MATEMATIKA ITS

$$|x-3| + |2x-8| = 5$$

Bab 1: Sistem Bilangan Real

Daryono Budi Utomo

1

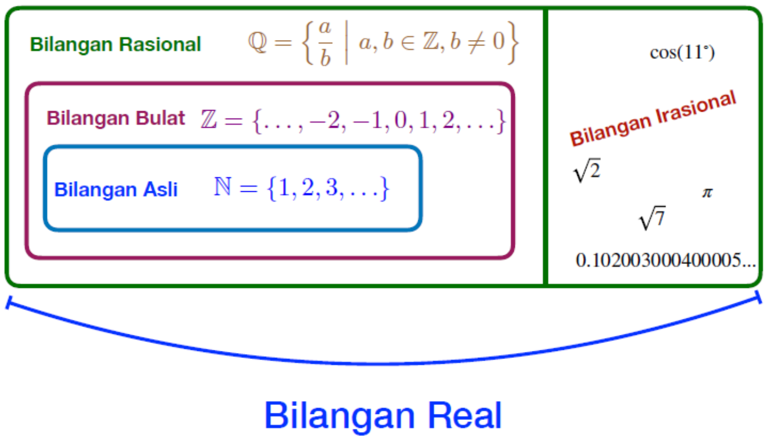
MATEMATIKA ITS

Bab 1. Sistem Bilangan

- ☑ 1.1 Bilangan Real
- ☑ 1.2 penyelesaian Pertidaksamaan
- ☑ 1.3 Nilai Mutlak
- ☑ 1.4 Grafik Persamaan
- ☑ 1.5 Garis dan Lingkaran

2

1. 1 Bilangan Real



Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 3

3

Bilangan rasional dan Irasional

- Bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan *p* dan *q* bilangan bulat, dengan demikian bilangan rasional: dapat ditulis dalam bentuk desimal berulang.
- Bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan *p* dan *q* bilangan bulat, sehingga bentuk desimal tidak berulang.

Contoh 1.

Apakah bilangan: 0,234234234 ... bilangan rasional?

$$\text{Misal } x = \quad 0{,}234234234\ \ldots \quad (1)$$

$$1000x = 234{,}234234\ \ldots \quad (2)$$

$$(2)-(1): 999x = 234 \rightarrow x = \frac{234}{999}\ ; p = 234 \text{ dan } q = 999 \text{ bilangan bulat}$$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 4

4

MATEMATIKA ITS

Contoh 2

Apakah bilangan: 11,6666 ... bilangan rasional?

Misal $x = \quad 11{,}6666\ldots \quad (1)$

$10x = 116{,}6666 \;\ldots \quad (2)$

$(2)-(1): 9x = 105 \rightarrow x = \dfrac{105}{9} = \dfrac{35}{3}; p = 35$ dan $q = 3$ bilangan bulat

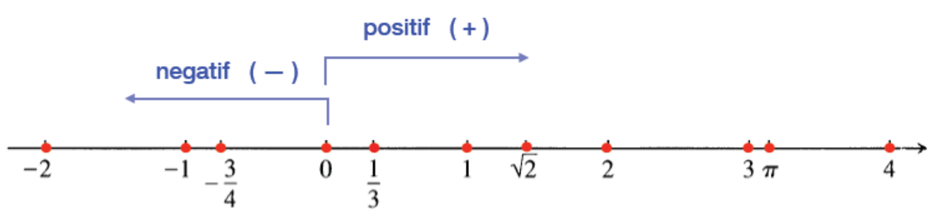
Bilangan irrasional

- $0{,}0100021300056009$ ... desimal tidak pernah berulang
- $\sqrt{2} \approx 1{,}4142135623731$ ... desimal tidak pernah berulang
- $\pi \approx 3{,}14259265358979$ …. desimal tidak pernah berulang

MATEMATIKA ITS

Bilangan Real dan Garis Real

Setiap *bilangan riil* dapat disajikan sebagai *satu titik* pada garis yang disebut *garis riil*.



simbol $\Re$ dapat digunakan sebagai lambang *sistem bilangan real* dan juga *garis real*.

$a \in \Re$ dapat dibaca (diartikan): a suatu bilangan real

a suatu titik pada garis real

MATEMATIKA ITS

Sifat-sifat bilangan real

Sifat aljabar

Bilangan real dapat *ditambahkan*, *dikurangkan*, *dikalikan*, dan *dibagi* (kecuali dengan *nol*) dengan aturan aritmetika biasa.

Pembagi 0 (nol) tidak diperbolehkan karena

$$\frac{Bil\ real}{0} = sesuatu$$

sesuatu tidak dapat didefinisikan (tidak tahu) **bukan tak tentu**

MATEMATIKA ITS

Sifat Keterurutan

Jika a, b dan c bilangan real, maka :

1. $a < b \rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ dan $c > 0 \rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ dan $c < 0 \rightarrow ac > bc$
5. $a > 0 \rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6. Jika a dan b bertanda sama, maka $a < b \rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Sifat Lengkap

jika a dan b bilangan real dengan $a < b$, maka ada bilangan real c sehingga $a < c < b$.

Interval

MATEMATIKA ITS

Notasi	Himpunan	Grafik
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x < \infty\}$	a ∞
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	a ∞
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$-\infty$ b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	$-\infty$ b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ *himpunan semua bilangan real*	$-\infty$ ∞

1.2 Penyelesaian Pertidaksamaan

MATEMATIKA ITS

himpunan atau interval yang memuat bilangan-bilangan yang memenuhi Pertidaksamaan yang diberikan.

Contoh 3.

Dapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini, dan nyatakan hasilnya dalam bentuk himpunan dan interval.

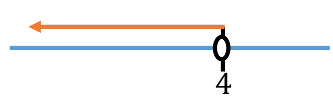
(1) $2x - 1 < x + 3$

$2x < x + 4$ kedua sisi ditambah 1

$x < 4$ kedua sisi dikurangi x

Jadi, penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < 4\}$ atau $(-\infty, 4)$.

Garis real:



Pada gambar di titik 4 berlubang karena 4 bukan Himpunan Penyelesaian (HP)

$$(2.)\ \frac{2}{x+3} \geq \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{2}{x+3} \geq \frac{1}{2-x} \leftrightarrow 2(2-x) \geq 1(x+3)\ \times$$

Perkalian silang → Salah
Jangan dilakukan karena nilai *x* tidak tahu apakah positip atau negatif

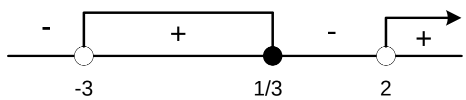
MATEMATIKA ITS

$$\frac{2}{x+3} \geq \frac{1}{2-x}\ ;\ x \neq -3\ ;\ x \neq 2$$

$$\frac{2}{x+3} \geq \frac{1}{2-x} \leftrightarrow \frac{2}{x+3} - \frac{1}{2-x} \geq 0 \leftrightarrow \frac{2(2-x)-1(x+3)}{(x+3)(2-x)} \geq 0$$

$$\leftrightarrow \frac{4-2x-x-3}{(x+3)(2-x)} \geq 0 \leftrightarrow \frac{-3x+1}{(x+3)(2-x)} \geq 0$$

Garis bilangan dan uji tanda:



Pada gambar di titik – 3, -1/3 dan 2 berlubang karena nilai ini pembagi 0

HP: $\left\{x \mid -3 < x \leq \frac{1}{3} \cup x > 2, x \in \Re\right\}$ HP: $\left(-3, \frac{1}{3}\right] \cup (2, +\infty)$

Latihan

MATEMATIKA ITS

Dapatkan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut ini, dan nyatakan hasilnya dalam bentuk himpunan dan interval.

1. $-2 \geq 3 - 8x \geq -11$
2. $\frac{x}{x\text{-}3} < 4$
3. $2\text{-}3x + x^2 \leq 0$
4. $\sqrt{x^2 - x - 6}$
5. $\sqrt{\frac{2x+1}{x\text{-}5}}$

1.3 Nilai Mutlak

MATEMATIKA ITS

Definisi

Nilai mutlak dari bilangan x, ditulis dengan $|x|$, didefinisikan

$$|x| = \begin{cases} x \ ; \ x \geq 0 \\ -x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

Contoh 4.

$|-17| = 17 \ ; \ |-8| = 8 \ ; \ |45| = 45$

Catatan:

- $|x| \geq 0$ untuk setiap bilangan real x, dan $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
- $|x|$ menyatakan jarak dari x ke titik asal 0 pada garis real.
- $|x - y|$ menyatakan jarak antara x dan y.
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Sifat Nilai Mutlak

MATEMATIKA ITS

- $|-a| = |a|$ Suatu bilangan dan negatifnya mempunyai nilai mutlak sama
- $|ab| = |a|\,|b|$ Nilai mutlak dari perkalian sama dengan perkalian nilai mutlak
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ Nilai mutlak dari pembagian sama dengan pembagian nilai mutlak, dengan syarat pembaginya tidak nol
- $|a + b| \leq |a| + |b|$ Ketaksamaan Segitiga.

Persamaan Nilai Mutlak

MATEMATIKA ITS

Contoh 5.

1. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $|2x-3|=7$

$$|2x-3|=7 \rightarrow \begin{cases} 2x-3=7 \rightarrow 2x=10 \rightarrow x=5 \\ -(2x-3)=7 \rightarrow -2x=4 \rightarrow x=-2 \end{cases}$$

HP = {5, - 2} $\rightarrow x=5$ dan $x=-2$

2. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $|3x-1|=|x+5|$

$$|3x-1|=|x+5| \rightarrow \begin{cases} 3x-1=x+5 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3 \\ -(3x-1)=x+5 \rightarrow -4x=4 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

HP = {3, - 1}

MATEMATIKA ITS

3. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $|x-3|+|2x-8|=5$

$$|x-3|+|2x-8|=\begin{cases} x-3 \rightarrow x-3 \geq 0\,; x \geq 3 \\ -(x-3) \rightarrow x-3<0; x<3 \end{cases} + \begin{cases} 2x-8 \rightarrow 2x-8 \geq 0; \quad x \geq 4 \\ -(2x-8) \rightarrow 2x-8<0; x<4 \end{cases}$$

Kondisi 1

Daerah penyelesaian: $x \geq 3 \cap x \geq 4 \rightarrow x \geq 4$

$(x-3)+(2x-8)=5 \leftrightarrow 3x-11=5 \leftrightarrow 3x=5+11 \rightarrow x=\frac{16}{3}$; memenuhi

Kondisi 2

Daerah penyelesaian: $x \geq 3 \cap x<4 \rightarrow 3 \leq x<4$

$(x-3)-(2x-8)=5 \leftrightarrow -x+5=5 \leftrightarrow -x=5-5 \rightarrow x=0$; tidak memenuhi

Kondisi 3

Daerah penyelesaian: $x<3 \cap x \geq 4 \rightarrow x=\emptyset$; tidak ada daerah penyelesaian

Kondisi 4

Daerah penyelesaian: $x<3 \cap x<4 \rightarrow x<3$

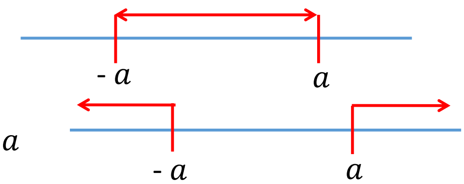
$-(x-3)-(2x-8)=5 \leftrightarrow -3x+11=5 \leftrightarrow -3x=5-11 \rightarrow x=\frac{6}{3}=2$; memenuhi

HP = $\left\{2, \frac{16}{3}\right\}$

Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Selang / Interval Nilai Mutlak

- $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$
- $|x| \geq a \rightarrow x \leq -a \;\; atau\; x \geq a$



Contoh 6.

1. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $|2x+5| \leq 7$

   $|2x+5| \leq 7 \rightarrow -7 \leq 2x+5 \leq 7 \leftrightarrow -7-5 \leq 2x \leq 7-5 \leftrightarrow -12 \leq 2x \leq 2 \leftrightarrow -6 \leq x \leq 1$

   HP=$\{x|-6 \leq x \leq 1\,; x \in R\}\;\; atau\; [-6, 1]$

2. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $|5x+6| > 17$

   $|5x+6| > 17 \rightarrow -17 < 5x+6\; atau\; 5x+6 > 17 \leftrightarrow -17-6 < 5x\; atau\; 5x > 17-6$

   $\leftrightarrow -23 < 5x\; atau\; 5x > 11 \leftrightarrow x < \frac{-23}{5}\; atau\; x > \frac{11}{5}$

   HP = $\{\, x|\; x < \frac{-23}{5} \cup x > \frac{11}{5}\;\; ;\;\; x \in R\,\}\, atau\; \left(-\infty, \frac{-23}{5}\right) \cup \left(\frac{11}{5}, \infty\right)$

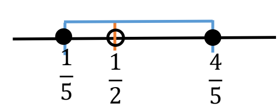
3. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $\frac{3}{|2x-1|} \geq 5$

   $\frac{3}{|2x-1|} \geq 5 \leftrightarrow 3 \geq 5|2x-1| \leftrightarrow |2x-1| \leq \frac{3}{5}$ Kalikan silang boleh karena nilai mutlak positif

   $\leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq 2x-1 \leq \frac{3}{5} \leftrightarrow 1-\frac{3}{5} \leq 2x \leq \frac{3}{5}+1 \leftrightarrow \frac{2}{5} \leq 2x \leq \frac{8}{5} \leftrightarrow \frac{2}{10} \leq x \leq \frac{8}{10}\;;\;\; x \neq \frac{1}{2}$

   HP =$\{x|\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{5}; x \in R\}\; atau\; \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$

   HP =$\{x|\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{4}{5}\;\; ; x \neq \frac{1}{2};\; x \in R\}$

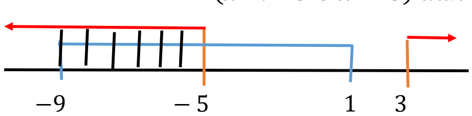


4. Dapatkan penyelesaian dari persamaan $1 < |x+4| < 5$

   $1 < |x+4| < 5 \leftrightarrow 1 < |x+4|\; dan\; |x+4| < 5 \leftrightarrow |x+4| > 1\; dan\; |x+4| < 5$

   $\leftrightarrow (x+4 < -1\; atau\; x+4 > 1)\; dan\; (-5 < x+4 < 5)$

   $\leftrightarrow (x < -5 \cup x > 3)\; dan\; (-9 < x < 1)$



HP = $\{x|-9 < x < -5; x \in R\}$

HP = (-9, -5)

MATEMATIKA ITS

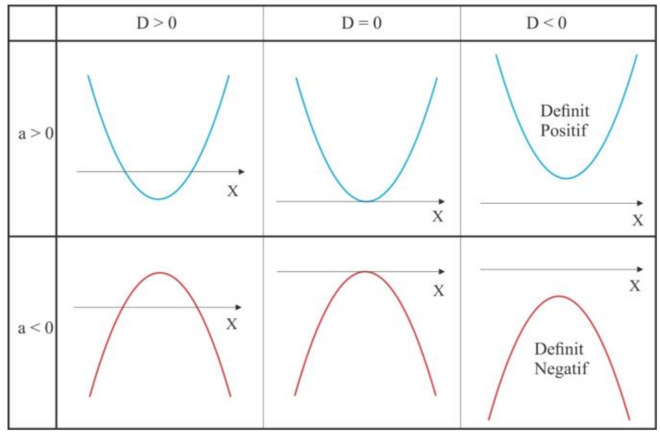
1.4 Grafik Persamaan

- Parabola Terbuka keatas dan kebawah

Persamaan Parabola: $y = ax^2 + bx + c$

- Jika $a > 0$ terbuka keatas
- Jika $a < 0$ terbuka kebawah
- Titik Puncak $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$;
  $D = b^2 - 4ac$

Garis $x = -\frac{b}{2a}$ membelah parabola menjadi dua (garis simetri)



MATEMATIKA ITS

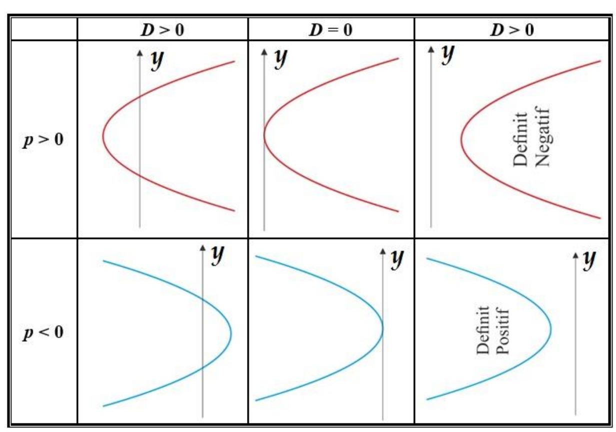
Grafik Persamaan

- Parabola terbuka kekanan dan kekiri

Persamaan Parabola: $x = py^2 + qy + r$

- Jika $p > 0$ terbuka kekanan
- Jika $p < 0$ terbuka kekiri
- Titik Puncak $(x, y) = \left(-\frac{D}{4p}, -\frac{q}{2p}\right)$;
  $D = q^2 - 4pr$

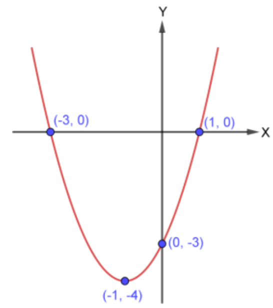
Garis $y = -\frac{q}{2p}$ membelah parabola menjadi dua (garis simetri)



Contoh 7.

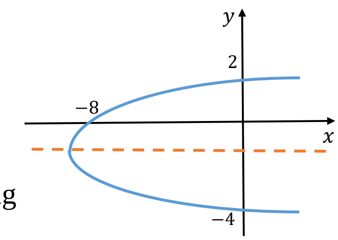
1. Sket grafik persamaan: $y = x^2 + 2x - 3$

- Titik potong sumbu x, $y = 0$
  $0 = x^2 + 2x - 3 \leftrightarrow (x + 3)(x - 1)$
  $\leftrightarrow x_1 = -3\ ;\ x_2 = 1$
- Titik potong sumbu y , x = 0 ; $y = -3$
- Titik Puncak Parabola (-1, -4), silahkan dihitung



2. Sket grafik persamaan: $x = y^2 + 2y - 8$

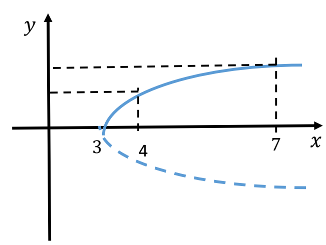
- Titik potong sumbu y, $x = 0$
  $0 = -y^2 + 2y - 8 \leftrightarrow (y + 4)(y - 2)$
  $\leftrightarrow y_1 = -4\ ;\ y_2 = 2$
- Titik potong sumbu x , y = 0 ; $y = -8$
- Titik Puncak Parabola (-9, -1), silahkan dihitung



3. Sket grafik persamaan: $y = \sqrt{x - 3}$

- Nilai $x \geq 3$, Nilai $y \geq 0$
- Buat tabel sebagai berikut:

x	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**...**
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	...



- Jika persamaan dikuadratkan didapat:
  $y^2 = x - 3 \rightarrow x = y^2 + 3$
  Persamaan parabola terbuka kekanan
- Karena $y > 0$, maka grafik bagian bawah tidak ada

NILAI PENDEKATAN

$1^- \approx 0,99999 \ldots 9 \rightarrow Satu\ kurang\ sedikit$

$1^+ \approx 1.00000 \ldots 1 \rightarrow Satu\ lebih\ sedikt$

$-1^+ \approx -0.9999999$

$-1^- \approx -1.00000 \ldots 1$

$-2^+ \approx -1,999999 \ldots 9999$

$-2^- \approx -2,000000 \ldots 01$

$$1^+ \approx 1,000000 \ldots 0001 \rightarrow \frac{2}{1^+ - 1} = \frac{2}{sangat\ kecil} \approx +\infty$$

$$1^+ \approx 1,000000 \ldots 0001 \rightarrow \frac{2}{1 - 1^+} = \frac{2}{-sangat\ kecil} \approx -\infty$$

- Persamaan dengan asimtot

Arti nilai mendekati:

- a^+ nilai a lebih sedikit, $-1^+ \approx -0,999\ \ldots 9,\ \ 2^+ \approx 2,000\ \ldots 1$
- a^- nilai a kurang sedikit, $-1^- \approx -1,000\ \ldots 1,\ \ 2^- \approx 1,999\ \ldots 9$

Contoh 8

$x \rightarrow 0^+\ maka\ y \rightarrow +\infty$

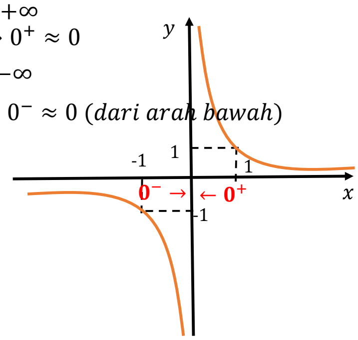
$x \rightarrow +\infty\ maka\ y \rightarrow 0^+ \approx 0$

$x \rightarrow 0^-\ maka\ y \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow -\infty\ maka\ y \rightarrow 0^- \approx 0\ (dari\ arah\ bawah)$

1. Sket grafik persamaan: $y = \frac{1}{x}$
   - Nilai $x \neq 0$,
   - Buat tabel sebagai berikut:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$



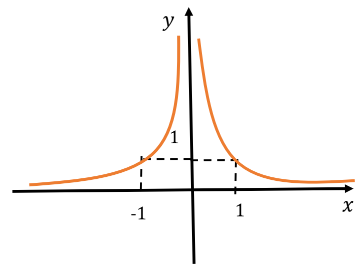
   - Untuk $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$; untuk $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty$
   - Untuk $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$; untuk $x \rightarrow 0^-, y \rightarrow -\infty$
   - Sumbu x asimtot datar, sumbu y asimtot tegak

MATEMATIKA ITS

2. Sket grafik persamaan: $y = \frac{1}{x^2}$

- Nilai $x \neq 0, y > 0$
- Buat tabel sebagai berikut:

x	**-3**	**-2**	**-1**	**1**	**2**	**3**
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$



- Untuk $x \to +\infty, y \to 0$; untuk $x \to 0^+, y \to +\infty$
- Untuk $x \to -\infty, y \to 0$; untuk $x \to 0^-, y \to +\infty$
- Sumbu x asimtot datar, sumbu y asimtot tegak

Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 25

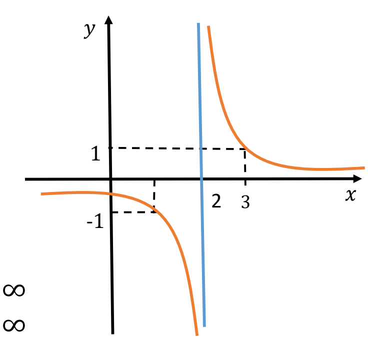
25

MATEMATIKA ITS

3. Sket grafik persamaan: $y = \frac{1}{x-2}$

- Nilai $x \neq 2$,
- Buat tabel sebagai berikut:

x	**-1**	**0**	**1**	**3**	**2**	**3**
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$



- Untuk $x \to +\infty, y \to 0$; untuk $x \to 2^+, y \to +\infty$
- Untuk $x \to -\infty, y \to 0$; untuk $x \to 2^-, y \to -\infty$
- Sumbu x asimtot datar, garis x = 2 asimtot tegak

Grafik persamaan: $y = \frac{1}{x-2}$ adalah grafik $y = \frac{1}{x}$ digeser kekanan sejauh 2

Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 26

26

- Uji Simetri

MATEMATIKA ITS

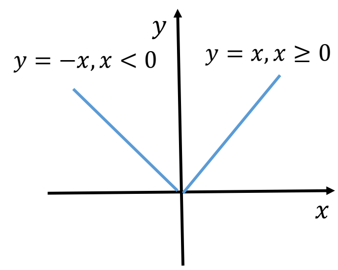
1. Suatu kurva bidang simetri terhadap sumbu *x* jika setiap titik (*x*, *y*) diganti dengan (*x*, -*y*) maka persamaan grafik tidak berubah
2. Suatu kurva bidang simetri terhadap sumbu *y* jika setiap titik (*x*, *y*) diganti dengan (-*x*, *y*) maka persamaan grafik tidak berubah
3. Suatu kurva bidang simetri terhadap titik pusat jika setiap titik (*x*, *y*) diganti dengan (-*x*, -*y*) maka persamaan grafik tidak berubah

Contoh 9

1. Lakukan uji simetri $y = |x|$

$y = |x| \rightarrow x$ diganti dengan $(-x)$ didapat: $y = |-x| = |x|$;
grafik simetri terhadap sumbu y

$$y = |x| = \begin{cases} x \ ; \ x \geq 0 \\ -x \ ; x < 0 \end{cases}$$

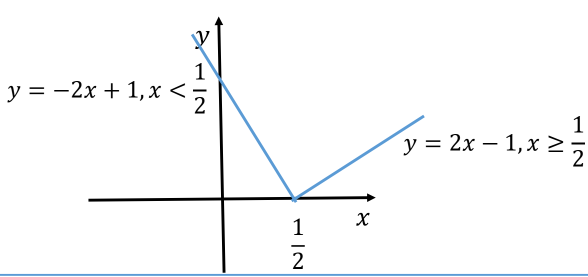


MATEMATIKA ITS

1. Lakukan uji simetri $y = |2x - 1|$

$y = |2x - 1| \rightarrow x$ diganti dengan $(-x)$ didapat: $y = |2(-x) - 1| = |-2x - 1| \neq |2x - 1|$;
grafik tidak simetri terhadap sumbu y

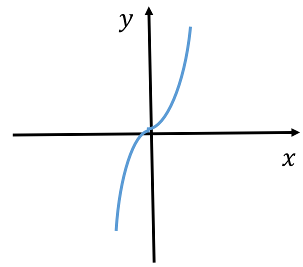
$$y = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x - 1), 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1, x \geq 1/2 \\ -2x + 1, x < 1/2 \end{cases}$$



MATEMATIKA ITS

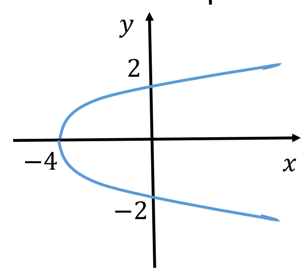
2. Lakukan uji simetri $y = x^3$

$y = x^3 \rightarrow x$ diganti dengan $(-x)$ dan
y diganti dengan $(-y)$ didapat
$-y = -x^3 \rightarrow y = x^3$
Berarti grafik simetri terhadap titik pusat



3. Lakukan uji simetri $x = y^2 - 4$

$x = y^2 - 4 \rightarrow y$ diganti dengan $(-y)$
didapat: $x = y^2 - 4$;
grafik simetri terhadap sumbu x

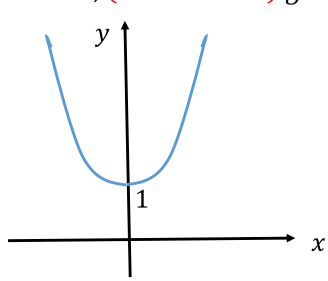


MATEMATIKA ITS

$y = x^2 + 1 \rightarrow y\ diganti\ dengan\ (-y); -y = x^2 + 1; y = -x^2 - 1\ (tidak\ sama)$
$grafik\ tidak\ simeti\ terhadap\ sb\ x$

$y = x^2 + 1 \rightarrow x\ diganti\ dengan\ (-x); y = (-x)^2 + 1;\ y = x^2 + 1\ (sama)$
$grafik\ simeti\ terhadap\ sb\ y$

$y = x^2 + 1 \rightarrow x\ diganti\ dengan\ (-x);\ y\ diganti\ dengan\ (-y)$
$\rightarrow\ -y = (-x)^2 + 1; y = -x^2 - 1; (tidak\ sama)\ grafik\ tidak\ thd\ titik\ pusat$



MATEMATIKA ITS

1.5 Garis dan Lingkaran

1. Persamaan garis: $ax + by + c = 0$

   $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$

   atau

   $y = mx + n$ dengan $m = -\frac{a}{b}$ dan $n = -\frac{c}{a}$; m = arah garis
2. Persamaan garis dengan gradien m melalui titik (x_0, y_0):

   $$y - y_0 = m(x - x_0)$$
3. Persamaan garis melalui 2 titik: (x_1, y_1), (x_2, y_2):

   $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$
4. Dua garis $y = m_1x + a$ dan $y = m_2x + a$ sejajar jika $m_1 = m_2$
5. Dua garis $y = m_1x + a$ dan $y = m_2x + a$ tegak lurus jika $m_1m_2 = -1$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 31

31

MATEMATIKA ITS

Contoh 10.

1. Tentukan nilai k sehingga garis $3x + ky = 4$ tegak lurus terhadap garis: $4x + 3y = 2$

Jawab

Garis k : $3k + ky = 4$; gradien: $m_k = -\frac{3}{k}$

Garis l : $4x + 3y = 2$; gradien: $m_l = -\frac{4}{3}$

Garis k tegak lurus l, berarti:

$$m_k.m_l = -1 \leftrightarrow \frac{-3}{k}.\frac{-4}{3} = -1 \leftrightarrow \frac{12}{3k} = -1 \leftrightarrow -3k = 12 \leftrightarrow k = -4$$

Daryono, Kalkulus 1: Bab 1 Sistem Bilangan Riil 32

32

MATEMATIKA ITS

2. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (3, 1) dan tegak lurus garis $3x + 2y = 4$, selanjutnya sket grafik dua garis tersebut

Jawab

Persamaan garis k:

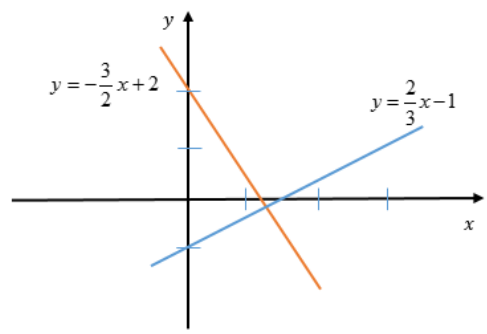
$$3x + 2y = 4 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 2 \; ; \; m_1 = -\frac{3}{2}$$

Gradien garis l tegak lurus k:

$$m_1 \times m_2 = -1 \leftrightarrow -\frac{3}{2} \times m_2 = -1 \rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

Garis K melalui (3, 1):

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 3) \leftrightarrow y - 1 = \frac{2}{3}x - 2 \leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - 1$$



MATEMATIKA ITS

Jarak DuaTitik

Diberikan dua titik: $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ dan $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$, jarak titik P dan Q adalah:

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((y_2 - y_1)^2)}$$

Titik Tengah

Diberikan dua titik: $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ dan $\mathrm{Q}(x_1, y_1)$, titik tengah P dan Q adalah:

$$\bar{x} = \frac{x_2 - x_1}{2} \; ; \; \bar{y} = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

Jarak Titik ke Garis

Diberikan dua titik: $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ dan persamaan garis $l : ax + by + c = 0$

Jarak titik P ke garis l adalah:

$$|D| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Persamaan Lingkaran

Bentuk umum Persamaan Lingkaran

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Persamaan Lingkaran dengan pusat P(a, b) dan jari-jari r:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Contoh 11.

1. Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dari: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

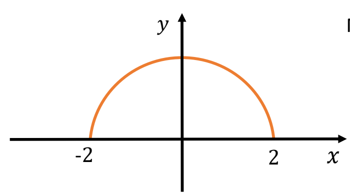
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$
$$\leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$$
$$\leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 - 1 - 9 = 6$$
$$\leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Lingkaran dengan pusat P(1,-3) dan jari-jari r = 4

2. Sket grafik persamaan: $y = \sqrt{4 - x^2}$

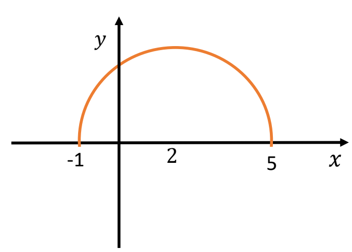
$$y \geq 0, \quad 4 - x^2 \geq 0 \leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$
$$y = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

Persamaan lingkaran dengan P(0,0) dan r = 2
Karena $y \geq 0$ maka grafik lingkaran bagian atas



3. Sket grafik persamaan: $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$

$$y \geq 0, \quad 5 + 4x - x^2 \geq 0 \leftrightarrow (x+1)(5-x) \geq 0 \leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$$
$$y = \sqrt{5 + 4x - x^2} \rightarrow y^2 = 5 + 4x - x^2 \leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 5$$
$$\leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 5 + 4 \leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$$



Persamaan lingkaran dengan P(2,0) dan r = 3
Karena $y \geq 0$ maka grafik lingkaran bagian atas

Contoh 12.

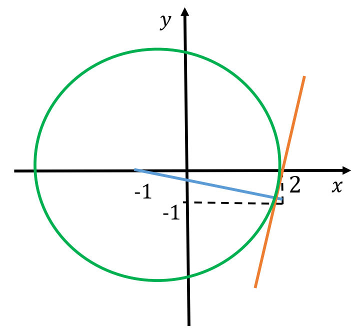
MATEMATIKA ITS

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 2x = 9$ di titik A(2, -1), selanjutnya gambar grafik tersebut.

$$x^2 + y^2 + 2x = 9 \leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 9 \leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 8$$

Lingkaran dengan pusat P(-1, 0) dan jari-jari $r = \sqrt{8}$

Titik A(2, -1), gradien garis AP: $m_{AP} = \dfrac{-1-0}{2-(-1)} = -\dfrac{1}{3}$



Persamaan garis singgung lingkaran di titik A(2,-1)
Tegak lurus terhadap garis AP, gradien persamaan garis Singgung:

$$m_1 m_2 = -1 \leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right) m_2 = -1 \rightarrow m_2 = 3$$

Persamaan garis singgung dengan $m = 3$ melalui A(2, -1):

$$y - (-1) = 3(x-2) \leftrightarrow y = 3x - 6 - 1 \rightarrow y = 3x - 7$$

MATEMATIKA ITS

Akhir Bab 1

Berikutnya … Fungsi