BASIS dan DIMENSI RUANG VEKTOR

Review MODUL 4 hal 123 – hal-126

Teorema – teorema terkait.

Teorema 1. jika $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor V, maka setiap himpunan yang memuat lebih dari n vektor adalah vektor-vektor yang tidak bebas liner.

Teorema 2. jika ruang vektor V mempunyai satu basis dengan n vektor, maka setiap basis untuk V terdiri dari n vektor.

Contoh. Karena $S = \{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)\}$ adalah basis untuk $\mathbb{R}^3$ (terdiri 3 vektor, maka $S^* = \{(1,2,3), (1,0,-1), (3,-1,0), (2,1,-2)\}$ bukan basis untuk $\mathbb{R}^3$.

Dimensi Ruang penyelesaian sistem homogen.

· Perhatikan Contoh berikut :

1.
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$$

Perhatikan bentuk matriks eselon tereduksi barisnya

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \approx$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Oleh karena sistem terdiri dari 5 unknown dan matriks eselon tereduksi dgn 2 baris tak nol, maka terdapat $5-2=3$ parameter bebas (yg tidak mempunyai satu utama)

Sehingga solusinya :

$x_5 = s$

$x_4 = t$

$x_3 = 2s - 2t$

$x_2 = u$

$x_1 = -3s + t - 2(2s - 2t) - 2u$

$= -7s + 5t - 2u.$

Jadi solusi dari sistem di atas

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7s + 5t - 2u \\ u \\ 2s - 2t \\ t \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basis. $S = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ dgn

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ruang Penyelesaian dari sistem tsb. = span (S) dengan dimensi = 3.

Dalam kasus ini Ruang penyelesaian dari sistem homogen diatas disebut Ruang null atau Nullity, subruang dari $\mathbb{R}^5$.

2 untuk sistem homogen :

$$x + y + 2z = 0$$
$$x + 2y - z = 0$$
$$x + 3y + z = 0$$

mempunyai matriks eselon tereduksi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

Banyak baris tak nol = banyak unknown = 3

jadi banyak parameter = 3 - 3 = 0

Basis ruang penyelesaian, $S = \emptyset = \{\}$

Akibatnya dimensi(Ruang null) = 0.

3. Bidang $x - y = 0$ dalam $\mathbb{R}^3$.

Dapat ditulis dlm bentuk sistem

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = k. \end{array}\right\} \text{mempunyai solusi}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ k \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi basis dari ruang penyelesaian

$S = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$.

Sehingga dimensi dari ruang penyelesaian $= 2$.

Catatan:

Diberikan V = ruang vektor dimensi-n

$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ basis untuk $\mathbb{R}^3$

jika $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ dgn $\bar{v} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \dots + c_n\bar{v}_n$

maka $(\bar{v})_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ disebut vektor koordinat dari $\bar{v}$ relatif thdp basis S.

Contoh.

1. $$\begin{pmatrix}6\\5\\9\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{v} = 2\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3.$$

$$\Rightarrow (\bar{v})_S = (2,2,1).$$

2. $$(2,3) = \underbrace{2(1,0) + 3(0,1)}_{} \in \mathbb{R}^2$$

$(2,3)$ koordinat relatif thdp basis $S = \{(1,0), (0,1)\}$.

Perubahan Basis

V = ruang vektor dimensi 2.

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, $B' = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$

adalah basis (lama) dan basis (baru) untuk V

Dalam hal ini B' adalah baru akibat perubahan basis lama B.

oleh karena $B' \subset V$, maka

$$\bar{w}_1 = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2 \Longrightarrow (\bar{w}_1)_B = (a, b)$$

$$\bar{w}_2 = c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2 \Longrightarrow (\bar{w}_2)_B = (c, d).$$

sedangkan sebarang $\bar{v} \in V$;

misal $(\bar{v})_{B'} = (k_1, k_2) \Longrightarrow \bar{v} = k_1\bar{w}_1 + k_2\bar{w}_2$

$$\bar{v} = k_1(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) + k_2(c\bar{v}_1 + d\bar{v}_2)$$

$$\bar{v} = (k_1 a + k_2 c)\bar{v}_1 + (k_1 b + k_2 d)\bar{v}_2$$

jadi $(\bar{v})_B = (k_1 a + k_2 c, k_1 b + k_2 d)$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\bar{v})_{B'}$$

$$(\bar{v})_B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (\bar{v})_{B'}$$

$$= P \; (\bar{v})_{B'}$$

$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ disebut matriks transisi.

dari B' ke B. disimbulkan

$$P_{B' \to B}$$

secara umum

$$P_{B' \to B} = \begin{array}{c} \text{Kolom ke} \\ \left[(\bar{w}_1)_B \cdot (\bar{w}_2)_B \cdots (w_n)_B \right] \end{array}$$

Contoh:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v}_1 = (1,0), \; \bar{v}_2 = (0,1) \\ \bar{w}_1 = (1,1), \; \bar{w}_2 = (2,1). \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \Rightarrow (\bar{w}_1)_B = (1,1)$

$\bar{w}_2 = 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \Rightarrow (\bar{w}_2)_B = (2,1)$.

Jadi $P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Secara sama :

$$\bar{v}_1 = -\bar{w}_1 + \bar{w}_2 \Rightarrow (\bar{v}_1)_{B'} = (-1, 1)$$

$$\bar{v}_2 = 2\bar{w}_1 - \bar{w}_2 \Rightarrow (v_2)_{B'} = (2, -1).$$

Jadi $P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Dapat ditunjukkan bahwa

$$P_{B \to B'} = P^{-1}_{B' \to B}$$