Pokok Bahasan 1

DETERMINAN

Definisi dan Contoh

Matakuliah: *Matematika 1*

Tim Dosen Matematika 1
Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Determinan

Dalam bagian ini, akan ditekankan bahasan pada pengertian determinan sebagai fungsi yang mengaitkan setiap matriks bujur sangkar, A, dengan suatu bilangan real yang disebut determinan dari A dan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

$$, \textit{yaitu} \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

merupakan suatu *nilai* tertentu yang terdefinisi. Pengertian *baris*, *kolom*, dan *elemen* pada matriks berlaku juga untuk determinan, tetapi perlu diperhatikan bahwa determinan hanya didefinisikan untuk ukuran $n \times n$ (berorder n). Elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ disebut elemen-elemen **diagonal utama** dari determinan.

Determinan

Apabila suatu baris ke-r dan kolom ke-s dihapus (dihilangkan) dari suatu determinan, akan diperoleh determinan berorder $n - 1$ yang dinotasikan dengan M_{rs} dan disebut **minor** dari unsur a_{rs}. **Kofaktor** dari elemen a_{rs} dinotasikan dengan K_{rs}, diperoleh dengan mengalikan minor M_{rs} dengan $(-1)^{r+s}$, yaitu

$$K_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs} \tag{2}$$

Determinan

CONTOH

Untuk determinan berorder 4

$$|D_4| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

minor dari unsur a_{32} adalah determinan berorder 3:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

yang diperoleh dari $|D_4|$ dengan menghapus baris ke-3 dan kolom ke-2. Kofaktor dari unsur ke a_{32} adalah

$$K_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$$

Determinan

NILAI DETERMINAN

Untuk determinan berorder 2, nilai determinan dihitung dengan

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{3}$$

Dalam hal ini, minor-minor dari a_{11}, a_{12}, a_{21}, dan a_{22} berturut-turut adalah $M_{11} = |a_{22}|$, $M_{12} = |a_{21}|$, $M_{21} = |a_{12}|$, dan $M_{22} = |a_{11}|$ yang nilai-nilainya berturut-turut adalah a_{22}, a_{21}, a_{12}, dan a_{11}. Dengan demikian berdasarkan (2), bentuk (3) dapat dinyatakan dalam suku-suku kofaktor sebagai berikut

$$|D_2| = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12}$$
$$|D_2| = a_{11}K_{11} + a_{21}K_{21}$$
$$|D_2| = a_{21}K_{21} + a_{22}K_{22}$$
$$|D_2| = a_{12}K_{12} + a_{22}K_{22}$$

Determinan

Ruas kanan dari persamaan-persamaan di atas disebut *perluasan* atau *ekspansi* determinan $|D_2|$ dalam suku-suku kofaktor berturut-turut atas baris pertama, kolom pertama, baris ke-dua, dan kolom ke-dua. Dapat diperiksa bahwa nilai-nilai tersebut semuanya sama. Selanjutnya, perhatikan determinan berorder tiga

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

dan ekspansikan dalam suku-suku kofaktor atas sebarang baris atau kolom, misal atas baris ke-dua, diperoleh bentuk

$$\begin{aligned} |D_3| &= a_{21}K_{21} + a_{22}K_{22} + a_{23}K_{23} \\ &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}K_{23} \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Determinan

Dengan substitusi nilai determinan-determinan order dua di atas diperoleh

$$|D_3| = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

atau

$$|D_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \tag{4}$$

Bentuk (4) oleh **Sarrus** dapat digambarkan dengan mudah sebagai berikut

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & - \;\; - \;\; - & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & & + \;\; + \;\; + & \end{array} \tag{5}$$

Jadi untuk menghitung determinan berorder tiga, dapat dilakukan dengan menuliskan ulang kolom ke-1 dan kolom ke-2 disebelah kanan determinan semula; selanjutnya untuk menghitung nilai determinannya dilakukan dengan cara menjumlahkan hasil-kali elemen-elemen yang terletak dalam arah diagonal kanan-bawah kemudian dikurangkan dengan hasil kali elemen-elemen yang terletak dalam arah diagonal kanan-atas. Perhatikan hasil pada (4) dan cara Sarrus (5).

CATATAN. *Perlu diperhatikan bahwa cara Sarrus hanya dapat digunakan untuk menghitung nilai determinan berorder 3.*

Determinan

Bentuk (4) dapat pula ditulis sebagai

$$|D_3| = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}$$

yang merupakan ekspansi $|D_3|$ dalam suku-suku kofaktor atas baris pertama. Dengan pengaturan seperlunya, bentuk (4) dapat pula ditulis dalam bentuk

$$|D_3| = a_{13}K_{13} + a_{23}K_{23} + a_{33}K_{33}$$

yang merupakan ekspansi $|D_3|$ dalam suku-suku kofaktor atas kolom ke-tiga. Dengan pengaturan serupa, $|D_3|$ dapat diekspansikan dalam suku-suku kofaktor atas sebarang baris atau kolom manapun tanpa mengakibatkan perubahan nilai determinan itu sendiri. Secara umum, untuk determinan berorder n, nilainya dapat dihitung dengan rumus

$$|D_n| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij} \quad (6)$$

Determinan

Persamaan(6) merupakan ekspansi $|D_n|$ dalam suku-suku kofaktor atas baris ke-i. Karena $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, berarti nilai $|D_n|$ bergantung pada n determinan berorder $n-1$; dan nilai-nilai n determinan tersebut bergantung pada $n-1$ determinan berorder $n-2$, dan seterusnya, sampai akhirnya ekspansi yang hanya melibatkan determinan berorder dua atau tiga yang nilainya telah didefinisikan di atas. Dengan cara serupa, sebarang determinan dapat diekspansikan menurut sebarang kolom. Dengan induksi semacam itu dapat ditunjukkan sifat berikut ini.

Teorema

Ekspansi determinan atas sebarang baris atau sebarang kolom dalam suku-suku kofaktor yang bersesuaian menghasilkan nilai yang sama untuk determinan tersebut.

Determinan

Contoh

Ekspansikan determinan order empat

$$|D_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

atas baris ke-tiga dan atas kolom ke-dua, dan kemudian hitung masing-masing nilainya.

Penyelesaian. Ekspansi atas baris ke-tiga menghasilkan

$$|D_4| = 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Determinan

Contoh, lanjutan

Masing-masing determinan berorder tiga dapat dihitung dengan cara Sarrus atau dengan ekspansi atas baris pertama dan diperoleh
Ekspansi atas kolom ke-dua menghasilkan

$$|D_4| = 0 \times \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + (2 - 8 + 3) - 2(-10 - 8 - 15) + 4(10 + 8 + 51)$$
$$= 339 \qquad \blacktriangleleft$$

SIFAT-SIFAT DASAR DETERMINAN

Berikut ini diberikan beberapa sifat dasar determinan dalam bentuk teorema tanpa bukti. Dengan sifat-sifat ini penghitungan nilai determinan dapat lebih sederhana.

Sifat 1

Nilai suatu determinan tidak berubah jika baris-barisnya ditulis sebagai kolom-kolom dan sebaliknya.

Contoh

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinan

Sifat 2

Nilai suatu determinan menjadi kelipatan k nilai determinan semula jika elemen-elemen sebarang baris atau kolom determinan tersebut dikalikan k.

Contoh

Jika diberikan

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

maka

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 \times 2 & 4 \times 4 & 4 \times 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \times 3 \\ 2 & 4 & 4 \times 1 \\ 5 & 6 & 4 \times 3 \end{vmatrix} = 4 \times |D_3| = 80$$

Determinan

Sifat 3

Jika unsur-unsur dari satu baris atau kolom suatu determinan semuanya nol, maka nilai determinan tersebut adalah nol.

Sifat 4

Jika semua unsur dari satu baris (atau kolom) suatu determinan dapat ditulis sebagai jumlahan dua bilangan, maka determinan tersebut dapat ditulis sebagai jumlahan dua determinan.

Contoh

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 1 & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2x-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2x & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

sifat 5

Jika sebarang dua baris (atau kolom) dari determinan ditukar letaknya, maka nilainya menjadi -1 kali determinan semula.

Contoh

Jika diberikan

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

maka $|B| = -|A|$; dalam hal ini kolom ke-1 dan ke-3 dari $|A|$ ditukar letaknya dan ditulis kembali sebagai $|B|$.

Determinan

Sifat 6

Jika unsur-unsur yang bersesuaian dari dua baris (atau kolom) dari suatu determinan sebanding, maka nilai determinan tersebut adalah nol.

Contoh

Baris pertama dan ke-dua dari

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

adalah sebanding, yakni tiap unsur dari baris ke-dua adalah kelipatan 3 dari unsur-unsur yang bersesuaian pada baris pertama. Dengan demikian, berdasarkan teorema di atas maka $|D_3| = 0$.

Determinan

Sifat 7

Jika unsur-unsur suatu baris (atau kolom) determinan diganti dengan menambahkan pada unsur-unsur tersebut k kali unsur-unsur yang bersesuaian pada baris (atau kolom) yang lain, maka nilai determinan tersebut tetap tidak berubah.

Sifat terakhir di atas, merupakan sifat penting dan sering digunakan dalam penghitungan nilai suatu determinan.

Contoh

Dapatkan nilai determinan

$$|D_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Determinan

Penyelesaian

Menggunakan sifat pada Sifat Sifat7, dapat dilakukan penghitungan sebagai berikut

$$|D_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \overset{\substack{B_2+(-1)B_1 \\ B_3+(-1)B_1 \\ B_4+(-1)B_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} \overset{\substack{B_2-2B_1 \\ B_3-3B_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

Determinan

ADJOINT DAN INVERS MATRIKS

Pada bagian awal dari pembicaraan determinant telah dijelaskan tentang determinan kofaktor K_{ij}. Suatu matriks K yang unsur-unsurnya determinan kofaktor K_{ij}

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut *Matriks Kofaktor*. Sedangkan transpos dari K

$$K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \cdots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \cdots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{1n} & K_{2n} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut *Adjoint Mariks A*, ditulis $adj(A)$. Jadi $adj(A) = K^T$

Determinan

Teorema

Misalkan A matriks $n \times n$, matriks $adj(A)$ memenuhi

$$adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I$$

dengan I adalah matriks identitas $n \times n$

Akibat

(*Rumus Invers Matriks*)
Misalkan A matriks bujur sangkar $n \times n$ dengat $det(A) \neq 0$, maka A matriks bisa dibalik, dan

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \tag{7}$$

Determinan

Contoh

Tentukan invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :
$det(A) = 4$, maka A mempunyai invers.

$$K_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad K_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$K_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad K_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$K_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad K_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$K_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad K_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$K_{33} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Determinan

Contoh lanjutan....

Sehingga $K = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$,

dan $adj(A) = K^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ Dari rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan

Soal-soal Latihan

1. Dapatkan nilai-nilai determinan berikut ini.

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 265 & 219 & 240 \\ 240 & 198 & 225 \\ 219 & 181 & 198 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & a & b-c \\ 1 & b & c-a \\ 1 & c & a-b \end{vmatrix}$

2. Buktikan bahwa $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix} =$ $a_1 a_2 a_3 a_4 \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)$

Determinan

Soal-soal Latihan lanjutan.....

3. Buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

4. Buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^3(x+3a)$$

Determinan

Soal-soal Latihan lanjutan.....

5. Carilah invers matriks berikut jika mempunyai invers

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL)

Perhatikan sistem dari n persamaan linear dalam n bilangan tak diketahui x_1, x_2, ..., x_n

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array} \tag{8}$$

Dalam hal ini a_{ij}, dan y_i diketahui. Dengan notasi matriks sistem persamaan linear tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{9}$$

Determinan

dengan **A** adalah matriks $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

yang disebut *matriks koefisien* sistem, dan determinan untuk matriks tersebut

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{11}$$

disebut *determinan* sistem.

Determinan

Sedangkan vektor **x** dan **y**, yaitu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

berturut-turut adalah vektor yang dicari dan vektor konstan yang diberikan. Apabila unsur-unsur dalam **y** semuanya nol, maka sistem tersebut dikatakan *homogen*, dan apabila terdapat unsur tak nol dalam **y** maka dikatakan *tak-homogen*.

Determinan

Aturan Cramer

Sistem dalam Persamaan (8) dari n persamaan dalam n bilangan tak diketahui x_1, x_2, ..., x_n mempunyai tepat satu penyelesaian yang diberikan oleh

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|A|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_n|}{|A|}$$

dengan $|A|$ adalah determinan sistem, dan $|D_k|$, $k = 1, 2, \ldots, n$ adalah determinan yang diperoleh dari $|A|$ dengan mengganti kolom ke-k dengan vektor y dengan syarat $|A| \neq 0$. Jika $|A| = 0$ dan sistem tersebut tak-homogen maka, umumnya, tidak ada penyelesaian. Jika $|A| \neq 0$ dan sistemnya homogen maka hanya terdapat penyelesaian trivial

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0 \; \ldots \; x_n = 0$$

Determinan

Contoh

Selesaikan dengan Aturan Cramer sistem persamaan

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & -8 \end{array}$$

Penyelesaian:
Determinan sistem tersebut adalah

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Karena $|A| \neq 0$ maka sistem persamaan tak homogen tersebut mempunyai penyelesaian tunggal yang diberikan oleh

Determinan

Contoh Injutan...

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{-30}{10} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = \frac{20}{10} = 2$$

Determinan

Contoh

Sistem persamaan linear tak-homogen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & 6y & + & 7z & = & 0 \\ 6x & + & 7y & + & 8z & = & 1 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 0 \end{array}$$

tidak mempunyai penyelesaian karena determinan sistem tersebut

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sedangkan sistem persamaan linear homogen

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & 5z & = & 0 \end{array}$$

hanya mempunyai penyelesaian trivial $x = 0$, $y = 0$,

Determinan

Soal Latihan.

1. Selesaikan sistem persamaan berikut ini menggunakan Aturan Cramer.

(a) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + 3y + 2z &= 3 \\ 5x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x - y + z &= 6 \\ 2x + y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 4x - y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

2. Dapatkan nilai k sehingga sistem persamaan berikut ini mempunyai penyelesaian yang tak-trivial.

$$\begin{aligned} x + ky + 3z &= 0 \\ 3x + ky - 2z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Nilai dan vektor Eigen

Definisi 1

Jika A matriks $n \times n$, maka vektor tak-nol $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ disebut *vektor-eigen* dari A, jika $A\vec{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\vec{x}$, yaitu

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \text{untuk suatu skalar } \lambda$$

Skalar λ tersebut dinamakan *nilai-eigen* dari A, dan $\vec{x}$ dikatakan sebagai *vektor-eigen* yang bersesuaian dengan λ.

Contoh 1

Untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ merupakan vektor-eigen dari A, sebab

$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\vec{x}$. Dalam hal ini, vektor $\vec{x}$

Nilai dan Vektor Eigen

Teorema 2

Jika A suatu matriks berukuran $n \times n$, maka λ adalah suatu nilai-eigen dari A jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{12}$$

Persamaan (12) di atas dinamakan *persamaan karakterisik* dari A

Contoh 2

Pada Contoh 1. sebelumnya telah diketahui bahwa $\lambda = 3$ merupakan nilai-eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

tetapi tidak diketahui bagaimana cara memperolehnya. Gunakan persamaan karakteristik untuk mendapatkan semua nilai-eigen dari A.

Nilai dan Vektor Eigen

lanjutan Contoh 2.

Penyelesaian : Berdasarkan Rumus (12), nilai-eigen dari A adalah penyelesaian dari persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$, yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

yang menghasilkan persamaan

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0. \tag{13}$$

Dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh dua nilai-eigen dari A, yaitu $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$.

Nilai dan Vektor Eigen

Ketika $\det(\lambda I - A)$ pada (12) diuraikan, diperoleh suatu polinomial $p(\lambda)$ yang berderajat n dan disebut *polinomial karakteristik* dari A. Sebagai contoh, dari (13) polinomial karakteristik dari A pada Contoh 2 adalah

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

yang merupakan polinomial berderajat 2. Secara umum, polinomial karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

dengan koefisien dari λ^n adalah 1. Karena polinomial berderajat n paling banyak mempunyai n akar yang berbeda, berarti persamaan

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (14)$$

mempunyai tidak lebih dari n akar berbeda. Hal ini berarti juga bahwa matriks $n \times n$ mempunyai paling banyak n nilai-eigen yang berbeda.

Nilai dan Vektor Eigen

Contoh 3

Dapatkan semua nilai-eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:Polinomial karakteristik dari A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4.$$

Nilai-nilai eigen dari A adalah penyelesaian dari persamaan kubik:

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0. \qquad (15)$$

Nilai dan Vektor Eigen

Contoh 3 lanjutan...

Dengan menyelesaikan Persamaan (15), diperoleh

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3}, \quad \text{dan} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

Contoh 4 Nilai-eigen dari Matriks Segitiga Atas

Dapatkan semua nilai-eigen dari matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian: Dengan mengingat bahwa nilai determinan matriks segitiga atas adalah hasil kali entri-entri diagonal utamanya, diperoleh

Nilai dan Vektor Eigen

Contoh 4 lanjutan.....

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{24} \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}).$$

Jadi persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$$

dan nilai-eigennya adalah

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda = a_{22}, \quad \lambda = a_{33}, \quad \lambda = a_{44}$$

yang tak lain adalah entri-entri diagonal dari A

Nilai dan Vektor Eigen

Teorema

Jika A matriks segitiga (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka nilai eigen dari A adalah entri-entri diagonal utama dari A.

Contoh

Berdasarkan Teorema , nilai-eigen dari matriks segitiga bawah

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 5 & -3 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

adalah $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, dan $\lambda = -\frac{1}{4}$

The End, Terima kasih.......