RUANG HASIL-KALI-DALAM

DEFINISI 6.1 *Hasil-kali-dalam* pada ruang vektor V adalah fungsi yang mengaitkan satu bilangan real $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ dengan pasangan vektor di V sedemikian rupa sehingga untuk semua vektor $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ di V dan skalar k, sifat-sifat berikut dipenuhi:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ [Sifat Simetri]
2. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ [Sifat Additif]
3. $\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ [Sifat Homogen]
4. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$, dan $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$ [Sifat Positif]

Ruang vektor real dengan hasil-kali-dalam disebut *ruang hasil-kali-dalam real.*

Pendefinisian hasil-kali-dalam merupakan perumuman dari hasil-kali-titik yang sudah dibahas untuk ruang $\mathbb{R}^n$, yang berarti hasil-kali-titik merupakan salah satu contoh untuk hasil-kali-dalam yang didefinisikan di $\mathbb{R}^n$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Hasil-kali-dalam ini disebut *hasil-kali-dalam Euclid* atau *hasil-kali-dalam baku* pada $\mathbb{R}^n$.

Hasil-kali-dalam dapat digunakan untuk mendefinsikan norma atau jarak di suatu ruang hasil-kali-dalam yang umum. Misal $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di ruang Euclid $\mathbb{R}^n$, norma dan jarak dapat dinyatakan dalam suku-suku hasil-kali-dalam

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \qquad \text{dan} \qquad \mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}.$$

DEFINISI 6.2 Jika V suatu ruang hasil-kali-dalam real, maka *norma* atau *panjang* vektor $\vec{v}$ di V dinotasikan dengan $\|v\|$ dan didefinisikan

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$$

dan *jarak* antara dua vektor dinotasikan $\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v})$ dan didefinisikan dengan

$$\mathrm{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle}$$

Suatu vektor dengan norma satu disebut *vektor satuan*.

TEOREMA 6.3 Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di ruang hasil-kali-dalam V, dan k suatu skalar, maka

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$, dan $\|\vec{v}\| = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$.

(b) $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$.

(c) $\mathbf{d}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{d}(\vec{v}, \vec{u})$.

(d) $\mathbf{d}(\vec{u}, \vec{v}) \geq 0$, dan $\mathbf{d}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ jika dan hanya jika $\vec{u} = \vec{v}$.

Meskipun hasil-kali-dalam Euclid merupakan hasil-kali-dalam yang paling penting pada $\mathbb{R}^n$, masih banyak aplikasi yang menggunakannya dengan memodifikasi hasil-kali-dalam Euclid dengan cara memberikan *bobot* untuk masing-masing suku. Lebih jelasnya, jika

$$w_1, w_2, \ldots, w_n$$

bilangan-bilangan real positif, yang selanjutnya disebut *bobot*, dan jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka dapat ditunjukkan bahwa rumus

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \cdots + w_nu_nv_n$$

mendefinisikan hasil-kali-dalam pada $\mathbb{R}^n$ yang disebut *hasil-kali-dalam Euclid berbobot* dengan bobot-bobot $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

CONTOH 6.1 Misal $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa hasil-kali-dalam Euclid berbobot

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 \tag{6.1}$$

memenuhi empat sifat hasil-kali-dalam .

Penyelesaian.

Sifat-1: Dengan menukar $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ dalam Rumus 6.1 tidak mengubah jumlahan pada ruas kanan, sehingga $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.

Sifat-2: Jika $\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2)$, maka

$$\begin{aligned}
\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\
&= 3(u_1w_1 + v_1w_1) + 2(u_2w_2 + v_2w_2) \\
&= (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) \\
&= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \,.
\end{aligned}$$

Sifat-3:

$$
\begin{aligned}
\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle &= 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 \\
&= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\
&= k \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle .
\end{aligned}
$$

Sifat-4: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 3(v_1v_1) + 2(v_2v_2) = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$ dan sama dengan nol jika dan hanya jika $v_1 = v_2 = 0$, yakni $\vec{v} = \vec{0}$. ◀