Modul 4

RUANG VEKTOR

4.6 Perubahan Basis

Pemetaan Koordinat

Jika $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor berdimensi-hingga V, dan jika

$$(\vec{v})_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

adalah vektor koordinat dari $\vec{v}$ relatif terhadap S, maka pemetaan

$$\vec{v} \mapsto (\vec{v})_S \tag{4.1}$$

merupakan pemetaan satu-satu antara ruang vektor V dan ruang vektor $\mathbb{R}^n$, dan disebut *pemetaan koordinat* dari V ke $\mathbb{R}^n$. Pada bagian ini, vektor koordinat akan dituliskan dalam bentuk matriks

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Perubahan Basis

Permasalahan: Misal $\vec{v}$ suatu vektor di ruang vektor berdimensi-hingga V. Jika basis untuk V diubah dari basis B ke basis B', bagaimana hubungan vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ dan vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$?

Untuk memudahkan pemahaman, permasalahan tersebut dipandang untuk ruang vektor dua-dimensi. Sedangkan untuk n-dimensi dapat diperoleh dari perumumannya. Misalkan

$$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \qquad \text{dan} \qquad B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$$

berturut-turut sebagai basis lama dan basis baru. Karena $B' \subseteq V$ dan B basis untuk V, maka

$$\begin{aligned} \vec{u}'_1 &= a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 \\ \vec{u}'_2 &= c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

sehingga vektor-vektor koordinat dari vektor-vektor basis baru relatif teradap basis lama adalah

$$[\vec{u}'_1]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}'_2]_B = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Sekarang misal $\vec{v} \in V$, dan misal

$$[\vec{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

vektor koordinat baru dari $\vec{v}$, sehingga

$$\vec{v} = k_1\vec{u}'_1 + k_2\vec{u}'_2. \tag{4.6}$$

Untuk mendapatkan koordinat lama dari $\vec{v}$, haruslah dengan menyatakan $\vec{v}$ dalam suku-suku basis lama B. Dengan substitusi (4.3) ke (4.6), diperoleh

$$\vec{v} = k_1(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) + k_2(c\vec{u}_1 + d\vec{u}_2) = (k_1a + k_2c)\vec{u}_1 + (k_1b + k_2d)\vec{u}_2.$$

Jadi vektor koordinat lama dari $\vec{v}$ adalah

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} k_1a + k_2c \\ k_1b + k_2d \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan (4.5) dapat ditulis

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [\vec{v}]_{B'}$$

Persamaan ini menyatakan bahwa vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ dapat diperoleh dari vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$ yang dikalikan dari kiri dengan matriks

$$P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Perhatikan bahwa kolom-kolom matriks P adalah koordinat-koordinat vektor basis baru relatif terhadap basis lama. Hasil tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

Penyelesaian Masalah Perubahan Basis: Jika basis untuk ruang vektor V diubah dari basis lama $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ menjadi basis baru $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \ldots, \vec{u}'_n\}$, maka untuk setiap vektor $\vec{v} \in V$, vektor koordinat lama $[\vec{v}]_B$ berhubungan dengan vektor koordinat baru $[\vec{v}]_{B'}$ dalam persamaan

$$[\vec{v}]_b = P[\vec{v}]_{B'} \tag{4.7}$$

dengan kolom-kolom matriks P merupakan vektor-vektor koordinat dari vektor-vektor basis baru relatif terhadap basis lama, yaitu matriks P adalah

$$P = \left[[\vec{u}'_1]_B \;\; [\vec{u}'_2]_B \;\; \ldots \;\; [\vec{u}'_n]_B \right] \tag{4.8}$$

■ *Matriks Transisi*

Matriks P dalam Persamaan 4.7 dinamakan *matriks transisi* dari B' ke B. Untuk memperjelas, sering dinotasikan dengan $P_{B' \to B}$. Jadi

$$P_{B' \to B} = \left[[\vec{u}'_1]_B \;\; [\vec{u}'_2]_B \;\; \ldots \;\; [\vec{u}'_n]_B \right] \tag{4.9}$$

dan matriks transisi dari B ke B' adalah

$$P_{B \to B'} = \left[[\vec{u}_1]_{B'} \;\; [\vec{u}_2]_{B'} \;\; \ldots \;\; [\vec{u}_n]_{B'} \right] \tag{4.10}$$

Dengan notasi ini didapat vektor koordinat dari vektor $\vec{v}$ yang diakibatkan adanya perubahan basis dari B ke B' dan sebaliknya, yaitu

$$[\vec{v}]_B = P_{B' \to B}\, [\vec{v}]_{B'} \tag{4.11}$$
$$[\vec{v}]_{B'} = P_{B \to B'}\, [\vec{v}]_B \tag{4.12}$$

CONTOH 4.1 Perhatikan basis-basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dan $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dengan

$$\vec{u}_1(1,0), \quad \vec{u}_2 = (0,1), \quad \vec{u}'_1 = (1,1), \quad \vec{u}'_2 = (2,1).$$

(a) Dapatkan matriks transisi $P_{B' \to B}$ dari B' ke B.

(b) Dapatkan matriks transisi $P_{B \to B'}$ dari B ke B'.

Penyelesaian.

(a) Untuk soal ini, akan dicari matriks-matriks koordinat dari vektor-vektor $\vec{u}_1'$ dan $\vec{u}_2'$ relatif terhadap vektor-vektor basis $\vec{u}_1$ dan $\vec{u}_2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\vec{u}_1' &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2\\ \vec{u}_2' &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2\end{aligned}$$

yang berarti

$$[\vec{u}_1']_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}_2']_B = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

dan dengan demikian didapat

$$P_{B'\to B} = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) Untuk bagian ini, diperoleh

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= -\vec{u}_1' + \vec{u}_2'\\ \vec{u}_2 &= 2\vec{u}_1' - \vec{u}_2'\end{aligned}$$

yang menghasilkan

$$[\vec{u}_1]_{B'} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad [\vec{u}_2]_{B'} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}.$$

◀

■ *Matriks Transisi ke Basis Baku untuk* $\mathbb{R}^n$

TEOREMA 4.1 Misal $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ basis untuk ruang vektor $\mathbb{R}^n$ dan misal $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ basis baku untuk $\mathbb{R}^n$. Jika vektor-vektor dalam basis-basis tersebut ditulis dalam bentuk kolom, maka

$$P_{B'\to S} = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2\ \cdots \vec{u}_n] \tag{4.13}$$

Berdasarkan teorema di atas, jika

$$A = [\vec{u}_1\ \vec{u}\ \cdots\ \vec{u}_n]$$

suatu matriks yang invertible $n \times n$, maka A dapat dipandang sebagai matriks transisi dari basis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ untuk $\mathbb{R}^n$ ke basis baku untuk $\mathbb{R}$. Sebagai contoh, matriks

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 5 & 3\\1 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

yang invertible, merupakan matriks transisi dari basis

$$\vec{u}_1 = (1, 2, 1), \quad \vec{u}_2 = (2, 5, 0), \quad \vec{u}_3 = (3, 3, 8)$$

ke basis

$$ve_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

◄

Latihan 4.6

1. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{w}$ relatif ke basis $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$.
   (a) $\vec{u}_1 = (1, 0),\ \vec{u}_2 = (0, 1);\ \vec{w} = (3, -7)$
   (b) $\vec{u}_1 = (2, -4),\ \vec{u}_2 = (3, 8);\ \vec{w} = (1, 1)$
   (c) $\vec{u}_1 = (1, 1),\ \vec{u}_2 = (0, 2);\ \vec{w} = (a, b)$
2. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{w}$ relatif ke basis $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$.
   (a) $\vec{w} = (2, -1, 3); \vec{u}_1 = (1, 1, 0),\ \vec{u}_2 = (2, 2, 0);\ \vec{v}_3 = (3, 3, 3)$
   (b) $\vec{w} = (5, -12, 3); \vec{u}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{u}_2 = (-4, 5, 6);\ \vec{v}_3 = (7, -8, 9)$
3. Dapatkan vektor koordinat untuk $\vec{p}$ relatif terhadap basis $S = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ untuk P_2.
   (a) $\vec{p} = 4 - 3x + x^2; \vec{p}_1 = 1,\ \vec{p}_2 = x;\ \vec{v}_3 = x^2$
   (b) $\vec{p} = 2 - x + x^2; \vec{p}_1 = 1 + x,\ \vec{p}_2 = 1 + x^2;\ \vec{v}_3 = x + x^2$
4. Dapatkan vektor koordinat untuk A relatif terhadap basis $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ untuk ruang vektor M_{22}.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
5. Pandang vektor-vektor koordinat
$$[\vec{w}]_S = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ [\vec{q}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},\ [B]_S = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
   (a) Dapatkan $\vec{w}$ jika S basis dalam Soal 2.(a)
   (b) Dapatkan $\vec{q}$ jika S basis dalam Soal 3.(a)
   (c) Dapatkan B jika S basis dalam Soal 4.
6. Perhatikan basis-basis $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dan $B' = \{\vec{u}'_1, \vec{u}'_2\}$ untuk $\mathbb{R}^2$, dengan
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{u}'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{u}'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Dapatkan matriks transisi dari B' ke B.

(b) Dapatkan matriks transisi dari B ke B'.

(c) Dapatkan vektor koordinat $[\vec{w}]_B$, dengan $\vec{w} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ dan gunakan (4.10) untuk mendapatkan $[\vec{w}]_{B'}$.

(d) Bandingkan hasil pekerjaan di atas dengan $[\vec{w}]_{B'}$ yang dihitung secara langsung.

7. Jika P matriks transisi dari basis B' ke basis B, dan Q matriks transisi dari B ke basis C, dapatkan matriks transisi dari B' ke C, dan dapatkan pula matriks transisi dari C ke B'.

8. Diberikan matriks
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Jika P matriks transisi dari suatu basis B ke basis baku $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}3\}$ untuk $\mathbb{R}^3$, dapatkan B.

(b) Jika P matriks transisi dari basis baku $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}3\}$ ke suatu basis B untuk $\mathbb{R}^3$, dapatkan B.

9. Misal B basis untuk $\mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots$, $\vec{v}_k$ membentuk himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika vektor-vektor $[\vec{v}_1]_B$, $[\vec{v}_2]_B$, $\ldots$, $[\vec{v}_k]_B$ membentuk himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$.

10. Misal B basis untuk $\mathbb{R}^n$. Buktikan bahwa vektor-vektor $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\ldots$, $\vec{v}_k$ merentang $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika vektor-vektor $[\vec{v}_1]_B$, $[\vec{v}_2]_B$, $\ldots$, $[\vec{v}_k]_B$ merentang $\mathbb{R}^n$.