Modul 3

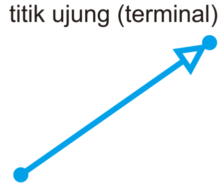
Ruang Vektor Euclid

3.1 Vektor di Ruang-2, Ruang-3, dan Ruang-n

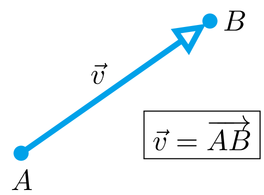
Bahasan utama dalam aljabar linear adalah mengenai “matriks” dan “vektor.” Pada bagian ini akan lebih banyak dibahas tentang vektor, sebab sifat-sifat pokok matriks telah dibahas pada bab sebelumnya.

■ Geometri Vektor

Dalam permasalahan fisika atau teknik, vektor di dua dimensi (disebut juga *ruang*-2) atau di tiga dimensi (disebut juga *ruang*-3) digambarkan sebagai anak-panah, yakni ruas garis dengan arah tertentu dan panjang tertentu. Dalam istilah matematika, objek yang digambarkan demikian itu disebut *vektor geometrik* (Gambar 3.1).



Gambar 3.1



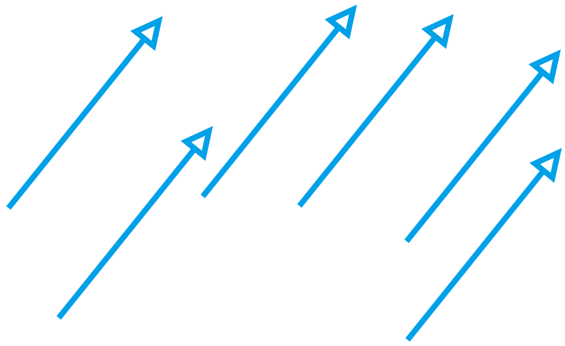
Gambar 3.2

Dalam catatan kuliah ini, vektor dinotasikan dengan huruf kecil dengan tanda panah di atas, seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, dan $\vec{v}$; sedangkan skalar dinotasikan dengan huruf kecil miring a, b, p, dan q atau kadang dengan huruf yunani kecil, seperti α, β, γ, dan λ. Apabila ingin menunjukkan vektor $\vec{v}$ yang mempunyai titik pangkal A dan titik ujung B, seperti dalam Gambar 3.2, ditulis:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Vektor-vektor dengan arah dan panjang yang sama, seperti dalam Gambar 3.3, dikatakan sebagai vektor-vektor yang *ekuivalen*. Karena vektor-vektor hanya dipandang berdasarkan panjang dan arahnya saja, vektor-vektor yang ekuivalen dikatakan *sama* meskipun posisinya berbeda-beda. Dengan demikian, vektor-vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ yang ekuivalen juga dikatakan *sama*, dan ditulis

$$\vec{v} = \vec{w}.$$



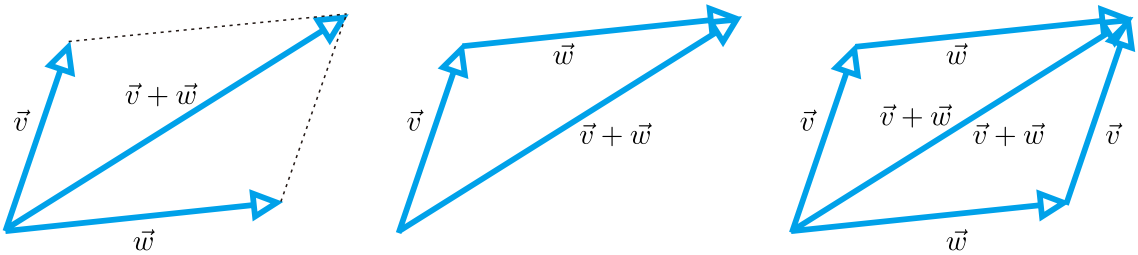
Gambar 3.3: Vektor-vektor yang ekuivalen

Vektor dengan panjang nol, yaitu titik pangkal dan titik ujungnya berimpit, disebut vektor nol dan dinotasikan dengan $\vec{0}$. Vektor nol dapat dipandang sebagai vektor dengan arah sembarang.

Penjumlahan Vektor

Banyak operasi aljabar yang penting pada vektor, yang semuanya berasal dari hukum-hukum fisika.

Aturan Jajargenjang untuk Penjumlahan Vektor
Jika $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ vektor-vektor di ruang-2 atau ruang-3, dengan titik-titik pangkalnya berimpit, maka vektor-vektor tersebut membentuk sisi-sisi yang berhubungan dari suatu jajargenjang, dan penjumlahan $\vec{v}+\vec{w}$ adalah suatu vektor yang titik pangkalnya pada pertemuan titik-titik pangkal dari $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ dan titik ujungnya tepat di titik sudut jajargenjang yang berseberangan dengan titik sudut di titik pangkalnya (Gambar 3.4(a)).



(a) (b) (c)

Gambar 3.4

Aturan Segitiga untuk Penjumlahan Vektor
Jika $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ dua vektor di ruang-2 atau ruang-3 dengan titik pangkal $\vec{w}$ terletak di titik ujung $\vec{v}$, maka penjumlahan $\vec{v}+\vec{w}$ adalah vektor yang titik pangkalnya di titik pangkal $\vec{v}$ dan ujungnya di titik ujung $\vec{w}$ (Gambar 3.4(b)).

Pada Gambar 3.4(c) dilakukan penjumlahan $\vec{v}+\vec{w}$ dan $\vec{w}+\vec{v}$ dengan aturan segitiga, yang menunjukkan bahwa

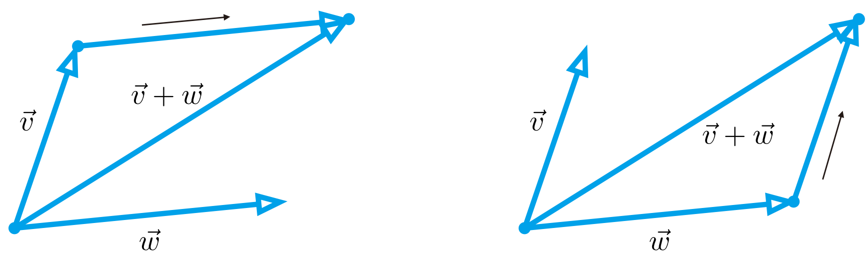
$$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$$

dan hasil penjumlahan yang diperoleh dengan aturan segitiga adalah sama dengan hasil dari penerapan aturan jajargenjang.

Penjumlahan Vektor sebagai Translasi
Jika $\vec{v}$, $\vec{w}$, dan $\vec{v}+\vec{w}$ adalah vektor-vektor yang titik-titik pangkalnya diletakkan berimpit, maka titik ujung dari $\vec{v}+\vec{w}$ dapat dipandang sebagai berikut:

(a) Titik ujung $\vec{v}+\vec{w}$ adalah titik yang dihasilkan dari pergeseran (translasi) titik ujung $\vec{v}$ pada arah $\vec{w}$ sejauh panjang $\vec{w}$ (Gambar 3.5(a)).

(b) Titik ujung $\vec{v}+\vec{w}$ adalah titik yang dihasilkan dari pergeseran (translasi) titik ujung $\vec{w}$ pada arah $\vec{v}$ sejauh panjang $\vec{v}$ (Gambar 3.5(b)).



(a) (b)

Gambar 3.5

Dalam hal ini, dapat dikatakan bahwa $\vec{v}+\vec{w}$ merupakan translasi dari $\vec{v}$ oleh $\vec{w}$, atau translasi $\vec{w}$ oleh $\vec{v}$.

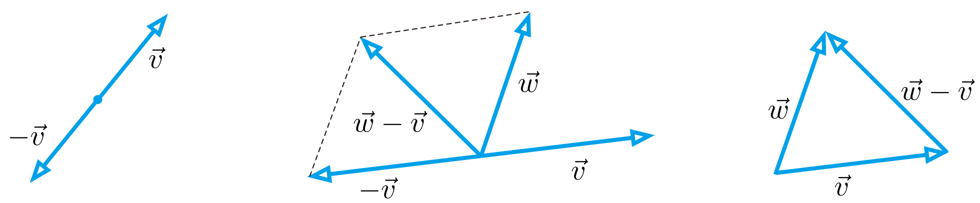
■ *Pengurangan Vektor*

Sebagaimana dalam aritmetika bilangan, bahwa pengurangan vektor juga dapat dipandang sebagai penjumlahan.

Negatif dari vektor $\vec{v}$, ditulis $-\vec{v}$, adalah vektor panjangnya sama dengan $\vec{v}$ tetapi arahnya berlawanan dengan arah $\vec{v}$ (Gambar 3.6(a). Vektor $\vec{w}$ dikurangi vektor $\vec{v}$, ditulis $\vec{w}-\vec{v}$, diperoleh dari penjumlahan

$$\vec{w}-\vec{v}=\vec{w}+(-\vec{v}).$$

Selisih $\vec{w}-\vec{v}$ dapat diperoleh secara geometrik dengan aturan jajargenjang seperti dalam



(a) (b) (c)

Gambar 3.6

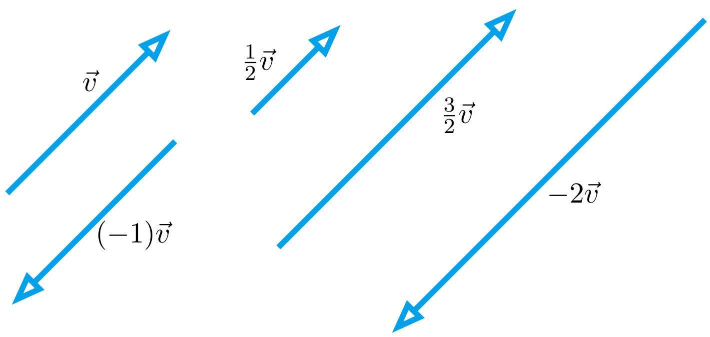
Gambar 3.6(b), atau secara langsung dengan meletakkan titik-titik pangkal $\vec{w}$ dan $\vec{v}$ berimpit dan menggambarkan vektor dari titik ujung $\vec{v}$ ke titik ujung $\vec{w}$ (Gambar 3.6(c)).

■ *Perkalian dengan Skalar*

Jika $\vec{v}$ vektor tak-nol di ruang-2 atau ruang-3, dan k suatu skalar tak-nol, maka didefinisikan *perkalian dengan skalar* dari $\vec{v}$ dengan k sebagai vektor dengan panjang $|k|$ kali panjang $\vec{v}$ dan mempunyai arah sama dengan arah $\vec{v}$ jika $k > 0$, dan arahnya berlawanan dengan arah $\vec{v}$ jika $k < 0$. Jika $k = 0$ atau $\vec{v} = \vec{0}$, maka didefinisikan $k\vec{v}$ sebagai vektor nol $\vec{0}$.

Gambar 3.7 menunjukkan hubungan secara geometrik antara vektor $\vec{v}$ dengan beberapa kelipatan skalar dari $\vec{v}$. Khusus untuk $k = -1$, perhatikan bahwa $(-1)\vec{v}$ memiliki panjang sama dengan $\vec{v}$ tetapi arahnya berlawanan; jadi:

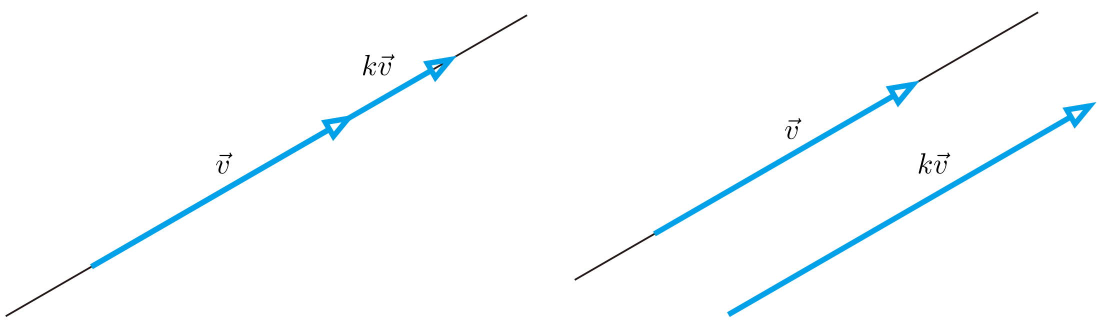
$$(-1)\vec{v} = -\vec{v}.$$



Gambar 3.7

■ *Vektor-vektor Sejajar dan Segaris*

Misalkan vektor-vektor $\vec{v}$ dan $\vec{w}$ di ruang-2 atau ruang-3 dengan titik panngkal berimpit. Jika salah satu vektor merupakan kelipatan dari yang lain, maka vektor-vektor tersebut terletak pada satu garis (*collinear*), lihat Gambar 3.8(a). Apabila salah satu vektor pada Gambar 3.8(a) digeser, seperti dalam Gambar 3.8(b), vektor-vektor tersebut dikatakan sejajar (*parallel*). Perlu dicermati, bahwa dua istilah tersebut mempunyai makna sama jika diterapkan untuk vektor.



(a) (b)

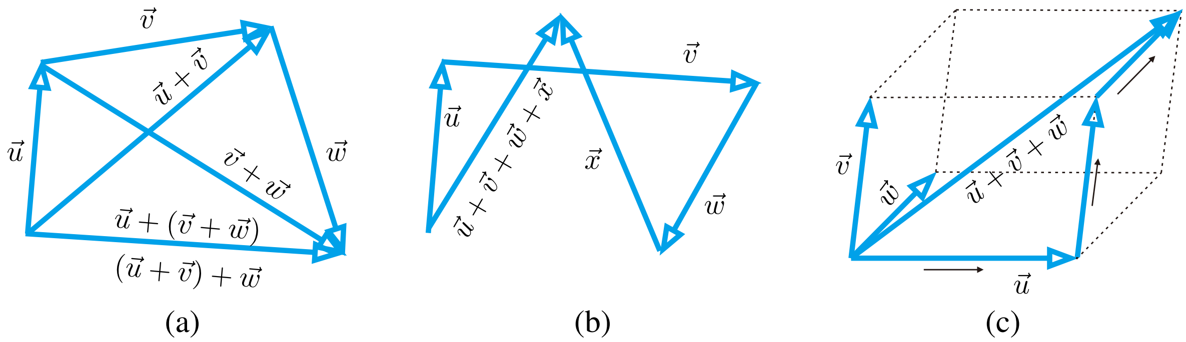
Gambar 3.8

Penjumlahan Tiga Vektor atau Lebih

Penjumlahan vektor memenuhi *hukum asosiatif untuk penjumlahan*, yaitu apabila dijumlahkan vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$, dapat dilakukan tanpa memperhatikan urutan penjumlahannya:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$

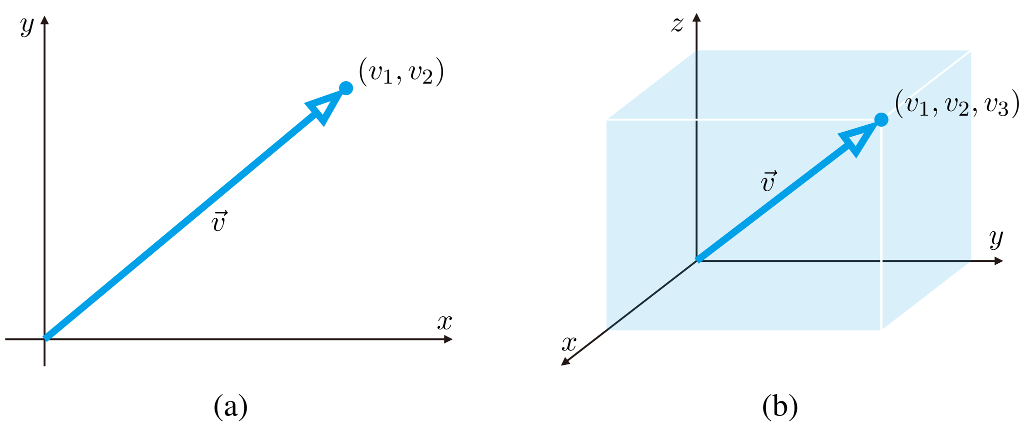
Cara mudah untuk menjumlahkan $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ adalah dengan meletakkan "pangkal pada ujung" secara berurutan, dan diperoleh vektor hasilnnya dengan menggambarkan vektor dari titik pangkal $\vec{u}$ ke titik ujung $\vec{w}$ (Gambar 3.9(a)). Cara demikian juga berlaku untuk empat vektor atau lebih (Gambar 3.9(b)). Demikian juga untuk penjumlahan vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ di ruang-3 (Gambar 3.9(c)).



Gambar 3.9

Vektor-vektor dalam Sistem Koordinat

Bentuk komponen dari vektor nol di ruang-2 adalah $\vec{0} = (0, 0)$, dan di ruang-3 adalah $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Jika suatu vektor $\vec{v}$ dengan titik pangkal diletakkan pada titik asal dalam sistem



Gambar 3.10

koordinat siku-siku, maka vektor tersebut dapat dikenali dengan koordinat-koordinat dari titik ujungnya (Gambar 3.10). Koordinat itu disebut *komponen* dari $\vec{v}$ relatif terhadap sistem koordinatnya. Untuk selanjutnya ditulis $\vec{v} = (v_1, v_2)$ untuk menyatakan suatu vektor $\vec{v}$ di ruang-2 dengan komponen (v_1, v_2), dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ untuk menyatakan suatu vektor $\vec{v}$ di ruang-3 dengan komponen (v_1, v_2, v_3).

Secara geometrik jelas bahwa vektor-vektor di ruang-2 atau ruang-3 adalah ekuivalen jika dan hanya jika vektor-vektor tersebut mempunyai titik ujung yang sama saat titik pangkalnya diletakkan di titik asal. Secara aljabar, hal ini berarti dua vektor dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika komponen-komponen yang bersesuaian adalah sama. Sebagai contoh, untuk vektor-vektor di ruang-3

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{dan} \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

adalah ekuivalen jika dan hanya jika

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad v_3 = w_3.$$

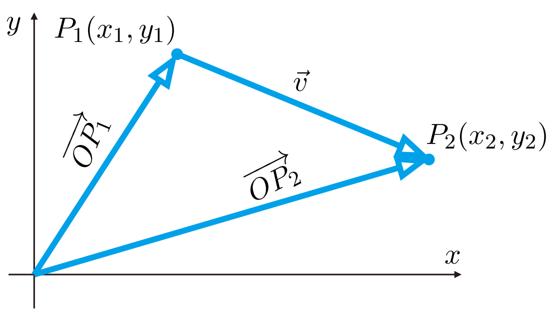
Vektor-vektor dengan Titik Pangkal Tidak di Titik Asal

Jika $\overrightarrow{P_1P_2}$ menyatakan vektor dengan titik pangkal $P_1(x_1, y_1)$ dan titik ujung $P_2(x_2, y_2)$, maka komponen vektor tersebut adalah

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Sebagai contoh, pada Gambar 3.11 vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah selisih dari vektor-vektor $\overrightarrow{OP_2}$ dan $\overrightarrow{OP_1}$, sehingga

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



Gambar 3.11

CONTOH 3.1 Komponen vektor dari vektor $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ dengan titik pangkal $P_1(1, -7, 2)$ dan titik ujung $P_2(2, -5, 5)$ adalah

$$\vec{v} = (2 - 1, -5 - (-7), 5 - 2) = (1, 2, 3)$$

□

Ruang-n

DEFINISI 3.1 Jika n suatu bilangan bulat positif, maka ***pasangan-n terurut*** adalah adalah jajaran n bilangan real $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Himpunan dari semua pasangan-n terurut disebut ruang-n dan ditulis dengan notasi $\mathbb{R}^n$.

Istilah pasangan-n terurut kadang juga disebut n-tuple terurut. Kata "terurut" penting untuk diperhatikan, karena menyatakan pentingnya suatu urutan dalam pasangan-n yang berkaitan. Sebagai contoh, pasangan-3 terurut (v_1, v_2, v_3) tidak bisa ditulis sebagai (v_2, v_3, v_1).

Operasi pada Vektor di $\mathbb{R}^n$

Operasi-operasi pada $\mathbb{R}^n$ merupakan generalisasi dari operasi-operasi yang telah dibahas pada vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Suatu vektor $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$ ditulis dengan notasi

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

dan vektor $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ disebut *vektor nol*.

DEFINISI 3.2 Vektor-vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan *ekuivalen* (juga dikatakan *sama*) jika

$$v_1 = w_1, \quad v_2 = w_2, \quad \ldots, \quad v_n = w_n,$$

dan ditulis $\vec{v} = \vec{w}$.

CONTOH 3.2 Vektor $\vec{u} = (a, b, c, d)$ dikatakan sama dengan vektor $\vec{v} = (4, -2, 3, 1)$, yaitu

$$\vec{u} = \vec{v} \qquad \text{atau} \qquad (a, b, c, d) = (4, -2, 3, 1)$$

jika dan hanya jika $a = 4$, $b = -2$, $c = 3$, dan $d = 1$. □

Ingat kembali bahasan tentang operasi pada vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$. Dengan mengamati Gambar 3.12 dapat disimpulkan bahwa untuk $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2)$, diperoleh

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{3.1}$$

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2) \tag{3.2}$$

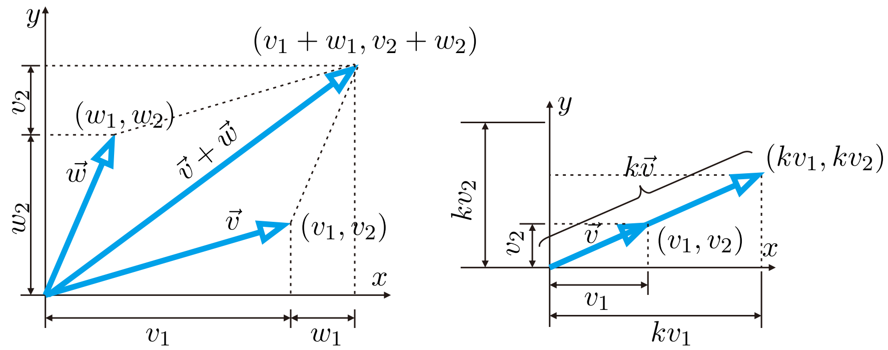
Khususnya, dari (3.2) dapat diperoleh

$$-\vec{v} = (-1)\vec{v} = (-v_1, -v_2) \tag{3.3}$$

dan dengan demikian

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2). \tag{3.4}$$

Hasil (3.1)–(3.4) dapat diperumum untuk menghasilkan definisi berikut ini.



Gambar 3.12

DEFINISI 3.3 Jika $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka dapat didefinisikan

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n) \tag{3.5}$$

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n) \tag{3.6}$$

$$-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n) \tag{3.7}$$

$$\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + (-\vec{v}) = (w_1 - v_1, w_2 - v_2, \ldots, w_n - v_n) \tag{3.8}$$

Dengan kalimat dapat dikatakan bahwa penjumlahan (atau pengurangan) vektor-vektor dilakukan dengan menjumlahkan (atau mengurangkan) komponen-komponen yang bersesuaian.

Berikut ini rangkuman sifat-sifat penting dari operasi-operasi pada vektor.

TEOREMA 3.4 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, serta k dan m skalar-skalar, maka:

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(c) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

(d) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

(e) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

(f) $(k + m)\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$

(g) $k(m\vec{u}) = (km)\vec{u}$

(h) $1\vec{u} = \vec{u}$

TEOREMA 3.5 Jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^n$ dan k skalar, maka

(a) $0\vec{v} = \vec{0}$

(b) $k\vec{0} = \vec{0}$

(c) $(-1)\vec{v} = -\vec{v}$

Berdasarkan Teorema 3.4 dan Teorema 3.5 dapat dilakukan penghitungan tanpa menyatakan vektor-vektor dalam bentuk komponen-komponen. Sebagai contoh, misalkan $\vec{x}$, $\vec{a}$, dan $\vec{b}$ adalah vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan akan dicari penyelesaian dari $\vec{x}+\vec{a}=\vec{b}$ untuk $\vec{x}$ tanpa menggunakan komponen-komponen vektor. Hal tersebut dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\vec{x}+\vec{a} &= \vec{b} && \text{[diketahui]}\\
(\vec{x}+\vec{a})+(-\vec{a}) &= \vec{b}+(-\vec{a}) && \text{kedua sisi ditambah } -\vec{a}\\
\vec{x}+(\vec{a}+(-\vec{a})) &= \vec{b}-\vec{a} && \text{dari Teorema 3.4 (b)}\\
\vec{x}+\vec{0} &= \vec{b}-\vec{a} && \text{dari Teorema 3.4 (d)}\\
\vec{x} &= \vec{b}-\vec{a} && \text{dari Teorema 3.4 (c)}
\end{aligned}$$

Kombinasi Linear

Gabungan (kombinasi) penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar seringkali digunakan untuk membangun vektor-vektor baru. Sebagai contoh, jika $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka vektor-vektor

$$\vec{u}=2\vec{v}_1+2\vec{v}_2+3\vec{v}_3 \qquad \text{dan} \qquad \vec{w}=3\vec{v}_1-3\vec{v}_2+\vec{v}_3$$

dibangun dengan gabungan antara penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dengan skalar dari vektor-vektor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, dan $\vec{v}_3$. Secara umum, dirumuskan dalam definisi berikut ini.

DEFINISI 3.6 Jika $\vec{w}$ suatu vektor di $\mathbb{R}^n$, maka $\vec{w}$ dikatakan sebagai *kombinasi linear* dari vektor-vektor $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \ldots,\ \vec{v}_r$ di $\mathbb{R}^n$ jika $\vec{w}$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\vec{w}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\cdots+k\vec{v}_r \tag{3.9}$$

dengan $k_1, k_2, \ldots, k_r$ skalar-skalar. Skalar-skalar tersebut dinamakan *koefisien* dari kombinasi linear. Dalam hal $r=1$, Persamaan 3.9 menjadi $\vec{w}=k_1\vec{v}_1$, sehingga kombinasi linear dari satu vektor hanyalah suatu kelipatan dari vektor tersebut.

Aplikasi Kombnasi Linear pada Model Warna

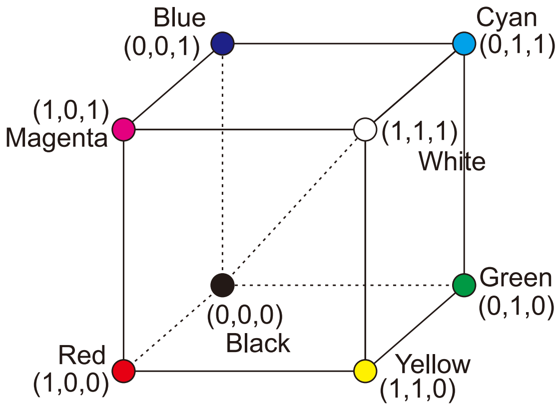
Warna pada layar komputer umumnya berdasarkan *model warna* RGB (Red-Green-Blue). Warna utama disajikan dengan vektor-vektor

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (1,0,0) && \text{(pure red)}\\
\vec{g} &= (0,1,0) && \text{(pure green)}\\
\vec{b} &= (0,0,1) && \text{(pure blue)}
\end{aligned}$$

di $\mathbb{R}^3$. Warna-warna yang lain, misal warna $\vec{w}$, dihasilkan dengan cara membentuk kombinasi linear dari $\vec{r}$, $\vec{g}$, dan $\vec{b}$

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= k_1\vec{r}+k_2\vec{g}+k_3\vec{b}\\
&= k_1(1,0,0)+k_2(0,1,0)+k_3(0,0,1)\\
&= (k_1,k_2,k_3)
\end{aligned}$$

dengan $0 \le k_i \le 1$. Himpunan semua warna kombinasi tersebut dinamakan *ruang RGB* atau *kubus warna RGB* (Gambar 3.13). Sebagaimana ditampakkan dalam gambar



Gambar 3.13

tersebut, masing-masing titik sudut kubus menyajikan warna utama beserta warna hitam, putih, magenta, cyan, dan kuning. Vektor pada diagonal dari sudut hitam ke sudut putih berkaitan dengan warna abu-abu yang bergerak dari gelap (hitam) ke terang (putih).

■ *Notasi Alternatif untuk Vektor*

Notasi yang telah dibahas untuk menuliskan vektor di $\mathbb{R}^n$ adalah

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \tag{3.10}$$

Bentuk (3.10) menggunakan tanda pemisah koma, dan dengan penulisan mendatar. Karena suatu vektor di $\mathbb{R}^n$ hanyalah daftar dari n komponen yang ditulis berurutan, berarti sembarang notasi yang menyajikan komponen-komponen tersebut dalam urutan yang benar dapat digunakan. Sebagai contoh, vektor dalam (3.10) dapat ditulis sebagai

$$\vec{v} = [v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n] \tag{3.11}$$

yang disebut bentuk *matriks-baris*, atau sebagai

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

yang disebut bentuk *matriks-kolom*. Notasi pada (3.10), (3.11), dan (3.12) akan digunakan bergantian menyesuaikan penggunaan yang tepat.

■ *Latihan 3.1*

1. Gambarkan sistem koordinat (seperti dalam Gambar 3.10) dan letakkan titik-titik dengan koordinat-koordinat berikut ini.

   (a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$
   (d) $(3, 4, -5)$ (e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, -4, -5)$

2. Gambarkan sketsa vektor-vektor berikut ini dalam sistem koordinat siku-siku.
   (a) $\vec{v}_1 = (2, 5)$ (b) $\vec{v}_2 = (1, -3)$ (c) $\vec{v}_3 = (-2, -1)$
   (d) $\vec{v}_4 = (1, 1, 3)$ (e) $\vec{v}_5 = (2, 1, -3)$ (f) $\vec{v}_6 = (-1, 0, 3)$

3. Gambarkan sketsa vektor-vektor berikut ini dengan titik pangkal pada titik asal sistem koordinat siku-siku.
   (a) $P_1(-3, 2)$, $P_2(3, 1)$ (b) $P_1(0, 0)$, $P_2(3, 5)$
   (c) $P_1(-1, 0, 2)$, $P_2(3, 1, 1)$ (d) $P_1(1, 1, 2)$, $P_2(3, 2, 1)$

4. Dapatkan komponen-komponen vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.
   (a) $P_1(2, 1)$, $P_2(3, 3)$ (b) $P_1(-1, 2)$, $P_2(3, 1)$
   (c) $P_1(-2, -1, 1)$, $P_2(-1, 3, 4)$ (d) $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(1, 0, 0)$

5. (a) Dapatkan vektor dengan titik pangkal di $A(1, 1)$ yang ekuivalen dengan $\vec{u} = (1, 2)$.
   (b) Dapatkan vektor dengan titik ujung di $B(-1, -1, 2)$ yang ekuivalen dengan $\vec{u} = (1, 1, 3)$.
   (c) Dapatkan vektor tak-nol $\vec{u}$ dengan titik ujung di $Q(3, 0, -5)$ yang berlawanan arah dengan vektor $\vec{v} = (4, -2, 1)$.
   (d) Dapatkan vektor tak-nol $\vec{u}$ dengan titik pangkal di $P(-1, 3, -5)$ yang searah dengan vektor $\vec{v} = (6, 7, -3)$.

6. Diketahui $\vec{u} = (-2, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$, dan $\vec{w} = (5, 2, 2)$. Dapatkan komponen-komponen dari:
   (a) $\vec{u} - \vec{w}$ (b) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ (c) $-\vec{v} + 2(\vec{u} + 3\vec{w})$
   (d) $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ (e) $\vec{w} + (2\vec{u} - \vec{v})$ $(\vec{u} - 2\vec{v}) - (2\vec{v} + \vec{w})$

7. Untuk vektor-vektor $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ pada Soal no. 6., dapatkan vektor $\vec{x}$ yang memenuhi persamaan $5\vec{x} - \vec{v} = \vec{w} + 3(\vec{u} - 2\vec{x})$.

8. Dapatkan nilai-nilai t, jika ada, sehingga masing-masing vektor berikut ini sejajar dengan vektor $\vec{u} = (4, -1)$.
   (a) $(8t, -2)$ (b) $(8t, 2t)$ (c) $(1, t^2)$

9. (a) Untuk $\vec{u} = (1, -1, 3, 5)$ dan $\vec{v} = (2, 1, 0, -3)$, dapatkan skalar-skalar a dan b sehingga $a\vec{u} + b\vec{v} = (1, -4, 9, 18)$.
   (b) Dapatkan skalar-skalar c_1, c_2, dan c_3 sehingga $c_1(1, -1, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$.
   (c) Tunjukkan bahwa tidak ada skalar-skalar c_1, c_2, dan c_3 yang memenuhi $c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$.

10. Lihat Gambar 3.11. Diskusikan interpretasi geometrik dari vektor
$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right)$$

11. (a) Dapatkan titik tengah dari ruas garis yang menghubungkan titik $P(2, 3, -2)$ dan titik $Q(7, -4, 1)$.
    (b) Diketahui P titik $(1, 3, 7)$. Jika titik $(4, 0, -6)$ adalah titik tengah dari ruas garis yang menghubungkan P dan Q, dapatkan koordinat titik Q.

12. Buktikan Teorema 3.4 dan Teorema 3.5.

3.2 Norma, Hasil-kali Titik, dan Jarak di $\mathbb{R}^n$

Bahasan pada bagian ini ditekankan pada pengertian panjang dan jarak yang berkaitan dengan vektor. Diawali dengan pembahasan di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$, dan dilanjutkan secara aljabar ke $\mathbb{R}^n$.

■ Norma Vektor

Dalam catatan kuliah ini panjang vektor $\vec{v}$ ditulis dengan simbol $\|\vec{v}\|$, dan dibaca dengan *norma* $\vec{v}$, *panjang* $\vec{v}$, atau *besarnya* $\vec{v}$. Pada Gambar 3.14(a) tampak bahwa norma vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ adalah

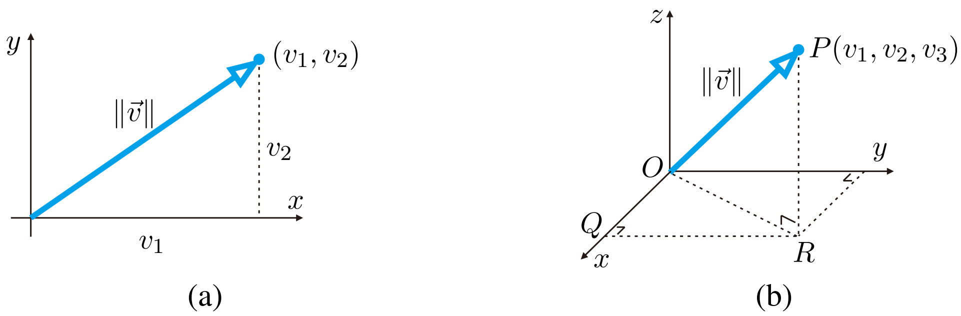
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \tag{3.13}$$

Dengan cara serupa norma untuk vektor (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$, lihat Gambar 3.14(b), dapat diperoleh menggunakan rumus Pythagoras, yaitu

$$\|\vec{v}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (QR)^2 + (RP)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

dan dengan demikian didapat

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{3.14}$$



Gambar 3.14

Berdasarkan pola Rumus (3.13) dan (3.14) dapat dirumuskan definisi berikut ini.

DEFINISI 3.7 Jika $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ suatu vektor di $\mathbb{R}^n$, maka *norma* dari $\vec{v}$ (juga disebut *panjang* dari $\vec{v}$ atau *besarnya* $\vec{v}$) ditulis dengan $\|\vec{v}\|$ dan didefinisikan dengan rumus

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}. \tag{3.15}$$

CONTOH 3.3 Berdasarkan Rumus 3.14, norma vektor $\vec{v} = (2, 3, -1)$ adalah

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

dan dari Rumus 3.15 norma vektor $\vec{v} = (1, -2, 3, -4)$ adalah

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}.$$

□

TEOREMA 3.8 Jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka

(a) $\|\vec{v}\| \geq 0$.

(b) $\|\vec{v}\| = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$.

(c) $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$.

Vektor Satuan

Suatu vektor dengan norma 1 disebut *vektor satuan*. Sebagai contoh, jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ dengan panjang 2, maka $\frac{1}{2}\vec{v}$ adalah vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$. Secara umum, jika $\vec{v}$ suatu vektor tak nol di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} \tag{3.16}$$

adalah vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$.

CONTOH 3.4 Dapatkan vektor satuan $\vec{u}$ yang searah dengan vektor $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

Penyelesaian. Panjang vektor $\vec{v}$ adalah

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

Jadi

$$\vec{u} = \tfrac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right) \qquad \square$$

Vektor Satuan Baku

Dalam sistem koordinat siku-siku di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, vektor-vektor satuan dalam arah positif sumbu-sumbu koordinat disebut *vektor satuan baku*. Notasi untuk vektor-vektor satuan baku di $\mathbb{R}^2$ adalah

$$\vec{\imath} = (1, 0) \qquad \text{dan} \qquad \vec{\jmath} = (0, 1)$$

dan di $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0), \qquad \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \qquad \text{dan} \qquad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

(Gambar 3.15).

Setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dan setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan baku dengan menuliskan

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1(1, 0) + v_2(0, 1) = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath},$$

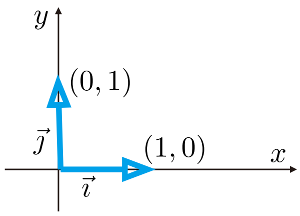
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}.$$

Lebih umum lagi, hal di atas dapat diperumum untuk $\mathbb{R}^n$ dengan mendefinisikan *vektor satuan baku di* $\mathbb{R}^n$ yaitu

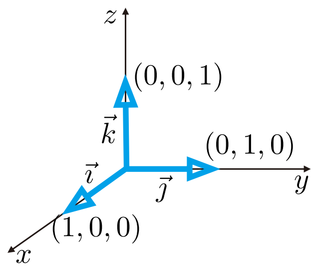
$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

sehingga setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$



(a)



(b)

Gambar 3.15

CONTOH 3.5 Kombinasi linear dari vektor-vektor satuan baku.

$$(3,2,-1) = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$(3,-2,4,7) = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 7\vec{e}_4$$

□

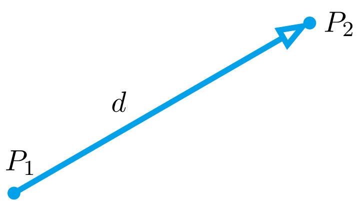
■ *Jarak di* $\mathbb{R}^n$

Jika P_1 dan P_2 titik-titik di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, maka panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah sama dengan d yang merupakan jarak dipilih antara kedua titik tersebut (Gambar 3.16). Sebagai contoh, jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ titik-titik di $\mathbb{R}^2$, maka jarak antara P_1 dan P_2 adalah

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demikian pula, jarak antara titik-titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ di $\mathbb{R}^3$ adalah

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Gambar 3.16

DEFINISI 3.9 Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah titik-titik di $\mathbb{R}^n$, maka *jarak* antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, ditulis $d(\vec{u}, \vec{v})$, didefinisikan sebagai

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}. \tag{3.17}$$

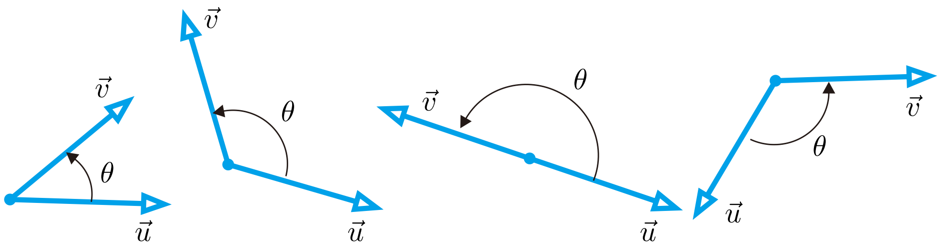
CONTOH 3.6 Jika $\vec{u} = (3,2,1,4)$ dan $\vec{v} = (2,-3,-4,3)$, maka jarak antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-3))^2 + (1-(-4))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{52}.$$

□

Hasil-kali Titik

Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor tak-nol dengan titik pangkal diletakkan berimpit, maka didefinisikan *sudut antara* $\vec{u}$ *dan* $\vec{v}$ sebagai sudut θ yang ditentukan oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ (Gambar 3.17).



Sudut θ antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ yang memenuhi $0 \leq \theta \leq \pi$

Gambar 3.17

DEFINISI 3.10 Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor tak-nol di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, dan jika θ adalah sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, maka *hasil-kali titik* (disebut juga *hasil-kali-dalam Euclid*) dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ditulis $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dan didefinisikan sebagai

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta. \tag{3.18}$$

Jika $\vec{u} = \vec{0}$ atau $\vec{v} = \vec{0}$, maka didefinisikan $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

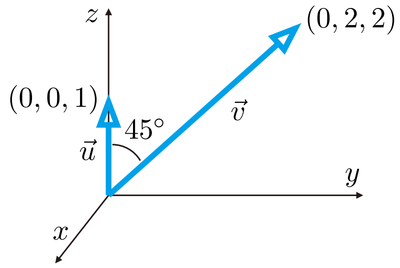
Tanda dari hasil-kali titik menunjukkan informasi tentang sudut θ yang dapat diperoleh dengan menulis kembali Rumus 3.18 sebagai

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{3.19}$$

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, berarti dari Rumus 3.19 dapat diperoleh bahwa:

- θ sudut lancip jika $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- θ sudut tumpul jika $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$;
- $\theta = \pi/2$ jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

CONTOH 3.7 Dapatkan hasil-kali titik dari vektor-vektor pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18

Penyelesaian. Panjang vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad \text{dan} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

dan cosinus sudut θ di antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Berdasarkan Rumus 3.18 dapat diperoleh

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta = (1)(2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 2.$$ □

CONTOH 3.8 **Persoalan Geometri yang Diselesaikan dengan Hasil-Kali Titik**
Dapatkan besar sudut antara satu dagonal kubus dan salah satu rusuknya.

Penyelesaian. Misalkan k adalah panjang satu rusuk dan digunakan sistem koordinat seperti dalam Gambar 3.19. Jika dipilih $\vec{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, k, 0)$, dan $\vec{u}_3 = (0, 0, k)$, maka vektor

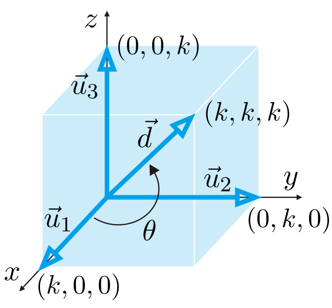
$$\vec{d} = (k, k, k) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

adalah diagonal dari kubus. Berdasarkan Rumus 3.19 sudut θ antara $\vec{d}$ dan rusuk $\vec{u}_1$ memenuhi

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{d}}{\|\vec{u}_1\| \left\|\vec{d}\right\|} = \frac{k^2}{(k)\left(\sqrt{3k^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dengan bantuan kalkulator diperoleh

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74^\circ$$



Gambar 3.19

■ *Bentuk Komponen dari Hasil-Kali Titik*

Untuk keperluan komputasi diperlukan rumusan yang menyatakan hasil-kali titik dari dua vektor dalam suku-suku komponen vektor. Berikut ini diuraikan rumusan untuk vektor di $\mathbb{R}^3$.

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dua vektor tak-nol. Jika θ adalah sudut di antara dua vektor tersebut, lihat Gambar 3.20, maka dengan hukum cosinus diperoleh

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta. \tag{3.20}$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} - \vec{u}$, bentuk (3.20) dapat ditulis sebagai

$$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$$

atau

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right).$$

Dengan substitusi

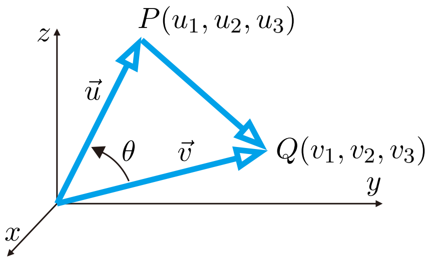
$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

dan

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

dan dengan menyederhanakan, diperoleh

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3.21}$$



Gambar 3.20

Hal serupa dapat diterapkan untuk vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2. \tag{3.22}$$

Berdasarkan pola yang didapat pada Rumus 3.21 dan 3.22 dapat dirumuskan definisi berikut ini.

DEFINISI 3.11 Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka *hasil-kali titik* (juga disebut *hasil-kali-dalam Euclid*) dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, ditulis $\vec{u}\cdot\vec{v}$, didefinisikan dengan

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n. \tag{3.23}$$

CONTOH 3.9

(a) Gunakan Rumus 3.21 untuk mendapatkan hasil-kali titik dari vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ pada Contoh 3.7.

(b) Hitunglah $\vec{u} \cdot \vec{v}$ untuk vektor-vektor di $\mathbb{R}^4$ berikut ini:

$$\vec{u} = (-1, 3, 5, 7), \quad \vec{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Penyelesaian.

(a) Bentuk komponen dari vektor-vektornya adalah $\vec{u} = (0, 0, 1)$ dan $\vec{v} = (0, 2, 2)$; sehingga didapat

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2.$$

(b)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4.$$
□

■ *Sifat-sifat Aljabar dari Hasil-kali Titik*

Untuk $\vec{u} = \vec{v}$ dalam Definisi 3.11, diperoleh hubungan

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\vec{v}\|^2 \tag{3.24}$$

dan ini juga menyatakan panjang vektor dalam suku-suku hasil-kali titik

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \tag{3.25}$$

Hasil-kali titik mempunyai banyak sifat aljabar yang sama dengan hasil kali bilangan real.

TEOREMA 3.12 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k suatu skalar, maka

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(c) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

(d) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ dan $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$

Teorema berikut ini merupakan sifat-sifat tambahan untuk hasil-kali titik.

TEOREMA 3.13 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k suatu skalar, maka

(a) $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

(d) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

CONTOH 3.10

$$\begin{aligned}(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) &= \vec{u} \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) - 2\vec{v} \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) \\ &= 3(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{v} \cdot \vec{u}) - 8(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\ &= 3\|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 8\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

□

■ *Ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut di $\mathbb{R}^n$*

Bahasan berikut ini tentang pengertian "sudut" antara vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$. Pertama, dengan rumus

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right). \tag{3.26}$$

Rumus 3.26 dapat digunakan untuk mengetahui besar sudut antara dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$, asalkan dipenuhi syarat

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1. \tag{3.27}$$

Syarat tersebut dipenuhi berdasarkan teorema berikut ini.

TEOREMA 3.14 **Ketaksamaan Cauchy-Schwarz**
Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \tag{3.28}$$

atau dalam suku-suku komponen vektor

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq \left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)^{1/2}\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)^{1/2} \tag{3.29}$$

■ *Geometri di $\mathbb{R}^n$*

Pada pembahasan bagian sebelumnya telah dikembangkan beberapa konsep pada $\mathbb{R}^n$ yang dapat dijelaskan secara geometri berlaku di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Berikut ini beberapa sifat lagi yang berlaku secara umum di $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 3.15 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka

(a) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ [Ketaksamaan Segitiga untuk vektor]

(b) $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$ [Ketaksamaan Segitiga untuk jarak]

TEOREMA 3.16 **Kesamaan Jajargenjang untuk Vektor**
Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right). \tag{3.30}$$

TEOREMA 3.17 Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil-kali titik Euclid, maka

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2. \tag{3.31}$$

■ *Hasil-Kali Titik sebagai Perkalian Matriks*

Terdapat beberapa cara untuk menyatakan hasil-kali titik dari vektor-vektor menggunakan notasi matriks. Hal yang perlu diperhatikan adalah penyajian vektor sebagai matriks baris atau sebagai matriks kolom. Berikut ini kemungkinan yang ada.

Jika A adalah matriks $n \times n$, serta $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ matriks-matriks $n \times 1$, maka

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T(A\vec{u}) = \left(\vec{v}^T A\right)\vec{u} = \left(A^T\vec{v}\right)^T \vec{u} = \vec{u} \cdot A^T\vec{v}$$
$$\vec{u} \cdot A\vec{v} = (A\vec{v})^T\vec{u} = \left(\vec{v}^T A^T\right)\vec{u} = \vec{v}^T\left(A^T\vec{u}\right) = A^T\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dengan hasil-kali titik juga dapat digunakan untuk mengerjakan perkalian matriks. Ingat kembali bahwa jika $A = [a_{ij}]$ matriks $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ matriks $r \times n$, maka entri ke-ij dari AB adalah

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

yang merupakan asil-kali titik dari vektor baris ke-i dari A

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} \end{bmatrix}$$

dengan vektor kolom ke-j dari B

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

Jadi, jika vektor-vektor baris dari A adalah $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_m$ dan vektor-vektor kolom dari B adalah $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n$, hasil-kali matriks AB dapat dinyatakan sebagai

$$AB = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_n \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_m \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{c}_n \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

■ *Latihan 3.2*

1. Dapatkan norma dari $\vec{v}$, vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$, dan vektor satuan yang berlawanan arah dengan $\vec{v}$.

   (a) $\vec{v} = (3, -4)$ (b) $\vec{v} = (2, -1, 2)$ (c) $\vec{v} = (3, 1, -1, -2)$

2. Hitunglah norma pada masing-masing soal berikut, untuk $\vec{u} = (2, -2, 3)$, $\vec{v} = (1, -3, 4)$, dan $\vec{w} = (3, 6, -4)$.

   (a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ (b) $\|u\| + \|\vec{v}\|$ (c) $\|-2\vec{u} + 2\vec{v}\|$ (d) $\|2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}\|$

3. Dapatkan nilai-nilai skalar k yang memenuhi $k\vec{v} = 4$ untuk $\vec{v} = (1, 1, 2, -3, 1)$.

4. Untuk masing-masing soal berikut ini, dapatkan $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{u}$, dan $\vec{v} \cdot \vec{v}$.

   (a) $\vec{u} = (3, 1, 4),\ \vec{v} = (2, 2, -4)$ (b) $\vec{u} = (1, 1, 4, 6),\ \vec{v} = (2, -2, 3, -2)$
   (c) $\vec{u} = (1, 1, -2, 3),\ \vec{v} = (-1, 0, 5, 1)$ (d) $\vec{u} = (2, -1, 1, 0, -2),\ \vec{v} = (1, 2, 2, 2, 1)$

5. Dapatkan jarak Euclid antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

   (a) $\vec{u} = (3, 3, 3),\ \vec{v} = (1, 0, 4)$ (b) $\vec{u} = (0, -2, 1, -1),\ \vec{v} = (-3, 2, -4, -4)$
   (c) $\vec{u} = (1, 2, -3, 0),\ \vec{v} = (5, 1, 2, -2)$ (d) $\vec{u} = (0, 1, 1, 1, 2),\ \vec{v} = (2, 1, 0, -1, 3)$

6. Dapatkan cosinus sudut antara vektor-vektor pada masing-masing soal No. 5., dan pastikan apakah sudut-sudut tersebut lancip, tumpul, atau $90°$.
7. Misal vektor $\vec{a}$ di bidang-xy mempunyai panjang 9 satuan dan arah $120°$ berlawanan arah jarum jam dari sumbu-x positif, dan vektor $\vec{b}$ di bidang yang sama mempunyai panjang 5 satuan dan searah sumbu-y positif. Dapatkan $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
8. Jika $\|\vec{v}\| = 2$ dan $\|\vec{w}\| = 3$, berapakah nilai terbesar dan terkecil yang mungkin untuk $\|\vec{v} - \vec{w}\|$? Berikan penjelasan secara geometrik.
9. Misalkan $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ dan $\vec{p} = (x, y, z)$. Jelaskan mengenai himpunan semua titik (x, y, z) yang memenuhi $\|\vec{p} - \vec{p}_0\| = 1$.
10. Syarat apakah yang diperlukan sehingga ketaksamaan segitiga (Teorema 3.15(a)) menjadi kesamaan? Berikan penjelasan secara geometrik.
11. Apakah yang dapat Anda jelaskan mengenai dua vektor tak-nol, $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, yang memenuhi persamaan $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$?

3.3 Ortogonalitas

Pada bagian sebelumnya telah dibahas pengertian "sudut" antara vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$. Bahasan pada bagian ini ditekankan pada pengertian sifat "tegak lurus." Vektor-vektor yang saling tegak lurus di $\mathbb{R}^n$ sangatlah penting dalam berbagai aplikasi.

■ Vektor-vektor Ortogonal

Ingat kembali rumus sudut θ antara dua vektor tak-nol di $\mathbb{R}^n$, yaitu

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

Dari rumus tersebut dapat diketahui bahwa $\theta = \pi/2$ jika dan hanya jika $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Hal ini mendasari definisi berikut:

DEFINISI 3.18 Dua vektor tak-nol $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$ dikatakan ***ortogonal*** (atau ***tegak lurus***) jika $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Himpunan tak-kosong dari vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ disebut ***himpunan ortogoal*** jika setiap pasang vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut ortogonal. Himpunan ortogonal dari vektor-vektor satuan disebut ***himpunan ortonormal***.

CONTOH 3.11

(a) Tunjukkan bahwa $\vec{u} = (-2, 3, 1, 4)$ dan $\vec{v} = (1, 2, 0, -1)$ adalah vektor-vektor ortogonal di $\mathbb{R}^4$.

(b) Tunjukkan bahwa himpunan $S = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ dari vektor-vektor satuan merupakan himpunan ortonormal di $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

(a) Perhatikan bahwa

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = 0$$

yang berarti vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ortogonal.

(b) Karena $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, dan $\vec{k}$ vektor-vektor satuan, maka tinggal ditunjukkan bahwa vektor-vektor tersebut saling ortogonal. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} &= (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0\\ \vec{\imath}\cdot\vec{k} &= (1,0,0)\cdot(0,0,1) = 0\\ \vec{\jmath}\cdot\vec{k} &= (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa tiap pasang vektor yang berbeda saling ortogonal. □

■ Garis dan Bidang yang Ditentukan oleh Titik-titik dan Normal

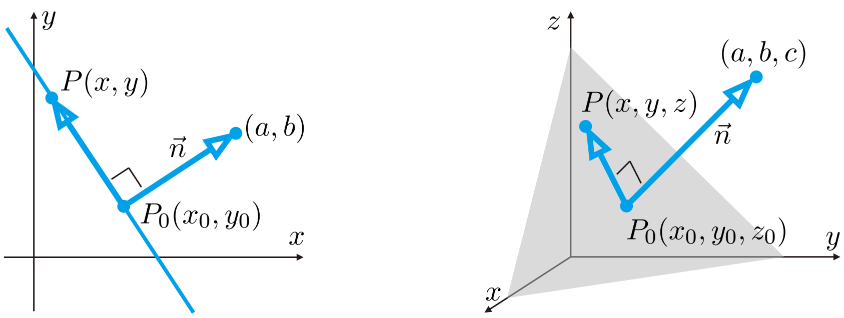
Dalam geometri analitik, suatu garis di $\mathbb{R}^2$ ditentukan secara tunggal oleh kemiringan dan satu titiknya, dan di $\mathbb{R}^3$ ditentukan secara tunggal oleh "inklinasi" dan satu titik. Salah satu cara untuk menentukan kemiringan dan inclinasi adalah dengan menggunakan vektor tak-nol $\vec{n}$ yang disebut *normal*, yaitu yang ortogonal ke garis atau bidang yang dimaksud. Sebagai contoh, Gambar 3.21, menunjukkan garis melalui titik $P_0(x_0, y_0)$ yang mempunyai normal $\vec{n} = (a, b)$ dan bidang yang melalui titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ yang mempunyai normal $\vec{n} = (a, b, c)$. Kedua garis dan bidang datar tersebut dinyatakan dengan persamaan vektor

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{3.33}$$

dengan P sembarang titik (x, y) pada garis atau titik (x, y, z) pada bidang. Vektor $\overrightarrow{P_0P}$ dapat disajikan dalam suku-suku komponen, yaitu

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0) && \text{[garis]} \\
&\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) && \text{[bidang]} \\
&a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 && \text{[garis]} \quad (3.34) \\
&a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 && \text{[bidang]} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Persamaan-persamaan di atas dinamakan persamaan *titik-normal* dari garis dan bidang.



Gambar 3.21

CONTOH 3.12 Dari Persamaan 3.34 bahwa di $\mathbb{R}^2$ persamaan

$$6(x - 3) + (y + 7) = 0$$

menggambarkan garis melalui titik $(3, -7)$ dengan normal $\vec{n} = (6, 1)$; dan berdasarkan Persamaan 3.35 bahwa di $\mathbb{R}^3$ persamaan

$$4(x - 3) + 2y - 5(z - 7) = 0$$

menggambarkan bidang datar melalui titik $(3, 0, 7)$ dengan normal $\vec{n} = (4, 2, -5)$. $\square$

TEOREMA 3.19

(a) Jika a dan b konstanta tak-nol sembarang, maka persamaan dalam bentuk

$$ax + by + c = 0 \tag{3.36}$$

menyajikan garis di $\mathbb{R}^2$ dengan normal $\vec{n} = (a, b)$.

(b) Jika a, b, dan c konstanta tak-nol, maka persamaan dalam bentuk

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3.37}$$

menyajikan bidang datar di $\mathbb{R}^3$ dengan normal $\vec{n} = (a, b, c)$.

CONTOH 3.13

(a) Persamaan $ax + by = 0$ menyajikan garis yang melalui titik asal di $\mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{n}_1 = (a, b)$ ortogonal ke garis tersebut, yakni ortogonal ke semua vektor sepanjang garis tersebut.

(b) Persamaan $ax + by + cz = 0$ menyajikan bidang datar yang melalui titik asal di $\mathbb{R}^3$. Tunjukkan bahwa vektor $\vec{n}_2 = (a, b, c)$ ortogonal ke bidang datar tersebut, yakni ortogonal ke semua vektor pada bidang tersebut.

Penyelesaian. Dua persoalan tersebut diselesaikan bersama. Dua persamaan tersebut dapat ditulis

$$(a, b) \cdot (x, y) = 0 \qquad \text{dan} \qquad (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0$$

atau dalam bentuk lain

$$\vec{n}_1 \cdot (x, y) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \vec{n}_2 \cdot (x, y, z) = 0.$$

Persamaan-persamaan itu menunjukkan bahwa $\vec{n}_1$ ortogonal ke semua vektor (x, y) pada garis $ax+by = 0$, dan $\vec{n}_2$ ortogonal ke semua vektor (x, y, z) pada bidang datar $ax+by+cz = 0$ (Gambar 3.21). □

Perhatikan bahwa

$$ax + by = 0 \qquad \text{dan} \qquad ax + by + cz = 0$$

adalah *persamaan-persamaan homogen*. Persamaan-persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk vektor

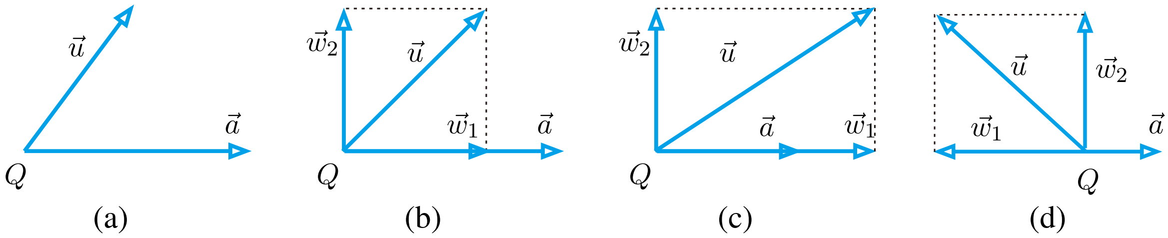
$$\vec{n} \cdot \vec{x} = 0 \tag{3.38}$$

dengan $\vec{n}$ merupakan vektor koefisien dan $\vec{x}$ vektor variabelnya. Di $\mathbb{R}^2$ persamaan ini disebut *bentuk vektor dari persamaan garis* yang melalui titik asal, dan di $\mathbb{R}^3$ disebut *bentuk vektor dari persamaan bidang datar* yang melalui titik asal.

■ *Proyeksi Ortogonal*

Dalam berbagai aplikasi perlu untuk melakukan "dekomposisi" suatu vektor $\vec{u}$ menjadi penjumlahan dua suku; satu suku merupakan perkalian skalar dengan suatu vektor tak-nol $\vec{a}$, dan satu suku lagi yang ortogonal ke $\vec{a}$. Sebagai contoh, jika $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ yang diposisikan dengan titik-titik pangkal berimpit di titik Q, maka dapat dilakukan dekomposisi sebagai berikut (Gambar 3.22):

- Tarik garis tegak lurus dari ujung $\vec{u}$ ke garis yang melalui $\vec{a}$.
- Buatlah vektor $\vec{w}_1$ dari Q ke kaki garis tegak lurus yang telah dibuat.
- Buatlah vektor $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1$.



Gambar 3.22: (b)–(d), $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, dengan $\vec{w}_1$ sejajar $\vec{a}$ dan $\vec{w}_2$ ortogonal ke $\vec{a}$

Karena $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = \vec{w}_1 + (\vec{u} - \vec{w}_1) = \vec{u}$, berarti $\vec{u}$ didekomposisi menjadi penjumlahan dari dua vektor ortogonal, yang pertama berupa perkalian dengan skalar untuk $\vec{a}$ dan yang ke-dua ortogonal ke $\vec{a}$.

TEOREMA 3.20 **Teorema Proyeksi**
Jika $\vec{u}$ dan $\vec{a}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan $\vec{a}$ vektor tak-nol, maka $\vec{u}$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, dengan $\vec{w}_1$ kelipatan skalar dari $\vec{a}$ dan $\vec{w}_1$ ortogonal ke $\vec{a}$.

Vektor-vektor $\vec{w}_1$ dan $\vec{w}_2$ dalam Teorema Proyeksi mempunyai nama khusus – vektor $\vec{w}_1$ disebut *proyeksi ortogonal dari $\vec{u}$ pada $\vec{a}$*, atau kadang disebut *komponen vektor dari $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$*, dan vektor $\vec{w}_2$ disebut *komponen vektor dari u ortogonnal ke $\vec{a}$*. Vektor $\vec{w}_1$ biasanya ditulis dengan simbol $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$, sehingga dari $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$ dapat diperoleh $\vec{w}_2 = \vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$. Selanjutnya dapat dirangkum sebagai berikut:

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a} \quad \text{(komponen vektor } \vec{u} \text{ sepanjang } \vec{a}\text{)} \tag{3.39}$$

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{\|a\|^2} \quad \text{(komponen vektor } \vec{u} \text{ ortogonal ke } \vec{a}\text{)} \tag{3.40}$$

CONTOH 3.14 **Proyeksi Ortogonal pada Garis**
Dapatkan proyeksi ortogonal dari vektor-vektor $\vec{e}_1 = (1,0)$ dan $\vec{e}_2(0,1)$ pada garis ℓ yang membentuk sudut θ dengan sumbu-x positif di $\mathbb{R}^2$.

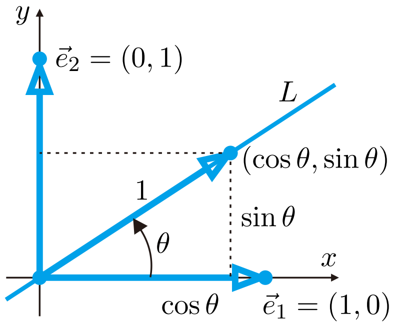
Penyelesaian. Sebagaimana tampak pada Gambar 3.23, $\vec{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$ adalah vektor satuan sepanjang garis L, sehingga permasalahan pertama adalah mencari proyeksi ortogonal dari $\vec{e}_1$ sepanjang $\vec{a}$. Karena

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1 \quad \text{dan} \quad \vec{e}_1\cdot\vec{a} = (1,0)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta,$$

berdasarkan Rumus 3.40 proyeksi yang dimaksud adalah

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = (\cos\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\cos^2\theta, \sin^2\theta\right).$$

Dengan cara serupa, karena $\vec{e}_2\cdot\vec{a} = (0,1)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \sin\theta$, berdasarkan Rumus 3.40 diperoleh



Gambar 3.23

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = (\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta) = \left(\sin\theta, \cos\theta\sin^2\theta\right). \qquad \square$$

CONTOH 3.15 **Komponen Vektor $\vec{u}$ Sepanjang $\vec{a}$**

Misalkan $\vec{u} = (2, -1, 3)$ dan $\vec{a} = (4, -1, 2)$. Dapatkan komponen vektor $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$ dan komponen vektor $\vec{u}$ ortogonal $\vec{a}$.

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{a} &= (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15 \\ \|\vec{a}\|^2 &= 4^2 + (-1)^2 + (2)^2 = 21. \end{aligned}$$

Jadi komponen vektor dari $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$ adalah

$$\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \frac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right),$$

dan kompoen vektor dari $\vec{u}$ ortogonal ke $\vec{a}$ adalah

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u} = (2, -1, 3) - \left(\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7}\right).$$

Untuk memeriksa kebenarannya, dapat ditunnjukkan bahwa vektor-vektor $\vec{u} - \text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}$ dan $\vec{a}$ saling tegak lurus dengan menunjukkan hasil-kali titiknya nol. $\square$

Untuk menghitung norma dari komponen vektor $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$, dapat dikerjakan sebagai berikut

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \left\|\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\right\| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\right| \|\vec{a}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|^2}\|\vec{a}\|$$

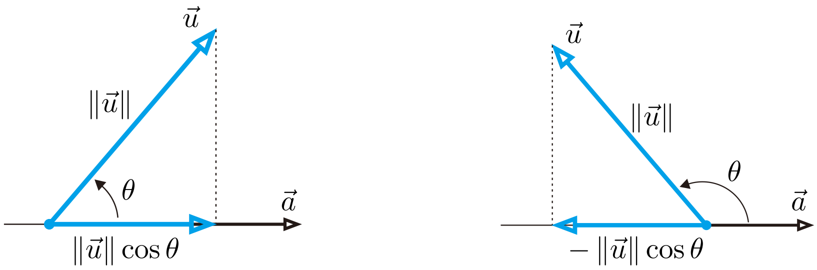
dengan kesamaan ke-dua diperoleh menggunakan Teorema 3.8(c) dan yang ke-tiga dari kenyataan bahwa $\|a\|^2 > 0$. Jadi diperoleh rumus

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} \tag{3.41}$$

Jika θ menyatakan sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{a}$, maka $\vec{u} \cdot \vec{a} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{a}\|\cos\theta$, sehingga (3.41) dapat ditulis sebagai

$$\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\| = \|\vec{u}\|\cos\theta. \tag{3.42}$$

Interpretasi geometrik dari hasil ini diberikan dalam Gambar 3.24.

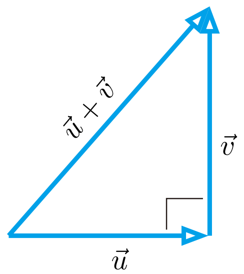


(a) $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

Gambar 3.24

Teorema Pythagoras

Telah dibahas pada bagian sebelumnya bahwa banyak teorema tentang vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$ yang juga berlaku di $\mathbb{R}^n$. Salah satunya adalah Teorema Pythagoras yang diperumum untuk $\mathbb{R}^n$ (Gambar 3.25).



Gambar 3.25

TEOREMA 3.21 **Teorema Pythagoras di $\mathbb{R}^n$**
Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor ortogonal di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil-kali-dalam Euclid, maka

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 . \tag{3.43}$$

Latihan 3.3

1. Untuk masing-masing soal berikut ini, apakah $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ merupakan vektor-vektor yang ortogonal?

   (a) $\vec{u} = (6, 1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, -3)$ (b) $\vec{u} = (0, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$
   (c) $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (4, 1, -3)$ (d) $\vec{u} = (1, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, 0)$

2. Pastikan apakah vektor-vektor berikut ini membentuk himpunan ortogonal.

   (a) $\vec{v}_1 = (2, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, 2)$ (b) $\vec{v}_1 = (-1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1)$
   (c) $\vec{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{v}_3 = (-2, -5, 1)$
   (d) $\vec{v}_1 = (-3, 4, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 5)$, $\vec{v}_3 = (4, -3, 0)$

3. Dapatkan vektor yang ortogonal terhadap dua vektor $\vec{u} = (1, 0, 1)$ dan $\vec{v} = (0, 1, 1)$.

4. (a) Tunjukkan bahwa $\vec{v} = (a, b)$ dan $\vec{w} = (-n, a)$ adalah vektor-vektor yang saling ortogonal.
   (b) Gunakan hasil (a) untuk mencari vektor-vektor yang ortogonal ke $\vec{v} = (2, -3)$.
   (c) Dapatkan dua vektor satuan yang ortogonal ke vektor $(-3, 4)$.

5. Apakah tiga titik berikut ini merupakan titik-titik suatu segitiga siku-siku? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.
   (a) $A(1, 1, 1)$, $B(-2, 0, 3)$, $C(-3, -1, 1)$.
   (b) $P(3, 0, 2)$, $Q(4, 3, 0)$, $R(8, 1, -1)$.

6. Dapatkan bentuk titik-normal untuk persamaan bidang datar yang melalui titik P dan mempunyai normal $\vec{n}$.
   (a) $P(-1, 3, -2)$, $\vec{n} = (-2, 1, -1)$
   (b) $P(1, 1, 4)$, $\vec{n} = (1, 9, 8)$
   (c) $P(1, 1, 4)$, $\vec{n} = (0, 0, 2)$
   (d) $P(0, 0, 0)$, $\vec{n} = (-1, 2, 3)$

7. Selidiki apakah dua bidang datar pada masing-masing soal berikut ini sejajar.
   (a) $4x - y + 2z = 5$ dan $7x - 3y + 4z = 8$
   (b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$ dan $3x - 12y - 9z - 7 = 0$
   (c) $2y = 8x - 4z + 5$ dan $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$
   (d) $(-4, 1, 2) \cdot (x, y, z) = 0$ dan $(8, -2, -4) \cdot (x, y, z) = 0$

8. Selidiki dua bidang datar yang berikut ini apakah tegak lurus.
   (a) $3x - y + z - 4 = 0$ dan $x + 2z = -1$
   (b) $x - 2y + 3z = 4$ dan $-2x + 5y + 4z = -1$

9. Dapatkan $\|\text{proj}_{\vec{a}}\vec{u}\|$.
   (a) $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{a} = (-4, -3)$
   (b) $\vec{u} = (5, 6)$, $\vec{a} = (2, -1)$
   (c) $\vec{u} = (3, 0, 4)$, $\vec{a} = (2, 3, 3)$
   (d) $\vec{u} = (3, -2, 6)$, $\vec{a} = (1, 2, -7)$

10. Dapatkan komponen vektor $\vec{u}$ sepanjang $\vec{a}$ dan komponen vektor $\vec{u}$ ortogonal $\vec{a}$.
   (a) $\vec{u} = (6, 2)$, $\vec{a} = (3, -9)$
   (b) $vu = (-1, -2)$, $\vec{a} = (-2, 3)$
   (c) $\vec{u} = (3, 1, -7)$, $\vec{a} = (1, 0, 5)$
   (d) $\vec{u} = (2, 1, 1, 2)$, $\vec{a} = (4, -4, 2, -2)$

Pustaka

- Howard Anton and Chris Rorres, *Elementary Linear Algebra, application version*, 10^{th} edition, John Wiley & Sons, 2010.