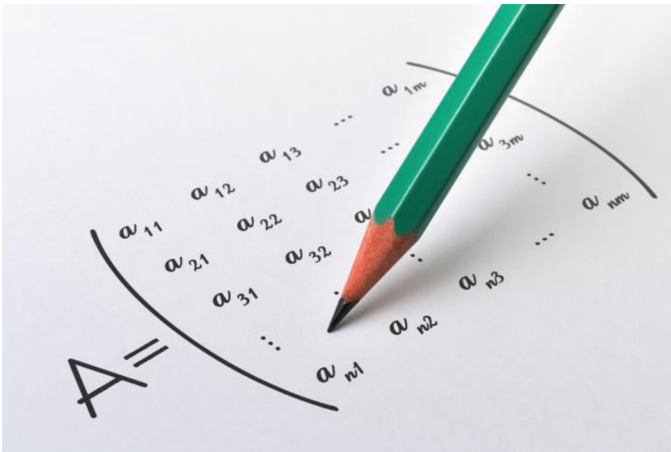

MATEMATIKA ITS

Suplemen B: Matriks dan Determinan

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

Suplemen B: Matriks, Determinan dan Sistem Persamaan Linier

- ☑ B.1 Matriks dan Operasinya
- ☑ B.2 Operasi Baris Elementer (OBE) dan Matriks Invers
- ☑ B.3 Sistem Persamaan Linier
- B.4 Determinan
- B.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

MATEMATIKA ITS

B.1 Matriks dan Operasinya

Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat.
Bilangan-bilangan dalam susunan dinamakan anggota/elemen matriks

Ukuran Matriks

Ukuran matriks dinyatakan oleh *m* x *n*, *m* banyaknya baris, *n* banyaknya kolom

Matriks *A* mempunyai ukuran *m* x *n*, ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Matriks Transpose

Transpose (A) adalah matriks yang entrinya diperoleh dari entri pada A dengan mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.yang dinyatakan dengan A^T

Sifat-sifat matriks transpose

1. $(A^T)^T = A$
2. $(kA)^T = k(A^T), \quad k = skalar$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Contoh

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 12 \\ -2 & 2 & 9 & 21 \\ -3 & 2 & 6 & 22 \end{pmatrix}$

Transpose matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & 6 \\ 12 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to C^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to (C^T)^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = C$$

▪ Operasi Matriks

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

- Jika dua matriks A dan B mempunyai ukuran yang sama, maka kedua matriks tersebut dapat dijumlahkan atau dikurangkan.
- Untuk menambahkan atau mengurangkan kedua matriks tersebut anggota yang berpadanan dijumlahkan atau dikurangkan.
- Matriks yang tidak mempunyai ukuran yang sama tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix};\ A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$A + C$ dan $A - C$ Tidak bisa karena ukuran matriks tidak sama

MATEMATIKA ITS

2. Perkalian Matriks

Perkalian *AB* (*A* dan *B* adalah matriks) dapat dilakukan jika jumlah kolom A = jumlah baris B.

Jadi jika *A* adalah matriks berorde $m \times n$ dan *B* adalah matriks berorde $n \times p$ maka *AB* dimungkinkan karena jumlah baris A = jumlah kolom B. Order *AB* adalah $m \times p$.

$$A_{m\times \underbrace{n) \times B_{n}}\times r} = C_{m\times r}$$

Banyak Kolom matriks *A* = Banyak Baris matriks *B*

MATEMATIKA ITS

Contoh

$$a.\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4 + 2\times 6 & 1\times -3 + 2\times 3 \\ 3\times 4 + 4\times 6 & 3\times -3 + 4\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 36 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b.\ BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1 - 3\times 3 & 4\times 2 - 3\times 4 \\ 6\times 1 + 3\times 3 & 6\times 2 + 3\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$c.\ AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 7 + 2\times 3 & 1\times 2 + 2\times 4 & 1\times 5 + 2\times 6 \\ 3\times 7 + 4\times 3 & 3\times 2 + 4\times 4 & 3\times 5 + 4\times 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 10 & 15 \\ 33 & 14 & 39 \end{pmatrix}$$

$$d.\ CA = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow tidak\ bisa\ karena$$

$$banyak\ kolom\ C \neq banyak\ baris\ A$$

MATEMATIKA ITS

B.2 Operasi Baris Elementer (OBE) dan Matriks Invers

B.2.1 Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Baris Elementer disingkat dengan OBE adalah operasi baris pada suatu matriks menghasikan matriks baru yang tetap ekuivalen/similar artinya matriks baru mempunyai karakteristik yang tetap sama apabila dilakukan Operasi Baris Elementer. Adapun langkah-langkah OBE beserta notasi dari langkah tersebut sebagai berikut:

1. B_{ij} notasi untuk operasi penukaran baris ke- *i* dengan baris ke-*j*
2. $B_i(k)$) notasi untuk operasi menggandakan tiap entri baris ke-i dengan scalar $k \neq 0$
3. $B_i + kB_j$ notasi untuk operasi menambahkan tiap entri baris ke-i dengan scalar $k, k \neq 0$ kali baris ke-j

MATEMATIKA ITS

B.2.2 Matriks Invers

- Matriks persegi A dikatakan mempunyai invers, jika terdapat matriks B sedemikian hingga:

  AB = BA = I,

  dimana I matriks identitas
- B dikatakan invers matriks A ditulis A^{-1}, maka $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Contoh 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA ITS

Mencari Matriks Invers

Diberikan matriks A tambahkan pada sisi kanan matriks identitas, ubahlah matriks A menjadi bentuk matriks identitas dengan menggunakan *OBE*. Hasil dari matriks sisi kanan merupakan matriks invers dari matriks A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim OBE \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A} \quad \underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

MATEMATIKA ITS

Langkah - langkah OBE Mencari Matriks Invers

Langkah 1. Membuat elemen diagonal sama dengan 1 dan **dibawah diagonal** sama dengan 0

- Perhatikan apakah $a_{11} = 1$, jika tidak bagi baris 1 dengan a_{11}
- Gunakan OBE untuk membuat semua elemen kolom dibawah a_{11} sama dengan 0 dengan **pedoman a_{11}**
- Perhatikan apakah $a_{22} = 1$, jika tidak bagi baris 1 dengan a_{22}
- Gunakan OBE untuk membuat semua elemen kolom dibawah a_{22} sama dengan 0 **dengan pedoman a_{22}**
- Dan seterusnya.

Langkah 2. Membuat elemen **diatas diagonal** sama dengan 0

- Gunakan OBE untuk membuat semua elemen kolom diatas a_{nn} sama dengan 0 dengan **pedoman a_{nn}**
- Gunakan OBE untuk membuat semua elemen kolom diatas $a_{(n-1)(n-1)}$ sama dengan 0 **dengan pedoman $a_{(n-1)(n-1)}$**
- Dan seterusnya.

MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Tentukan invers matriks A

Penyelesaian

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim(B_2 - 2B_1) \\ \sim(B_3 - B_1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim(B_3 + 2B_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \sim(B_2 - 2B_1) :\ & 2 - (2*1) = 0 \\ & 5 - (2*2) = 1 \\ & 3 - (2*3) = -3 \\ & 0 - (2*1) = -2 \\ & 1 - (2*0) = 1 \\ & 0 - (2*0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_3 - B_1) :\ & 1 - 1 = 0 \\ & 0 - 2 = -2 \\ & 8 - 3 = 5 \\ & 0 - 1 = -1 \\ & 0 - 0 = 0 \\ & 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_3 + 2B_2) :\ & 0 + 2*0 = 0 \\ & -2 + 2*1 = 0 \\ & 5 + 2*(-3) = -1 \\ & -1 + 2*(-2) = -5 \\ & 0 + 2*1 = 2 \\ & 1 + 2*0 = 1 \end{aligned}$$

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 13

13

MATEMATIKA ITS

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim(-1)B_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim(B_1 - 3B_3) \\ \sim(B_2 + 3B_3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_1 - 3B_3) :\ & 1 - 3*0 = 1 \\ & 2 - 3*0 = 2 \\ & 3 - 3*1 = 0 \\ & 1 - 3*5 = -14 \\ & 0 - 3*(-2) = 6 \\ & 0 - 3*(-1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_2 + 3B_3) :\ & 0 + 3*0 = 0 \\ & 1 + 3*0 = 1 \\ & -3 + 3*1 = 0 \\ & -2 + 3*5 = 13 \\ & 1 + 3*(-2) = -5 \\ & 0 + 3*(-1) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sim(B_1 - 2B_2) :\ & 1 - 2*0 = 1 \\ & 2 - 2*1 = 0 \\ & 3 - 2*0 = 0 \\ & -14 - 2*13 = -40 \\ & 6 - 2*(-5) = 16 \\ & 3 - 2*(-3) = 9 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim(B_1 - 2B_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 14

14

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear (SPL)

1. Tak Homogen (selanjutnya disebut SPL)
2. Homogen

1. SPL Tak Homogen

- **Sistem persamaan linear tak homogen** adalah koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier dengan konstanta semuanya tidak nol (*nilai b_m semuanya tidak nol*).
- Bentuk umum sistem persamaan linier tak homogen dengan *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear (SPL)

1. Tak Homogen (selanjutnya disebut SPL)
2. Homogen

1. SPL Tak Homogen

- **Sistem persamaan linear tak homogen** adalah koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier dengan konstanta semuanya tidak nol (*nilai b_m semuanya tidak nol*).
- Bentuk umum sistem persamaan linier tak homogen dengan *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

2. SPL Homogen

- **Sistem persamaan linear homogen** adalah koleksi sebanyak berhingga persamaan-persamaan linier dengan semua konstanta bernilai 0 (nol) → ($b_m = 0$).
- Bentuk umum sistem persamaan linier homogen dengan *m* persamaan dan *n* variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan *n* Persamaan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ → Ditulis : $Ax = b$

MATEMATIKA ITS

B.3.1 Penyelesaian SPL dengan Menggunakan Matriks Invers

→ Bentuk SPL dinyatakan: $Ax = b$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} didapat:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$Ix = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

Jadi untuk mendapatkan penyelesaian SPL:
invers matriks *A* dikalikan dengan matriks kolom b

MATEMATIKA ITS

Contoh B.3.1.

Dapatkan penyelesaian SPL berikut:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Jawab

Bentuk matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ Dapatkan invers A : A^{-1}

$a_{11} = 1 \rightarrow \frac{1}{2}B_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim (1/2)B_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

MATEMATIKA ITS

$a_{21} = 0 \ \to B_2 - B_1\ ; a_{31} = 0 \ \to B_3 - 3B_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim B_2 - B_1 \\ \sim B_3 - 3B_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$a_{21} = 0;\ \ a_{31} = 0$

$\sim B_2 - B_1 : 1 - 1 = 0\ ; \quad 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\ ; \quad 1 - 0 = 1$

$-4 - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}\ ; \quad 0 - 0 = 0$

$\sim B_3 - 3B_1 : 3 - 3.1 = 0\ ; \quad 0 - 3.\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$-4 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad 0 - 3.0 = 0$

$0 - 3.\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\ ; \quad 1 - 3.0 = 1$

21

MATEMATIKA ITS

$a_{22} = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \frac{2}{5}B_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \sim B_3 - \frac{1}{2}B_2$$

$a_{32} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array}\right) \sim -\frac{5}{3}B_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$a_{33} = 1$

22

$a_{13} = 0;\ \ a_{23} = 0 \qquad\qquad a_{12} = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim B_1 - \frac{1}{2}B_3 \\ \sim B_2 + \frac{9}{5}B_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\sim B_1 + \frac{3}{2}B_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 4 & 1 & -3 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$x = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{11}{3} \\ 4 & 1 & -3 \\ \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{16}{3}.1 + \frac{4}{3}.1 - \frac{11}{3}.1 = \frac{9}{3} = 3$$

$$x_2 = 4.1 + 1.1 - 3.1 = 2$$

$$x_3 = \frac{7}{3}.1 + \frac{1}{3}.1 - \frac{5}{3}.1 = \frac{3}{3} = 1$$

$Penyelesaian\ SPL =\ (3, 2, 1)$

MATEMATIKA ITS

Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan *n* Persamaan

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
$$

Bentuk Augmented matriks (matriks yang diperbesar)

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

Koefisen peubah *x* Nilai sisi kanan

MATEMATIKA ITS

B.3.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
Metoda Eliminasi Gauss

- Untuk SPL yang mempunyai banyak persamaan lebih mudah menggunakan metode Eliminasi Gauss
- Metode Eliminasi Gauss dari bentuk Augmented matriks diubah menjadi matriks segitiga (bawah atau atas) dengan OBE

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n
\end{pmatrix}
\xrightarrow{OBE}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\
0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} & l_n
\end{pmatrix}
$$

Langkah-langkah OBE membuat matriks segitiga atas

MATEMATIKA ITS

- Ubah kolom a_{21} sampai a_{n1} menjadi 0 dengan OBE, baris ke-1 sebagai basis
  - Baris ke-2 – (a_{21}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris 2 dengan nilai baru
  - Baris ke-3 – (a_{31}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris 3 dengan nilai baru
  - ...
  - Baris ke-n – (a_{n1}/a_{11}) x Baris 1 didapat baris n dengan nilai baru

Bentuk Matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & c_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah OBE (lanjutan ...)

MATEMATIKA ITS

- Ubah kolom p_{32} sampai p_{n2} menjadi 0 dengan OBE, baris ke-2 sebagai basis
  - Baris ke-3 – (p_{32}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris 3 dengan nilai baru
  - Baris ke-4 – (p_{42}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris 4 dengan nilai baru
  - ...
  - Baris ke-n – (p_{n2}/k_{22}) x Baris 2 didapat baris n dengan nilai baru

Bentuk Matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & q_{n3} & \cdots & q_{nn} & d_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah OBE (lanjutan ...)

- Gunakan cara yang sama untuk mengubah kolom q_{43} sampai q_{n3} menjadi 0
- Dan seterusnya sampai pada kolom ke-(n-2)

Bentuk Matriks menjadi

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} & l_2 \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3n} & l_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 29

29

Contoh

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 17$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 45$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 10 & 45 \end{pmatrix} B_3 \text{ tukar } B_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 - 3B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 2 & -31 & -118 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_2 - 3B_1)$: $3 - 3 * (1) = 0$;
$-2 - 3 * (1) = -5$;
$2 - 3 * (10) = -28$;
$8 - 3 * (45) = -127$

$\sim(B_3 - 3B_1)$: $3 - 3 * (1) = 0$;
$5 - 3 * (1) = 2$;
$-1 - 3 * (10) = -31$;
$17 - 3 * (45) = -118$

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 30

30

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 2 & -31 & -118 \end{pmatrix} \sim \left(B_3 + \frac{2}{5}B_2\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 0 & -\frac{211}{5} & -\frac{844}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$

$$\sim\left(B_3 + \frac{2}{5}B_2\right):\ 0 + \frac{2}{5}(\ \ 0) = 0\ ;$$
$$2 + \frac{2}{5}(-5) = 0\ ;$$
$$-31 + \frac{2}{5}(-28) = -\frac{211}{5}\ ;$$
$$-118 + \frac{2}{5}(-127) = -\frac{844}{5}$$

$$\sim(5B_3 + 2B_2)\quad 5.0 + 2.0 = 0\ ;$$
$$5.2 + 2.(-5) = 0\ ;$$
$$5.(-31) + 2.(-28) = -211;$$
$$5.(-118) + 2.(-127) = -844\ ;$$

$$-\frac{211}{5}x_3 = -\frac{844}{5} \to x_3 = -\frac{844}{5} : \left(-\frac{211}{5}\right) = -\frac{844}{5} \times \left(-\frac{5}{211}\right) = -\frac{5}{211} = 4$$

$$-5x_2 - 28x_3 = -127 \leftrightarrow -5x_2 - 28(4) = -127 \leftrightarrow -5x_2 = -127 + 132 \to x_2 = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 45 \to x_1 + 3 + 10(4) = 45 \to x_1 = 45 - 3 - 40 = 2$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4)$$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sim(B_2 - B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \\ \sim(B_4 - 2B_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim(B_2 - B_1):\ 1-(1) = 0\ ;\quad 2-(-1) = 3\ ;\quad 3-(-1) = 4\ ;\quad 1-(-1) = 2\ ;\quad -2-(5) = -7\ ;$$

$$\sim(B_3 - 3B_1):\ 3 - 3*(1) = 0\ ;\quad 1 - 3*(-1) = 4\ ;\quad 0 - 3*(-1) = 3\ ;\quad 2 - 3*(-1) = 5\ ;\quad 1 - 3*(5) = -14\ ;$$

$$\sim(B_4 - 2B_1):\ 2 - 2*(1) = 0\ ;\quad 0 - 2*(-1) = 2\ ;\quad 2 - 2*(-1) = 4\ ;\quad 3 - 2*(-1) = 5\ ;\quad 5 - 2*(5) = -7\ ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim (B_3 - \frac{4}{3}B_2) \\ \sim (B_4 - \frac{2}{3}B_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \sim (B_4 + \frac{4}{7}B_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_3 - \frac{4}{3}B_2)$:
$$\begin{aligned} 0 - \tfrac{4}{3} * 0 &= 0\ ; \\ 4 - \tfrac{4}{3} * 3 &= 0\ ; \\ 3 - \tfrac{4}{3} * 4 &= -\tfrac{7}{3}; \\ 5 - \tfrac{4}{3} * 2 &= \tfrac{7}{3}; \\ -14 - \tfrac{4}{3} * (-7) &= -\tfrac{14}{3} \end{aligned}$$

$\sim(B_4 - \frac{2}{3}B_2)$:
$$\begin{aligned} 0 - \tfrac{2}{3} * 0 &= 0\ ; \\ 2 - \tfrac{2}{3} * 3 &= 0\ ; \\ 4 - \tfrac{2}{3} * 4 &= \tfrac{4}{3}; \\ 5 - \tfrac{2}{3} * 2 &= \tfrac{11}{3}; \\ -7 - \tfrac{2}{3} * (-5) &= -\tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

$\sim(B_4 + \frac{7}{4}B_3)$:
$$\begin{aligned} 0 + \tfrac{4}{7} * 0 &= 0\ ; \\ 0 + \tfrac{4}{7} * 0 &= 0\ ; \\ \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{7} * \left(-\tfrac{7}{3}\right) &= 0\ ; \\ \tfrac{11}{3} + \tfrac{4}{7} * \tfrac{7}{3} &= 5\ ; \\ -\tfrac{7}{3} + \tfrac{4}{7} * \left(-\tfrac{14}{3}\right) &= -5\ ; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}$$

$5x_4 = -5 \rightarrow x_4 = -1$

$-\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}(-1) = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 = -\frac{14}{3} + \frac{7}{3} \rightarrow x_3 = 1$

$3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -7 \leftrightarrow 3x_2 + 4 * 1 + 2 * (-1) = -7 \rightarrow 3x_2 = -9 \rightarrow x_2 = -3$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \leftrightarrow x_1 - (-3) - 1 - (-1) = 5 \rightarrow x_1 = 2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -3, 1, -1)$

Contoh 4. SPL Homogen

MATEMATIKA ITS

Tentukan penyelesaian SPL homogen berikut.

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 0$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim (B_1 + B_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim (B_2 + 2B_1) \\ \sim (B_3 - 2B_1) \\ \sim (B_4 - 3B_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$\sim(B_2 + 2B_1)$: $-2 + 2 * (1) = 0$
$-2 + 2 * (1) = 0$
$1 + 2 * (3) = 7$
$1 + 2 * (3) = 7$

$(\sim B_3 - 2B_1)$: $2 - 2 * (1) = 0$
$2 - 2 * (1) = 0$
$-3 - 2 * (3) = -9$
$-3 - 2 * (3) = -9$

$(\sim B_3 - 3B_1)$: $3 - 3 * (1) = 0$
$3 - 3 * (1) = 0$
$4 - 3 * (3) = -5$
$4 - 3 * (3) = -5$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \sim \frac{1}{7} B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim (B_3 + 9B_2) \\ \sim (B_4 + 5B_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim (B_1 - 3B_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sim(B_3 + 9B_2)$: $0 + 9 * (0) = 0$
$0 + 9 * (0) = 0$
$-9 + 9 * (1) = 0$
$-9 + 9 * (1) = 0$

$\sim(B_4 + 5B_2)$: $0 + 5 * (0) = 0$
$0 + 5 * (0) = 0$
$-5 + 5 * (1) = 0$
$-5 + 5 * (1) = 0$

$\sim B_1 - 3B_2$: $1 - 3 * (0) = 1$
$1 - 3 * (0) = 1$
$3 - 3 * (1) = 0$
$3 - 3 * (1) = 0$

$\boldsymbol{x_1 + x_2 = 0}$ **atau** $\boldsymbol{x_1 = -x_2}$

$\boldsymbol{x_3 + x_4 = 0}$ **atau** $\boldsymbol{x_3 = -x_4}$

Karena x_2 dan x_4 bernilai sebarang bilangan riil maka keduanya dapat diganti dengan parameter, misalnya, $x_2 = t$ dan $x_4 = s$, sehingga penyelesaian SPL homogen tersebut ialah: $\{t, s \in R \mid x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = s\}$.

Contoh

MATEMATIKA ITS

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 = 17$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 45$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 10 & 45 \end{pmatrix} B_3 \; tukar \; B_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 3 & -2 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 - 3B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 2 & -31 & -118 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_2 - 3B_1)$: $3 - 3*(1) = 0$; $-2 - 3*(1) = -5$; $2 - 3*(10) = -28$; $8 - 3*(45) = -127$

$\sim(B_3 - 3B_1)$: $3 - 3*(1) = 0$; $5 - 3*(1) = 2$; $-1 - 3*(10) = -31$; $17 - 3*(45) = -118$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 2 & -31 & -118 \end{pmatrix} \sim \left(B_3 + \frac{2}{5}B_2\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 0 & -\frac{211}{5} & -\frac{844}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{matrix}$$

$\sim\left(B_3 + \frac{2}{5}B_2\right)$: $0 + \frac{2}{5}(0) = 0$; $2 + \frac{2}{5}(-5) = 0$; $-31 + \frac{2}{5}(-28) = -\frac{211}{5}$; $-118 + \frac{2}{5}(-127) = -\frac{844}{5}$

$\sim(5B_3 + 2B_2)$ $5.0 + 2.0 = 0$; $5.2 + 2.(-5) = 0$; $5.(-31) + 2.(-28) = -211$; $5.(-118) + 2.(-127) = -844$;

$$-\frac{211}{5}x_3 = -\frac{844}{5} \rightarrow x_3 = -\frac{844}{5} : \left(-\frac{211}{5}\right) = -\frac{844}{5} \times \left(-\frac{5}{211}\right) = -\frac{5}{211} = 4$$

$$-5x_2 - 28x_3 = -127 \leftrightarrow -5x_2 - 28(4) = -127 \leftrightarrow -5x_2 = -127 + 132 \rightarrow x_2 = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_1 + x_2 + 10x_3 = 45 \rightarrow x_1 + 3 + 10(4) = 45 \rightarrow x_1 = 45 - 3 - 40 = 2$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4)$$

Contoh

Selesaikan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks augmented dan OBE

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim(B_2 - B_1) \\ \sim(B_3 - 3B_1) \\ \sim(B_4 - 2B_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_2 - B_1)$: $1-(1) = 0$; $2-(-1) = 3$; $3-(-1) = 4$; $1-(-1) = 2$; $-2-(5) = -7$;

$\sim(B_3 - 3B_1)$: $3 - 3*(1) = 0$; $1 - 3*(-1) = 4$; $0 - 3*(-1) = 3$; $2 - 3*(-1) = 5$; $1 - 3*(5) = -14$;

$\sim(B_4 - 2B_1)$: $2 - 2*(1) = 0$; $0 - 2*(-1) = 2$; $2 - 2*(-1) = 4$; $3 - 2*(-1) = 5$; $5 - 2*(5) = -7$;

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 39

39

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim(B_3 - \frac{4}{3}B_2) \\ \sim(B_4 - \frac{2}{3}B_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \sim (B_4 + \tfrac{4}{7}B_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$\sim(B_3 - \frac{4}{3}B_2)$: $0 - \frac{4}{3}*0 = 0$; $4 - \frac{4}{3}*3 = 0$; $3 - \frac{4}{3}*4 = -\frac{7}{3}$; $5 - \frac{4}{3}*2 = \frac{7}{3}$; $-14 - \frac{4}{3}*(-7) = -\frac{14}{3}$

$\sim(B_4 - \frac{2}{3}B_2)$: $0 - \frac{2}{3}*0 = 0$; $2 - \frac{2}{3}*3 = 0$; $4 - \frac{2}{3}*4 = \frac{4}{3}$; $5 - \frac{2}{3}*2 = \frac{11}{3}$; $-7 - \frac{2}{3}*(-5) = -\frac{7}{3}$

$\sim(B_4 + \frac{7}{4}B_3)$: $0 + \frac{4}{7}*0 = 0$; $0 + \frac{4}{7}*0 = 0$; $\frac{4}{3} + \frac{4}{7}*\left(-\frac{7}{3}\right) = 0$; $\frac{11}{3} + \frac{4}{7}*\frac{7}{3} = 5$; $-\frac{7}{3} + \frac{4}{7}*\left(-\frac{14}{3}\right) = -5$;

Daryono, Kalkulus 1: Suplemen B Matriks dan Determinan 40

40

MATEMATIKA ITS

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad b \end{array}$$

$5x_4 = -5 \to x_4 = -1$

$-\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3}(-1) = -\frac{14}{3} \leftrightarrow -\frac{7}{3}x_3 = -\frac{14}{3} + \frac{7}{3} \to x_3 = 1$

$3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -7 \leftrightarrow 3x_2 + 4 * 1 + 2 * (-1) = -7 \to 3x_2 = -9 \to x_2 = -3$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -5 \leftrightarrow x_1 - (-3) - 1 - (-1) = 5 \to x_1 = 2$

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -3, 1, -1)$

MATEMATIKA ITS

B.3.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear
Metoda Eliminasi Gauss - Jordan

- Metoda Eliminasi Gauss – Jordan merupakan lanjutan dari metoda eliminasi Gauss
- Bentuk matriks segitiga atas/bawah dilakukan OBE sehingga membentuk matriks diagonal

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix}}_{\text{Augmented Matriks}} \sim \begin{matrix} OBE \\ Gauss \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & c_1 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & g_{24} & c_2 \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & c_4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriks Segitiga Atas}} \sim \begin{matrix} OBE \\ Jordan \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d_4 \end{pmatrix}}_{\text{Matriks Diagonal}}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 10.

Selesaiakan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss - Jordan

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 &= 45 \end{aligned}$$

Jawab

Matriks segitiga atas dan OBE Jordan dari Contoh 8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & -5 & -28 & -127 \\ 0 & 0 & -\frac{211}{5} & -\frac{844}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim \left(B_2/-5\right) \\ \sim \left(B_3 / -\frac{211}{5}\right) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & 45 \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim (B_1 - B_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Baris 2 dibagi (-5) *agar diagonal* $a_{22} = 1$

Baris 3 dibagi $\left(-\frac{211}{5}\right)$ *agar diagonal* $a_{33} = 1$

$\sim (B_1 - B_2)$: $1 - 0 = 1$; $10 - \frac{28}{5} = \frac{22}{5}$;

$1 - 1 = 0$; $45 - \frac{127}{5} = \frac{98}{5}$

MATEMATIKA ITS

Dibuat sama dengan 0, *basis* B_3 — *Dibuat sama dengan* 0, *basis* B_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{22}{5} & \frac{98}{5} \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \left(B_1 - \frac{22}{5}B_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{28}{5} & \frac{127}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \left(B_2 - \frac{28}{5}B_3\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sim\left(B_1 - \frac{22}{5}B_3\right)$: $1 - \frac{22}{5} * 0 = 1$;

$0 - \frac{22}{5} * 0 = 0$;

$\frac{22}{5} - \frac{22}{5} * 1 = 0$;

$\frac{98}{5} - \frac{22}{5} * 4 = 2$;

$\sim\left(B_2 - \frac{5}{28}B_3\right)$: $0 - \frac{28}{5} * 0 = 0$;

$1 - \frac{28}{5} * 0 = 1$;

$\frac{28}{5} - \frac{28}{5} * 1 = 0$;

$\frac{127}{5} - \frac{28}{5} * 4 = \frac{127}{5} - \frac{112}{5} = 3$;

$\boldsymbol{x_1 = 2}$

$\boldsymbol{x_2 = 3}$

$\boldsymbol{x_3 = 4}$

$\boldsymbol{(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 4)}$

MATEMATIKA ITS

Contoh

Selesaiakan SPL dibawah ini dengan metode eliminasi Gauss - Jordan

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\
3x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\
2x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Jawab

Matriks segitiga atas Gauss

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\
0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\
0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\
0 & 0 & 0 & 5 & -5
\end{pmatrix}
$$

Buat menjadi matriks Gauss-Jordan

Untuk latihan !!!

MATEMATIKA ITS

Lanjut ke topik: Determinan