Vektor-vektor Ortogonal

Ingat kembali rumus sudut θ antara dua vektor tak-nol di $\mathbb{R}^n$, yaitu

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

Dari rumus tersebut dapat diketahui bahwa $\theta = \pi/2$ jika dan hanya jika $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Hal ini mendasari definisi berikut:

DEFINISI 3.18 Dua vektor tak-nol $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan ***ortogonal*** (atau ***tegak lurus***) jika $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Himpunan tak-kosong dari vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ disebut ***himpunan ortogoal*** jika setiap pasang vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan disebut ***himpunan ortonormal***.

CONTOH 3.11

(a) Tunjukkan bahwa $\vec{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\vec{v} = (1, 2, 0, -1)$ adalah vektor-vektor ortogonal di $\mathbb{R}^4$.

(b) Tunjukkan bahwa himpunan $S = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ dari vektor-vektor satuan merupakan himpunan ortonormal di $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

(a) Perhatikan bahwa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

yang berarti vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ortogonal.

(b) Karena $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, dan $\vec{k}$ vektor-vektor satuan, maka tinggal ditunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut saling ortogonal. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} &= (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0 \\ \vec{\imath} \cdot \vec{k} &= (1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0 \\ \vec{\jmath} \cdot \vec{k} &= (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0 \end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa tiap pasang vektor yang berbeda saling ortogonal. $\square$

Garis dan Bidang yang Ditentukan oleh Titik-titik dan Normal

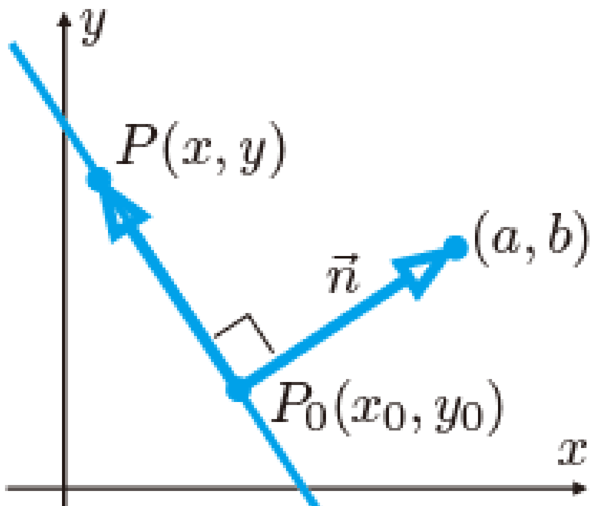
Dalam geometri analitik, suatu garis di $\mathbb{R}^2$ ditentukan secara tunggal oleh kemiringan dan satu titiknya, dan di $\mathbb{R}^3$ ditentukan secara tunggal oleh "inklinasi" dan satu titik. Salah satu cara untuk menentukan kemiringan dan inclinasi adalah dengan menggunakan vektor tak-nol $\vec{n}$ yang disebut *normal*, yaitu yang ortogonal ke garis atau bidang yang dimaksud. Sebagai contoh, Gambar 3.21, menunjukkan garis melalui titik $P_0(x_0, y_0)$ yang mempunyai normal $\vec{n} = (a, b)$ dan bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yang mempunyai normal $\vec{n} = (a, b, c)$. Kedua garis dan bidang datar tersebut dinyatakan dengan persamaan vektor

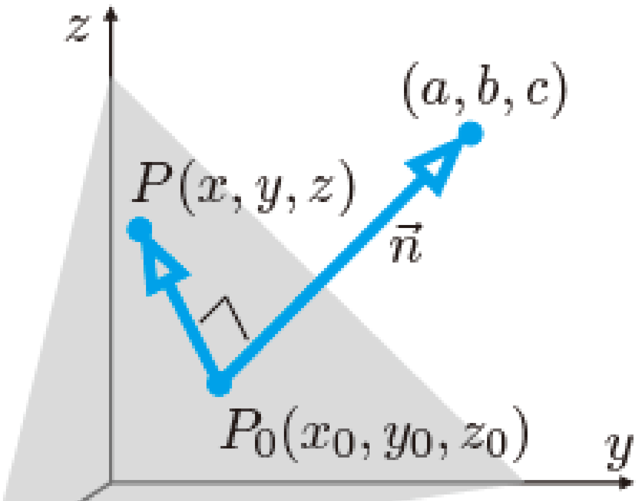
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{3.33}$$

dengan P sembarang titik (x, y) pada garis atau titik (x, y, z) pada bidang. Vektor $\overrightarrow{P_0P}$ dapat disajikan dalam suku-suku komponen, yaitu

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) \qquad \text{[garis]}$$
$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \qquad \text{[bidang]}$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad \text{[garis]} \qquad (3.34)$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \text{[bidang]} \qquad (3.35)$$

Persamaan-persamaan di atas dinamakan persamaan *titik-normal* dari garis dan bidang.





Contoh 3.12 Dari Persamaan 3.34 bahwa di $\mathbb{R}^2$ persamaan

$$6(x-3)+(y+7)=0$$

menggambarkan garis melalui titik $(3,-7)$ dengan normal $\vec{n}=(6,1)$; dan berdasarkan Persamaan 3.35 bahwa di $\mathbb{R}^3$ persamaan

$$4(x-3)+2y-5(z-7)=0$$

menggambarkan bidang datar melalui titik $(3,0,7)$ dengan normal $\vec{n}=(4,2,-5)$. $\square$

TEOREMA 3.19

(a) Jika a dan b konstanta tak-nol sembarang, maka persamaan dalam bentuk

$$ax + by + c = 0 \tag{3.36}$$

menyajikan garis di $\mathbb{R}^2$ dengan normal $\vec{n} = (a, b)$.

(b) Jika a, b, dan c konstanta tak-nol, maka persamaan dalam bentuk

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.37}$$

menyajikan bidang datar di $\mathbb{R}^3$ dengan normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

CONTOH 3.13

(a) Persamaan $ax + by = 0$ menyajikan garis yang melalui titik asal di $\mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{n}_1 = (a, b)$ ortogonal ke garis tersebut, yakni ortogonal ke semua vektor sepanjang garis tersebut.

(b) Persamaan $ax + by + cz = 0$ menyajikan bidang datar yang melalui titik asal di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{n}_2 = (a, b, c)$ ortogonal ke bidang datar tersebut, yakni ortogonal ke semua vektor pada bidang tersebut.

Penyelesaian. Dua persoalan tersebut diselesaikan bersama. Dua persamaan tersebut dapat ditulis

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \qquad \text{dan} \qquad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$$

atau dalam bentuk lain

$$\vec{n}_1 \cdot (x, y) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \vec{n}_2 \cdot (x, y, z) = 0.$$

Persamaan-persamaan itu menunjukkan bahwa $\vec{n}_1$ ortogonal ke semua vektor (x, y) pada garis $ax+by = 0$, dan $\vec{n}_2$ ortogonal ke semua vektor (x, y, z) pada bidang datar $ax+by+cz = 0$ (Gambar 3.21). □

Perhatikan bahwa

$$ax + by = 0 \qquad \text{dan} \qquad ax + by + cz = 0$$

adalah *persamaan-persamaan homogen.* Persamaan-persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk vektor

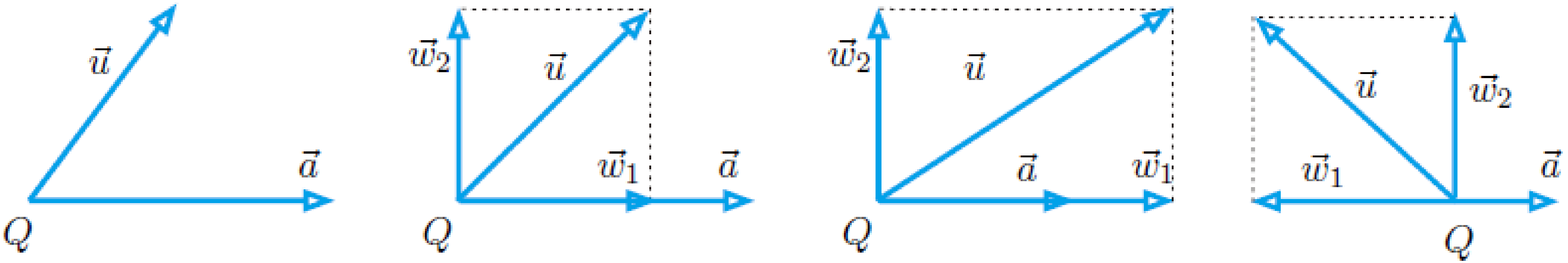
$$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.38}$$

dengan $\vec{n}$ merupakan vektor koefisien dan $\vec{x}$ vektor variabelnya. Di $\mathbb{R}^2$ persamaan ini disebut *bentuk vektor dari persamaan garis* yang melalui titik asal, dan di $\mathbb{R}^3$ disebut *bentuk vektor dari persamaan bidang datar* yang melalui titik asal.

Proyeksi Ortogonal

Dalam berbagai aplikasi perlu untuk melakukan "dekomposisi" suatu vektor $\vec{u}$ menjadi penjumlahan dua suku; satu suku merupakan perkalian skalar dengan suatu vektor tak-nol $\vec{a}$, dan satu suku lagi yang ortogonal ke $\vec{a}$. Sebagai contoh, jika $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ yang diposisikan dengan titik-titik pangkal berimpit di titik Q, maka dapat dilakukan dekomposisi sebagai berikut (Gambar 3.22):

- Tarik garis tegak lurus dari ujung $\vec{u}$ ke garis yang melalui $\vec{a}$.
- Buatlah vektor $\vec{w}_1$ dari Q ke kaki garis tegak lurus yang telah dibuat.
- Buatlah vektor $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1$.



(a) (b) (c) (d)

Karena $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_1 + (\vec{u} - \vec{w}_1) = \vec{u}$, berarti $\vec{u}$ didekomposisi menjadi penjumlahan dari dua vektor ortogonal, yang pertama berupa perkalian dengan skalar untuk $\vec{a}$ dan yang ke-dua ortogonal ke $\vec{a}$.

TEOREMA 3.20 Teorema Proyeksi
Jika $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan $\vec{a}$ vektor tak-nol, maka $\vec{u}$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, dengan $\vec{w}_1$ kelipatan skalar dari $\vec{a}$ dan $\vec{w}_1$ ortogonal ke $\vec{a}$.

Vektor-vektor $\vec{w}_1$ dan $\vec{w}_2$ dalam Teorema Proyeksi mempunyai nama khusus – vektor $\vec{w}_1$ disebut *proyeksi ortogonal dari $\vec{u}$ pada $\vec{a}$*, atau kadang disebut *komponen vektor dari $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$*, dan vektor $\vec{w}_2$ disebut *komponen vektor dari u ortogonnal ke $\vec{a}$*. Vektor $\vec{w}_1$ biasanya ditulis dengan simbol $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$, sehingga dari $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ dapat diperoleh $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$. Selanjutnya dapat dirangkum sebagai berikut:

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} \quad \text{(komponen vektor } \vec{u} \text{ sepanjang } \vec{a}\text{)} \tag{3.39}$$

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|a\|^2} \quad \text{(komponen vektor } \vec{u} \text{ ortogonal ke } \vec{a}\text{)} \tag{3.40}$$

CONTOH 3.14 Proyeksi Ortogonal pada Garis

Dapatkan proyeksi ortogonal dari vektor-vektor $\vec{e}_1 = (1, 0)$ dan $\vec{e}_2(0, 1)$ pada garis ℓ yang membentuk sudut θ dengan sumbu-x positif di $\mathbb{R}^2$.

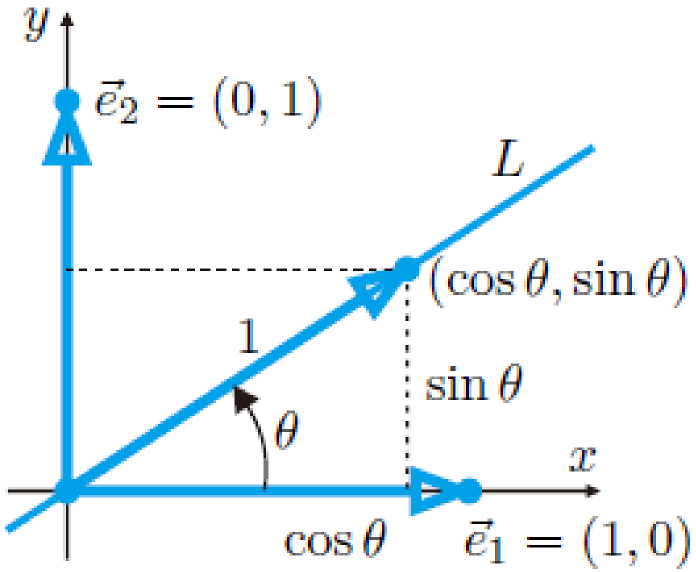
Penyelesaian. Sebagaimana tampak pada Gambar 3.23, $\vec{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$ adalah vektor satuan sepanjang garis L, sehingga permasalahan pertama adalah mencari proyeksi ortogonal dari $\vec{e}_1$ sepanjang $\vec{a}$. Karena

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \quad \text{dan} \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{a} = (1, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta,$$

berdasarkan Rumus 3.40 proyeksi yang dimaksud adalah

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = (\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\cos^2\theta, \sin^2\theta\right).$$

Dengan cara serupa, karena $\vec{e}_2 \cdot \vec{a} = (0, 1) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$, berdasarkan Rumus 3.40 diperoleh



Gambar 3.23

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = (\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\sin\theta, \cos\theta\sin^2\theta\right). \qquad \square$$

CONTOH 3.15 Komponen Vektor $\vec{u}$ Sepanjang $\vec{a}$

Misalkan $\vec{u} = (2, -1, 3)$ dan $\vec{a} = (4, -1, 2)$. Dapatkan komponen vektor $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$ dan komponen vektor $\vec{u}$ ortogonal $\vec{a}$.

Penyelesaian.

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\vec{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 21.$$

Jadi komponen vektor dari $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$ adalah

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right),$$

dan kompoen vektor dari $\vec{u}$ ortogonal ke $\vec{a}$ adalah

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Untuk memeriksa kebenarannya, dapat ditunnjukkan bahwa vektor-vektor $\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$ dan $\vec{a}$ saling tegak lurus dengan menunjukkan hasil-kali titiknya nol. $\square$

Untuk menghitung norma dari komponen vektor $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$, dapat dikerjakan sebagai berikut

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \left\| \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \right\| = \left| \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \right| \|\vec{a}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{a}|}{\|\vec{a}\|^2} \|\vec{a}\|$$

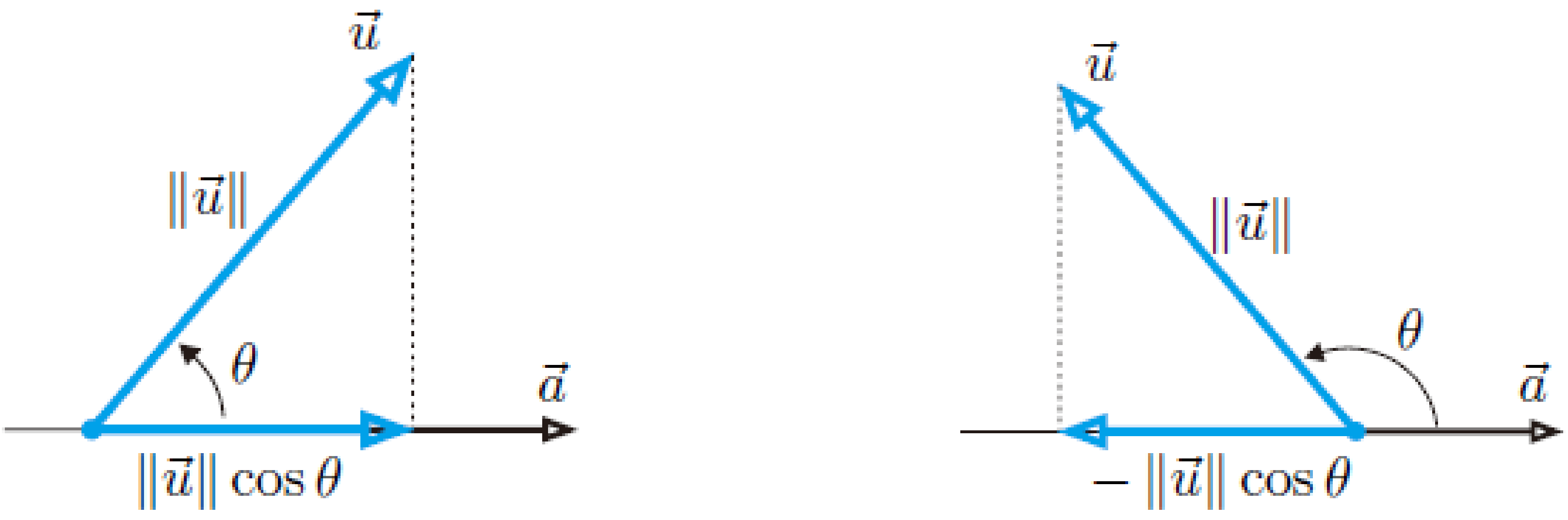
dengan kesamaan ke-dua diperoleh menggunakan Teorema 3.8(c) dan yang ke-tiga dari kenyataan bahwa $\|a\|^2 > 0$. Jadi diperoleh rumus

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{a}|}{\|\vec{a}\|} \tag{3.41}$$

Jika θ menyatakan sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{a}$, maka $\vec{u}\cdot\vec{a} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{a}\|\cos\theta$, sehingga (3.41) dapat ditulis sebagai

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\cos\theta. \tag{3.42}$$

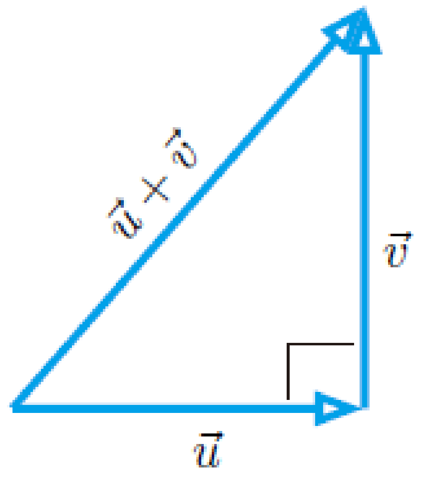
Interpretasi geometrik dari hasil ini diberikan dalam Gambar 3.24.



(a) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$

Teorema Pythagoras

Telah dibahas pada bagian sebelumnya bahwa banyak teorema tentang vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang juga berlaku di $\mathbb{R}^n$. Salah satunya adalah Teorema Pythagoras yang diperumum untuk $\mathbb{R}^n$ (Gambar 3.25).



Gambar 3.25

TEOREMA 3.21 Teorema Pythagoras di $\mathbb{R}^n$

Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor ortogonal di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil-kali-dalam Euclid, maka

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 . \tag{3.43}$$