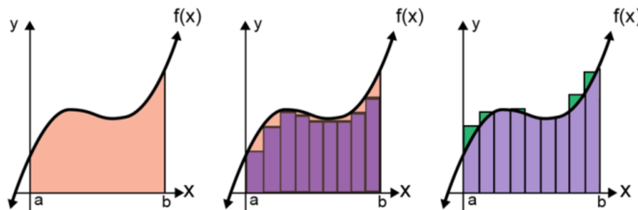
MATEMATIKA ITS

$$Misal:\ u = 4 - x^2\ ;\ \ du = -2xdx \to dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx = \int \cancel{x}\sqrt{4-x^2}\frac{du}{-2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$



Area of region | Lower Sum | Upper Sum

Bab 6. Integral

Daryono Budi Utomo

1

MATEMATIKA ITS

Bab 6. Integral

- ☑ **6.1 Integral sebagai Anti Turunan**
- ☑ **6.2 Rumus dan Sifat-sifat Integral**
- ☑ **6.3 Integral Dengan Substitusi**
- ☑ **6.4 Luas Sebagai Limit**
- ☑ **6.5 Hampiran Numerik Untuk Luas**
- **6.6 Integral Tertentu**
- **6.7 Integral tertentu sebagai Luasan**
- **6.8 Integral Teretentu Dengan Substitusi**

2

6.1 Integral sebagai anti turunan

MATEMATIKA ITS

- **Pengertian Integral**

Pada bab sebelumnya telah dipelajari turunan dari $y = f(x)$, perhatikan contoh dibawah ini:

1. $y = x^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$
2. $y = x^3 + 5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$
3. $y = x^3 - 2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$

Untuk mendapatkan $y = f(x)$ dilakukan pengintegralan dari $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + c$, c = konstanta

1. $c = 0$ didapat: $y = x^3$
2. $c = 5$ didapat: $y = x^3 + 5$
3. $c = -2$ didapat: $y = x^3 - 2$

MATEMATIKA ITS

Secara umum, hasil integral selalu diberi tambahan nilai c untuk mewakili nilai konstanta dari $y = f(x)$

Dari contoh, pengertian integral adalah anti turunan artinya turunan dari $y = f(x)$ yaitu $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Untuk mendapatkan kembali $y = f(x)$, hasil turunan fungsi yaitu: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ di integral

Jadi:

Jika $y = f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$, maka $y = \int f'(x)\, dx = f(x) + c$

$$y = f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)\ ;\ dy = f'(x)\, dx\ ;\ \int dy = \int f'(x)\, dx \rightarrow y + c_1 = f(x) + c_2$$

$$y = f(x) + c\ ;\quad c = c_2 - c_1$$

MATEMATIKA ITS

- **Grafik Integral**

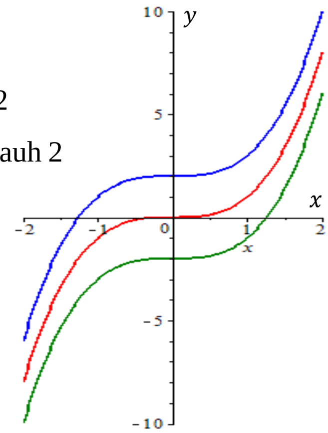
  Hasil $y = \int 3x^2\, dx = x^3 + c$,

  Grafik integral digambarkan dengan mengganti nilai *c*,

  ✓ $c = 0, y = x^3$

  ✓ $c = 2, y = x^3 + 2$ grafik $y = x^3$ digeser **keatas** sejauh 2

  ✓ $c = -2, y = x^3 - 2$ grafik $y = x^3$ digeser **kebawah** sejauh 2



Pada Gambar grafik

➢ Kurva warna merah adalah grafik dari $y = x^3$

➢ Kurva warna biru adalah grafik dari $y = x^3 + 2$

➢ Kurva warna hijau adalah grafik dari $y = x^3 - 2$

6.2 Rumus dan Siat-Sifat Integral

MATEMATIKA ITS

- **Rumus Integral**

$$\int ax^n\, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

Bagaimana jika *n* = 0,

$$\int ax^0\, dx = \int a\, dx = \frac{a}{0+1} x^{0+1} + c = ax + c$$

Bagaimana jika *n* = -1, jika digunakan rumus maka terjadi pembagian oleh bilangan 0 tidak boleh, untuk masalah ini akan dipelajari pada Matematika 2

Contoh 1.

a. $\int 2x^5\, dx = \frac{2}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{1}{3} x^6 + c$

b. $\int 3\sqrt{x}\, dx = \int 3x^{1/2} = \frac{3}{1+1/2} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

c. $\int \frac{2}{x^3} dx = \int 2x^{-3}\, dx = \frac{2}{-3+1} x^{-3+1} + c = -x^{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c$

- **Sifat – sifat integral**

MATEMATIKA ITS

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx;\quad k = \text{konstanta}$
2. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\cancel{\int [f(x) \times g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx}$ $\cancel{\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{\int f(x)\,dx}{\int g(x)\,dx}}$ *Tidak boleh*

Contoh 2

$$\int \left(2x^4 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int 2x^4\,dx - \int 2x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-2}\,dx$$

$$= \frac{2}{4+1}x^{4+1} + c_1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + c_2 + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c_3$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4x^{\frac{1}{2}} - x^{-1} + c\,;\;\; c = c_1 + c_2 + c_3$$

MATEMATIKA ITS

- **Rumus Integral Trigonometri**

Rumus integral trigonometri dicari dengan menggunakan turunan fungsi trigometri sebagai berikut:

1. $y = \sin x \to \frac{dy}{dx} = \cos x\ ;\quad \int \cos x\,dx = \sin x + c$
2. $y = \cos x \to \frac{dy}{dx} = -\sin x\ ;\quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$
3. $y = \tan x \to \frac{dy}{dx} = \sec^2 x\ ;\quad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
4. $y = \cot x \to \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x\ ;\quad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
5. $y = \sec x \to \frac{dy}{dx} = \tan x \sec x\ ;\quad \int \tan x \sec x\,dx = \sec x + c$
6. $y = \operatorname{cosec} x \to \frac{dy}{dx} = -\cot x \operatorname{cosec} x\ ;\quad \int \cot x \operatorname{cosec} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$

Contoh 3

a. $\int \sin x \operatorname{cosec} x \, dx = \int \sin x \frac{1}{\sin x} dx = \int 1 \, dx = x + c$

b. $\int \tan t \cos t \, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cos t \, dt = \int \sin t \, dt = -\cos t + c$

c. $\int \tan^2 \theta \, d\theta = \int (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta = \int \sec^2 \theta \, d\theta - \int d\theta = \tan \theta - \theta + c$

d. $\int \tan t \cot t \;\, dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \frac{\cos t}{\sin t} dt = \int dt = t + c$

e. $\int \frac{\tan \theta}{\cos \theta} \, d\theta = \int \tan \theta \sec \theta \, d\theta = \sec \theta + c$

6.3 Integral Dengan Substitusi

Integral dengan substitusi menyederhanakan bentuk integral, pemisalan diambil bagian yang membuat integral sulit setelah pemisalan disubstitusikan integral menjadi mudah dengan menggunakan rumus dasar.

Contoh 4

$\int \cos{(5x)} \;\, dx =$

Tidak dalam bentuk rumus dasar $\int \sin x \, dx$, untuk itu dibuat bentuk dasar dengan pemisalan yang mengarah kebentuk dasar

Misal: $t = 5x$; $dt = 5 \, dx$

Teknik substitusi,

pada soal dx diganti $5 \, dx \; \frac{1}{5}$ dengan tujuan akan diganti dengan *dt*

$$\int \cos 5x dx = \int \cos(5x) \, 5 \, dx \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \int \cos t \, dt = \frac{1}{5} \sin t + c = \frac{1}{5} \sin(5x) + c$$

Contoh 5.

$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx =$

Bentuk yang membuat integral sulit adalah nilai didalam akar, maka:

Misal: $u = 4 - x^2$; $du = -2x\,dx$

Teknik substitusi:

Pada soal $x\,dx$ diganti $-\,2\,xdx\left(-\frac{1}{2}\right)$ dengan tujuan akan diganti dengan du

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-x^2}(-2x\,dx)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}(4-x^2)\sqrt{4-x^2} + c$$

Contoh 6.

$\int \cos^3\theta \sin\theta\ d\theta =$

Bentuk yang membuat integral sulit adalah bentuk $\cos^3\theta$, maka:

Misal: $t = \cos\theta$; $dt = -\sin\theta\,d\theta$

Teknik substitusi

Pada soal $\sin\theta\,d\theta$ diganti $-\,\sin\theta\,d\theta(-1)$ dengan tujuan akan diganti dengan dt

$$\int \cos^3\theta \sin\theta\ d\theta = \int \cos^3\theta\,(-\sin\theta\,d\theta)(-1) = -\int t^3\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}t^4 + c = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + c$$

$$y = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + c \rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -\frac{1}{4}(4\cos^3\theta)\,(-\sin\theta) = \cos^3\theta\ \sin\theta$$

MATEMATIKA ITS

Contoh yang salah.

$\int \cos^3\theta \sin\theta \; d\theta =$

Bentuk yang membuat integral sulit adalah bentuk $\cos^3\theta$, maka:

Misal:

$t = \cos\theta$; $dt = -\sin\theta \, d\theta \to d\theta = \dfrac{dt}{-\sin\theta}$

Teknik substitusi

Peubah dalam integral hanya boleh satu peubah

$$\int \cos^3\theta \sin\theta \; d\theta = \int \cos^3\theta \cancel{\sin}\theta \frac{dt}{-\cancel{\sin}\theta} = -\int t^3 \, dt$$

$$\int \cos^3\theta \sin\theta \; d\theta = \int \cos^3\theta(-\sin\theta \, d\theta)(-1) = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + c = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + c$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 7.

$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx =$

Bentuk yang membuat integral sulit adalah nilai didalam akar, maka:

Misal: $u = 9 - x^2$; $du = \; -2x \, dx$

Teknik substitusi: $\boxed{x^2 = 9 - u}$

Pada soal $x \, dx$ diganti $-\,2\,xdx\left(-\frac{1}{2}\right)$ dengan tujuan akan diganti dengan *du*

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} \, dx = \int \frac{x^2(-2x \, dx)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2 du}{\sqrt{u}} \; (salah)$$

Mengapa ?

Karena didalam integral ada 2 peubah *x* dan *u*

MATEMATIKA ITS

Apabila disubstitusikan, masih ada peubah x^2 (tidak bisa menjadi peubah u) untuk itu pemisalan: $u = 9 - x^2$ diubah: $x^2 = 9 - u$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{x^2(-2x\,dx)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(9-u)du}{\sqrt{u}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int (9-u)u^{-\frac{1}{2}}du = -\tfrac{1}{2}\int\left(9u^{-1/2} - u^{1/2}\right)du$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(9.2\,u^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + c = \tfrac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - 9u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{2}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - 9\sqrt{9-x^2} + c$$

MATEMATIKA ITS

Langkah yang sering dilakukan dan SALAH

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx =$$

Misal:

$$u = 4 - x^2\ ;\ \ du = -2xdx \rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$$

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx = \cancel{\int \cancel{x}\sqrt{4-x^2}\,\frac{du}{-2\cancel{x}}} = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

SALAH, Mengapa?
Karena peubah *x* dan *u* jadi satu dalam integral, seharusnya hanya satu peubah

MATEMATIKA ITS

Seharusnya gunakan teknik cara mengubah sebagai berikut:

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx =$$

Misal:

$u = 4 - x^2$; $du = -2x\,dx$

$$\int x\sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-x^2}\; x\,dx = \int \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{\boxed{u^{1/2}}}\underbrace{(-2x)\,dx}_{\boxed{du}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^{3/2} + c$$

MATEMATIKA ITS

Langkah yang sering dilakukan dan SALAH

$$\int \sin^2 3t \cos 3t \; dt =$$

Misal:

$u = \sin 3t$; $du = 3\cos 3t\,dt \rightarrow dt = \dfrac{du}{3\cos 3t}$

$$\int \sin^2 3t \cos 3t\,dt = \cancel{\int \sin^2 3t \cancel{\cos 3t}\frac{du}{\cancel{\cos 3t}}} = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

SALAH, Mengapa?
Karena peubah *t* dan *u* jadi satu dalam integral, seharusnya hanya satu peubah

Seharusnya gunakan teknik cara mengubah sebagai berikut:

$$\int \sin^2 3t \cos 3t \ dt =$$

Misal:

$u = \sin 3t$; $du = 3\cos 3t\, dt \rightarrow \cos 3t\, dt = 3\cos 3t\, dt\left(\frac{1}{3}\right)$

$$\int \sin^2 3t \cos 3t \ dt = \int \underbrace{\sin^2 3t}_{\boxed{u^2}} \underbrace{3\cos 3t\, dt}_{\boxed{du}} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u^3\right) + c = \frac{1}{9}\sin^3 3t + c$$

Jumlah Deret

1. $\sum_{k=1}^{n} a = a + a + a + \cdots + a = na$; $a =$ konstanta

2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{n(n+1)}{2}$

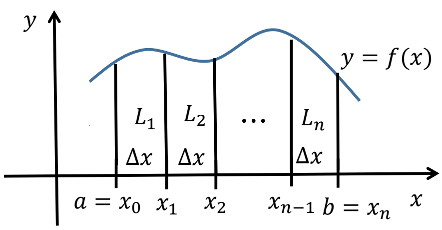
3. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

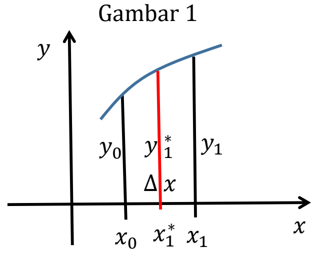
6.4 Luas Sebagai Limit

MATEMATIKA ITS

Perhatikan berikut:



Gambar 1



Gambar 2

Ambil satu pias (Gambar 2) jika luas pias dianggap persegi panjang maka luas satu pias $L = p \times l$.
Berkaitan dengan panjang (y) ada tiga jenis yaitu:

- Luas tepi kiri $L_1 = y_0 \Delta x$
- Luas tepi kanan $L_1 = y_1 \Delta x$
- Luas titik tengah $L_1 = y_1^* \Delta x$ dengan $x_1^* = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Luas bidang datar dibawah kurva $y = f(x)$ dengan $a \le x \le b$ dibagi n pias (Gambar 1).

Lebar pias: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Luas bidang datar adalah :

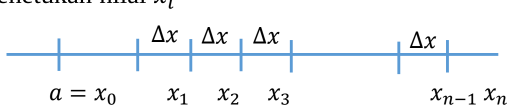
$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

MATEMATIKA ITS

Panjang dari:

- Titik ujung kiri $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$ ... $y_{n-1} = f(x_{n-1})$
- Titik ujung kanan $y_1 = f(x_1)$; $y_2 = f(x_2)$ ... $y_n = f(x_n)$
- Titik tengah $y_1 = f(x_1^*)$; $y_2 = f(x_2^*)$ ... $y_1 = f(x_n^*)$; $x_k^* = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$

Menetukan nilai x_i



Nilai titik x untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ dari :

- Ujung kiri $x_k^* = x_{k-1} = a + (k-1)\Delta x$
- Ujung kanan $x_k^* = x_k = a + k\Delta x$
- Titik Tengah $x_k^* = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$
  $= a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x$

Untuk : $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; $\Delta x \to 0, n \to +\infty$

Luas bidang datar adalah :

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\, \Delta x \text{ atau } \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

MATEMATIKA ITS

Contoh
Tentukan luas bidang datar $y = 2x + 1$ yang dibatasi oleh sumbu x, $x = 1$ dan $x = 3$ dengan menggunakan titik ujung kiri

Jawab
Bagi bidang datar sebanyak n pias

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}\ ;\ \text{Titik ujung kiri}: x_k^* = x_{k-1} = a + (k-1)\Delta x = 1 + (k-1)\frac{2}{n} = 1 + \frac{2k}{n} - \frac{2}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2x_k^* + 1)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(2\left(1 + \frac{2k}{n} - \frac{2}{n}\right) + 1\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(3 + \frac{4k}{n} - \frac{4}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{n} + \frac{8k}{n^2} - \frac{8}{n^2}\right) = \frac{6n}{n} + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8n}{n^2} = 6 + 4 + \frac{4}{n} - \frac{8}{n} = 10 - \frac{4}{n}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(10 - \frac{4}{n}\right) = 10$$

MATEMATIKA ITS

Contoh
Tentukan luas bidang datar $y = 2x + 1$ yang dibatasi oleh sumbu x, $x = 1$ dan $x = 3$ dengan menggunakan titik ujung kanan

Jawab
Bagi bidang datar sebanyak n pias

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}\ ;\ \text{Titik ujung } kanan: x_k^* = x_k = a + k\Delta x = 1 + k\frac{2}{n} = 1 + \frac{2k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2x_k^* + 1)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(2\left(1 + \frac{2k}{n}\right) + 1\right)\frac{2}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(3 + \frac{4k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{n} + \frac{8k}{n^2}\right) = \frac{6n}{n} + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 6 + 4 + \frac{4}{n^2} = 10 + \frac{4}{n^2}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(10 + \frac{4}{n^2}\right) = 10$$

MATEMATIKA ITS

Contoh
Tentukan luas bidang datar $y = 3x^2 - 1$ yang dibatasi oleh sumbu x, $x = 1$ dan $x = 2$ dengan menggunakan titik ujung kanan

Jawab
Bagi bidang datar sebanyak n pias

$$\Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \text{ ; Titik ujung kanan : } x_k^* = x_k = a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (3(x_k^*)^2 - 1)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \left(3\left(1+\frac{k}{n}\right)^2 - 1\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(3\left(1+\frac{2k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right) - 1\right)\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(3+\frac{6k}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right) - 1\right)\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{n^2}k + \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n^3}k^2$$

$$= 2n\frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2 + 3 + \frac{3}{n} + 1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2} = 6 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}$$

MATEMATIKA ITS

Luas bidang datar:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = 6$$

$$\int_1^2 (3x^2 - 1)\, dx = x^3 - x \Big|_1^2 = (2^3 - 2) - (1^3 - 1) = 6$$

MATEMATIKA ITS

6.5 Hampiran Numerik Untuk Luas

Pada luas sebagai limit $\Delta x \to 0$ atau $n \to +\infty$ yang penghitungannya rumit, apalagi untuk fungsi yang bukan polinomial tambah rumit. Metoda lain untuk menghitung luas dengan menggunakan pendekatan numerik yang hasil perhitungan merupakan pendekatan.

Metoda ini rumus yang digunakan sama dengan Luas sebagai limit bedanya adalah banyaknya pias terhingga, pengambilan besar Δx tidak harus sama

MATEMATIKA ITS

Contoh
Tentukan luas bidang datar $y = 3x^2 - 1$ yang dibatasi oleh sumbu x, $x = 1$ dan $x = 2$ dengan n = 10 menggunakan titik ujung kiri, kanan dan titik tengah

Jawab
$\Delta x = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$, buat tabel untuk ketiga metoda sebagai berikut:

Pias ke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$f(x_i) = 3x^2 - 1$	2,0	2,63	3,32	4,07	4,88	5,75	6,68	7,67	8,72	9,83	11

Luas ujung kiri

$$L = \sum_{k=1}^{10} (3(x_k^*)^2 - 1)\Delta x = (2{,}00 + 2{,}63 + 3{,}32 + \cdots + 9{,}83)(0{,}1) = (55{,}55)(0{,}1) = 5{,}555$$

Luas ujung kanan

$$L = \sum_{k=1}^{10} (3(x_k^*)^2 - 1)\Delta x = (2{,}63 + 3{,}32 + \cdots + 9{,}83 + 11)(0{,}1) = (64{,}55)(0{,}1) = 6{,}455$$

Untuk Luas titik tengah: $\overline{x_i} = \dfrac{x_1 + x_{i+1}}{2}$

Buat tabel sebagai berikut:

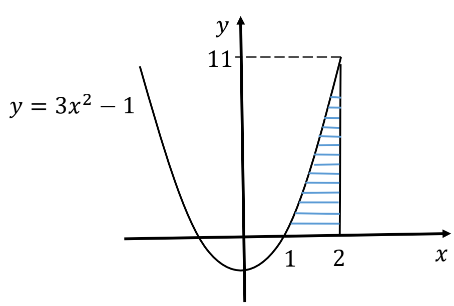
Pias ke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45	1,55	1,65	1,75	1,85	1,95
$f(x_i) = 3(x_i^*)^2 - 1$	2,3075	2,9675	3,6875	4,4675	5,3075	6,2075	7,1675	8,1875	9,2675	10,4075

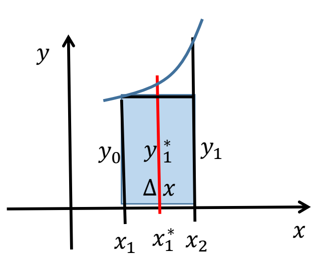
$$L = \sum_{k=1}^{10} (3(x_k^*)^2 - 1)\Delta x = (2{,}3075 + 2{,}9675 + \cdots + 10{,}4075)(0{,}1) = (59{,}975)(0{,}1) = 5{,}9975$$

Hasil pendekatan

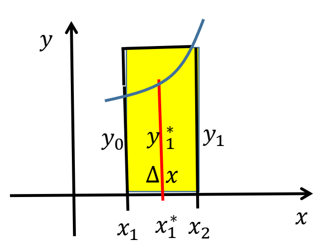
$L_{Tepi\ kiri}$ =5,555 $\quad L_{Tepi\ kanan} = 6{,}455 \quad L_{Titik\ tengah} = 5{,}9975$

Hasil Eksak $= 6$

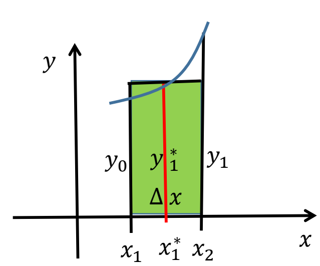




Gambar 1 Luas Ujung kiri

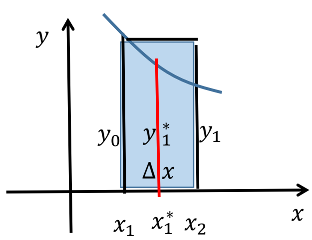


Gambar 2 Luas ujung kanan

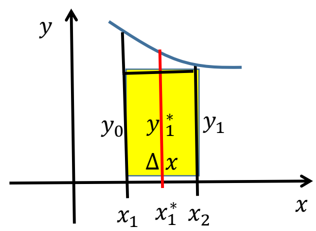


Gambar 3 Luas titik tengah

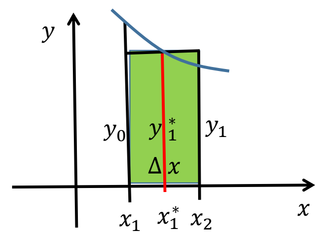
MATEMATIKA ITS



Gambar 1 Luas Ujung kiri



Gambar 2 Luas ujung kanan



Gambar 3 Luas titik tengah

MATEMATIKA ITS

Analisis

Hasil eksak $L = 6$ (Metoda luasan sebagai limit)

$y = 3x^2 - 1$ untuk $x = 1$ sampai dengan $x = 2$ adalah fungsi naik,

Luas bidang datar dianggap persegi panjang

- Fungsi $f(x)$ fungsi naik
  - ✓ Metode ujung kiri hasil pendekatan < 6, panjang lebih pendek maka luas bidang datar kurang dari luas sebenarnya (Gambar 1)
  - ✓ Metode ujung kanan hasil pendekatan > 6, ada daerah yang terhitung (Gambar 2)
- Untuk $f(x)$ fungsi turun pada interval hasil kebalikannya
  - ✓ Metode ujung kanan hasil pendekatan < 6, panjang lebih pendek maka luas bidang datar kurang dari luas sebenarnya (Gambar 1)
  - ✓ Metode ujung kiri hasil pendekatan > 6, ada daerah yang terhitung (Gambar 2)
- Metode titik tengah hasil pendekatan ≈ 6, ada yang kurang tapi ada yang lebih (Gambar 3) →Metode yang terbaik

MATEMATIKA ITS

Contoh

Tentukan luas bidang datar $y = 3x^2 - 1$ yang dibatasi oleh sumbu x, $x = 1$ dan $x = 2$ dengan $\Delta x_1 = 0{,}2$, $\Delta x_2 = 0{,}1$, $\Delta x_3 = 0{,}4$, $\Delta x_4 = 0{,}3$, menggunakan titik ujung kiri, kanan dan titik tengah

$$x_{Tepi\ kiri} = 1, \quad (1 + 0{,}2) = 1{,}2, \quad (1{,}2 + 0{,}1) = 1{,}3, \quad (1{,}3 + 0{,}4) = 1{,}7$$

$$L_{Tepi\ kiri} = (3(1^2) - 1)(0{,}2) + (3(1{,}2^2) - 1)(0{,}1) + (3(1{,}3^2) - 1)(0{,}4) + (3(1{,}7^2) - 1)(0{,}3)$$

$$x_{Tepi\ kanan} = (1 + 0{,}2) = 1{,}2, \quad (1{,}2 + 0{,}1) = 1{,}3, \quad (1{,}3 + 0{,}4) = 1{,}7, \quad 2$$

$$L_{Tepi\ kanan} = (3(1{,}2^2) - 1)(0{,}2) + (3(1{,}3^2) - 1)(0{,}1) + (3(1{,}7^2) - 1)(0{,}4) + (3(2^2) - 1)(0{,}3)$$

$$x_{Titik\ tengah} = \frac{1 + 1{,}2}{2} = 1{,}1, \quad \frac{1{,}2 + 1{,}3}{2} = 1{,}25, \quad \frac{1{,}3 + 1{,}7}{2} = 1{,}5\,, \quad \frac{1.7 + 2}{2} = 1{,}85$$

$$L_{Titik\ tengah} = (3(1{,}1^2) - 1)(0{,}2) + (3(1{,}25^2) - 1)(0{,}1) + (3(1{,}5^2) - 1)(0{,}4) + (3(1{,}85^2) - 1)(0{,}3)$$

MATEMATIKA ITS

Bersambung …

ke Integral tertentu