut dilambangkan dengan T, maka $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dan

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m).$$

Transformasi Matriks

Dalam hal khusus untuk semua persamaan dalam (4.44) berupa persamaan linear, dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ w_2 & = & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_m & = & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \tag{4.45}$$

yang dapat ditulis dalam notasi matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

atau secara singkat dapat ditulis sebagai

$$\vec{w} = A\vec{x} \tag{4.47}$$

Sistem linear tersebut dipandang sebagai transformasi yang memetakan vektor kolom $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ menjadi vektor kolom $\vec{w}$ di $\mathbb{R}^m$. dengan mengalikan $\vec{x}$ dengan A dari kiri. Ini yang disebut *transformasi matriks* (atau *operator matriks* jika $m = n$), dan dinotasikan dengan $T_A : R^n \to \mathbb{R}^m$. Denga notasi ini, Persamaan 4.47 dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{w} = T_A(\vec{x}) \tag{4.48}$$

Transformasi matriks T_A disebut *perkalian dengan* A, dan matriks A disebut *matriks baku* untuk transformasi tersebut.

Untuk selanjutnya, kadang (4.48) juga ditulis dalam bentuk

$$\vec{x} \xrightarrow{T_A} \vec{w} \tag{4.49}$$

yang dibaca "T_A memetakan $\vec{x}$ ke $\vec{w}$."

CONTOH 4.58 Transformasi matriks $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan dengan sistem persamaan

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 \\ w_2 &= 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \\ w_3 &= 5x_1 - x_2 + 4x_3 \end{aligned} \tag{4.50}$$

dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

Dalam hal ini, matriks baku untuk T adalah

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Peta dari titik (x_1, x_2, x_3, x_4) dapat dihitung secara langsung dengan menggunakan (4.50) atau (4.51). Sebagai contoh, misalkan

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -3, 0, 2)$$

kemudian dengan substitusi ke Persamaan 4.50 menghasilkan $w_1 = 1$, $w_2 = 3$, dan $w_3 = 8$, atau dengan menggunakan Persamaan 4.51, diperoleh

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

◄

Kadang transformasi matriks diberikan tanpa menggunakan nama matriks yang digunakan. Untuk kasus ini, matriks baku untuk $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dilambangkan dengan $[T]$. Jadi persamaan

$$T(\vec{x}) = [T]\vec{x} \tag{4.52}$$

menyatakan bahwa T adalah transformasi matriks dengan matriks baku $[T]$, dan peta dari $\vec{x}$ dengan transformasi tersebut adalah hasil kali matriks $[T]$ dengan vektor kolom $\vec{x}$.

■ *Sifat-sifat Transformasi Matriks*

Sifat-sifat dasar transformasi dalam teorema berikut ini didasarkan pada sifat perkalian matriks.

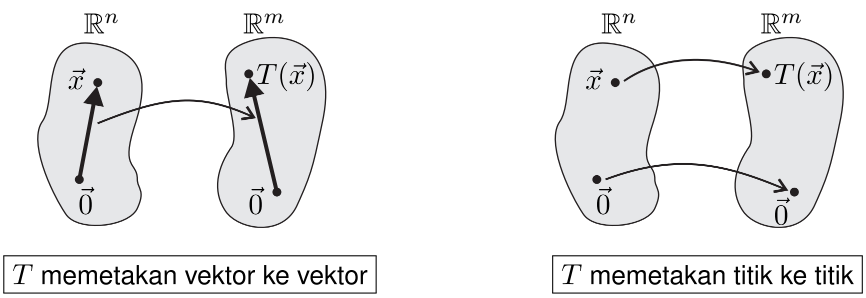
TEOREMA 4.48 Untuk setiap matriks A, transformasi matriks $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mempunyai sifat-sifat berikut ini untuk setiap $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dan untuk sebarang skalar k:

(a) $T_A(\vec{0}) = \vec{0}$

(b) $T_A(k\vec{u}) = kT_A(\vec{u})$

(c) $T_A(\vec{u} + \vec{v}) = T_A(\vec{u}) + T_A(\vec{v})$

Bentuk penyajian $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ berturut-turut dapat dipandang sebagai vektor maupun titik di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$. Secara geometrik, transformasi $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ memetakan tiap vektor (atau tiap titik) di $\mathbb{R}^n$ menjadi satu vektor (atau satu titik) di $\mathbb{R}^m$. Lihat Gambar 4.5.



Gambar 4.5

TEOREMA 4.49 Jika $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dan $T_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dua transformasi matriks, dan $T_A(\vec{x}) = T_B(\vec{x})$ untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, maka $A = B$.

Bukti. Kesamaan $T_A(\vec{x}) = T_B(\vec{x})$ untuk setiap $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ sama artinya dengan

$$A\vec{x} = B\vec{x}, \quad \text{utuk setiap } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Karena vektor-vektor basis baku $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ adalah juga vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, berarti juga berlaku

$$A\vec{e}_j = B\vec{e}_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.53}$$

Karena setiap entri $\vec{e}_j$ adalah nol kecuali entri ke-j yang bernilai 1, hasil kali $A\vec{e}_j$ adalah kolom ke-j dari A, dan $B\vec{e}_j$ adalah kolom ke-j dari B. Jadi kolom-kolom A sama dengan kolom-kolom B, dan akibatnya $A = B$. ■

CONTOH 4.59 **Transformasi Nol dan Operator Identitas**

(a) Jika $\boldsymbol{O}$ adalah matriks nol berukuran $m \times n$, maka

$$T_{\boldsymbol{O}}(\vec{x}) = \boldsymbol{O}\vec{x} = \vec{0}$$

yang T berarti memetakan setiap vektor $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ menjadi vektor $\vec{0}$ di $\mathbb{R}^m$. Oleh karena itu $T_{\boldsymbol{O}}$ disebut *transformasi nol* dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$.

(b) Jika I adalah matriks identitas $n \times n$, maka

$$T_I(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

yaitu T_I memetakan setiap vektor $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ menjadi $\vec{x}$ sendiri, sehingga T_I disebut *operator identitas* pada $\mathbb{R}^n$. ◀

■ *Prosedur untuk Mendapatkan Matriks Baku*

Untuk mencari matriks baku suatu transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ dapat dilakukan dengan mengamati hasil transformasi tersebut pada vektor-vektor basis baku untuk $\mathbb{R}^n$. Misalkan A tidak diketahui dan

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$$

adalah vektor-vektor basis untuk $\mathbb{R}^n$. Vektor-vektor tersebut oleh T_A ditransformasi menjadi

$$T_A(\vec{e}_1) = A\vec{e}_1, \;\; T_A(\vec{e}_2) = A\vec{e}_2, \;\; \ldots, \;\; T_A(\vec{e}_n) = A\vec{e}_n,$$

Karena $A\vec{e}_j$ adalah kolom ke-j dari A (jelaskan!), dapat diperoleh matriks A, yaitu

$$A = \big[T_A(\vec{e}_1) \big| T_A(\vec{e}_2) \big| \cdots \big| T_A(\vec{e}_n)\big]$$

Berikut ini diberikan contoh-contoh matriks baku untuk beberapa transformasi atau operator yang umum digunakan.

Operator Pencerminan pada $\mathbb{R}^2$

Operator	Peta dari $\vec{e}_1$ dan $\vec{e}_2$	Matriks Baku
Pencerminan pada sumbu-y $T(x,y) = (-x,y)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (-1,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (0,1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Pencerminan pada sumbu-x $T(x,y) = (x,-y)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (1,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (0,-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan pada garis $y = x$ $T(x,y) = (y,x)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (0,1)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (1,0)$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Operator Pencerminan pada $\mathbb{R}^3$

Operator	Peta dari $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, dan $\vec{e}_3$	Matriks Baku
Pencerminan pada bidang-xy $T(x,y,z) = (x,y,-z)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,-1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Pencerminan pada bidang-xz $T(x,y,z) = (x,-y,z)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,-1,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Pencerminan pada bidang-yz $T(x,y,z) = (x,-y,z)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (-1,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator Proyeksi pada $\mathbb{R}^2$

Operator	Peta dari $\vec{e}_1$ dan $\vec{e}_2$	Matriks Baku
Proyeksi ortogonal pada sumbu-x $T(x,y) = (x,0)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (1,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (0,0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada sumbu-y $T(x,y) = (0,y)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (0,1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator Proyeksi pada $\mathbb{R}^3$

Operator	Peta dari $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, dan $\vec{e}_3$	Matriks Baku
Proyeksi ortogonal pada bidang-xy $T(x,y,z) = (x,y,0)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,0)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada bidang-xz $T(x,y,z) = (x,0,z)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (1,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,0,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Proyeksi ortogonal pada bidang-yz $T(x,y,z) = (0,y,z)$	$T(\vec{e}_1) = T(1,0,0) = (0,0,0)$ $T(\vec{e}_2) = T(0,1,0) = (0,1,0)$ $T(\vec{e}_3) = T(0,0,1) = (0,0,1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operator Rotasi pada $\mathbb{R}^2$

Operator	Persamaan Rotasi	Matriks Baku
Rotasi melalui sudut θ	$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Operator Rotasi pada $\mathbb{R}^3$

Operator	Persamaan Rotasi	Matriks Baku
Rotasi berlawanan arah jarum jam mengelilingi sumbu-x positif melalui sudut θ	$w_1 = x$ $w_2 = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w_3 = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotasi berlawanan arah jarum jam mengelilingi sumbu-y positif melalui sudut θ	$w_1 = x\cos\theta + z\sin\theta$ $w_2 = y$ $w_3 = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$
Rotasi berlawanan arah jarum jam mengelilingi sumbu-z positif melalui sudut θ	$w_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$ $w_2 = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Latihan 4.9

1. Untuk soal-soal berikut ini, dapat domain dan kodomain dari transformasi yang didefinisikan dengan persamaan-persamaan, dan jelaskan apakah transformasi tersebut linear.

   (a) $$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= 5x_1 - 8x_2 + x_3 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} w_1 &= 5x_1x_2 - x_2 \\ w_2 &= x_1 + 3x_1x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} w_1 &= 5x_1 - x_2 + x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + 7x_3 \\ w_3 &= 2x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} w_1 &= x_1^2 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \\ w_2 &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{aligned}$$

2. Untuk masing-masing soal berikut ini, jelaskan apakah T suatu transformasi matriks.

   (a) $T(x, y) = (2x, y)$

   (b) $T(x, y) = (-y, x)$

   (c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

   (d) $T(x, y) = (x, y + 1)$

3. Dapatkan matriks baku untuk transformasi yang didefinisikan dengan persamaan-persamaan berikut ini.

   (a) $$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 \\ w_2 &= 3x_1 + 5x_2 - x_4 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} w_1 &= 7x_1 + 2x_2 - 8x_3 \\ w_2 &= - x_2 + 5x_3 \\ w_3 &= 4x_1 + 7x_2 - x_3 \end{aligned}$$

   (c) $$\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 - 2x_2 \\ w_3 &= 5x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} w_1 &= x_1 \\ w_2 &= x_1 + x_2 \\ w_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ w_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

4. Dapatkan matriks baku untuk operator $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 + 5x_2 - x_3 \\ w_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 \\ w_3 &= 3x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Kemudian hitung $T(-1, 2, 4)$ secara langsung dari persamaan-persamaan yang diberikan, dan juga dengan perkalian matriks.

5. Dapatkan matriks baku untuk operator T yang diberikan dalam bentuk rumus berikut ini.

   (a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

   (b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$

   (c) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

   (d) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$

   (e) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

6. Untuk soal berikut ini, gunakan matriks baku untuk T guna mendapatkan $T(\vec{x})$. Periksalah hasil yang diperoleh dengan menghitung $T(\vec{x})$ secara langsung.

   (a) $T(x_1, x_2) = (-x_1 + x_2, x_2)$; $\vec{x} = (-1, 4)$

   (b) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, 0)$; $\vec{x} = (2, 1, -3)$

7. Di dalam $\mathbb{R}^3$ *proyeksi ortogonal* pada sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z berturut-turut didefinisikan dengan

$$T_1(x, y, z) = (x, 0, 0), \quad T_2(x, y, z) = (0, y, 0), \quad T_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

   (a) Tunjukkan bahwa proyeksi ortogonal pada pada sumbu-sumbu koordinat adalah operator matriks, dan dapatkan matriks bakunya.

   (b) Tunjukkan bahwa jika $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suatu proyeksi ortogonal pada salah satu sombu koordinat, maka untuk setiap vektor $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^3$ berlaku $T(\vec{x})$ dan $\vec{x} - T(\vec{x})$ saling ortogonal.

4.10 Sifat-sifat Transformasi Matriks

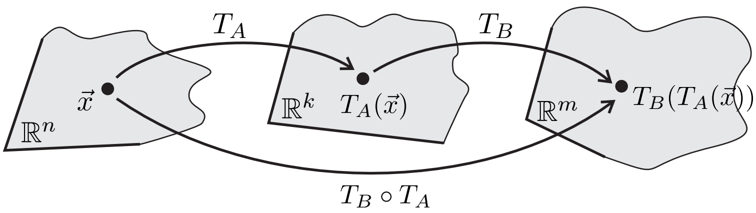
Pada bagian ini dibahas tentang sifat-sifat transformasi matriks. Juga dibahas mengenai hubungan antara singularitas suatu matriks dan sifat transformasi yang terkait.

■ Komposisi Transformasi Matriks

Misal T_A suatu transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^k$ dan T_B transformasi matriks dari $\mathbb{R}^k$ ke $\mathbb{R}^m$. Jika $\vec{x}$ suatu vektor di $\mathbb{R}^n$, maka T_A memetakan $\vec{x}$ menjadi vektor $T_A(\vec{x})$ di $\mathbb{R}^k$. Selanjutnya, vektor $T_A(\vec{x})$ dipetakan oleh T_B menjadi vektor $T_B(T_A(\vec{x}))$ di $\mathbb{R}^m$. Proses tersebut membangun suatu transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ yang disebut *komposisi dan T_B dengan T_A* dan dinotasikan dengan

$$T_B \circ T_A$$

Sebagaimana digambarkan dalam Gambar 4.6, transformasi T_A dalam rumus di atas diker-



Gambar 4.6

jakan terlebih dahulu, yaitu

$$(T_B \circ T_A)(\vec{x}) = T_B(T_A(\vec{x})) \,. \tag{4.54}$$

Komposisi tersebut juga merupakan transformasi matriks, sebab

$$(T_B \circ T_A)(\vec{x}) = T_B(T_A(\vec{x})) = B(T_A(\vec{x})) = B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$$

yang menunjukkan bahwa transformasi tersebut merupakan perkalian dengan suatu matriks, yaitu BA. Selanjutnya rumus transformasi tersebut dapat ditulis dengan

$$T_B \circ T_A = T_{BA}. \tag{4.55}$$

Secara umum, jika $T_1, \; T_2, \; \ldots, T_k$ transformasi-transformasi matriks, tanpa menamai matriks-matriks bakunya, maka berlaku

$$[T_k \circ \cdots \circ T_2 \circ T_1] = [T_k] \cdots [T_2]\,[T_1] \tag{4.56}$$

CONTOH 4.60 Misal $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dan $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dua operator matriks yang melakukan rotasi pada vektor-vektor melalui sudut θ_1 dan θ_2. Operasi

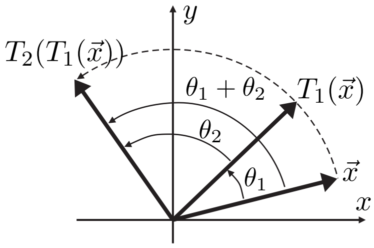
$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$$

pertama akan memutar $\vec{x}$ dengan sudut θ_1, dilanjutkan memutar vektor $T_1(\vec{x})$ dengan sudut θ_2. Dengan demikian, $T_2 \circ T_1$ memutar tiap vektor di $\mathbb{R}^2$ melalui sudut $\theta_1 + \theta_2$ (Gambar 4.7).

Matriks-matriks baku untuk operator-operator matriks tersebut adalah

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

dan



Gambar 4.7

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks tersebut harus memenuhi (4.56). Dengan pengetahuan kesamaan dalam geometri dasar, dapat dijelaskan bahwa (4.56) dipenuhi, yaitu

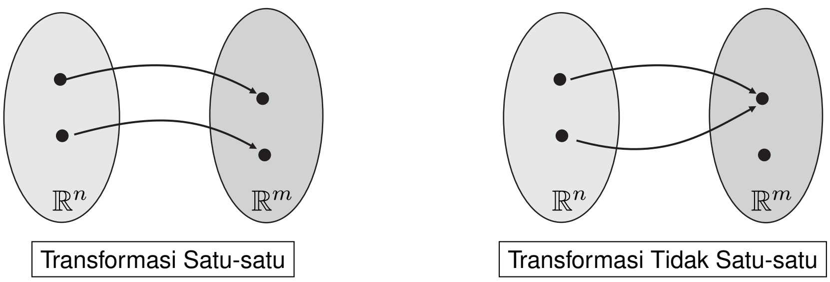
$$\begin{aligned}
[T_2]\,[T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

◀

■ *Transformasi Matriks Satu-satu*

Berikut ini dibahas mengenai hubungan antara matriks invertibel (non-singular) A dan sifat-sifat transformasi matriks T_A yang berkaitan.

DEFINISI 4.50 Transformasi matriks $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dikatakan *satu-satu* jika T_A memetakan vektor-vektor yang berbeda di $\mathbb{R}^n$ menjadi vektor-vektor yang berbeda di $\mathbb{R}^m$.



Gambar 4.8

Dengan memperhatikan ilustrasi pada Gambar 4.8, pernyataan pada Definisi 4.50 dapat pula diartikan seperti berikut:

1. T_A adalah satu-satu jika setiap vektor $\vec{b}$ di range dari T_A terdapat tepat satu vektor $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ sehingga $T_A(\vec{x}) = \vec{b}$.
2. T_A adalah satu-satu jika kesamaan $T_A(\vec{u}) = T_A(\vec{v})$ berakibat $\vec{u} = \vec{v}$.

TEOREMA 4.51 Jika A matriks $n \times n$ dan $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operator matriks yang bersesuaian, maka pernyataan berikut ini adalah ekivalen:

(a) A invertibel.

(b) Range dari T_A adalah $\mathbb{R}^n$.

(c) T_A adalah satu-satu.

Bukti. Silakan untuk latihan.

Invers dari Operator Matriks Satu-satu

Jika $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operator matriks satu-satu, maka A mempunyai invers. Operator matriks

$$T_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

yang berkaitan dengan A^{-1} disebut *operator invers* atau *invers* dari T_A. Istilah invers yang digunakan adalah sesuai dengan sifatnya, yaitu

$$\begin{aligned} T_A(T_{A^{-1}}(\vec{x})) &= AA^{-1}\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x} \\ T_{A^{-1}}(T_A(\vec{x})) &= A^{-1}A\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} T_A \circ T_{A^{-1}} &= T_{AA^{-1}} = T_I \\ T_{A^{-1}} \circ T_A &= T_{A^{-1}A} = T_I \end{aligned}$$

Jika $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operator matriks satu-satu, dan $T_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invers dari T_A, maka matriks-matriks baku untuk operator-operator tersebut berhubungan dalam persamaan

$$T_{A^{-1}} = T_A^{-1} \tag{4.57}$$

Jika lebih dikehendaki tidak menggunakan nama matriksnya, persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1} \tag{4.58}$$

CONTOH 4.61 **Matriks Baku untuk T^{-1}**

Misal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator yang rotasi pada vektor di $\mathbb{R}^2$ melewati sudut θ, yakni

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

Secara geometrik, untuk membatalkan rotasi oleh T, adalah dengan melakukan rotasi melewati sudut $-\theta$. Hal ini memang sesuai dengan yang dikerjakan oleh operator T^{-1}, sebab matriks untuk T^{-1} adalah

$$\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

yang merupakan matriks baku untuk rotasi melewati sudut $-\theta$. ◀

CONTOH 4.62 **Mendapatkan T^{-1}**
Tunjukkan bahwa operator $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

adalah satu-satu, dan dapatkan $T^{-1}(w_1, w_2)$.

Penyelesaian. Bentuk matriks dari persamaan di atas adalah

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks bakunya adalah

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriks tersebut adalah invertibel (yakni satu-satu) dan matriks baku untuk T^{-1} adalah

$$[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh

$$[T^{-1}] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}w_1 - \frac{1}{5}w_2 \\ -\frac{3}{5}w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{bmatrix}$$

dan dapat disimpulkan bahwa

$$T^{-1}(w_1, w_2) = \left(\tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{1}{5}w_2,\ -\tfrac{3}{5}w_1 + \tfrac{2}{5}w_2\right)$$ ◀

■ *Sifat Linear*

Transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ yang telah dibahas hanyalah salah satu transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$. Jika $f_1, f_2, \dots, f_m$ adala fungsi-fungsi dari n variabel, maka persamaan-persamaan

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

juga mendefinisikan transformasi dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$, yang memetakan vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ke vektor $(w_1, w_2, \dots, w_m)$. Permasalahan yang muncul sekarang adalah: Bagaimana sifat aljabar dari transformasi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yang dapat digunakan untuk mengenali apakah T suatu transformasi matriks?

TEOREMA 4.52 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi matriks jika dan hanya jika untuk semua vektor $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ dan semua skalar k, berlaku

(i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ [Sifat Additive]

(ii) $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$ [Sifat Homogen]

Bukti. [Silakan untuk latihan]

Sifat additive dan homogen dalam Teorema 4.52 disebut *syarat linear*, dan transformasi yang memenuhi syarat tersebut dinamakan *transformasi linear*. Dengan pengertian dan istilah baru tersebut, Teorema 4.52 dapat diungkapkan seperti teorema berikut ini.

TEOREMA 4.53 Setiap transformasi linear dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ adalah transformasi matriks, dan sebaliknya, setiap transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$ adalah transformasi linear.

Berikut ini diberikan sifat ekivalen dari matriks invertibel, melengkapi teorema ekivalensi matriks invertibel yang telah dibahas pada bagian-bagian sebelumnya.

TEOREMA 4.54 Jika A matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekivalen.

(a) A invertibel.

(b) Range dari T_A adalah $\mathbb{R}^n$.

(c) T_A satu-satu.

Latihan 4.10

1. Dapatkan matriks baku untuk operator komposisi $T_A \circ T_B$, jika T_A dan T_B operator dengan matriks baku A dan B berikut ini.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 54 & -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

2. Diketahui $T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ dan $T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$.

   (a) Dapatkan matriks-matriks baku untuk T_1 dan T_2.

   (b) Dapatkan matriks-matriks baku untuk $T_2 \circ T_1$ dan $T_1 \circ T_2$.

   (c) Dapatkan rumus untuk $T_1(T_2(x_1, x_2))$ dan $T_2(T_1(x_1, x_2))$ menggunakan hasil bagian (b).

3. Diketahui transformasi T_1 dan T_2, yaitu $T_1(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, -2x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2)$ dan $T_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_3, 4x_1 - x_3)$.

(a) Dapatkan matriks-matriks baku untuk T_1 dan T_2.

(b) Dapatkan matriks-matriks baku untuk $T_2 \circ T_1$ dan $T_1 \circ T_2$.

(c) Dapatkan rumus untuk $T_1(T_2(x_1, x_2, x_3))$ dan $T_2(T_1(x_1, x_2, x_3))$ menggunakan hasil bagian (b).

4. Dapatkan matriks baku untuk komposisi di $\mathbb{R}^2$ berikut ini.

(a) Rotasi $90°$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = x$.

(b) Proyeksi ortogonal pada sumbu-y, dilajutkan kontraksi dengan faktor $k = \frac{1}{2}$.

(c) Pencerminan terhadap sumbu-x, dilanjutkan dilasi dengan faktor $k = 3$.

5. Dapatkan matriks baku untuk komposisi di $\mathbb{R}^3$ berikut ini.

(a) Pencerminan terhadap bidang-yz, dilanjutkan proyeksi ortogonal pada bidang-xz.

(b) Rotasi $45°$ terhadap sumbu-y, dilanjutkan dilasi dengan faktor $k = \sqrt{2}$.

(c) Proyeksi ortogonal pada bidang-xy, dilanjutkan pencerminan terhadap bidang-yz.

6. Selidiki apakah $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, untuk operator-operator T_1 dan T_2 yang dberikan berikut ini.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah proyeksi ortogonal pada sumbu-x, dan $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah proyeksi ortogonal pada sumbu-y.

(b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah rotasi melewati sudut θ_1, dan $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah rotasi melewati sudut θ_2.

(c) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah proyeks ortogonal pada sumbu-x, dan $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ adalah rotasi melewati sudut θ.

7. Dapatkan matriks baku untuk operator-operator yang didefinisikan dengan persamaan-persamaan berikut ini, dan gunakan Teorema 4.54 untuk mengetahui apakah operator tersebut satu-satu.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= 8x_1 + 4x_2 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ w_2 &= 5x_1 + x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 4x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ w_3 &= x_1 + 8x_3 \end{aligned}$

8. Jelaskan apakah operator matriks $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang didefinisikan dengan persamaan-persamaan berikut ini satu-satu; jika ya, dapatkan matriks baku untuk inversnya, dan dapatkan rumus untuk $T^{-1}(w_1, w_2)$.

(a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} w_1 &= 6x_1 - 6x_2 \\ w_2 &= -2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} w_1 &= -x_2 \\ w_2 &= -x_1 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} w_1 &= 3x_1 \\ w_2 &= -5x_1 \end{aligned}$

9. Jelaskan apakah operator matriks $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan dengan persamaan-persamaan berikut ini satu-satu; jika ya, dapatkan matriks baku untuk inversnya, dan dapatkan rumus untuk $T^{-1}(w_1, w_2, w_3)$.

   (a) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned}$

   (b) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ w_2 &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ w_3 &= - 2x_2 + 5x_3 \end{aligned}$

   (c) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\ w_2 &= 2x_1 + 7x_2 + x_3 \\ w_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$

   (d) $\begin{aligned} w_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ w_2 &= -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ w_3 &= 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \end{aligned}$

10. Misal A suatu matriks berukuran $n \times n$ dengan $\det(A) = 0$, dan $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ merupakan perkalian dengan A.

    (a) Bagimanakah range dari T? Berikan satu conto untuk menggambarkan kesimpulan Anda.

    (b) Bagamanakah tentang banyaknya vektor yang dipetakan oleh T ke $\vec{0}$?