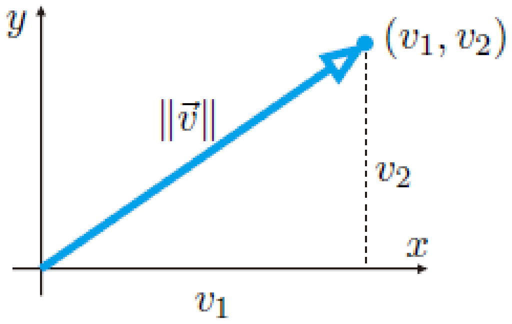
Norma, Hasil-kali Titik, dan Jarak di $\mathbb{R}^n$

DEFINISI 3.7 Jika $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ suatu vektor di $\mathbb{R}^n$, maka *norma* dari $\vec{v}$ (juga disebut *panjang* dari $\vec{v}$ atau *besarnya* $\vec{v}$) ditulis dengan $\|\vec{v}\|$ dan didefinisikan dengan rumus

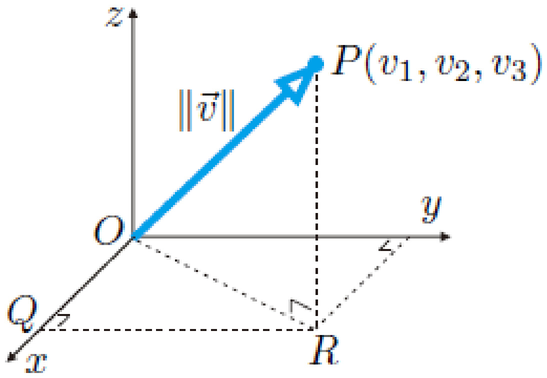
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}. \tag{3.15}$$

norma vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ adalah $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

norma untuk vektor (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$



(a)



(b)

$\vec{v} = (2, 3, -1)$ adalah $||\vec{v}|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

norma vektor $\vec{v} = (1, -2, 3, -4)$ adalah

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}.$$

TEOREMA 3.8 Jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka

(a) $||\vec{v}|| \geq 0$.

(b) $||\vec{v}|| = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$.

(c) $||k\vec{v}|| = |k|\, ||\vec{v}||$.

Vektor Satuan

Suatu vektor dengan norma 1 disebut *vektor satuan*. Sebagai contoh, jika $\vec{v}$ vektor di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$ dengan panjang 2, maka $\frac{1}{2}\vec{v}$ adalah vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$. Secara umum, jika $\vec{v}$ suatu vektor tak nol di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\,\vec{v} \tag{3.16}$$

adalah vektor satuan yang searah dengan $\vec{v}$.

Dapatkan vektor satuan $\vec{u}$ yang searah dengan vektor $\vec{v} = (2, 2, -1)$.

Panjang vektor $\vec{v}$ adalah

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\vec{u} = \tfrac{1}{3}(2, 2, -1) = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$$

Vektor Satuan Baku

Dalam sistem koordinat siku-siku di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, vektor-vektor satuan dalam arah positif sumbu-sumbu koordinat disebut *vektor satuan baku*. Notasi untuk vektor-vektor satuan baku di $\mathbb{R}^2$ adalah

$$\vec{\imath} = (1,0) \qquad \text{dan} \qquad \vec{\jmath} = (0,1)$$

dan di $\mathbb{R}^3$ adalah

$$\vec{\imath} = (1,0,0), \qquad \vec{\jmath} = (0,1,0), \qquad \text{dan} \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$

Setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ di $\mathbb{R}^2$ dan setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor satuan baku dengan menuliskan

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1(1,0) + v_2(0,1) = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath},$$

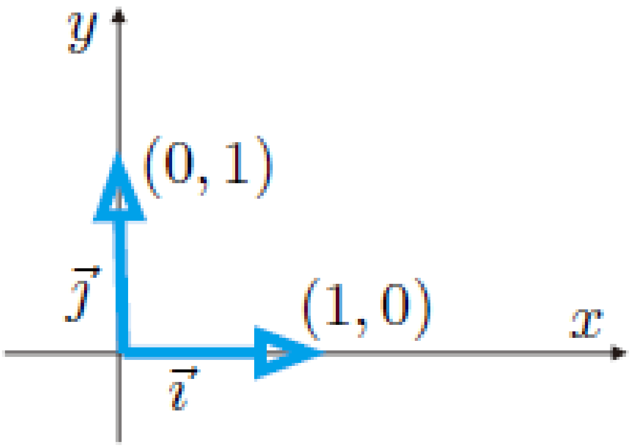
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}.$$

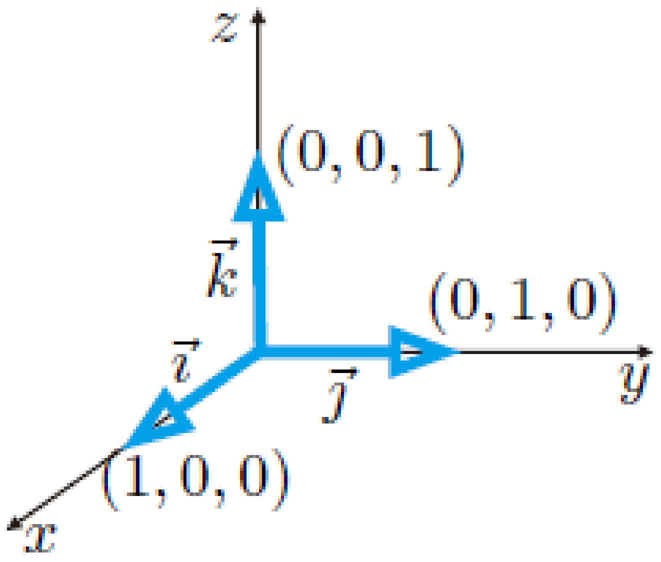
Lebih umum lagi, hal di atas dapat diperumum untuk $\mathbb{R}^n$ dengan mendefinisikan *vektor satuan baku di* $\mathbb{R}^n$ yaitu

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

sehingga setiap vektor $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ dapat dinyatakan sebagai

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \cdots + v_n\vec{e}_n.$$





Kombinasi linear dari vektor-vektor satuan baku.

$$(3, 2, -1) = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$(3, -2, 4, 7) = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 + 7\vec{e}_4$$

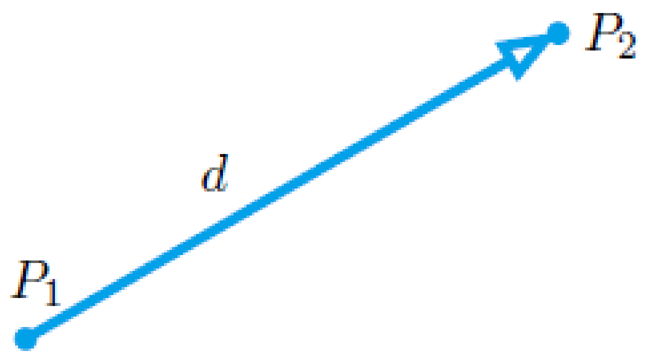
■ *Jarak di* $\mathbb{R}^n$

Jika P_1 dan P_2 titik-titik di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, maka panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ adalah sama dengan d yang merupakan jarak dipilih antara kedua titik tersebut (Gambar 3.16). Sebagai contoh, jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ titik-titik di $\mathbb{R}^2$, maka jarak antara P_1 dan P_2 adalah

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Demikian pula, jarak antara titik-titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ di $\mathbb{R}^3$ adalah

$$d = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



DEFINISI 3.9 Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah titik-titik di $\mathbb{R}^n$, maka *jarak* antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, ditulis $d(\vec{u}, \vec{v})$, didefinisikan sebagai

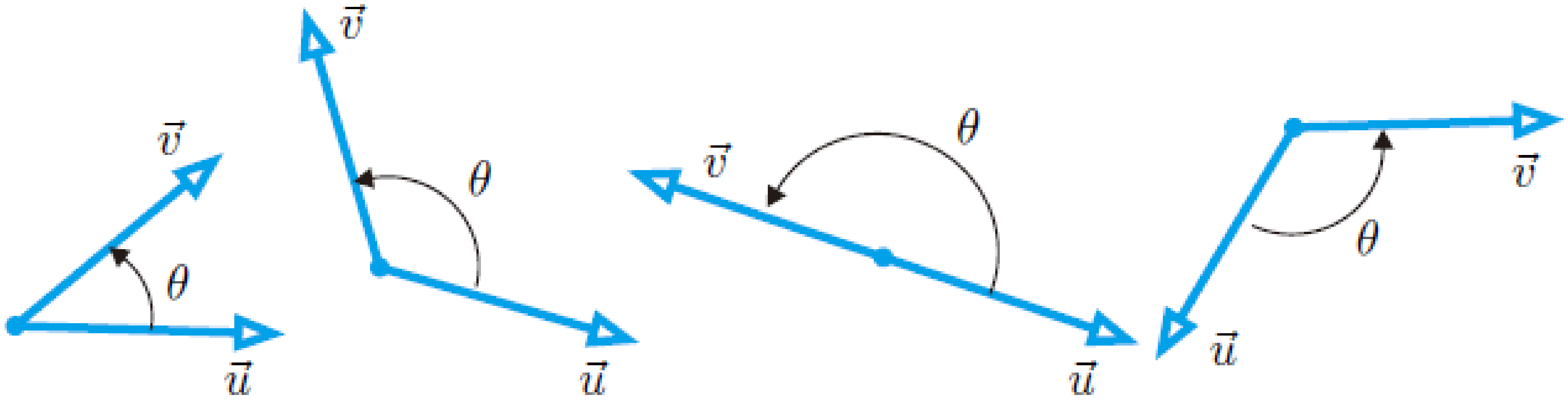
$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}. \tag{3.17}$$

CONTOH 3.6 Jika $\vec{u} = (3, 2, 1, 4)$ dan $\vec{v} = (2, -3, -4, 3)$, maka jarak antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-3))^2 + (1-(-4))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{52}.$$ □

Hasil-kali Titik

Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor tak-nol dengan titik pangkal diletakkan berimpit, maka didefinisikan *sudut antara* $\vec{u}$ *dan* $\vec{v}$ sebagai sudut θ yang ditentukan oleh $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ (Gambar 3.17).



Sudut θ antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ yang memenuhi $0 \leq \theta \leq \pi$

Gambar 3.17

DEFINISI 3.10 Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor tak-nol di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, dan jika θ adalah sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, maka *hasil-kali titik* (disebut juga *hasil-kali-dalam Euclid*) dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ ditulis $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dan didefinisikan sebagai

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta. \tag{3.18}$$

Jika $\vec{u} = \vec{0}$ atau $\vec{v} = \vec{0}$, maka didefinisikan $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

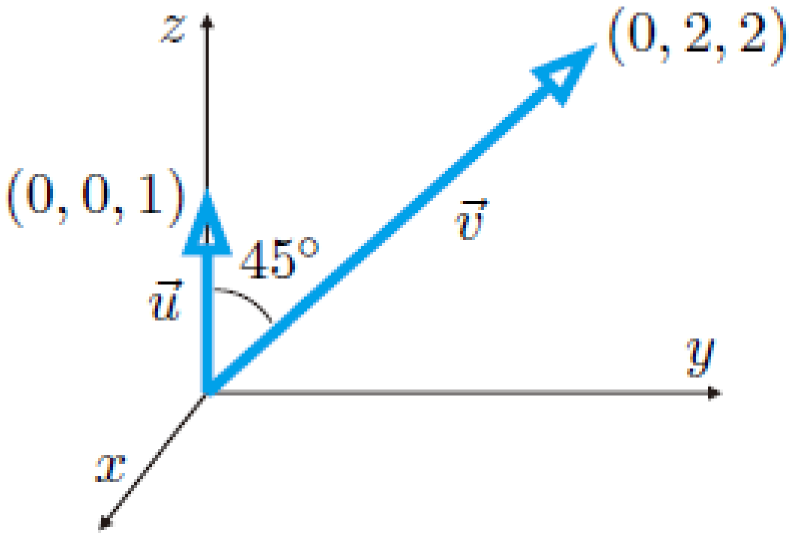
Tanda dari hasil-kali titik menunjukkan informasi tentang sudut θ yang dapat diperoleh dengan menulis kembali Rumus 3.18 sebagai

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} \tag{3.19}$$

Karena $0 \leq \theta \leq \pi$, berarti dari Rumus 3.19 dapat diperoleh bahwa:

- θ sudut lancip jika $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
- θ sudut tumpul jika $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$;
- $\theta = \pi/2$ jika $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

CONTOH 3.7   Dapatkan hasil-kali titik dari vektor-vektor pada Gambar 3.18.



Gambar 3.18

Penyelesaian. Panjang vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$\|\vec{u}\| = 1 \qquad \text{dan} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

dan cosinus sudut θ di antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah

$$\cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Berdasarkan Rumus 3.18 dapat diperoleh

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta = (1)(2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 2.$$

CONTOH 3.8 **Persoalan Geometri yang Diselesaikan dengan Hasil-Kali Titik**
Dapatkan besar sudut antara satu dagonal kubus dan salah satu rusuknya.

Penyelesaian. Misalkan k adalah panjang satu rusuk dan digunakan sistem koordinat seperti dalam Gambar 3.19. Jika dipilih $\vec{u}_1 = (k, 0, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, k, 0)$, dan $\vec{u}_3 = (0, 0, k)$, maka vektor

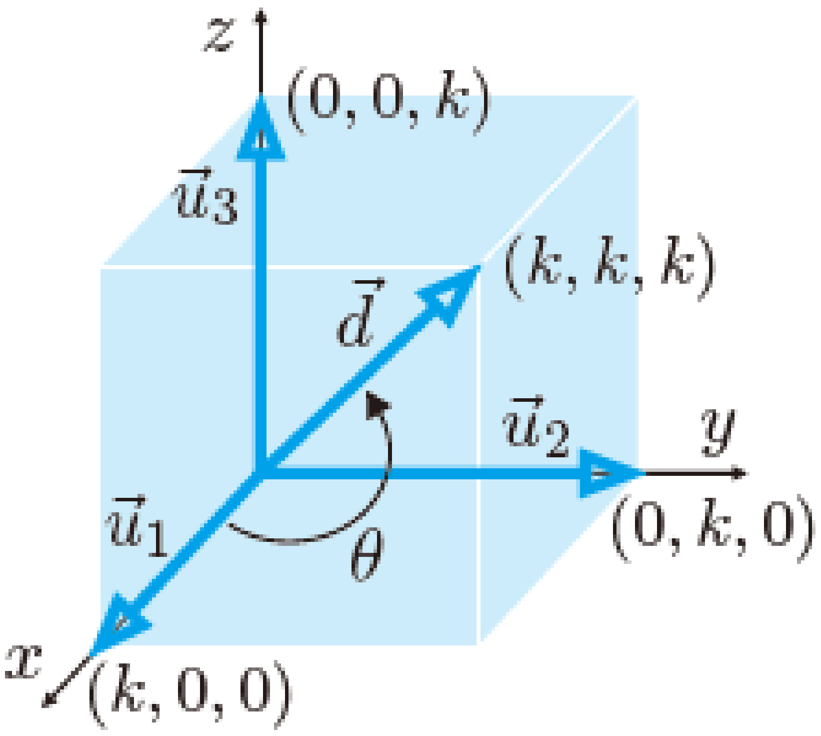
$$\vec{d} = (k, k, k) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

adalah diagonal dari kubus. Berdasarkan Rumus 3.19 sudut θ antara $\vec{d}$ dan rusuk $\vec{u}_1$ memenuhi

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{d}}{\|\vec{u}_1\| \left\|\vec{d}\right\|} = \frac{k^2}{(k)\left(\sqrt{3k^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dengan bantuan kalkulator diperoleh

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74^\circ$$



Gambar 3.19

Bentuk Komponen dari Hasil-Kali Titik

Untuk keperluan komputasi diperlukan rumusan yang menyatakan hasil-kali titik dari dua vektor dalam suku-suku komponen vektor. Berikut ini diuraikan rumusan untuk vektor di $\mathbb{R}^3$.

Misalkan $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dua vektor tak-nol. Jika θ adalah sudut di antara dua vektor tersebut, lihat Gambar 3.20, maka dengan hukum cosinus diperoleh

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta. \tag{3.20}$$

Karena $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} - \vec{u}$, bentuk (3.20) dapat ditulis sebagai

$$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$$

atau

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right).$$

Dengan substitusi

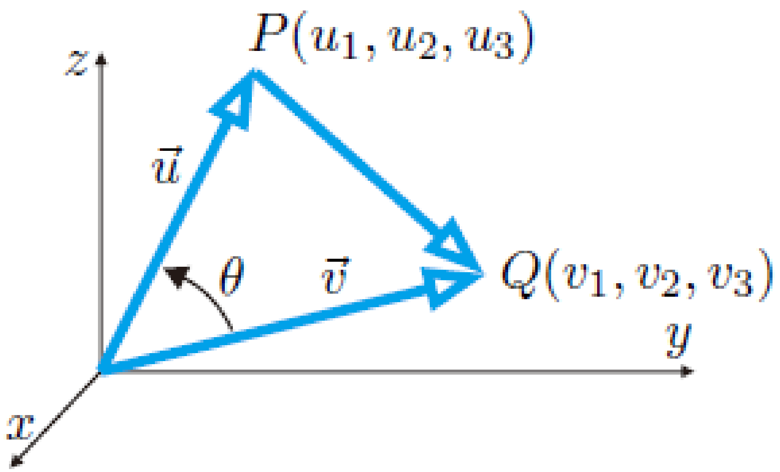
$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

dan

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

dan dengan menyederhanakan, diperoleh

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{3.21}$$



Hal serupa dapat diterapkan untuk vektor-vektor di $\mathbb{R}^2$, yaitu

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{3.22}$$

Berdasarkan pola yang didapat pada Rumus 3.21 dan 3.22 dapat dirumuskan definisi berikut ini.

DEFINISI 3.11 Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka *hasil-kali titik* (juga disebut *hasil-kali-dalam Euclid*) dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, ditulis $\vec{u} \cdot \vec{v}$, didefinisikan dengan

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n. \tag{3.23}$$

CONTOH 3.9

(a) Gunakan Rumus 3.21 untuk mendapatkan hasil-kali titik dari vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ pada Contoh 3.7.

(b) Hitunglah $\vec{u} \cdot \vec{v}$ untuk vektor-vektor di $\mathbb{R}^4$ berikut ini:

$$\vec{u} = (-1, 3, 5, 7), \quad \vec{v} = (-3, -4, 1, 0)$$

Penyelesaian.

(a) Bentuk komponen dari vektor-vektornya adalah $\vec{u} = (0, 0, 1)$ dan $\vec{v} = (0, 2, 2)$; sehingga didapat

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2.$$

(b)
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)(-3) + (3)(-4) + (5)(1) + (7)(0) = -4.$$
□

Sifat-sifat Aljabar dari Hasil-kali Titik

Untuk $\vec{u} = \vec{v}$ dalam Definisi 3.11, diperoleh hubungan

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = \|\vec{v}\|^2 \tag{3.24}$$

dan ini juga menyatakan panjang vektor dalam suku-suku hasil-kali titik

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}. \tag{3.25}$$

Hasil-kali titik mempunyai banyak sifat aljabar yang sama dengan hasil kali bilangan real.

TEOREMA 3.12 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k suatu skalar, maka

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(c) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$

(d) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ dan $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ jika dan hanya jika $\vec{v} = \vec{0}$

TEOREMA 3.13 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k suatu skalar, maka

(a) $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

(d) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

CONTOH 3.10

$$\begin{aligned}
(\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) &= \vec{u} \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) - 2\vec{v} \cdot (3\vec{u} + 4\vec{v}) \\
&= 3(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{v} \cdot \vec{u}) - 8(\vec{v} \cdot \vec{v}) \\
&= 3\,\|\vec{u}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 8\,\|\vec{v}\|^2 .
\end{aligned}$$

■ *Ketaksamaan Cauchy-Schwarz dan Sudut di $\mathbb{R}^n$*

Bahasan berikut ini tentang pengertian "sudut" antara vektor-vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$. Pertama, dengan rumus

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right). \tag{3.26}$$

Rumus 3.26 dapat digunakan untuk mengetahui besar sudut antara dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ di $\mathbb{R}^n$, asalkan dipenuhi syarat

$$-1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \leq 1. \tag{3.27}$$

Syarat tersebut dipenuhi berdasarkan teorema berikut ini.

TEOREMA 3.14 **Ketaksamaan Cauchy-Schwarz**

Jika $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \tag{3.28}$$

atau dalam suku-suku komponen vektor

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq \left(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)^{1/2}\left(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2\right)^{1/2} \tag{3.29}$$

Geometri di $\mathbb{R}^n$

Pada pembahasan bagian sebelumnya telah dikembangkan beberapa konsep pada $\mathbb{R}^n$ yang dapat dijelaskan secara geometri berlaku di $\mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^3$. Berikut ini beberapa sifat lagi yang berlaku secara umum di $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 3.15 Jika $\vec{u}$, $\vec{v}$, dan $\vec{w}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, dan k sembarang skalar, maka

(a) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ [Ketaksamaan Segitiga untuk vektor]

(b) $d(\vec{u},\vec{v}) \leq d(\vec{u},\vec{w}) + d(\vec{w},\vec{v})$ [Ketaksamaan Segitiga untuk jarak]

TEOREMA 3.16 **Kesamaan Jajargenjang untuk Vektor**
Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right). \tag{3.30}$$

TEOREMA 3.17 Jika $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ vektor-vektor di $\mathbb{R}^n$ dengan hasil-kali titik Euclid, maka

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{4}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2. \tag{3.31}$$

Hasil-Kali Titik sebagai Perkalian Matriks

Terdapat beberapa cara untuk menyatakan hasil-kali titik dari vektor-vektor menggunakan notasi matriks. Hal yang perlu diperhatikan adalah penyajian vektor sebagai matriks baris atau sebagai matriks kolom. Berikut ini kemungkinan yang ada.

Jika A adalah matriks $n \times n$, serta $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ matriks-matriks $n \times 1$, maka

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v}^T (A\vec{u}) = \left(\vec{v}^T A\right) \vec{u} = \left(A^T \vec{v}\right)^T \vec{u} = \vec{u} \cdot A^T \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot A\vec{v} = (A\vec{v})^T \vec{u} = \left(\vec{v}^T A^T\right) \vec{u} = \vec{v}^T \left(A^T \vec{u}\right) = A^T \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Dengan hasil-kali titik juga dapat digunakan untuk mengerjakan perkalian matriks. Ingat kembali bahwa jika $A = [a_{ij}]$ matriks $m \times r$ dan $B = [b_{ij}]$ matriks $r \times n$, maka entri ke-ij dari AB adalah

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

yang merupakan asil-kali titik dari vektor baris ke-i dari A

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} \end{bmatrix}$$

dengan vektor kolom ke-j dari B

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}$$

Jadi, jika vektor-vektor baris dari A adalah $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_m$ dan vektor-vektor kolom dari B adalah $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n$, hasil-kali matriks AB dapat dinyatakan sebagai

$$AB = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_1 \cdot \vec{c}_n \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_2 \cdot \vec{c}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{r}_m \cdot \vec{c}_1 & \vec{r}_m \cdot \vec{c}_2 & \cdots & \vec{r}_m \cdot \vec{c}_n \end{bmatrix} \tag{3.32}$$