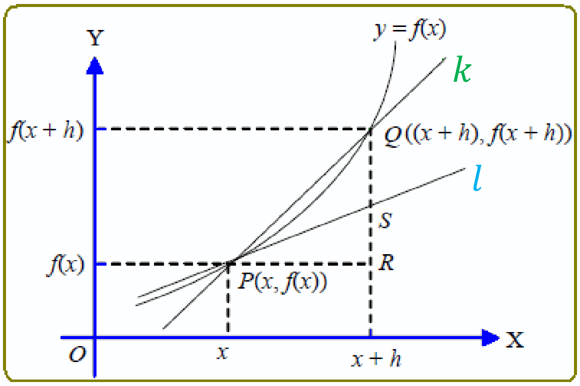
MATEMATIKA ITS



$$m_k = \frac{QR}{PR} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$m_l =$$ 

Bab 4. Diferensiasi

Daryono Budi Utomo

1

MATEMATIKA ITS

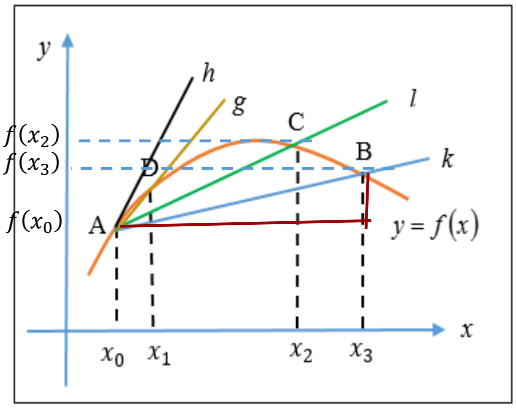
Bab 4 Diferensiasi

2

4.1 Persamaan Garis Singgung dan Kecepatan Sesaat

MATEMATIKA ITS

Diberikan $y = f(x)$ dan garis k, l, g dan h yang diperlihatkan pada Gambar dibawah ini



- Gradien garis k:

$$m_{AB} = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$$

- Gradien garis l:

$$m_{AC} = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

- Gradien garis g:

$$m_{AD} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

MATEMATIKA ITS

Bagaimana untuk gradien garis h, sebut m_h yang merupakan arah garis singgung dari $y = f(x)$ di titik A yang mana nilai x_1 mendekati x_0 dan dapat dinyatakan sebaai berikut:

$$m_{AD} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad (1)$$

Jika $y = f(x)$ merupakan fungsi kecepatan dan dinyatakan dalam $y = f(t)$ dengan t menyatakan waktu, maka kecepataan sesaat adalah:

$$v_{sesaat} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_o)}{t_1 - t_0} \qquad (2)$$

MATEMATIKA ITS

Perhatikan Persamaan (1), arah garis singgung kurva $y = f(t)$ pada titik A dapat dinyatakan

$$m_{AD} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

Jika $\Delta x = x_1 - x_0$; $x_1 = x_0 + \Delta x$, untuk $x_1 \to x_0$ dan berakibat $\Delta x \to 0$, maka:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_1) - f(x_0)}{\Delta x_1} \qquad (3)$$

Untuk sebarang nilai *x* Persamaan (3) menjadi:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Persamaan (4) merupakan turunan/diferensiasi dari *f*(*x*)

MATEMATIKA ITS

Contoh 1.
Tentukan turunan $f(x) = x^2$
Jawab

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Contoh 2.
Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$
Jawab

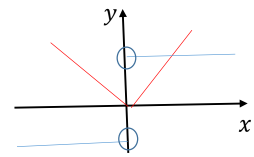
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

MATEMATIKA ITS

- Jika fungsi f dapat diturunkan (diferensiabel) maka f kontinu, tetapi tidak berlaku sebaliknya artinya jika f kontinu belum tentu diferensiabel.
- Suatu fungsi dapat diturunkan jika turunan kiri = turunan kanan $(f'_- = f'_+)$

Contoh 3.
Selidiki apakah $f(x) = |x|$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 0$



Jawab

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & < 0 \end{cases}$$

Syarat kontinu

1. $f(0) = 0$ (ada)
2. $\lim\limits_{x\to 0^-}(x) = 0\,;\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

   $\lim\limits_{x\to 0^-}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ (ada)
3. $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(x)$ kontinu di $x = 0$

f dapat diturunkan di $x = 0$ jika

Turunan kiri di $x = 0$ sama dengan turunan kanan di $x = 0$

Turunan kiri di $x = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(0+\Delta x)-(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Turunan kanan di $x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(0+\Delta x)-(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Karena $f'_- \neq f'_+$ maka f tidak dapat diturunkan di $x = 0$

Contoh 4.

Selidiki apakah $f(x) = \begin{cases} x^2-1, x \geq 2 \\ x+1, x < 2 \end{cases}$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 2$

MATEMATIKA ITS

Jawab

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \geq 2 \\ x+1, & < 2 \end{cases}$$

Syarat kontinu

1. $f(2) = 3$ (ada)
2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1) = 3\,; \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1) = 3\end{array}\right\}$ sama

   $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$ (ada)
3. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

$f(x)$ kontinu di $x = 2$

f dapat diturunkan di $x = 2$ jika

Turunan kiri di $x = 2$ sama dengan turunan kanan di $x = 2$

Turunan kiri di $x = 2$

$$f'_-(2^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{((2+\Delta x)+1)-(2+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Turunan kanan di $x = 2$

$$f'_+(2^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(2+\Delta x)^2-1))-(2^2-1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{3+4\Delta x+(\Delta x)^2-3}{\Delta x}$$

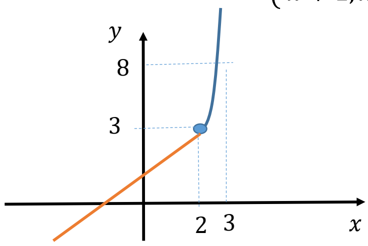
$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x} = 4$$

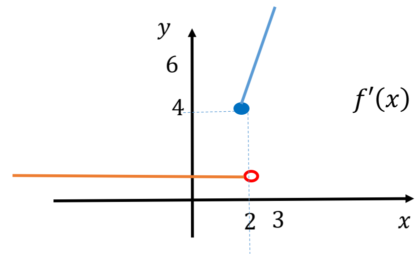
Karena $f'_- \neq f'_+$ maka f tidak dapat diturunkan di x =2

Contoh 4.

Selidiki apakah $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, x \geq 2 \\ x + 1, x < 2 \end{cases}$ fungsi kontinu dan diferensiabel di $x = 2$

MATEMATIKA ITS





$$f'(x) = \begin{cases} 2x, x > 2 \\ 1, x < 2 \end{cases}$$

$Turunan\ f(x)\ \ di\ x = 3$

$$f'_{+} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 1)\,) - (3^2 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - (9 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = 6$$

$$f'_{-} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(3 + \Delta x)^2 - 1)\,) - (3^2 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 1 - (9 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x(6 + \Delta x)}{\Delta x} = 6$$

$$f'_{-}(3) = f'_{+}(3) \rightarrow f(x)\ diferensiabel\ di\ x = 3$$

MATEMATIKA ITS

4.2 Rumus Turunan fungsi

Rumus turunan dari fungsi

Diberikan fungsi $y = f(x)$ kontinu disemua nilai x.

$$y = ax^n\ , a = \text{konstatnta};\ \frac{dy}{dx} = nax^{n-1}\ ; n\ =\ \text{bilangan riil}$$

$$y = f(x) \pm g(x)\ ;\ \ \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x) \times g(x)\ ;\ \ \frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}\ ; g(x) \neq 0\ ;\ \ \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Contoh 5.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$

a. $y = 3x^4 - 2x^{-3} + \sqrt{x}$

b. $y = (2x^3 - 3x)(x + 1)$

c. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

d. $y = \frac{2x}{(x^2-3)}$

Jawab

a. $y = 3x^4 - 2x^{-3} + \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 12x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b. $y = (2x^3 - 3x)(x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2 - 3)(x + 1) + (2x^3 - 3x)(1)$$

$$= 6x^3 + 6x^2 - 3x - 3 + 2x^3 - 3x = 8x^3 + 6x^2 - 6x - 3$$

c. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$; $x \neq 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x)(x^2 - 1) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

d. $y = \frac{2x}{(x^2-3)}$; $x \neq \sqrt{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2)(x^2 - 3) - (2x)(2x)}{(x^2 - 3)^2} = \frac{2x^2 - 6 - 4x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 1)^2}$$

4.3 Turunan Fungsi Trigonometri

MATEMATIKA ITS

Diberikan $y = \sin x$ akan dicari turunan dari y, berdasarkan defenisi turunan:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x}}_{\to 0} + \cos(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_{\to 1}$$

$$= \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$$

$$= \cos x$$

MATEMATIKA ITS

Untuk fungsi $y = \cos x$ dengan cara yang sama didapat

$$y = \cos x \ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin x$$

Fungsi trigometri yang lain dengan menggunakan rumus turunan fungsi $\sin x$ dan $\cos x$.

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0\cos x - 1(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

Rumus turunan fungsi trigonometri

- $y = \sin x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$
- $y = \cos x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sin x$
- $y = \tan x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
- $y = \cot x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
- $y = \sec x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan x \sec x$
- $y = \csc x \;\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\cot x \csc x$

Contoh 6.

- $y = \sin x \cos x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \cos x + \sin x(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- $y = \sin x \tan x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \frac{1}{\cos^2 x}$

  $= \sin x + \tan x \sec x$
- $y = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x}\frac{1}{\cos x} = \csc x \sec x$

  $\frac{dy}{dx} = -\cot x \csc x \sec x + \csc x \tan x \sec x$

4.4 Turunan tingkat tinggi

Diberikan $y = f(x)$

- Turunan dari $y = f(x)$ terhadap x dinyatakan dengan $y = f'(x)$ disebut turunan pertama
- Jika $y = f'(x)$ diturunkan lagi terhadap x didapat: $y = f''(x)$, turunan kedua
- Jika $y = f''(x)$ diturunkan lagi terhadap x didapat: $y = f'''(x)$, turunan ketiga

  dan seterusnya

Contoh 7.

- $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x$
- $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$
- $f''(x) = 12x^2 - 12x$
- $f'''(x) = 24x - 12$
- $f^{(iv)}(x) = 24$
- $f^{(v)}(x) = 0$

4.5 Aturan Rantai

Diberikan fungsi komposisi $(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$, jika $g(x)$ dapat diturunkan terhadap x dan $f(x)$ dapat diturunkan terhadap $g(x)$ dan bentuk fungsi komposisi dinyatakan dengan:

$$y = f(u)\,; u = g(x)$$

maka turunan fungsi komposisi adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 8

Tentukan turunan dari fungsi yang diberikan

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

c. $y = \sin 3x$

d. $y = \tan^2 5x$

e. $y = \cos\left(\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right)$

MATEMATIKA ITS

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

Misal: $u = 2x^3 - 10 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2$

$y = u^{10} \rightarrow \frac{dy}{du} = 10u^9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 10u^9 6x^2 = 10(2x^3-1)^9 6x^2 = 60x^2(2x^3-1)^9$$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

Misal: $u = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\frac{du}{dx} = \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$y = u^{10}$; $\frac{dy}{du} = 10u^9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 10u^9\left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$= 10\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^9\left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right) = 40x\frac{(x^2-1)^9}{(x^2+1)^{11}}$$

MATEMATIKA ITS

c. $y = \sin 3x$

Misal:

$$u = 3x\ ;\ \frac{du}{dx} = 3$$

$$y = \sin u\ ;\ \frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3\cos u = 3\cos(3x)$$

d. $y = \tan^2 5x$

Misal:

$$u = 5x\ ;\ \frac{du}{dx} = 5$$

$$v = \tan u\ ;\ \frac{dv}{du} = \sec^2 u$$

$$y = v^2;\ \frac{dy}{dv} = 2v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{du}\frac{dy}{dv} = 5\sec^2 \mathrm{u}(2v) = 10\sec^2 5x\tan 5x$$

MATEMATIKA ITS

e. $y = \cos\left(\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right) = \cos\ (\sec\ u)$

Misal:

$$u = \frac{1+2x}{1-2x}\ ;\ \frac{du}{dx} = \frac{2(1-2x)-(-2)(1+2x)}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$v = \sec u\ ;\ \frac{dv}{du} = \sec u\tan u$$

$$y = \cos v\ ;\ \frac{dy}{dv} = -\sin v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dv}{du}\frac{dy}{dv} = \frac{4}{(1-2x)^2}\sec u\tan u\ (-\sin v)$$

$$= \frac{4}{(1-2x)^2}\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\tan\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\ (-\sin(\sec u))$$

$$= \frac{-4}{(1-2x)^2}\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\tan\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\ \left(\sin\left(\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right)\right)$$

MATEMATIKA ITS

Cara cepat

Mencari turunan fungsi dengan aturan rantai penyelesaian dengan pemisalan dimulai dari fungsi yang terdalam, sebaliknya aturan cepat fungsi yang diturunkan dimulai dari fungsi yang terluar. Sebagai ilustrasi diberikan

$y = \tan(\sin(3x^2))$

- Fungsi terluar adalah $\tan(\sin(3x^2))$ turunan:

  $\sec^2(\sin(3x^2)) \times (\text{turunan dalam})$

- Masuk ke fungsi dalam $\sin(3x^2)$

  turunan $\sec^2(\sin(3x^2)) \times (\cos(3x^2)) \times (\text{turunan dalam})$

- Masuk ke fungsi dalam $(3x^2)$

  turunan $\sec^2(\sin(3x^2)) \times (\cos(3x^2)) \times (6x)$

MATEMATIKA ITS

Proses cara cepat

$y = \tan(\sin(3x)^2)$

turunan tan → $\sec^2$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x)^2)(\qquad)$$

turunan sin → cos

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x)^2)(\cos(3x)^2)(\qquad)$$

turunan $3x^2$ → $6x$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2(\sin(3x)^2)(\cos(3x)^2)(6x)$$

MATEMATIKA ITS

Latihan soal

Tentukan turunan dari fungsi yang diberikan dengan cara cepat

a. $y = (2x^3 - 1)^{10}$

b. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{10}$

c. $y = \sin 3x$

d. $y = \tan^2 5x$

e. $y = \cos\left(\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right)$

$$.e.\ \frac{dy}{dx} = -sin\left(\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\right)\sec\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\tan\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)\left[\frac{2(1-2x)-(-2)(1+2x)}{(1-2x)^2}\right]$$

MATEMATIKA ITS

4.6 Turunan Fungsi Implisit

- Fungsi eksplisit adalah fungsi yang peubah *x* dan *y* dipisah dan dinyatakan dengan

  $y = f(x)$

  Contoh 9

  a. $y = 3x^2 + x - 4$

  b. $y = \frac{x-4}{2x}$

- Fungsi implisit adalah fungsi yang peubah *x* dan *y* tidak dipisah dan dinyatakan dengan

  $F(x, y) = 0$

Contoh 10

a. $3xy - 2x + 4 = 0\ (fs\ implisit) \rightarrow y = \frac{2x-4}{3x}\ (fs\ eksplisit)$

b. $\sin(xy) = 2\ \ (fs\ \ implisit) \rightarrow y = ?\ (tidak\ bisa\ dibuat\ fs\ eksplisit)$

Bentuk fungsi eksplisit selalu bisa diubah ke fungsi implisit, tidak berlaku sebaliknya, artinya tidak semua fungsi implisit dapat diubah ke fungsi eksplisit.

Konsep dari turunan implisit

- $y = 1$ diturunkan terhadap x: $\frac{dy}{dx} = 0$; $y = 3x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x$
- $y^3 = 5$ diturunkan terhadap x: $3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$
- $3x^2y^3 = 8$ diturunkan terhadap x: seolah olah bentuk perkalian fungsi

$$y = \sqrt[3]{\frac{8}{3x^2}}$$

$$6xy^3 + 3x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\leftrightarrow 6xy^3 + 9x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\leftrightarrow 9x^2y^2\frac{dy}{dx} = -6xy^3$$

$$\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-6xy^3}{9x^2y^2}$$

$$\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{3x} = \frac{-2\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3x^2}}\right)}{3x}$$

Contoh 11

Tentukan $\frac{dy}{dx}$

a. $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow y = \sqrt{9 - x^2} = (9 - x^2)^{1/2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \,;\; 2y\frac{dy}{dx} = -2x \,;\; \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

b. $x^3 + y^3 = 3xy$,

Diubah kebentuk $y = f(x)$ tidak bisa, hasil turunan ada peubah y

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3y + 3x\frac{dy}{dx} \leftrightarrow y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - x^2$$

$$(y^2 - x)\frac{dy}{dx} = y - x^2 \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

MATEMATIKA ITS

c. $x^3y^2 - 5x^2y + x = 1$

Diubah kebentuk $y = f(x)$ tidak bisa, hasil turunan ada peubah y

$$x^3y^2 - 5x^2y + x = 1 \rightarrow 3x^2y^2 + x^3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - 5\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

$$x^3 2y\frac{dy}{dx} - 5x^2\frac{dy}{dx} = 10xy - 1 - 3x^2y^2$$

$$(2x^3y - 5x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 10xy - 3x^2y^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10xy - 3x^2y^2 - 1}{(2x^3y - 5x^2y^2)}$$

MATEMATIKA ITS

d. $\cos(x^2y^2) = y \rightarrow -\sin(x^2y^2)\left(2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$

$$-\sin(x^2y^2)(2xy^2) - (\sin(x^2y^2))\left(2x^2y\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}$$

$$-(\sin(x^2y^2))\left(2x^2y\frac{dy}{dx}\right) - \frac{dy}{dx} = (2xy^2)\sin(x^2y^2)$$

$$-[(2x^2y(\sin(x^2y^2)) + 1)]\left(\frac{dy}{dx}\right) = (2xy^2)\sin(x^2y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2\sin(x^2y^2)}{2x^2y(\sin(x^2y^2)) + 1}$$

MATEMATIKA ITS

Bab 4

NEXT APLIKASI TURUNAN