

## Bab 6. Integral Tertentu

Daryono Budi Utomo

1

## Bab 6 Integral

6.1 Integral sebagai Anti Turunan

6.2 Rumus dan Sifat-sifat Integral

6.3 Integral Dengan Substitusi

6.4 Luas Sebagai Limit

6.5 Hampiran Numerik Untuk Luas

✓ 6.6 Integral Tertentu

✓ 6.7 Integral tertentu sebagai Luasan

✓ 6.8 Integral Tertentu Dengan Substitusi

2

## 6. 6 Integral Tertentu

Pada bab sebelumnya telah dipelajari luas sebagai limit, bahwa luas bidang datar yang dibatasi oleh  $y = f(x)$ , sumbu  $x$ ,  $x = a$  dan  $x = b$ . Bentuk dari jumlah pias yang menghasilkan luas bidang datar disebut **Jumlah Rieman** dan dapat dinyatakan dalam bentuk integral tertentu

Jadi

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(x_k^*) \Delta x \\
 &= \int_a^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

Contoh

Hitung

$$\begin{array}{lll}
 a. \int_1^3 (2x + 1) dx & b. \int_1^2 (3x^2 - 1) dx & c. \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x}) dx
 \end{array}$$

Jawab

$$a. \int_1^3 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$$

$$b. \int_1^2 (3x^2 - 1) dx = (x^3 - x) \Big|_1^2 = (8 - 2) - (1 - 1) = 6$$

$$c. \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x}) dx = \left( \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_0^4 = \left( \frac{64}{3} - \frac{4}{3} \cdot 8 \right) - (0 - 0) = \frac{32}{3}$$

Mengapa Integral tertentu tidak ditambah  $c$ ? Nilai  $c$  direduksi oleh batas Integral

$$\int_a^b f'(x) dx = (f(x) + c) \Big|_a^b = (f(b) + c) - (f(a) + c) = f(b) - f(a)$$

### Integral tertentu dengan fungsi negatif

Diberikan  $f(x) < 0$  untuk  $x = a$  sampai dengan  $x = b$

$$\int_a^b f(x) dx = (F(x)) \Big|_a^b < 0$$

$$y = x^2 - 3 \rightarrow \int_0^1 x^2 - 3 dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 3\right) - (0 - 0) = -\frac{8}{3}$$

$$y = x^2 - 3 \rightarrow \int_{-3}^2 x^2 - 3 dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x \Big|_{-3}^2 = \left(\frac{1}{3}(-8) - 3(-2)\right) - \left(\frac{1}{3}(-27) - 3(-3)\right) = \frac{10}{3}$$

Contoh

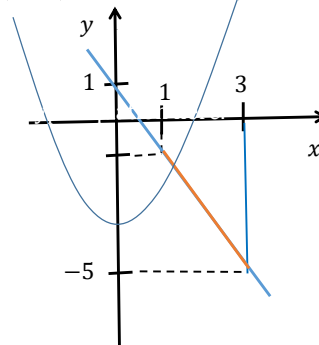
Hitung :

$$\int_1^3 (1 - 2x) dx$$

Jawab

$$\begin{aligned} \int_1^3 (1 - 2x) dx &= (x - x^2) \Big|_1^3 \\ &= (3 - 9) - (1 - 1) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Dalam hal ini menghitung integral dengan  $f(x) < 0$ , sehingga hasil integral negatif



## 6.7 Integral tertentu sebagai Luasan

Integral tertentu dapat diartikan sebagai luas dataran

Contoh

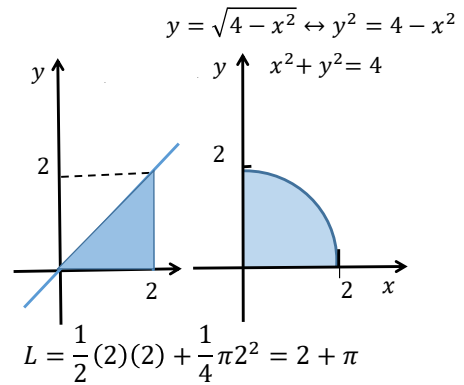
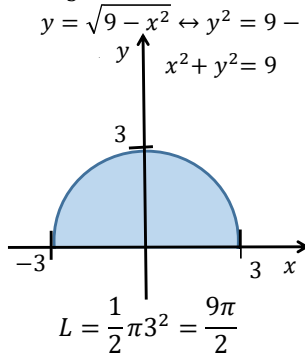
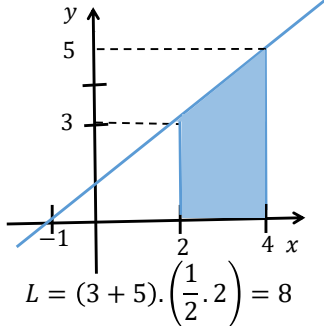
Hitung:

$$a. \int_2^4 (x+1)dx$$

$$b. \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$$

$$c. \int_0^2 x + \sqrt{4-x^2} dx$$

Jawab



Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

7

7

## Sifat – sifat Integral tertentu

$$1. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

▪ Batas integral:  $a \leq c \leq b$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

~~$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx$$~~

Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

8

8

## Syarat Keterintegalkan

Suatu fungsi  $f$  terbatas pada selang  $[a, b]$  jika terdapat bilangan positif  $M$  sedemikian hingga

$$-M \leq f(x) \leq M$$

Untuk semua  $x \in [a, b]$

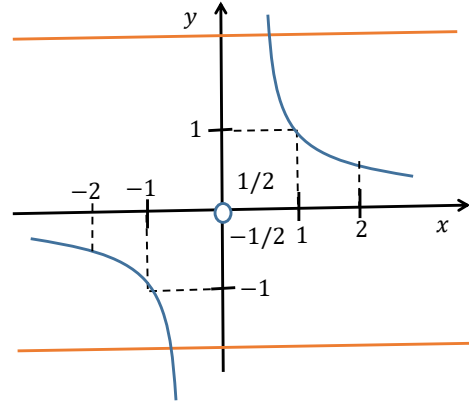
Contoh

1. Uji keterbatasan fungsi untuk  $[-2, 2]$

$f(x) = \frac{1}{x}$  apakah dapat diintegalkan?

Jawab

Pada interval  $[2, -2]$ , tidak bisa ditemukan nilai  $M$  yang mana fungsi berada dalam  $-M \leq f(x) \leq M$  dan grafiknya berada pada interval ini tidak ada berarti  $f(x)$  tidak terbatas untuk  $[-2, 2]$ . Jadi  $f(x)$  **tidak dapat diintegalkan**



Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

9

9

Contoh

2. Uji keterbatasan fungsi untuk  $[-2, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

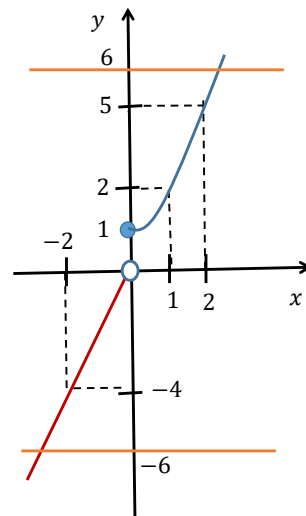
Apakah dapat diintegalkan?.

Jawab

Pada interval  $[2, -2]$ , dapat ditemukan nilai  $M$  misal  $M = 6$  yang mana fungsi berada dalam  $-6 \leq f(x) \leq 6$  terlihat grafiknya berada pada interval ini, berarti  $f(x)$  tidak terbatas untuk  $[-2, 2]$ .

Jadi  $f(x)$  **dapat diintegalkan**

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 2x dx + \int_0^2 (x^2 + 1) dx$$



Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

10

10

Contoh

3. Uji keterbatasan fungsi untuk  $[-1, 4]$

$$f(x) = |2x - 6|$$

Apakah dapat diintegrasikan?.

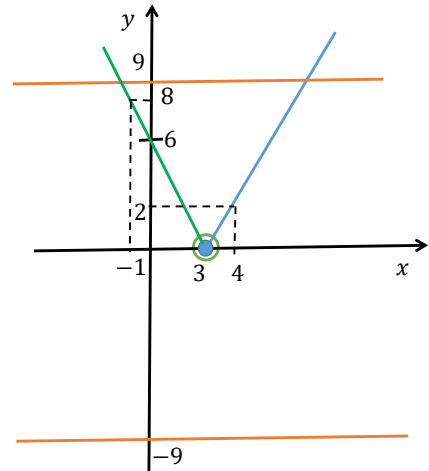
Jawab

$$f(x) = |2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6; & x \geq 3 \\ -(2x - 6); & x < 3 \end{cases}$$

Pada interval  $[-1, 4]$ , dapat ditemukan nilai  $M$  misal  $M = 9$  yang mana fungsi berada dalam  $-9 \leq f(x) \leq 9$  terlihat grafiknya berada pada interval ini, berarti  $f(x)$  tidak terbatas untuk  $[-1, 4]$ .

Jadi  $f(x)$  dapat diintegrasikan

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^3 (-2x + 6) dx + \int_3^4 (2x - 6) dx$$



Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

11

11

Contoh

4. Uji keterbatasan fungsi untuk  $[-3, 2]$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

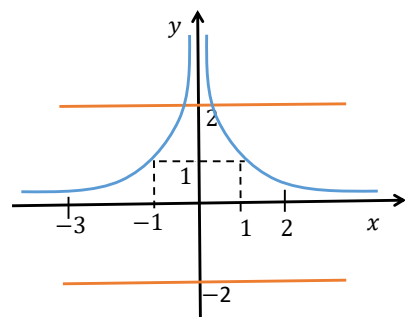
Apakah dapat diintegrasikan?.

Jawab

Pada interval  $[-3, 2]$ , tidak dapat ditemukan nilai  $M$  terlihat grafik dari  $f(x)$  untuk  $x \rightarrow 0^-$  dan  $x \rightarrow 0^+$  nilai  $f(x)$  adalah  $+\infty$ , berarti  $f(x)$  tidak terbatas untuk  $[-3, 2]$ .

Jadi  $f(x)$  tidak dapat diintegrasikan

$$f(x) = \frac{1}{x^2} ; -3 \leq x \leq -1 \text{ Dapat diintegrasikan} \rightarrow \int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$$



Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

12

12

## Teorema Fundamental Kalkulus Pertama

Jika  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  dan  $F$  adalah anti turunan  $f$  pada  $[a, b]$  maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Contoh

Dengan menggunakan teorema fundamental kalkulus pertama hitung:

$$\int_{-1}^3 3x^2 dx$$

Jawab

$$\int_{-1}^3 3x^2 dx = \left. x^3 \right|_{-1}^3 = 3^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9$$

$\downarrow$   
 $F(x)$ 
 $\downarrow$   
 $F(b) - F(a)$

## Teorema Nilai Rata-Rata Untuk Integral

Jika  $f$  kontinu pada  $[a, b]$  maka terdapat sekurang-kurangnya satu bilangan  $x^*$  dalam  $[a, b]$  sedemikian hingga

$$\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$$

Contoh

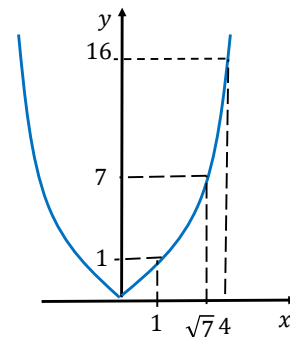
$f(x) = x^2$  kontinu pada  $[1, 4]$  dengan menggunakan teorema nilai rata-rata untuk integral terdapat bilangan  $x^*$  pada  $[1, 4]$  sehingga

$$\int_1^4 x^2 dx = (x^*)^2(4 - 1) = 3(x^*)^2$$

Sedangkan

$$\int_1^4 x^2 dx = \left. \frac{1}{3} x^3 \right|_1^4 = 21$$

Jadi :  $3(x^*)^2 = 21 \leftrightarrow (x^*)^2 = 7 \rightarrow x^* = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2,65$ , berarti dijamin ada titik diantara  $[1, 4]$  yaitu :  $x^* \approx +2,65$



## Nilai Rata-Rata

Jika  $f$  terintegral pada  $[a, b]$  maka nilai rata-rata dari  $f$  pada  $[a, b]$  didefinisikan dengan:

$$f_{rata^2} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

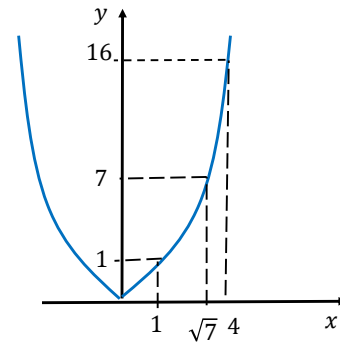
Contoh

Dapatkan  $f_{rata^2}$  pada selang  $[1, 4]$  dari  $f(x) = x^2$

Jawab

$a = 1, b = 4$

$$f_{rata^2} = \frac{1}{4-1} \int_1^4 x^2 dx = \frac{1}{3} (21) = 7$$



## 6.8 Integral Tertentu Dengan Substitusi

Jika pada integral tertentu tidak bisa dikerjakan dengan rumus dasar, maka digunakan substitusi untuk menyelesaikan integral tertentu, dalam substitusi pemisalan diambil bentuk yang sulit sehingga setelah substitusi bentuk integral menjadi mudah. Teknik penyelesaian ada dua cara.

### Metode 1

Integral dihitung tanpa menggunakan batas integral, setelah didapat hasil integral batas baru dimasukkan

### Metode 2

Saat melakukan pemisalan, batas integral langsung diganti dengan cara substitusikan batas sehingga didapat batas integral yang baru



Contoh

Hitung:

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}} dx$$

Jawab

**Metode 1.**

Integral dihitung dahulu, selanjutnya nilai batas integral dimasukan

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}} dx = \int \frac{2(x+2)dx (1/2)}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{1}{2} (2u^{1/2}) + c = \sqrt{x^2+4x+9} + c$$

Misal:  $u = x^2 + 4x + 9$

$$du = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx$$

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}} dx = \sqrt{x^2+4x+9} \Big|_1^3 = \sqrt{3^2+4.3+9} - \sqrt{0^2+4.0+9} = (\sqrt{30} - 3)$$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

17

17

**Metode 2.**

Setelah pemisalan batas integral diganti dengan batas baru

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}} dx = \int_0^3 \frac{2(x+2) (1/2)}{\sqrt{x^2+4x+9}} dx = \frac{1}{2} \int_9^{30} \frac{du}{u^{1/2}} = \frac{1}{2} (2u^{1/2}) \Big|_9^{30} = \sqrt{30} - 3$$

Misal:  $u = x^2 + 4x + 9$

$$du = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx$$

Batas:

$$x = 0 \rightarrow u = 0^2 + 4(0) + 9 = 9$$

$$x = 3 \rightarrow u = 3^2 + 4(3) + 9 = 30$$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 6 Integral : Integral Tertentu

18

18

Contoh  
 Hitung:  $\int_2^3 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx$   
 Jawab

Metode 1.

$$\int x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx = \int x^2 \sqrt{x^2 - 4} \, x \, dx = \int \underbrace{x^2}_{\sqrt{u}} \underbrace{\sqrt{x^2 - 4}}_{\sqrt{u}} \underbrace{(2x \, dx)}_{du} \frac{1}{2}$$

Misal:  $u = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = u + 4$   
 $du = 2x \, dx$

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx &= \frac{1}{2} \int (u + 4) \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \int (u^{3/2} + 4u^{1/2}) \, du = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} u^{5/2} + 4 \frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C \\ &= \frac{1}{5} (\sqrt{x^2 - 4})^{5/2} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^2 - 4})^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\int_0^3 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx = \frac{1}{5} (\sqrt{x^2 - 4})^{5/2} - \frac{4}{3} (\sqrt{x^2 - 4})^{3/2} \Big|_2^3 = \frac{1}{5} (25\sqrt{5}) - \frac{4}{3} (5\sqrt{5}) - 0 = -\frac{5}{3} \sqrt{5}$$

Contoh  
 Hitung:  $\int_2^3 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx$   
 Jawab

Metode 2.

$$\int_2^3 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx = \int_2^3 x^2 \sqrt{x^2 - 4} \, x \, dx = \int_2^3 \underbrace{x^2}_{\sqrt{u}} \underbrace{\sqrt{x^2 - 4}}_{\sqrt{u}} \underbrace{(2x \, dx)}_{du} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_0^5 (u + 4) \sqrt{u} \, du$$

Misal:  $u = x^2 - 4 \rightarrow x^2 = u + 4$   
 $du = 2x \, dx$

Batas:  $x = 2 \rightarrow u = 0$

$x = 3 \rightarrow u = 5$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^5 (u^{3/2} + 4u^{1/2}) \, du = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{5} u^{5/2} + 4 \frac{2}{3} u^{3/2} \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{1}{5} (25\sqrt{5}) - \frac{4}{3} (5\sqrt{5}) - 0 = -\frac{5}{3} \sqrt{5} \end{aligned}$$

Contoh

1. Dapatkan  $\int_0^3 f(3x)dx$  jika  $\int_0^9 f(x)dx = 5$
2. Dapatkan  $\int_{-2}^0 xf(x^2)dx$  jika  $\int_0^4 f(x)dx = 1$

Jawab

1. Dapatkan  $\int_0^3 f(3x)dx$  jika  $\int_0^9 f(x)dx = 5$

Misal:  $u = 3x \rightarrow du = 3dx$ , Batas  $x = 0 \rightarrow u = 0$ ;  $x = 3 \rightarrow u = 9$

$$\int_0^3 f(3x)dx = \int_0^3 f(3x)3dx \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \int_0^9 f(u)du = \frac{1}{3}(5) = \frac{5}{3}$$

2. Dapatkan  $\int_{-2}^0 xf(x^2)dx$  jika  $\int_0^4 f(x)dx = 1$

Misal:  $u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$ , Batas  $x = -2 \rightarrow u = 4$ ;  $x = 0 \rightarrow u = 0$

$$\int_{-2}^0 xf(x^2)dx = \int_{-2}^0 f(x^2)2xdx \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \int_4^0 f(u)du = -\frac{1}{2} \int_0^4 f(u)du = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Catatan:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

## Integral Tertentu dengan Batas atas suatu Peubah

Integral dengan Batas atas Peubah

$$\int_a^t f(x)dx = F(x) \Big|_a^t = F(t) - F(a)$$

Contoh

$$\int_1^t 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^t = t^3 - 1$$

## Teorema Fundamental Kalkulus Kedua

Integral merupakan anti turunan, sedangkan luas bidang datar  $L(x)$  luas daerah dibawah fungsi  $y = f(x)$  yang kontinu dan tak negatif pada interval  $[a, x]$  dengan demikian:

Jika

$$L'(x) = f(x)$$

maka

$$L(x) = \int_a^x f(t)dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a)$$

Jadi

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t)dt \right] = f(x)$$

Contoh

Misalkan  $f(x) = x^3$  fungsi kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_1^x t^3 dt \right] = x^3 ;$$

Uji kebenaran:

$$\int_1^x t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^x = \frac{1}{4} x^4 - 1 \rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \int_1^x t^3 dt \right] = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4} x^4 - 1 \right) = x^3$$

Hasil diturunkan didapat:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4} (x^4 - 1) \right] = x^3$$

Contoh

Misalkan  $f(x) = x^3$  fungsi kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x t^3 \right] = x^3 \text{ (batas bawah 0)}$$

Uji kebenaran:

$$\begin{aligned} \int_0^x t^3 dt &= \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^x = \frac{1}{4} x^4 - 0 \\ &= F(b) - F(a) ; F(a) = 0 \end{aligned}$$

Hasil diturunkan didapat:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{4} (x^4 - 1) \right] = x^3 \text{ (sama)}$$

Contoh

Tentukan  $f(x)$  dari:

$$1. \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{t}} \right] \quad 2. \frac{d}{du} \left[ \int_0^u \frac{t}{\cos t} dt \right] \quad 3. \frac{d}{dt} \left[ \int_{10}^t \sin(\sqrt{x}) dx \right]$$

Jawab

$$\begin{aligned} 1. \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{t}} \right] &= \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \\ 2. \frac{d}{du} \left[ \int_0^u \frac{t}{\cos t} dt \right] &= \frac{u}{\cos u} \\ 3. \frac{d}{dt} \left[ \int_{10}^t \sin(\sqrt{x}) dx \right] &= \sin(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

**Kalkulus 1 Selesai** 

**Materi tambahan:  
Bilangan Kompleks, Matriks dan Determinan**

