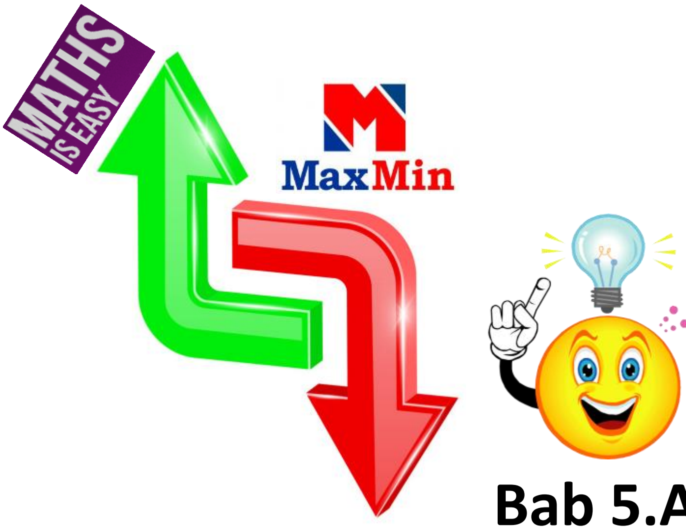
MATEMATIKA ITS



Bab 5.Aplikasi Turunan

Daryono Budi Utomo

1

MATEMATIKA ITS

Bab 5 Aplikasi Turunan

2

MATEMATIKA ITS

5.4 Asimtot Miring

- Jika pada fungsi rasional pangkat fungsi pembilang lebih besar dari pada pangkat fungsi penyebut, maka tidak ada asimtot datar, tetapi ada **asimtot miring.**
- Mendapatkan asimtot miring dengan cara membagi fungsi pembilang dengan fungsi penyebut

MATEMATIKA ITS

Contoh

Sket grafik $f(x) = \frac{x^2-2x-4}{x+2}$

Jawab

1. Asimtot datar:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-4}{x+2} = +\infty \;\; ; \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-4}{x+2} = +\infty$$; tidak ada asimtot datar

2. Asimtot tegak:

$$x + 2 = 0 \;;\quad x = -2$$

3. Asimtot miring

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x+2 & x^2-2x-4 \\ & \underline{x^2+2x} \\ & -4x-4 \\ & \underline{-4x-8} \\ & 4 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{x^2-2x-4}{x+2} = (x-4) + \frac{4}{x+2} \;;\;\; y = x - 4$$

asimtot miring

MATEMATIKA ITS

4. Turunan pertama: Titik ekstrem dan fungsi naik/turun

$$f(x) = \frac{x^2-2x-4}{x+2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x-4)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x-2x-4-x^2+2x+4}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2+4x = 0 \leftrightarrow x_1 = 0\ ; y = -2\ ;\ x_2 = -4\ ; y = -10$

Uji tanda

$+++$ | $---$ | $+++$

-4 $\quad$ 0

Interval fungsi naik/turun : $f(x)$ naik pada $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$;

$f(x)$ turun pada $[-4,\ 0]$

Titik (-4, -10) titik maksimum dan titik (0, -2) titik minimum

MATEMATIKA ITS

5. Turunan kedua: Titik belok dan kecekungan fungsi

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3}$$; tidak ada titik belok

- Uji tanda, $x < -2$; $f''(x) < 0$;
  cekung kebawah: $(-\infty, -2)$
- Uji tanda, $x > -2$; $f''(x) < 0$;
  cekung keatas: $(-2, +\infty)$

$---$ | $+++$

-2

$f(x) = \frac{x^2-2x-4}{x+2}$

$x = -2\ asimtot\ tegak$

$x = -2^- \rightarrow f(x) = -\infty$

$x = -2^+ \rightarrow f(x) = +\infty$

6. Titik potong sumbu y, $x = 0$;

$$f(x) = \frac{x^2-2x-4}{x+2} \rightarrow y = -2$$

Titik potong sumbu x, $y = 0$;

$x^2 - 2x - 4 = 0$;

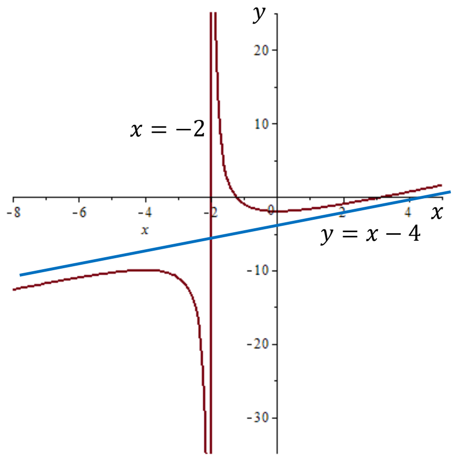
$x_1 = 1 + \sqrt{5}$; $x_1 = 1 - \sqrt{5}$

7. Ambil beberapa titik disekitar titik ekstrem dan dekat x = -2

x	**-5**	**-4**	**-3**	**-1**	**0**	**1**
y		-10		-2		

$x \rightarrow -2^+$; $y \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -2^-$; $y \rightarrow -\infty$

7. Sket Grafik



MATEMATIKA ITS

Contoh

Sket grafik $f(x) = \frac{3x-x^2}{x-4}$

MATEMATIKA ITS

Jawab

1. Asimtot datar:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-x^2}{x-4} = -\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-x^2}{x-4} = -\infty$$; tidak ada asimtot datar

2. Asimtot tegak:

$x - 4 = 0$; $x = 4$

3. Asimtot miring

$$f(x) = \frac{3x-x^2}{x-4} = (-x-1) - \frac{4}{x-4} \;;\; y = -x - 1$$

asimtot miring

$$\begin{array}{r} -x - 1 \\ x - 4 \,/\, -x^2 + 3x \\ -x^2 + 4x \\ \hline -x \\ -x + 4 \\ \hline -4 \end{array}$$

MATEMATIKA ITS

4. Turunan pertama: Titik ekstrem dan fungsi naik/turun

$$f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-4}$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2-8x+12)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2+8x-12 = 0 \leftrightarrow x_1 = 2\ ; y = -1\ ;\ x_2 = 6\ ; y = -9$$

Interval fungsi naik/turun : $f(x)$ turun pada $(-\infty, -2] \cup [6, +\infty)$;

$f(x)$ naik pada $[2,\ \ 6]$

Titik (2, -1) titik minimum dan titik (6, -9) titik maksimum

Uji tanda

$− − −$ | $+ + +$ | $− − −$

2 6

Daryono, Kalkulus 1: Bab 4. Aplikasi Turunan 9

9

MATEMATIKA ITS

4. Turunan kedua: Titik belok dan kecekungan fungsi

$$f'(x) = \frac{-(x^2-8x+12)}{(x-4)^2}$$

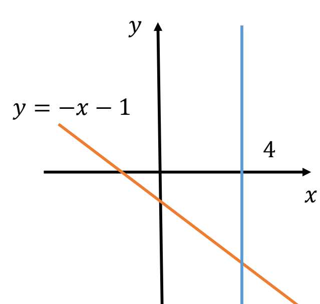
$$f''(x) = \frac{-8}{(x-4)^3}$$; tidak ada titik belok

Uji tanda kecekungan fungsi pada asimtot tegak

- Uji tanda, $x < 4$; $f''(x) > 0$;
  cekung keatas: $(-\infty, 4)$
- Uji tanda, $x > 4$; $f''(x) < 0$;
  cekung kbawah: $(4, +\infty)$

$+ + +$ | $− − −$

4



$$f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-4}$$

$x = 4^- \rightarrow f(x) = +\infty$

$x = 4^+ \rightarrow f(x) = -\infty$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 4. Aplikasi Turunan 10

10

MATEMATIKA ITS

5. Titik potong sumbu y, $x = 0$;

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4} \rightarrow y = 0$$

Titik potong sumbu x, $y = 0$; $x = 0$

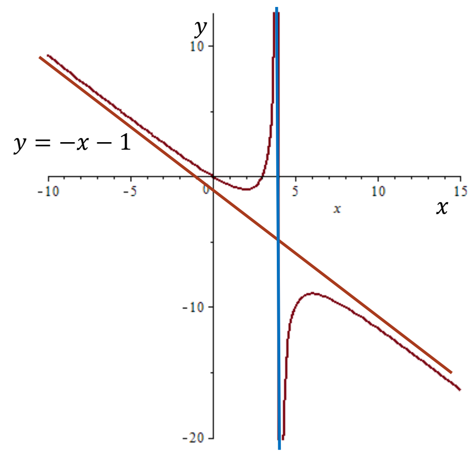
6. Ambil beberapa titik disekitar titik ekstrem dan dekat x = 2 dan 6

x	-1	0	1	2	3	3,5
y				-1		

x	4,5	5	6	7	8	9
y			-9			

$x \rightarrow 4^+$; $y \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow 4^-$; $y \rightarrow +\infty$

7. Sket Grafik



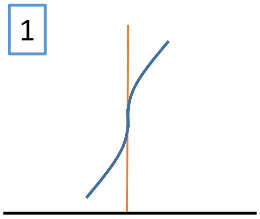
MATEMATIKA ITS

5.5 Masalah Grafik Yang Lain (Garis Singgung Tegak)

Pengertian garis singgung tegak adalah gradien $+\infty$ atau $-\infty$

Ada empat kemungkinan yaitu:

1

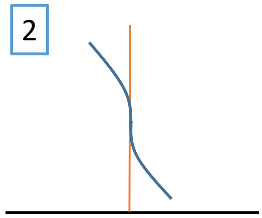


$x_0^- \rightarrow x_0 \leftarrow x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$$

2

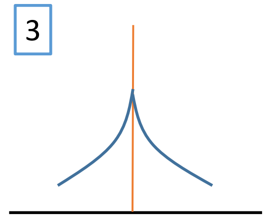


$x_0^- \rightarrow x_0 \leftarrow x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$$

3

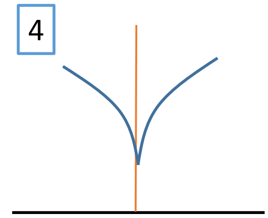


$x_0^- \rightarrow x_0 \leftarrow x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty$$

4



$x_0^- \rightarrow x_0 \leftarrow x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Sket grafik: $y = (x-2)^{1/3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}} = 0;\ x = tidak\ ada$$

Tidak ada titik ekstrem

Jawab

1. Turunan pertama

$$y = (x-2)^{1/3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}} = +\infty\ ; \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{3(x-2)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

Uji tanda

$+ + +$ | $+ + +$

2

- $f(x)$ naik pada $(-\infty, 2)$
- $f(x)$ naik pada $(2, +\infty)$

2. Turunan kedua

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9(x-2)^{\frac{5}{3}}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

Uji tanda

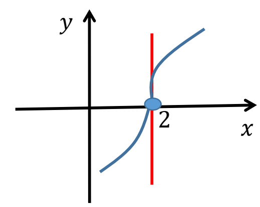
$+ + +$ ∞ $- - -$

2

$f(x)$ cekung keatas pada $(-\infty, +2)$

$f(x)$ cekung kebawah pada $(2, +\infty)$

3. Sket grafik



MATEMATIKA ITS

Contoh

Sket grafik: $y = 4x^{1/3} - x^{4/3}$

Jawab

1. Turunan pertama

$$y = 4x^{1/3} - x^{4/3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3}\right)\left(\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}}\right) = \frac{4(1-x)}{3x^{2/3}} = \frac{4(1-x)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4(1-x)}{3x^{2/3}} = +\infty\ ; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{4(1-x)}{3x^{2/3}} = +\infty\ ;$$

Titik ekstrem

$$\frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} = 0 \rightarrow 4(x-1) = 0\ ;\ \ x = 1\ ; y = 4.1^{1/3} - 1^{4/3} = 3\ ;$$

Uji tanda

$+ + +$ ∞ $+ + +$ | $- - -$

0 1

- $f(x)$ naik pada $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$
- $f(x)$ turun pada $[1, +\infty)$
- Titik (1,3) titik maksimum

MATEMATIKA ITS

2. Turunan kedua

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}x^{1/3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{8}{9}x^{-5/3} - \frac{4}{9}x^{-2/3}\right)\left(\frac{x^{5/3}}{x^{5/3}}\right)$$

$$= \frac{(-8-4x)}{9x^{5/3}}$$

Titik belok

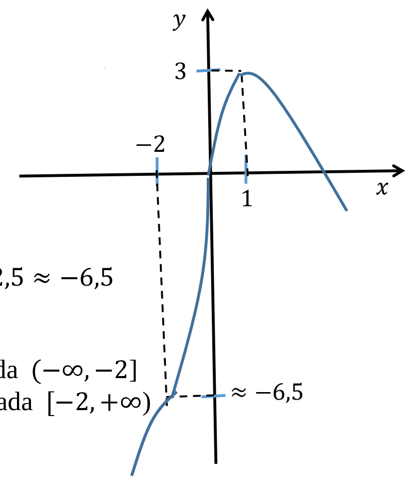
$$\frac{(-8-4x)}{9x^{5/3}} = 0 \to x = -2\,;\, y = 4\sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{(-2)^4} \approx -4 - 2{,}5 \approx -6{,}5$$

Uji tanda

$$\begin{array}{ccccc} - - - & & + + + & & - - - \\ & -2 & & 0 & \end{array}$$

- $f(x)$ cekung keatas pada $(-\infty, -2]$
- $f(x)$ cekung kebawah ada $[-2, +\infty)$

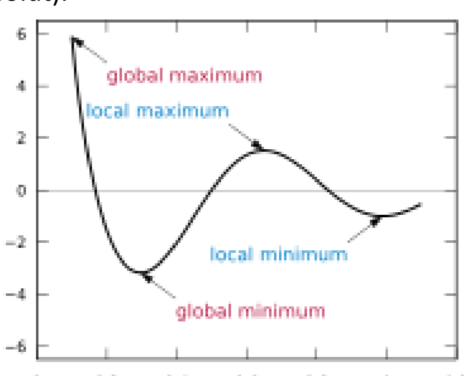
3. Sket grafik



MATEMATIKA ITS

4.6 Maksimum dan Minimum Absolut

Maksimum dan minimum adalah nilai terbesar dan terkecil dari fungsi, baik dalam kisaran tertentu (ekstrem lokal atau relatif) atau di seluruh domain dari fungsi (ekstrem global atau absolut).



Contoh

MATEMATIKA ITS

Misalkan: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$

a. Jika $D_f = (-\infty, +\infty)$ tentukan maksimum dan minimum $f(x)$
b. Jika $D_f = [0, 10]$ tentukan maksimum dan minimum $f(x)$
c. Jika $D_f = [-10, 10]$ tentukan maksimum dan minimum $f(x)$
d. Jika $D_f = [0,\ 5]$ tentukan maksimum dan minimum $f(x)$

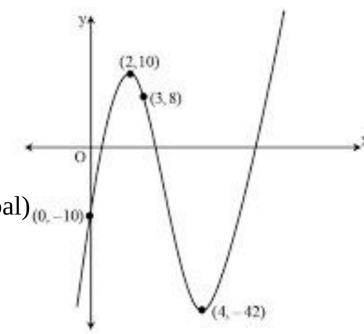
Jawab

a. $D_f = (-\infty, +\infty)$, Maks $f(x) = +\infty$, Min $f(x) = -\infty$

b. $D_f = [0, 10]$
   - $f(x) \to f(10) = 10^3 - 9.10^2 + 24.10 - 10 = 330$ (Maks global)
   - $f(x) \to f(0) = -10$
   - $f(x) \to f(4) = -42$ (min global)

c. $D_f = [-10, 10]$
   - $f(x) \to f(10) = 10^3 - 9.10^2 + 24.10 - 10 = 330$
   - $f(x) \to f(-10) = -10^3 - 9.10^2 - 24.10 - 10 = -2150$

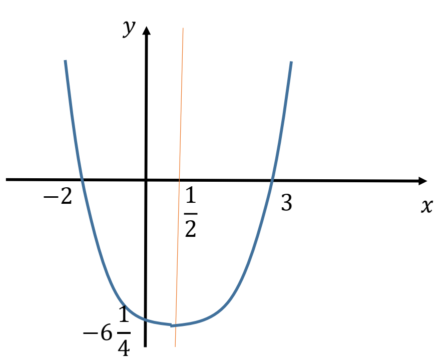
d. $D_f = [0,\ 5]$
   - Maks $f(x) = 10$
   - Min $f(x) = -42$ minimum absolut / Global



Contoh

MATEMATIKA ITS

Misalkan: $f(x) = x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$



$D_f = (-\infty, +\infty) \to f_{maks\ abs} = +\infty$

$\to f_{min\ abs} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -6\frac{1}{4}$

$D_f = (-4, 2) \to f_{maks\ abs} = f(-4) = 6$

$\to f_{min\ abs} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -6\frac{1}{4}$

$D_f = (1, 3) \to f_{maks\ abs} = f(3) = 0$

$\to f_{min\ abs} = f(1) = -6$

MATEMATIKA ITS

Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

Panduan Menyelesaikan Permasalahan Optimalisasi

1. Identifikasi semua kuantitas yang diberikan dan semua kuantitas yang akan ditentukan. Jika mungkin, buatlah sketsa.
2. Tulis bentuk persamaan yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan.
3. Reduksi bentuk persamaan menjadi persamaan yang hanya memuat satu variabel bebas. Hal ini melibatkan persamaan kedua yang memuat variabel bebas dari persamaan yang berkaitan.
4. Tentukan domain persamaan sesuai kondisi fisik.
5. Tentukan nilai maksimum atau minimum yang diinginkan dengan menggunakan turunan pertama sama dengan 0 (nol).

MATEMATIKA ITS

4.7 Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

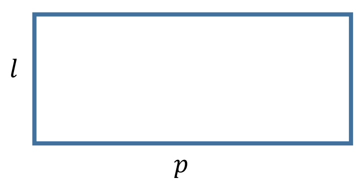
Selang Tertutup Berhingga

Masalah maksimum dan minimum untuk selang tertutup berhingga artinya karena kondisi fisis maka ukuran dari hasil selalu dalam selang/interval positip

Contoh 1

Tentukan ukuran dari empat persegi panjang yang mempunyai keliling 100 cm

Jawab



$l, p > 0$

$L = p \times l$

$K = 2p + 2l = 100\ cm \rightarrow l = 50 - p$

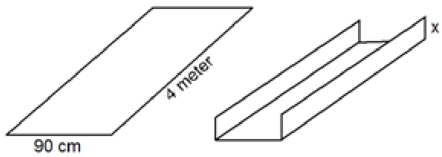
$L = p \times (50 - p) = 50p - p^2$

$\frac{dL}{dp} = 50 - 2p$

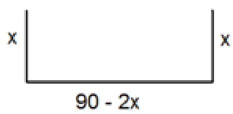
Maks $L \rightarrow \frac{dL}{dp} = 0 \rightarrow 50 - 2p = 0\ ; p = 25\ ; l = 25$

Contoh 2

Dari selembar seng dengan panjang 4 m dan lebar 90 cm akan dibuat saluran talang untuk menampung air seperti gambar 2 dibawah ini, tentukan panjang x sehingga daya tampung air maksimal



Gambar 1. Ukuran Seng



Gambar 2. Penampang Saluran

Jawab

Misal tinggi talang x

Bentuk penampang talang pada Gambar 2.

Volume talang maks. jika luas penampang maks.

$$L(x) = (90 - 2x).x = 90x - 2x^2$$

Maksimum jika $L'(x) = 0$

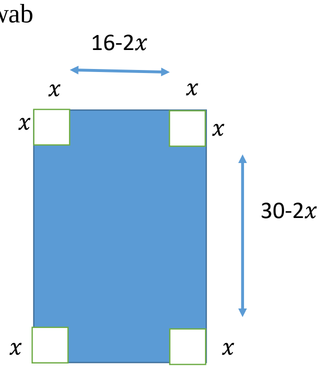
$$L'(x) = 90 - 4x = 0 \rightarrow x = 22{,}5\ cm$$

Jadi volume talang maks. jika tinggi talang = 22, 5 cm

Contoh 3

Bangun persegi dari karton berukuran 16 x 30 cm, pada masing-masing pojoknya dipotong persegi dengan sisi x cm, kemudian sisi yang dipinggir dilipat sehingga membentuk kotak. Tentukan ukuran kotak sehingga volumenya maksimum

Jawab



$p = 30 - 2x\,;\ \ l = 16 - 2x\ \ ;\ \ \ t = x$

$V = p \times l \times t$

$\quad = (30 - 2x)(16 - 2x)x = 480x - 92x^2 + 4x^3$

Nilai: $0 < x < 8$

Mencari maksimum V

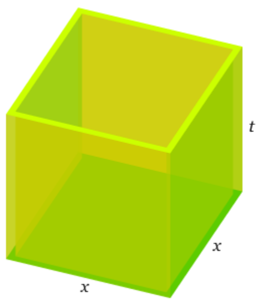
$$\frac{dV}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = 480 - 184x + 12x^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{10}{3}\ \ ;\ \ x_2 = 12\ (tidak\ memenuhi)$$

Ukuran balok: $p = 30 - 2\left(\frac{10}{3}\right)\ ;\ \ l = 16 - 2\left(\frac{10}{3}\right)\ \ ;\ \ \ t = \frac{10}{3}$

Contoh 4

Suatu perusahaan ingin merancang suatu kotak terbuka yang memiliki alas persegi dan luas permukaan 108 cm², seperti yang ditunjukkan gambar di bawah. Berapakah panjang, lebar, dan tinggi kotak tersebut agar menghasilkan kotak dengan volume terbesar?



Jawab

Karena kotak tersebut memiliki alas persegi, maka volumenya

$$V = x^2 t \quad ; \quad 0 < x < 108 \; ; 0 < t < 108$$

Luas permukaan kotak adalah,

$$L = luas\ alas + luas\ 4\ sisi$$

$$108 = x^2 + 4xt \rightarrow t = \frac{(108 - x^2)}{4x}\ Substitusi\ ke\ V\ didapat:$$

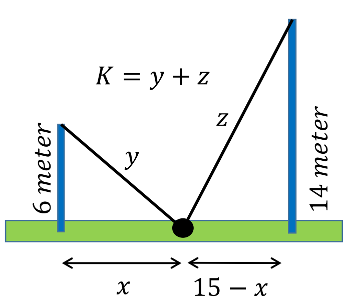
$$V = x^2 \frac{(108 - x^2)}{4x} \leftrightarrow V = 27x - \frac{x^3}{4}$$

$$V' = 0 \rightarrow 0 = 27 - \frac{3x^2}{4} \rightarrow x_1 = 6 \cup x_2 = -6\ (TM)$$

$$t = \frac{(108 - x^2)}{4x} = \frac{(108 - 6^2)}{46} = 3 \; ; \; Ukuran\ kotak: p = l = 6\ cm \;\; ; \;\; t = 3\ cm$$

Contoh 4

Dua tiang yang memiliki tinggi 6 meter dan 14 meter berdiri dengan jarak 15 meter. Kedua tiang tersebut disangga oleh dua kawat yang diikatkan pada satu tonggak, yang terbujur dari permukaan tanah sampai ujung paling atas kedua tiang tersebut. Di manakah seharusnya tonggak diletakkan agar dibutuhkan kawat dengan panjang sependek mungkin?



Jawab

Misalkan K adalah panjang kawat yang akan diminimalkan. Dengan menggunakan ilustrasi gambar dapat dituliskan,

$$K = y + z$$

Berdasarkan Teorema Pythagoras, didapat:

$$x^2 + 6^2 = y^2 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + 6^2}$$

$$(15 - x)^2 + 14^2 = z^2 \rightarrow z = \sqrt{x^2 - 30x + 421}$$

Substitusikan ke K didapat:

$$K = y + z$$
$$= \sqrt{x^2 + 6^2} + \sqrt{x^2 - 30x + 421}$$

Untuk mendapatkan nilai minimum $K' = 0$ didapat:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{x^2+36}} + \frac{x-15}{\sqrt{x^2-30x+421}} &= 0 \\
x\sqrt{x^2-30x+421} &= (15-x)\sqrt{x^2+36} \\
x^2(x^2-30x+421) &= (15-x)^2(x^2+36) \\
x^4 - 30x^3 + 421x^2 &= x^4 - 30x^3 + 261x^2 - 1080x + 8100 \\
160x^2 + 1080x - 8100 &= 0 \\
20(2x-9)(4x+45) &= 0 \\
x &= 4{,}5 \quad \text{atau} \quad x = -11{,}25
\end{aligned}$$

Karena $x = -11{,}25$ tidak berada dalam domain, Jadi: $x = 4{,}5\ m$

$K(0) \approx 26{,}52$, $\quad K(4{,}5) = 25$, $\quad$ dan $\quad K(15) \approx 30{,}16$,

Contoh 5

Dalam produksi suatu barang, biaya totalnya adalah $TC = (0{,}4Q^2 + 500Q + 16000)$ rupiah. Berapakah banyaknya barang yang harus diproduksi agar biaya rata-ratanya (*AC* =*Average Cost*) minimum? Berapakah biaya rata-rata ninimum tersebut?

Jawab

Biaya rata-rata (AC) dapat dinyatakan sebagai:

$$AC(Q) = \frac{TC}{Q} = \frac{0{,}4Q^2 + 500Q + 16000}{Q} = 0{,}4Q + 500 + \frac{16000}{Q}$$

Untuk meminimumkan AC

$$\frac{dAC(Q)}{dQ} = 0 \rightarrow 0{,}4 - 16000Q^{-2} = 0\ ;\ Q_1 = -200\ (Tidak\ Memenuhi)\ ;\ Q_2 = 200$$

Banyak barang = 200

$$Biaya\ rata-rata = 0{,}4(200) + 500 + \frac{16000}{200} = 660$$

Catatan
TC:Total Cost
AC: Average Cost
Q: Quantity

MATEMATIKA ITS

Contoh 6

Permintaan terhadap suatu produk memenuhi persamaan P = (90 – 3Q) rupiah/unit dan total biaya (TC: *Total Cost*) untuk menghasilkan Q unit produk tersebut adalah TC = $Q^3/10 - 3Q^2 + 60Q + 100$. Berapakah banyaknya produk yang harus dijual agar diperoleh laba maksimum? Berapakah laba maksimum tersebut?

Jawab

Jika Q unit produk terjual maka penerimaan total (TR:Take Revenue) yang terjadi adalah TR = P x Q.

Karena P = 90 – 3Q, diperoleh:

$$TR(Q) = (90 - 3Q).Q$$

$$TR(Q) = 90Q - 3Q^2$$

Selanjutnya, laba yang diperoleh (π), adalah

π = TR – TC (TR = Pendapatan, TC = biaya seluruhnya)

$$\pi(Q) = (90Q - 3Q^2) - (Q^3/10 - 3Q^2 + 60Q + 100)$$

$$\pi(Q) = -Q^3/10 + 30Q - 100$$

MATEMATIKA ITS

Untuk mengoptimalkan π, diturunkan terhadap Q didapat:

$$\frac{d\pi(Q)}{dQ} = 0$$

$$Q^2 - 100 = 0$$

$$(Q + 10)(Q - 10) = 0$$

Q_1 = -10 (TM: Tidak Memenuhi) atau $Q_2 = 10$

Jadi, agar laba mencapai nilai maksimum, banyaknya barang yang harus terjual adalah 10 unit. Untuk menentukan berapa laba yang maksimum tersebut, substitusikan Q = 10 ke dalam persamaan laba diperoleh:

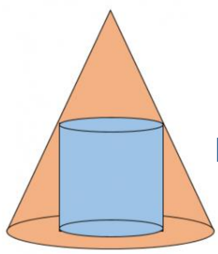
$$\pi(10) = -10^3/10 + 30.10 - 100 = 100$$

Jadi, laba maksimumnya adalah Rp 100.

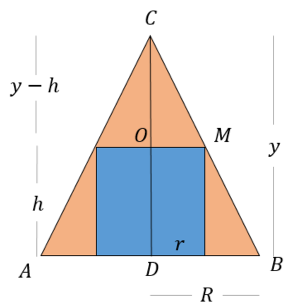
MATEMATIKA ITS

Contoh 5

Mencari volume maksimal dari tabung dalam sebuah kerucut memiliki jari-jari alas R, dan tinggi h yang tetap .



Gambar 3D



Gambar 2D

Keterangan:

$y = tinggi\ kerucut$

$h = tinggi\ tabung$

$r = jari - jari\ alas\ tabung$

$R = jari - jari\ alas\ kerucut$

perbandingan segitiga:

$$\frac{CO}{OM} = \frac{CD}{DB} \quad ; \quad \frac{y-h}{r} = \frac{y}{R}$$

$$y - h = \frac{r}{R}y$$

$$h = y - \frac{r}{R}y$$

MATEMATIKA ITS

Volume tabung:

$$V = \pi r^2 h$$

$$= \pi r^2\left(y - \frac{r}{R}y\right)$$

$$= \pi\left(r^2 y - \frac{r^3}{R}y\right)$$

maksimum $\dfrac{dV}{dr} = 0$:

$$0 = \frac{d}{dr}\pi\left(r^2 y - \frac{r^3}{R}y\right)$$

$$= \pi\frac{d}{dr}\left(r^2 y - \frac{r^3}{R}y\right)$$

$$= \pi\left(\frac{d}{dr}r^2 y - \frac{d}{dr}\frac{r^3}{R}y\right)$$

$$= \pi\left(2r\,y - 3\frac{y}{R}r^2\right)$$

Untuk mendapatkan bentuk r, kita dapat memindahkan $3\frac{y}{R}r^2$ ke ruas kiri, diperoleh

$$0 = \pi\left(2r\,y - 3\frac{y}{R}r^2\right)$$

$$0 = \left(2r\,y - 3\frac{y}{R}r^2\right)$$

$$3\frac{y}{R}r^2 = 2r\,y$$

$$r = \frac{2}{3}R$$

Subtitusikan bentuk r ini ke bentuk h diawal, untuk mendapatkan bentuk h yang bergantung pada R atau y.

$subtitusikan\ r$:

$$h = y - \frac{r}{R}y$$

$$h = y - \frac{1}{R}\left(\frac{2}{3}R\right)y$$

$$h = y - \frac{2}{3}y$$

$$h = \frac{1}{3}y$$

Subtitusikan r dan h pada persamaan Volume.

$Volume\ Maksimal\ Tabung$:

$$V = \pi r^2 h$$

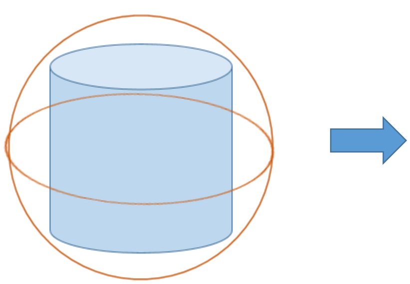
$$= \pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\frac{1}{3}y$$

$$= \pi\frac{4}{9}R^2\frac{1}{3}y$$

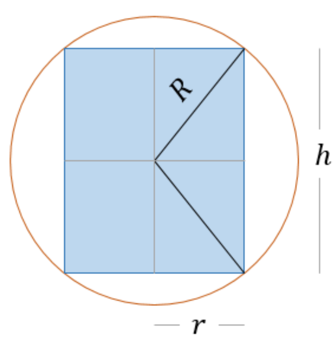
$$= \frac{4}{27}\pi R^2 y$$

Contoh 5

Mencari volume maksimal dari tabung dalam sebuah bola memiliki jari-jari alas R.



Gambar 3D



Gambar 2D

Kita harus mencari hubungan antara r (jari-jari tabung) dengan R (jari-jari bola) dan h (tinggi tabung). Bila kita perhatikan jika kita ambil setengah tinggi tabung, sisi pada r, dan jari-jari R. Maka kita dapat bentuk segitiga siku-siku. Dan dengan demikian kita dapat terapkan aturan pythagoras pada kasus ini.

$menggunakan\ phytagoras$:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$R^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$$

$sehingga$:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$Volume\ tabung$:

$$V = alas \times h$$

$$= \pi r^2\, h$$

$$= \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

$$= \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

$$Volume\ maks\ saat\ \frac{dV}{dh} = 0$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 = \frac{d}{dh}\pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

$$0 = \pi\left(\frac{d}{dh}R^2 h - \frac{d}{dh}\frac{h^3}{4}\right)$$

$$0 = \pi\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right)$$

$$0 = R^2 - \frac{3h^2}{4}$$

Pindah ruaskan persamaan.

$sehingga$:

$$h^2 = \frac{4}{3}R^2$$

$$h = R\frac{2}{\sqrt{3}}$$

MATEMATIKA ITS

Dikarenakan bentuk h telah diperoleh sekarang, subtitusikan bentuk ini untuk mendapat bentuk r.

$$r^2 = R^2 - \frac{1}{4}h^2$$
$$= R^2 - \frac{1}{4}\left(R\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$
$$= R^2 - \frac{1}{4}\frac{4}{3}R^2$$
$$= R^2 - \frac{1}{3}R^2$$
$$r = \sqrt{\frac{2}{3}R^2} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

MATEMATIKA ITS

Setelah kita memperoleh h dan r, kita dapat mencari bentuk Volume maks dengan mensubtitusikan r dan h.

$Volume\ Maks$:

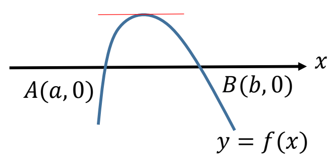
$$V = \pi r^2\, h$$
$$= \pi\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \frac{2R}{\sqrt{3}}$$
$$= \pi R^2 \frac{2}{3}\frac{2R}{\sqrt{3}}$$
$$= \pi R^3 \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

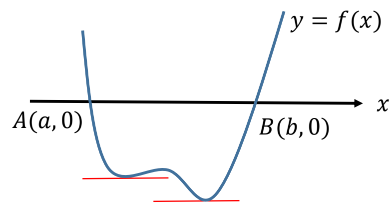
Dan kita peroleh, persamaan V terhadap jari-jari bola. Persamaan volume ini merupakan persamaan volume maksimal dari si tabung. Yang dimana besarnya volume dibatasi oleh besar jari-jari bola.

4.8 Teorema Rolles; Teorema Nilai Rata-rata

MATEMATIKA ITS

Ide Teorema Role, Teorema rata-rata
Jika terdapat dua titik $A(a, 0)$ dan $B(b, 0)$ pada $y = f(x)$ maka antara dua titik tersebut terdapat paling sedikit satu garis singgung mendatar





TEOREMA ROLLE Diasumsikan f terdeferensial pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$.
Jika $f(a) = f(b) = 0$ maka sedikitnya terdapat satu titik c dalam (a, b) dimana $f'(c) = 0$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 4. Aplikasi Turunan 37

37

MATEMATIKA ITS

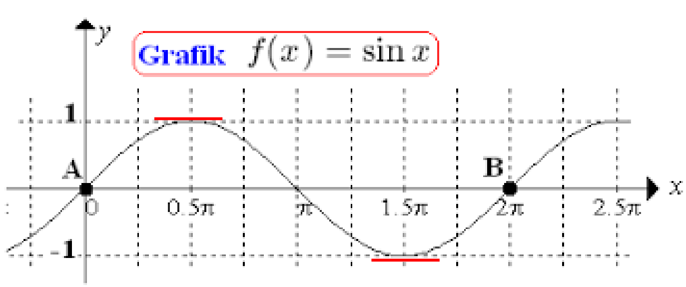
Contoh 1

$f(x) = \sin x$ fungsi yang kontinu dan terdeferensial di $[0, 2\pi]$

$f(0) = 0$ dan $f(2\pi) = 0 \rightarrow$ memenuhi hipotesa teorema Rolle

$f'(x) = \cos\ x$, maka dapat ditemukan garis singgung yang sejajar sumbu x yaitu:

$f'(x) = 0 \rightarrow \cos\ x = 0;\ \ x = \dfrac{\pi}{2}$ dan $x = \dfrac{3\pi}{2}$



Daryono, Kalkulus 1: Bab 4. Aplikasi Turunan 38

38

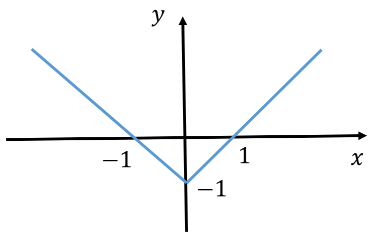
Contoh 2

MATEMATIKA ITS

$f(x) = |x| - 1$; di $A(-1, 0)$ dan $B(1, 0)$

$f(-1) = 0$ dan $f(1) = 0$ → memenuhi hipotesa teorema Rolle

$f(x)$, tidak diferensiabel disemua titik pada [-1, 1] yaitu di titik x = 0, $f(x)$ tidak diferensiabel



$$f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} x - 1; x \geq 0 \\ -x - 1; x < 0 \end{cases}$$

$Turunan\ kiri$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - 1 - (-x - 1)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-(0+h) - 1 - (-0 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Turunan kiri ≠ turunan kanan $f(x)$ tidak dapat diturunkan di x = 0 berarti tidak ada garis singgung mendatar

$Turunan\ kanan$

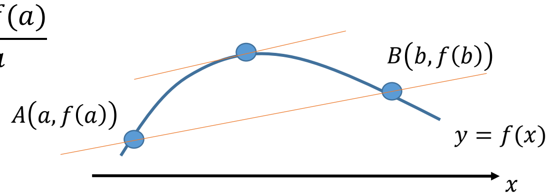
$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - 1 - (x - 1)}{h}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h) - 1 - (0 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

MATEMATIKA ITS

Ide Teorema Nilai Rata-rata: Dua titik sebarang antara A dan B pada kurva $y = f(x)$ terdapat sedikitnya satu titik dimana garis singgung kurva sejajar garis potong yang menghubungkan A dan B. Kemiringan garis potong yang menghubungkan $A(a, f(a))$ dan $B(b, f(b))$ adalah:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Teorema Nilai Rata-rata Jika f dapat diturunkan pada (a, b) dan kontinu pada [a, b], maka terdapat sedikitnya satu titik c pada (a, b) sehingga:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 3

Diberikan $f(x) = x^3 + 1$. Tunjukan bahwa f memenuhi hipotesa Teorema Nilai Rata-rata pada selang [1, 2] dan tentukan nilai c pada selang yang titik ekstremnya dijamin oleh teorema

Penyelesaian

Karena f polynomial maka f kontinu dan diferensiabel dimana mana, berarti f kontinu dan diferensiabel di [1, 2] sehingga hipotesa Teorema Nilai Rata rata dipenuhi oleh $a = 1$ dan $b = 2$

$$f(a) = f(1) = 1^2 + 1 = 2 \quad ; \quad f(b) = f(2) = 2^3 + 1 = 9$$
$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(c) = 3c^2$$

Berdasarkan Teorema Rata rata:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$3c^2 = \frac{9-2}{2-1} \leftrightarrow 3c^2 = 7 \leftrightarrow c^2 = {}^7\!/_3 \;\; ; \;\; c_1 = \sqrt{{}^7\!/_3} \quad ; c_2 = -\sqrt{{}^7\!/_3} \quad (TM)$$
$$c_1 = \sqrt{{}^7\!/_3} \;\; ada\ pada\ [1,2] \;\; dijamin\ oleh\ Teorema\ eksistensinya\ (keberadaannya)$$

MATEMATIKA ITS

Teorema Jika f dan g kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan jika $f'(x) = g'(x)$ untuk semua x dalam (a, b) maka f dan g dibedakan oleh konstanta pada $[a, b]$ artinya ada konstanta k sedemikian hingga $f(x) - g(x) = k$ untuk semua x dalam $[a, b]$

Contoh

Diberikan $f(x) = (x-1)^3$ dan $g(x) = (x^2+3)(x-3)$. Tunjukkan bahwa $f(x) - g(x) = k$

Penyelesaian

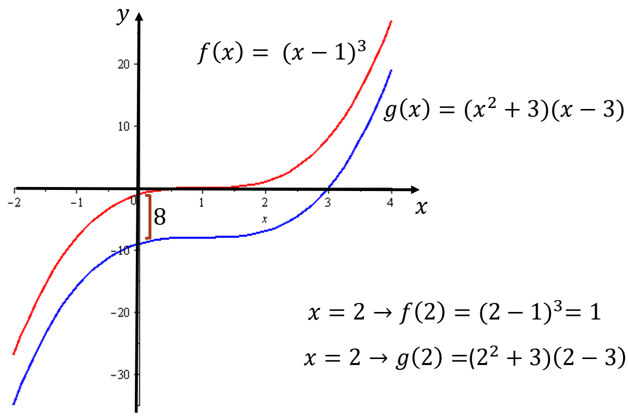
$$f(x) = (x-1)^3 \rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2 = 3x^2 - 6x + 3$$
$$g(x) = (x^2+3)(x-3) \rightarrow g'(x) = 2x(x-3) + (x^2+3)(1) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f'(x) = g'(x)$$

Berarti

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x-1)^3 - (x^2+3)(x-3) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 9) \\ &= 8 \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Grafik $f(x) = (x-1)^3$ dan $g(x) = (x^2+3)(x-3)$



$x = 2 \rightarrow f(2) = (2-1)^3 = 1$

$x = 2 \rightarrow g(2) = (2^2+3)(2-3) = -7$

43

MATEMATIKA ITS

Bab 4. Aplikasi Turunan

x

Integral

44