RUANG BARIS dan RUANG KOLOM

Modul 4, hal 134 -

Akan dipelajari hubungan antara penyelesaian sistem linear dan sifat-sifat matriks koefisien.

Definisi :

Diberikan matriks $A_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Vektor - vektor baris di $\mathbb{R}^n$

$$\bar{r}_1 = [a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n}]$$

$$\bar{r}_2 = [a_{21} \; a_{22} \cdots a_{2n}]$$

$$\vdots$$

$$\bar{r}_m = [a_{m1} \; a_{m2} \cdots a_{mn}]$$

2. Vektor - vektor kolom di $\mathbb{R}^m$

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \cdots \quad \bar{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definisi

1. Ruang baris dari matriks A = Span $(\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots \bar{r}_m\}) \subset \mathbb{R}^n$
2. Ruang kolom dari matriks A = Span $(\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n\}) \subset \mathbb{R}^m$.

Perhatikan sistem linear $A\bar{x} = \bar{b}$

dgn $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A\bar{x} = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n = \bar{b}$

konsisten ~~b~~ jika dan hanya jika $\bar{b} \in$ Ruang kolom dari A jika dan hanya jika $\bar{b}$ kombinasi linear dari vektor - vektor kolom dari A.

Contoh.

Diberikan sistem linear $A\bar{x} = \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan $\bar{b} \in$ Ruang kolom dari A

jawab:

Dengan eliminasi Gauss diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{57}{5} \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{57/5}{7/5} = 3$$

$$x_2 = \frac{-8+3}{5} = -1$$

$$x_1 = -1 + 6 - 3 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\bar{b} = 2\bar{c}_1 - \bar{c}_2 + 3\bar{c}_3 \in$ Ruang kolom A

Teorema:

Diberikan sistem linear tak homogen $A\bar{x} = \bar{b}$ dan sistem linear homogen $A\bar{x} = \bar{o}$

$\bar{x}_0$ = sebarang solusi dari $A\bar{x} = \bar{b}$

$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n\}$ basis untuk ruang null dari A

maka sebarang solusi dr $A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x}$

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_n\bar{v}_n$$

(Penyelesaian umum dr $A\bar{x} = \bar{b}$)

Pada contoh diatas

$\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah suatu solusi dr $A\bar{x} = \bar{b}$

dan $S = \emptyset$ basis dr ruang penyelesaian $A\bar{x} = \bar{o}$.

jadi sebarang solusi $\bar{x}$ dr $A\bar{x} = \bar{b}$ adalah:

$\bar{x} = \bar{x}_0 + 0 = \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ yang berarti $A\bar{x} = \bar{b}$ mempunyai solusi tunggal.

Teorema : operasi baris elementer tidak berpengaruh pada ruang null dan ruang baris matriks tersebut.

⇒ Bagaimana dengan ruang kolom?

Teorema : jika T adalah matriks eselon tereduksi baris dari matriks A maka vektor - vektor baris dengan 1 utama membentuk basis untuk ruang baris dari T. dan vektor-kolom dgn 1 utama membentuk basis untuk ruang kolom dari matriks T.

Contoh : $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{r}_1 = [1 \ \ -2 \ \ 5 \ \ 0 \ \ 3]$

$\bar{r}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 0 \ \ 0]$

$\bar{r}_3 = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0]$

adalah anggota anggota ~~ruang~~ basis untuk ruang baris dr T

Sedangkan :

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adalah anggota-anggota basis untuk ruang kolom dari T.

Teorema :

jika A dan B adalah dua matriks yg ekivalen baris, maka.

a. Suatu himpunan vektor kolom dr A adalah bebas linier jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yg bersesuaian dari B adalah bebas linier.

b. Suatu himpunan vektor kolom dari A membentuk basis untuk ruang kolom A jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yg bersesuaian dari B membentuk basis untuk ruang kolom B.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

mempunyai matriks eselon tereduksi :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom yg mempunyai 1 utama pada T, maka kolom-kolom yang bersesuian dengan A adalah

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

membentuk basis untuk ruang kolom dari A.

Sedangkan vektor-vektor baris tak nol pada T :

$$\bar{r}_1 = [1 \ -3 \ 4 \ -2 \ 5 \ 4]$$
$$\bar{r}_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 3 \ -2 \ -6]$$
$$\bar{r}_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5]$$

membentuk basis utk ruang baris A.

Dengan demikian cara mendapatkan basis untuk ruang baris adalah sbb.:

Diberikan $A \Longrightarrow A^T \overset{OBE}{\simeq}$ $\underbrace{\text{Eselon tereduksi baris}}$

$\longleftarrow$ Kolom memuat 1 – utama.

Kolom A^T yg bersesuaian membentuk

$\longleftarrow$ basis ruang kolom dr A^T

= basis ruang baris dr A.

Baca Contoh pd hal 140, modul Bab.4.

sby: 10 – 4 – 2020