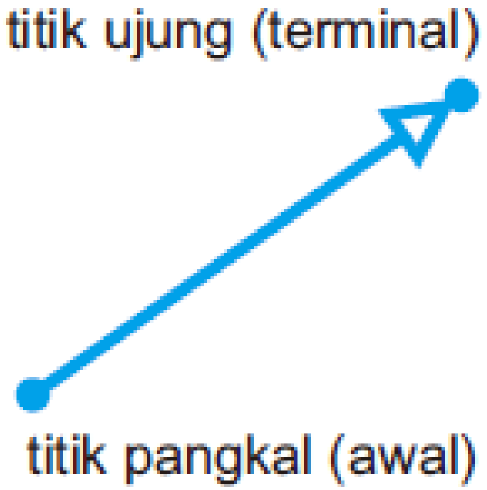
RUANG VEKTOR EUCLID

Vektor di Ruang-2, Ruang-3, dan Ruang-n

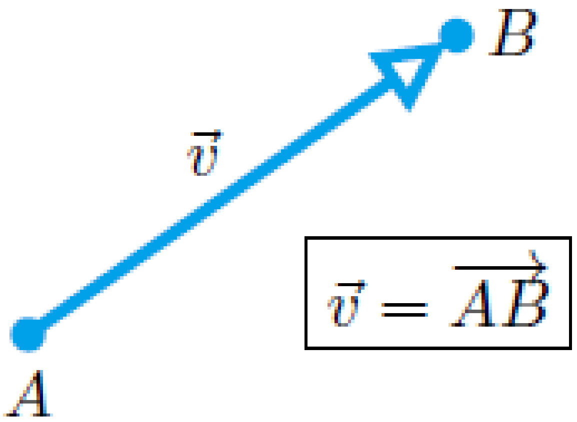
Bahasan utama dalam aljabar linear adalah mengenai "matriks" dan "vektor." Pada bagian ini akan lebih banyak dibahas tentang vektor, sebab sifat-sifat pokok matriks telah dibahas pada bab sebelumnya.

■ *Geometri Vektor*

Dalam permasalahan fisika atau teknik, vektor di dua dimensi (disebut juga *ruang*-2) atau di tiga dimensi (disebut juga *ruang*-3) digambarkan sebagai anak-panah, yakni ruas garis dengan arah tertentu dan panjang tertentu. Dalam istilah matematika, objek yang digambarkan demikian itu disebut *vektor geometrik* (Gambar 3.1).



Gambar 3.1



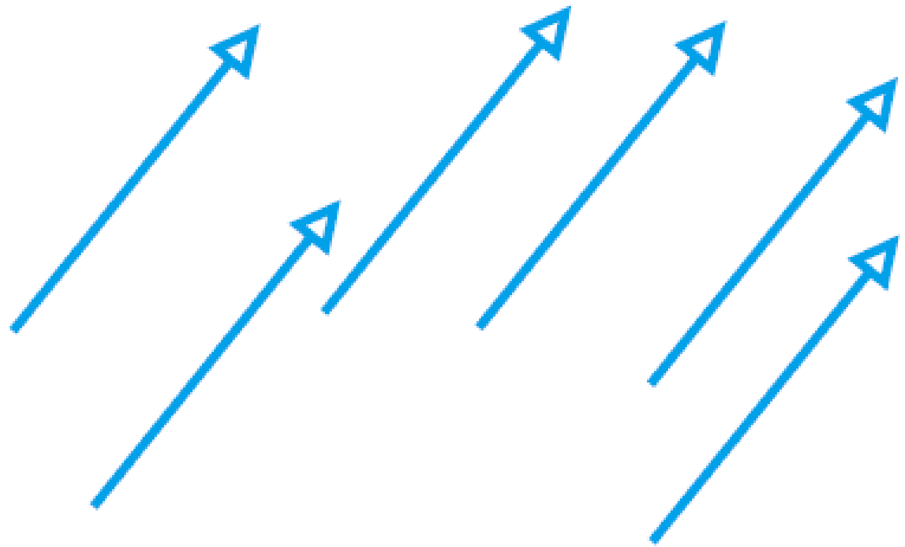
Gambar 3.2

Dalam catatan kuliah ini, vektor dinotasikan dengan huruf kecil dengan tanda panah di atas, seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, dan $\vec{v}$; sedangkan skalar dinotasikan dengan huruf kecil miring a, b, p, dan q atau kadang dengan huruf yunani kecil, seperti α, β, γ, dan λ. Apabila ingin menunjukkan vektor $\vec{v}$ yang mempunyai titik pangkal A dan titik ujung B, seperti dalam Gambar 3.2, ditulis:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Vektor-vektor dengan arah dan panjang yang sama, seperti dalam Gambar 3.3, dikatakan sebagai vektor-vektor yang *ekuivalen*. Karena vektor-vektor hanya dipandang berdasarkan panjang dan arahnya saja, vektor-vektor yang ekuivalen dikatakan *sama* meskipun posisinya berbeda-beda. Dengan demikian, vektor-vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ yang ekuivalen juga dikatakan *sama*, dan ditulis

$$\vec{v} = \vec{w}.$$

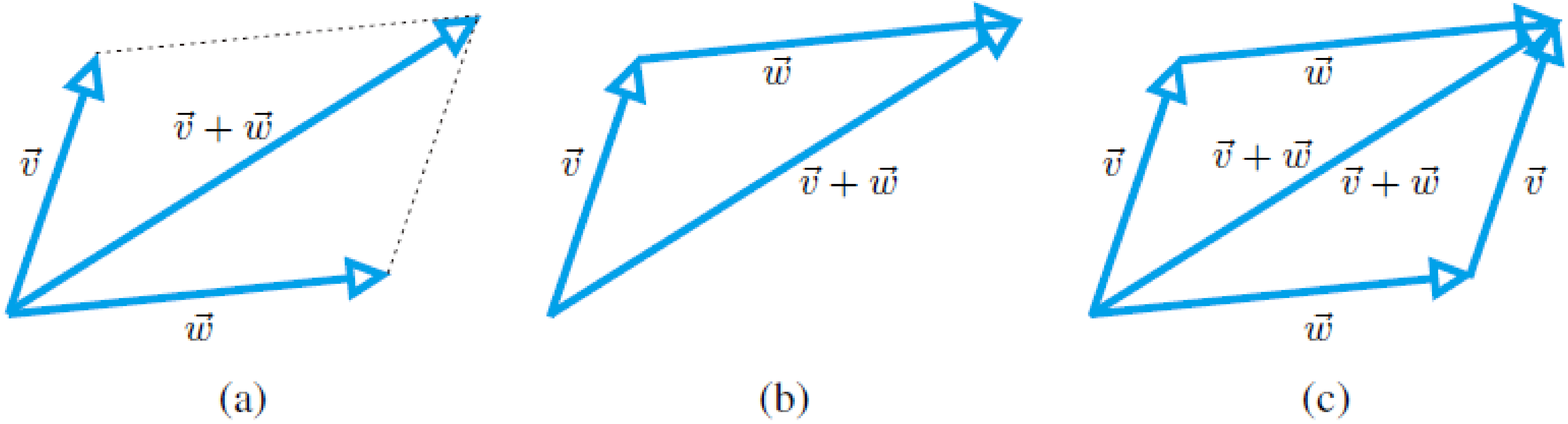


Gambar 3.3: Vektor-vektor yang ekuivalen

Vektor dengan panjang nol, yaitu titik pangkal dan titik ujungnya berimpit, disebut vektor nol dan dinotasikan dengan $\vec{0}$. Vektor nol dapat dipandang sebagai vektor dengan arah sembarang.

Penjumlahan Vektor

Banyak operasi aljabar yang penting pada vektor, yang semuanya berasal dari hukum-hukum fisika.



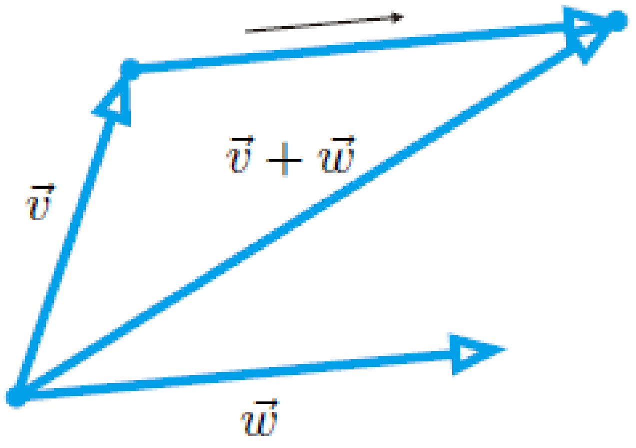
Gambar 3.4

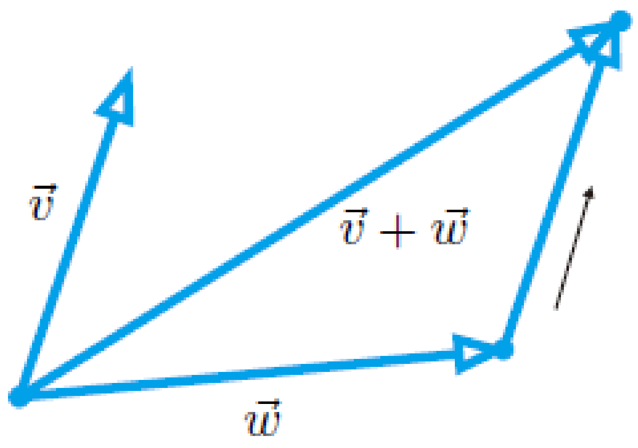
Penjumlahan Vektor sebagai Translasi

Jika $\vec{v}$, $\vec{w}$, dan $\vec{v}+\vec{w}$ adalah vektor-vektor yang titik-titik pangkalnya diletakkan berimpit, maka titik ujung dari $\vec{v}+\vec{w}$ dapat dipandang sebagai berikut:

(a) Titik ujung $\vec{v}+\vec{w}$ adalah titik yang dihasilkan dari pergeseran (translasi) titik ujung $\vec{v}$ pada arah $\vec{w}$ sejauh panjang $\vec{w}$ (Gambar 3.5(a)).

(b) Titik ujung $\vec{v}+\vec{w}$ adalah titik yang dihasilkan dari pergeseran (translasi) titik ujung $\vec{w}$ pada arah $\vec{v}$ sejauh panjang $\vec{v}$ (Gambar 3.5(b)).





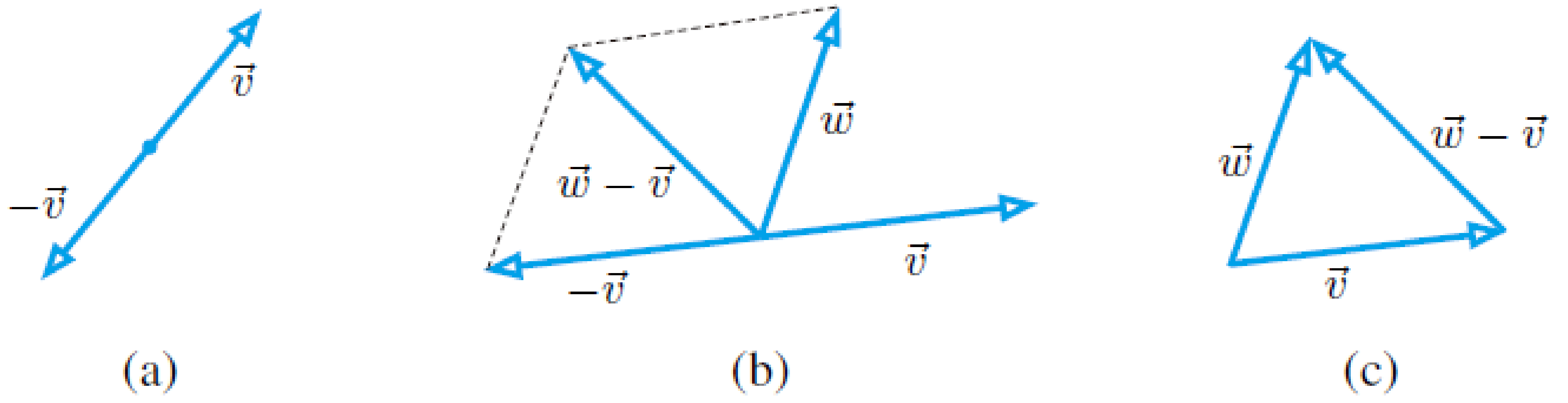
Pengurangan Vektor

Sebagaimana dalam aritmetika bilangan, bahwa pengurangan vektor juga dapat dipandang sebagai penjumlahan.

Negatif dari vektor $\vec{v}$, ditulis $-\vec{v}$, adalah vektor panjangnya sama dengan $\vec{v}$ tetapi arahnya berlawanan dengan arah $\vec{v}$ (Gambar 3.6(a). Vektor $\vec{w}$ dikurangi vektor $\vec{v}$, ditulis $\vec{w} - \vec{v}$, diperoleh dari penjumlahan

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}).$$

Selisih $\vec{w} - \vec{v}$ dapat diperoleh secara geometrik dengan aturan jajargenjang seperti dalam



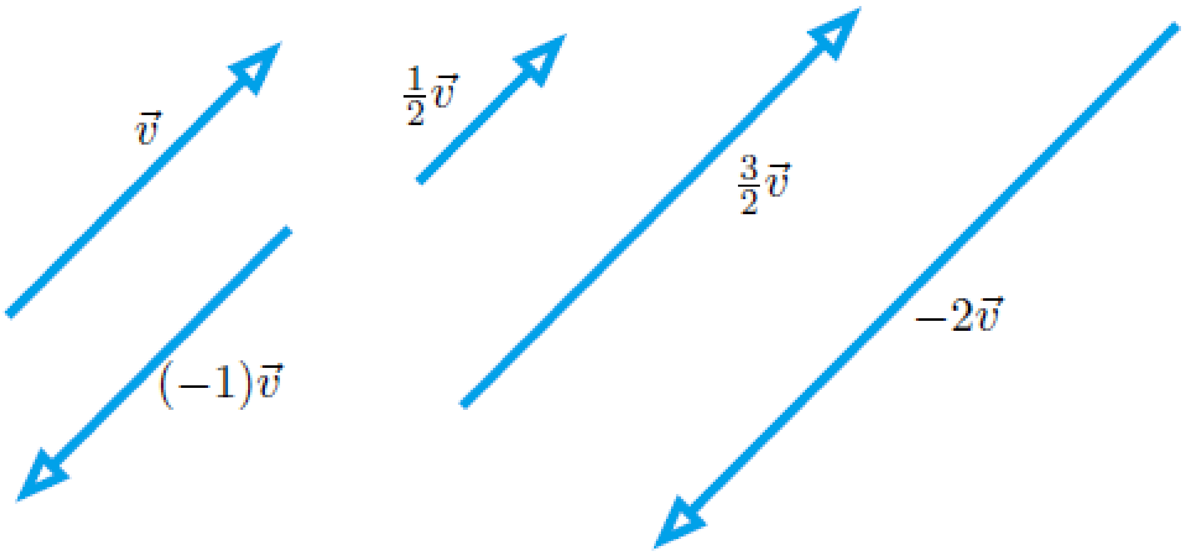
Gambar 3.6

Perkalian dengan Skalar

Jika $\vec{v}$ vektor tak-nol di ruang-2 atau ruang-3, dan k suatu skalar tak-nol, maka didefinisikan ***perkalian dengan skalar*** dari $\vec{v}$ dengan k sebagai vektor dengan panjang $|k|$ kali panjang $\vec{v}$ dan mempunyai arah sama dengan arah $\vec{v}$ jika $k > 0$, dan arahnya berlawanan dengan arah $\vec{v}$ jika $k < 0$. Jika $k = 0$ atau $\vec{v} = \vec{0}$, maka didefinisikan $k\vec{v}$ sebagai vektor nol $\vec{0}$.

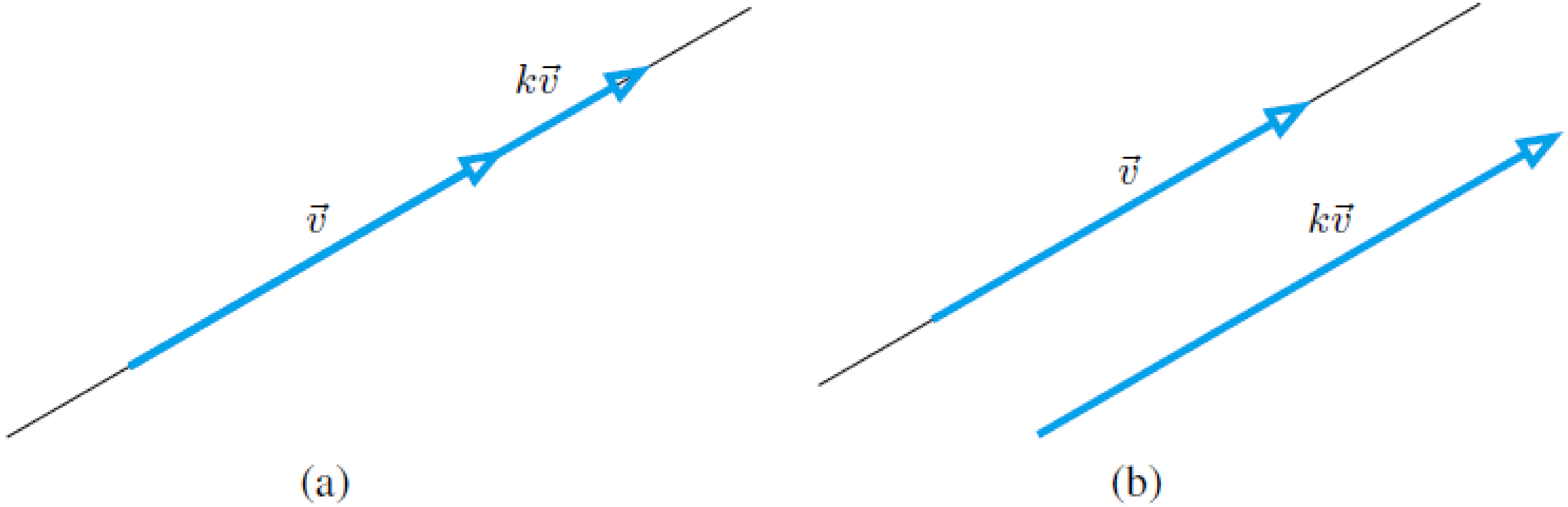
Gambar 3.7 menunjukkan hubungan secara geometrik antara vektor $\vec{v}$ dengan beberapa kelipatan skalar dari $\vec{v}$. Khusus untuk $k = -1$, perhatikan bahwa $(-1)\vec{v}$ memiliki panjang sama dengan $\vec{v}$ tetapi arahnya berlawanan; jadi:

$$(-1)\vec{v} = -\vec{v}.$$



Vektor-vektor Sejajar dan Segaris

Misalkan vektor-vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ di ruang-2 atau ruang-3 dengan titik panngkal berimpit. Jika salah satu vektor merupakan kelipatan dari yang lain, maka vektor-vektor tersebut terletak pada satu garis (*collinear*), lihat Gambar 3.8(a). Apabila salah satu vektor pada Gambar 3.8(a) digeser, seperti dalam Gambar 3.8(b), vektor-vektor tersebut dikatakan sejajar (*parallel*). Perlu dicermati, bahwa dua istilah tersebut mempunyai makna sama jika diterapkan untuk vektor.



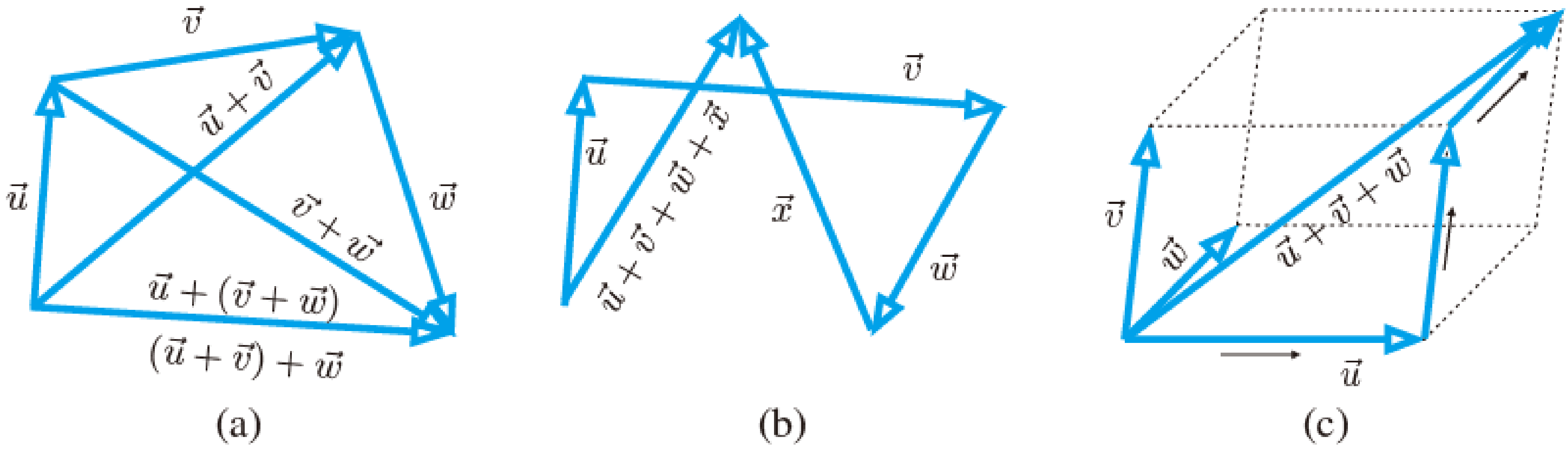
Gambar 3.8

Penjumlahan Tiga Vektor atau Lebih

Penjumlahan vektor memenuhi *hukum asosiatif untuk penjumlahan*, yaitu apabila dijumlahkan vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$, dapat dilakukan tanpa memperhatikan urutan penjumlahannya:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

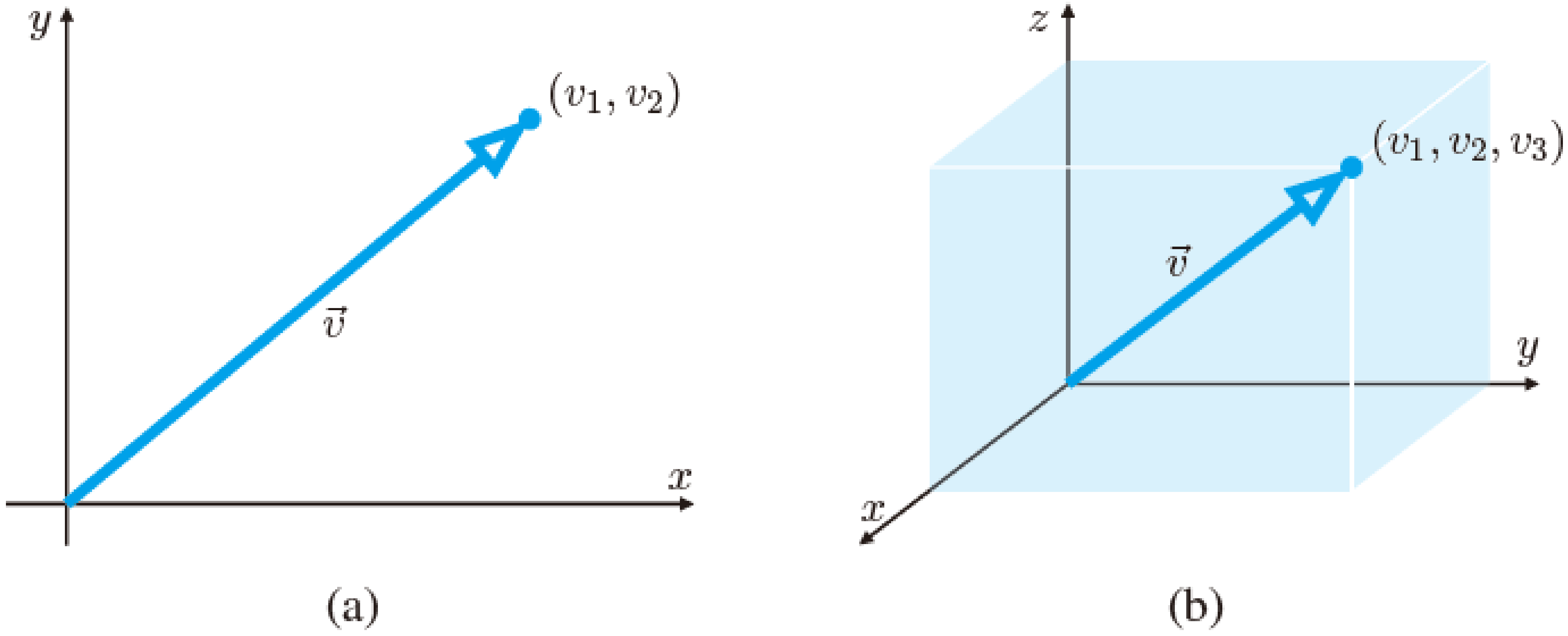
Cara mudah untuk menjumlahkan $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ adalah dengan meletakkan "pangkal pada ujung" secara berurutan, dan diperoleh vektor hasilnnya dengan menggambarkan vektor dari titik pangkal $\vec{u}$ ke titik ujung $\vec{w}$ (Gambar 3.9(a)). Cara demikian juga berlaku untuk empat vektor atau lebih (Gambar 3.9(b)). Demikian juga untuk penjumlahan vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ di ruang-3 (Gambar 3.9(c)).



Gambar 3.9

■ *Vektor-vektor dalam Sistem Koordinat*

Bentuk komponen dari vektor nol di ruang-2 adalah $\vec{0} = (0, 0)$, dan di ruang-3 adalah $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Jika suatu vektor $\vec{v}$ dengan titik pangkal diletakkan pada titik asal dalam sistem



Gambar 3.10

koordinat siku-siku, maka vektor tersebut dapat dikenali dengan koordinat-koordinat dari titik ujungnya (Gambar 3.10). Koordinat itu disebut *komponen* dari $\vec{v}$ relatif terhadap sistem koordinatnya. Untuk selanjutnya ditulis $\vec{v} = (v_1, v_2)$ untuk menyatakan suatu vektor $\vec{v}$ di ruang-2 dengan komponen (v_1, v_2), dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ untuk menyatakan suatu vektor $\vec{v}$ di ruang-3 dengan komponen (v_1, v_2, v_3).

Secara geometrik jelas bahwa vektor-vektor di ruang-2 atau ruang-3 adalah ekuivalen jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut mempunyai titik ujung yang sama saat titik pangkalnya diletakkan di titik asal. Secara aljabar, hal ini berarti dua vektor dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika komponen-komponen yang bersesuaian adalah sama. Sebagai contoh, untuk vektor-vektor di ruang-3

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{dan} \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

adalah ekuivalen jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad v_3 = w_3.$$

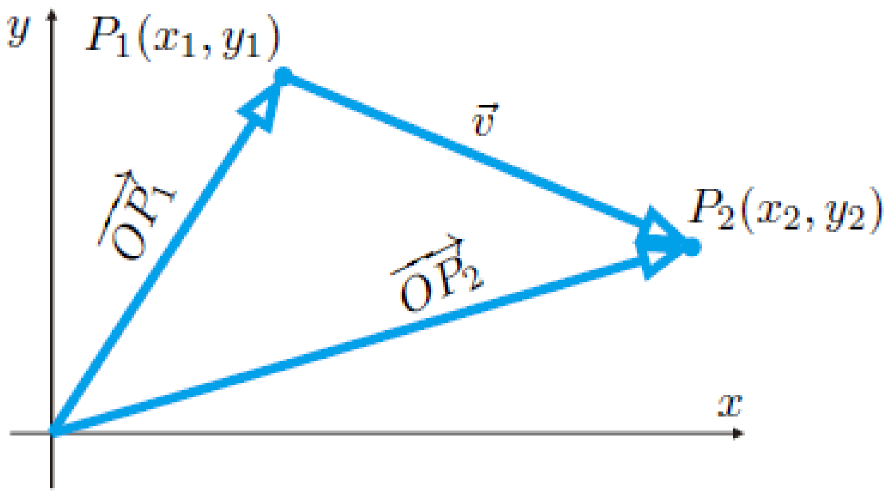
Vektor-vektor dengan Titik Pangkal Tidak di Titik Asal

Jika $\overrightarrow{P_1P_2}$ menyatakan vektor dengan titik pangkal $P_1(x_1, y_1)$ dan titik ujung $P_2(x_2, y_2)$, maka komponen vektor tersebut adalah

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Sebagai contoh, pada Gambar 3.11 vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah selisih dari vektor-vektor $\overrightarrow{OP_2}$ dan $\overrightarrow{OP_1}$, sehingga

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



Gambar 3.11

Ruang-n

DEFINISI 3.1 Jika n suatu bilangan bulat positif, maka ***pasangan-n terurut*** adalah adalah jajaran n bilangan real $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Himpunan dari semua pasangan-n terurut disebut ruang-n dan ditulis dengan notasi $\mathbb{R}^n$.

Istilah pasangan-n terurut kadang juga disebut n-tuple terurut. Kata "terurut" penting untuk diperhatikan, karena menyatakan pentingnya suatu urutan dalam pasangan-n yang berkaitan. Sebagai contoh, pasangan-3 terurut (v_1, v_2, v_3) tidak bisa ditulis sebagai (v_2, v_3, v_1).

Operasi pada Vektor di $\mathbb{R}^n$

Operasi-operasi pada $\mathbb{R}^n$ merupakan generalisasi dari operasi-operasi yang telah dibahas pada vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Suatu vektor $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$ ditulis dengan notasi

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

dan vektor $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ disebut *vektor nol*.

DEFINISI 3.2 Vektor-vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan *ekuivalen* (juga dikatakan *sama*) jika

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad \ldots, \quad v_n = w_n,$$

dan ditulis $\vec{v} = \vec{w}$.

CONTOH 3.2 Vektor $\vec{u} = (a, b, c, d)$ dikatakan sama dengan vektor $\vec{v} = (4, -2, 3, 1)$, yaitu

$$\vec{u} = \vec{v} \qquad \text{atau} \qquad (a, b, c, d) = (4, -2, 3, 1)$$

jika dan hanya jika $a = 4$, $b = -2$, $c = 3$, dan $d = 1$. □

Ingat kembali bahasan tentang operasi pada vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$. Dengan mengamati Gambar 3.12 dapat disimpulkan bahwa untuk $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2)$, diperoleh

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{3.1}$$

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2) \tag{3.2}$$

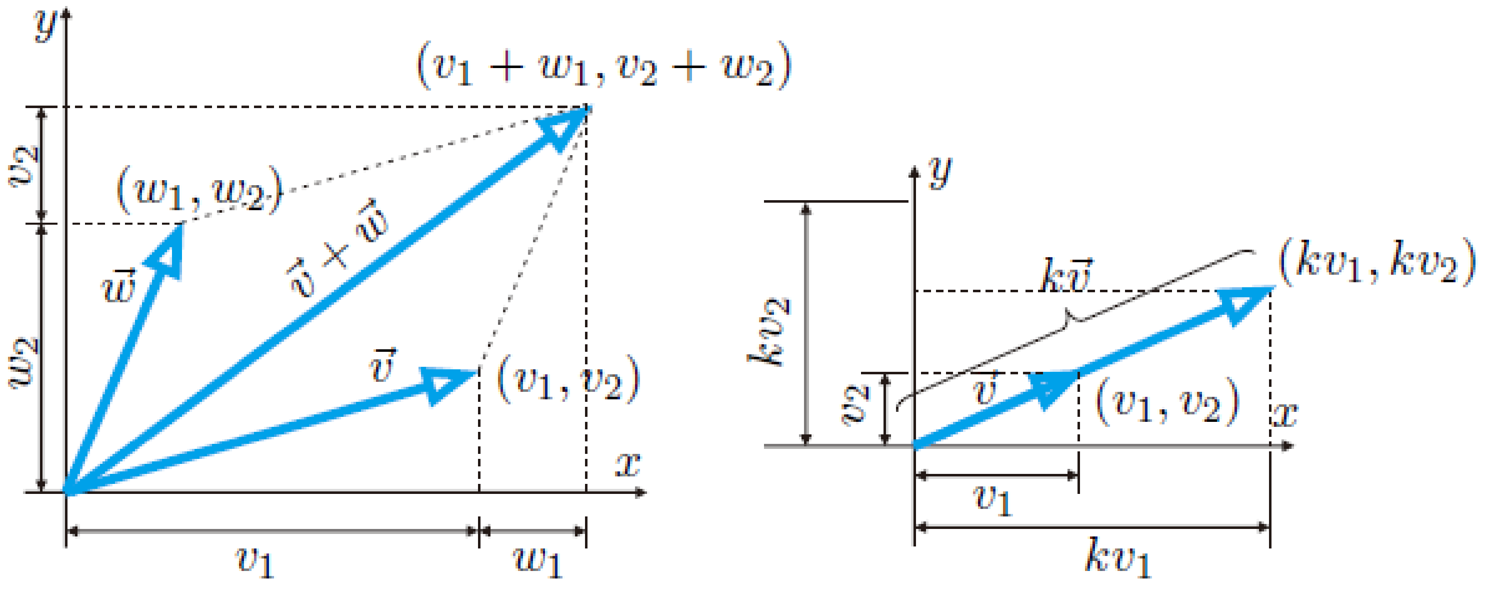
Khususnya, dari (3.2) dapat diperoleh

$$-\vec{v} = (-1)\vec{v} = (-v_1, -v_2)$$

dan dengan demikian

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2).$$

Hasil (3.1)–(3.4) dapat diperumum untuk menghasilkan definisi berikut ini.



Gambar 3.12

DEFINISI 3.3 Jika $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka dapat didefinisikan

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \tag{3.5}$$

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \tag{3.6}$$

$$-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \tag{3.7}$$

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \tag{3.8}$$

Dengan kalimat dapat dikatakan bahwa penjumlahan (atau pengurangan) vektor-vektor dilakukan dengan menjumlahkan (atau mengurangkan) komponen-komponen yang bersesuaian.

Berikut ini rangkuman sifat-sifat penting dari operasi-operasi pada vektor.

TEOREMA 3.4 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, serta k dan m skalar-skalar, maka:

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

(d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(e) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

(f) $(k + m)\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$

(g) $k(m\vec{u}) = (km)\vec{u}$

(h) $1\vec{u} = \vec{u}$

TEOREMA 3.5 Jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^n$ dan k skalar, maka

(a) $0\vec{v} = \vec{0}$

(b) $k\vec{0} = \vec{0}$

(c) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Kombinasi Linear

Gabungan (kombinasi) penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar seringkali digunakan untuk membangun vektor-vektor baru. Sebagai contoh, jika $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka vektor-vektor

$$\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 \qquad \text{dan} \qquad \vec{w} = 3\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

dibangun dengan gabungan antara penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar dari vektor-vektor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$. Secara umum, dirumuskan dalam definisi berikut ini.

DEFINISI 3.6 Jika $\vec{w}$ suatu vektor di $\mathbb{R}^n$, maka $\vec{w}$ dikatakan sebagai *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ jika $\vec{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k\vec{v}_r \tag{3.9}$$

dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ skalar-skalar. Skalar-skalar tersebut dinamakan *koefisien* dari kombinasi linear. Dalam hal $r = 1$, Persamaan 3.9 menjadi $\vec{w} = k_1\vec{v}_1$, sehingga kombinasi linear dari satu vektor hanyalah suatu kelipatan dari vektor tersebut.

Aplikasi Kombnasi Linear pada Model Warna

Warna pada layar komputer umumnya berdasarkan *model warna* RGB (Red-Green-Blue). Warna utama disajikan dengan vektor-vektor

$$\vec{r} = (1,0,0) \qquad \text{(pure red)}$$
$$\vec{g} = (0,1,0) \qquad \text{(pure green)}$$
$$\vec{b} = (0,0,1) \qquad \text{(pure blue)}$$

di $\mathbb{R}^3$. Warna-warna yang lain, misal warna $\vec{w}$, dihasilkan dengan cara membentuk kombinasi linear dari $\vec{r}$, $\vec{g}$, dan $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{w} &= k_1\vec{r} + k_2\vec{g} + k_3\vec{b} \\ &= k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) \\ &= (k_1, k_2, k_3)\end{aligned}$$

dengan $0 \leq k_i \leq 1$. Himpunan semua warna kombinasi tersebut dinamakan *ruang RGB* atau *kubus warna RGB* (Gambar 3.13). Sebagaimana ditampakkan dalam gambar

Notasi Alternatif untuk Vektor

Notasi yang telah dibahas untuk menuliskan vektor di $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{3.10}$$

Bentuk (3.10) menggunakan tanda pemisah koma, dan dengan penulisan mendatar. Karena suatu vektor di $\mathbb{R}^n$ hanyalah daftar dari n komponen yang ditulis berurutan, berarti sembarang notasi yang menyajikan komponen-komponen tersebut dalam urutan yang benar dapat digunakan. Sebagai contoh, vektor dalam (3.10) dapat ditulis sebagai

$$\vec{v} = [v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_n] \tag{3.11}$$

yang disebut bentuk *matriks-baris*, atau sebagai

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

yang disebut bentuk *matriks-kolom*. Notasi pada (3.10), (3.11), dan (3.12) akan digunakan bergantian menyesuaikan penggunaan yang tepat.

Latihan

Gambarkan sistem koordinat (seperti dalam Gambar 3.10) dan letakkan titik-titik dengan koordinat-koordinat berikut ini.

(a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$
(d) $(3, 4, -5)$ (e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, -4, -5)$

(a) Dapatkan vektor dengan titik pangkal di $A(1, 1)$ yang ekuivalen dengan $\vec{u} = (1, 2)$.
(b) Dapatkan vektor dengan titik ujung di $B(-1, -1, 2)$ yang ekuivalen dengan $\vec{u} = (1, 1, 3)$.
(c) Dapatkan vektor tak-nol $\vec{u}$ dengan titik ujung di $Q(3, 0, -5)$ yang berlawanan arah dengan vektor $\vec{v} = (4, -2, 1)$.
(d) Dapatkan vektor tak-nol $\vec{u}$ dengan titik pangkal di $P(-1, 3, -5)$ yang searah dengan vektor $\vec{v} = (6, 7, -3)$.

Diketahui $\vec{u} = (-2, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$, dan $\vec{w} = (5, 2, 2)$. Dapatkan komponen-komponen dari:

(a) $\vec{u} - \vec{w}$ (b) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ (c) $-\vec{v} + 2(\vec{u} + 3\vec{w})$
(d) $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ (e) $\vec{w} + (2\vec{u} - \vec{v})$ $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (2\vec{v} + \vec{w})$