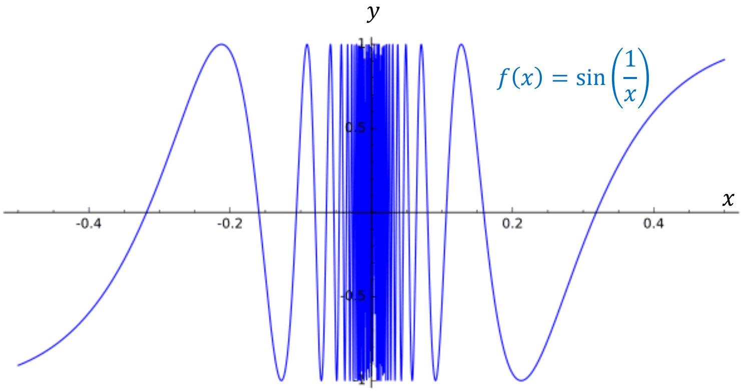
MATEMATIKA ITS



$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$

Bab 3. Limit dan Kontinu

Daryono Budi Utomo

MATEMATIKA ITS

Bab 3. Limit dan Kontinu

3.1 Limit Suatu Nilai Pendekatan

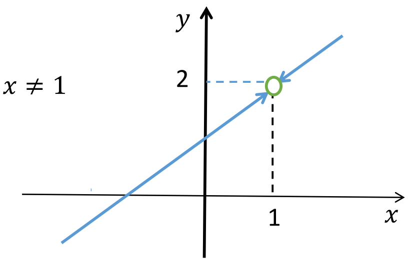
MATEMATIKA ITS

Definisi Limit Fungsi Satu Peubah

Apakah yang di maksud dengan limit fungsi? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, perhatikan ilustrasi berikut.

Diberikan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1; x \neq 1$$



Dari pendefinisian fungsi f di atas, diperoleh bahwa $1 \notin D_f$.

Apakah yang terjadi pada $f(x)$ ketika x mendekati 1 tetapi $x \neq 1$?

MATEMATIKA ITS

Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 1. Nilai $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

x Arah Kanan	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$		x Arah Kiri	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
2	3		0,5	1,5
1,01	2,01		0,9	1,9
1,001	2,001		0,99	1,99
1,0001	2,0001		0,999	1,999
1,00001	2,00001		0,9999	1,9999

Dari tabel diatas terlihat bahwa apabila x cukup dekat dengan 1 dari arah kiri atau kanan, maka nilai $f(x)$ mendekati 2.
Hal ini dapat dinyatakan dengan:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Kasus yang lain, perhatikan tabel berikut ini.

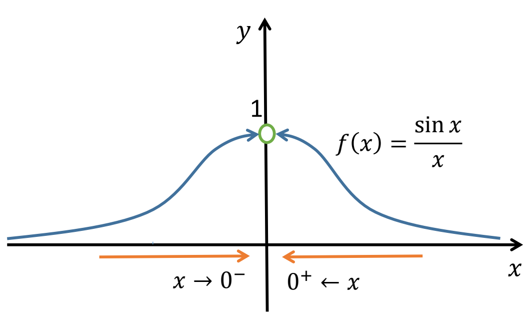
MATEMATIKA ITS

Tabel 2. Nilai $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

x (Radian) Arah Kanan	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$		x (Radian) Arah Kiri	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$
1,0	0,84147		- 1,0	0,84147
0,9	0,87036		- 0,9	0,87036
0,8	0,89670		- 0,8	0,89670
0,7	0,92031		- 0,7	0,92031
0,6	0,94107		- 0,6	0,94107
0,5	0,95885		- 0,5	0,95885
0,4	0,97355		- 0,4	0,97355
0,3	0,98507		- 0,3	0,98507
0,2	0,99335		- 0,2	0,99335
0,1	0,99833		- 0,1	0,99833
0,01	0,99998		- 0,01	0,99998

MATEMATIKA ITS

Grafik $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



x mendekati 0 dari kiri atau kanan $f(x)$ mendekati 1

MATEMATIKA ITS

Dari Tabel 2 terlihat bahwa apabila x cukup dekat dengan 0 dari arah kiri atau kanan, maka nilai $f(x)$ mendekati 1
Hal ini dapat dinyatakan dengan:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \text{disebut limit kanan}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \text{disebut limit kiri}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Suatu fungsi limitnya ada untuk x mendekati c jika limit kiri = limit kanan

Definisi. Limit $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L, ditulis

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

jika untuk setiap x yang cukup dekat dengan c tetapi $x \neq c$, $f(x)$ mendekati L.

MATEMATIKA ITS

Contoh 1.

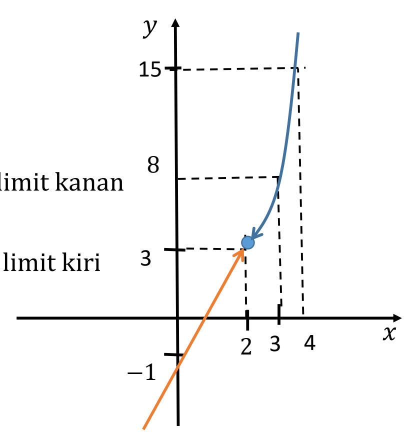
Tentukan $\lim_{x\to 2} f(x)$ jika $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; x \geq 2 \\ 2x - 1\,; x < 2 \end{cases}$

Jawab

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3 \to \text{disebut limit kanan}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x - 1 = 2.2 - 1 = 3 \to \text{disebut limit kiri}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 2^-} 2x - 1}_{limit\ kiri} = \underbrace{\lim_{x\to 2^+} x^2 - 1}_{limit\ kanan} \to \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$



Grafik $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; x \geq 2 \\ 2x - 1\,; x < 2 \end{cases}$

MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

Tentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ jika $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 2x-1 & ; x < 1 \end{cases}$

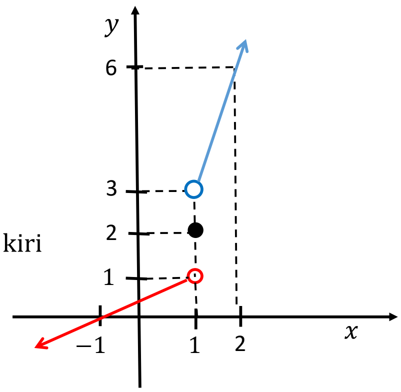
Jawab

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x = 3.1 = 3 \rightarrow$ disebut limit kanan

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x-1 = 2.1-1 = 1 \rightarrow$ disebut limit kiri

$\underbrace{\lim\limits_{x\to 1^-} 3x}_{} \neq \underbrace{\lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1)}_{} \rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ Tidak ada

limit kiri $\neq$ *limit kanan*



Grafik $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 2x-1 & ; x < 1 \end{cases}$

MATEMATIKA ITS

Contoh 3.

Tentukan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ jika $f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 ; x > (-1) \\ 2 \quad ; x = -1 \\ -3x-2; x < -1 \end{cases}$

Jawab

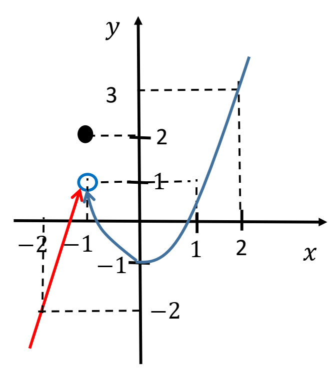
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x^2-1) = 2.(-1)^2-1 = 1$

$\rightarrow$ disebut limit kanan

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-3x-2) = -3.(-1)-2 = 1$

$\rightarrow$ disebut limit kiri

$\lim\limits_{x\to -1^-} (-3x-2) = \lim\limits_{x\to -1^+} (2x^2-1) \rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1$



Grafik $f(x) = f(x) = \begin{cases} 2x^2-1 ; x > 1 \\ 2 \quad ; x = -1 \\ -3x-2; x < -1 \end{cases}$

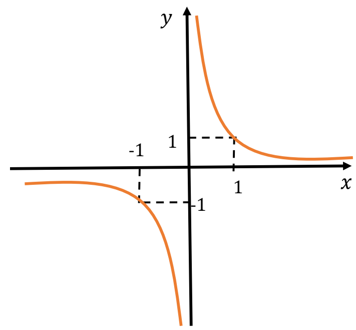
MATEMATIKA ITS

Contoh 4

Tentukan $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ jika $f(x) = \frac{1}{x}$

Jawab

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



Hasil limit sesuai dengan grafik $f(x) = \frac{1}{x}$

MATEMATIKA ITS

3.2 Teknik Penghitungan Limit

Sifat Fungsi Limit Aljabar

Jika k adalah bilangan bulat positif, a konstanta, f dan g ialah fungsi yang mempunyai limit di c, maka sifat-sifat yang berlaku yaitu:

1. $\lim_{x\to c} a = a$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} k.f(x) = k.\lim_{x\to c} f(x)$
4. $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
5. $\lim_{x\to c} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to c} f(x).\lim_{x\to c} g(x)$
6. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, dengan syarat $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x\to c} [f(x)]^k = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^k$
8. $\lim_{x\to c} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to c} f(x)}$, dengan syarat $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ jika k genap

MATEMATIKA ITS

Dalam menghitung nilai limit suatu fungsi *f*(*x*) nilai *x* dapat dimasukan ke *f*(*x*), jika nilai *f*(*x*) tidak ada diusahakan dengan cara memfaktorkan atau mengalikan dengan konyugatenya. Limit suatu fungsi *f*(*x*) tidak selalu mempunyai nilai/ada

Contoh 5.

Tentukan $\lim_{x\to -2}(3x+2)$

Jawab

$$\lim_{x\to -2}(3x+2) = 3(-2)+2 = -4$$

Contoh 6.

Tentukan $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{5x-1}\right)$

Jawab

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{5x-1}\right) = \sqrt{\lim_{x\to 1}(5x-1)} = \sqrt{5.1-1} = \sqrt{4} = 2$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 7.

Tentukan $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

Jawab

Faktor pembilang didapat:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)}{x-2} = 2-2 = 0$$

Contoh 8.

Tentukan $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

Jawab

Faktorkan pembilang didapat:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3x+9)(x-3)}{x-3} = 3^2+3.3+9 = 91+9+9 = 27$$

Contoh 9.

Tentukan $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Jawab

Kalikan konyugate dari $\sqrt{x}-3$ yaitu: $\sqrt{x}+3$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{(x-9)}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$$

Contoh 10.

Tentukan $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}$

Jawab

Kalikan konyugate dari $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}$ yaitu: $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}\times\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x+4)-(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)}{-(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}-\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)$$

$$=-\left(\sqrt{3+4}+\sqrt{2.3+1}\right)=-2\sqrt{7}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 11.

Tentukan $\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}}$

Jawab

Kalikan konyugate dari $x-\sqrt{6x-8}$ yaitu: $x+\sqrt{6x-8}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{x-\sqrt{6x-8}}\times\frac{x+\sqrt{6x-8}}{x+\sqrt{6x-8}}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{x^2-(6x-8)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{x^2-(6x-8)}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{x^2-6x+8}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{(x-4)(x-2)}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{(x-4)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(x+\sqrt{6x-8}\right)}{(x-2)}=\frac{-\left(4+\sqrt{6.4-8}\right)}{4-2}=\frac{-(4+4)}{2}=-4$$

MATEMATIKA ITS

3.3 Limit di Tak Hingga

Sebelum menyelesaikan limit dengan x mendekati tak hingga, perlu dimengerti bahwa nilai dari:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ dan } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ untuk } n\geq 1$$

Penyelesaian limit menuju tak hingga bentuk $\frac{f(x)}{g(x)}$ dengan $f(x), g(x)$ merupakan fungsi polinomial, bagilah setiap suku dengan pangkat tertinggi dari polinomial **penyebut**.

Ringkasan penyelesaian limit dengan *x* mendekati tak hingga

MATEMATIKA ITS

- Ketakterhinggaan fungsi rasional berbentuk polinmial

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi polinomial, maka:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0\,; & jika\ derajat\ f(x) < g(x) \\ \dfrac{Koef.derajat\ f(x)}{Koef.derajat\ g(x)}\,; & jika\ derajat\ f(x) = g(x) \\ \infty\,; & jika\ derajat\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

- Ketakterhinggaan Selisih Bentuk linier dalam tanda akar

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{cx+d}\right) = \begin{cases} +\infty\,; & jika\ a > c \\ 0\,; & jika\ a = c \\ -\infty\,; & jika\ a < c \end{cases}$$

- Ketakterhinggaan selisih bentuk kuadrat dalam tanda akar

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}\right) = \begin{cases} +\infty\,; & jika\ a > p \\ \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}}\,; & jika\ a = p \\ -\infty\,; & jika\ a < p \end{cases}$$

Contoh 12.

MATEMATIKA ITS

Tentukan $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-5x+4}{2x^4-4x^2+9}$

Jawab

Bagi pangkat *x* yang tertinggi dari penyebut yaitu: x^4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2-5x+4}{2x^4-4x^2+9} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}-\frac{5x}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{9}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{\frac{2}{1}-\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0$$

Contoh 13.

Tentukan $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2+7}{x^2+3x+9}$

Jawab

Bagi pangkat *x* yang tertinggi dari penyebut yaitu: x^2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2+7}{x^2+3x+9} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{9}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3+\frac{7}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}} = +\infty$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 14.

Nilai dari $\lim_{x\to+\infty}\left(3 - x + \frac{x^2-2x}{x+5}\right)$ adalah ... .

Jawab

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3 - x + \frac{x^2-2x}{x+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3-x)(x+5)}{x+5} + \frac{x^2-2x}{x+5}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x + 15 - \cancel{x^2} - 5x}{x+5} + \frac{\cancel{x^2} - 2x}{x+5}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x+15}{x+5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-4x}{x} + \frac{15}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}}\right) = \frac{-4+0}{1+0} = -4$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 15.

Jika $f(x) = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}$, maka $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ adalah ... .

Jawab

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{|x|}}\right) = = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}\right) = \left(0 + \frac{1}{\sqrt{1-0}}\right) = 1$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 16.

Nilai dari $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ adalah ... .

Jawab

Kalikan bentuk sekawannya

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{|x|}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

MATEMATIKA ITS

3.4 Limit Fungsi Trigometri

Teorema Pengapitan

Misal f, g dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi:

$$g(x) \leq f(x) \leq h \leq (x)$$

Untuk semua x pada selang terbuka yang memuat titik a dengan pengecualian bahwa mungkin ketidaksamaan berlaku di a. Jika g dan h mempunyai limit yang sama untuk x mendekati a, katakan

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

Maka f juga mempunyai limit yang sama untuk x mendekati a, yaitu

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Contoh 17.

Gunakan Teorema Pengapitan untuk menghitung:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$$

Jika $x \neq 0$ maka dapat ditulis:

$$0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1$$

kalikan dengan x^2 didapat:

$$0 \leq x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1\, x^2.$$

Ambil limit:

$$\lim_{x\to 0} 0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x^2$$

$$\lim_{x\to 0} 0 = 0 \text{ dan } \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \to \lim_{x\to 0} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} = 0$$

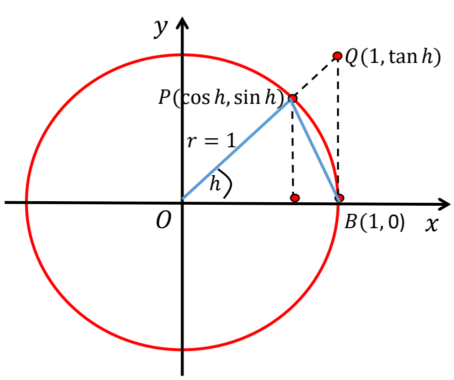
Teorema

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Bukti

Diasumsikan h memenuhi $0 \leq h \leq \frac{\pi}{2}$

Perhatikan Gambar dibawah ini



Luas $\Delta OBP = \frac{1}{2}.alas.tinggi = \frac{1}{2}.1.\sin h = \frac{1}{2}\sin h$

Luas $Juring\ OBP = \frac{1}{2}.(1)^2.h = \frac{1}{2}h$

Luas $\Delta OBQ = \frac{1}{2}.alas.tinggi = \frac{1}{2}.1.\tan h = \frac{1}{2}\tan h$

Oleh karena itu

$$0 < \frac{1}{2}\sin h < \frac{1}{2}h < \frac{1}{2}\tan h$$

Kalikan $\frac{2}{\sin h}$ didapat:

$$1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$$

Ambil kebalikannya

$$1 < \frac{\sin h}{h} < \cos h$$

Gunakan Teorema Pengapitan

$$\lim_{h\to 0} 1 = 1\, , \lim_{h\to 0} \cos h = 1 \to \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Hasil limit $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ untuk menghitung:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\left(\frac{1+\cos h}{1+\cos h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\,\frac{\sin h}{1+\cos h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\,\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{1+\cos h} = (1)\frac{0}{(1+1)} = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\left(\frac{1}{\cos h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\,\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\cos h}\right) = 1.\frac{1}{1} = 1$$

Rumus

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

Contoh 18.

Tentukan $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

Jawab

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x} = \frac{\sin 0}{\sin 0+\cos 0} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

Contoh 19.

Tentukan $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

Jawab

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$$

Contoh 20.

Tentukan $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{\cos x - \sin x}$

Jawab

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{\cos x - \sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x - \sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) \\
&= \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 21.

Tentukan $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$

Jawab

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{\sin \pi}{\cos(\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{0}\,(Bentuk\ tak\ tentu)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\sin x \\
&= 2\sin(\frac{\pi}{2}) \\
&= 2(1) \\
&= 2
\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 22.

Tentukan $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x}$

Jawab

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} = \frac{1-\cos 2(0)}{1-\cos 4(0)} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} (Bentuk\ tak\ tentu)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{1-\cos 4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{1-(1-2\sin^2 2x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{(2\sin x \cos x)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{4\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{4\cos^2(0)} \\ &= \frac{1}{4(1)^2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 23.

Tentukan $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin x}{\cos^2 2x}$

Jawab

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1-\sin^2 2x} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{(1+\sin 2x)(1-\sin 2x)} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin 2x} \\ &= \frac{1}{1+\sin 2(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{1}{1+\sin \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

MATEMATIKA ITS

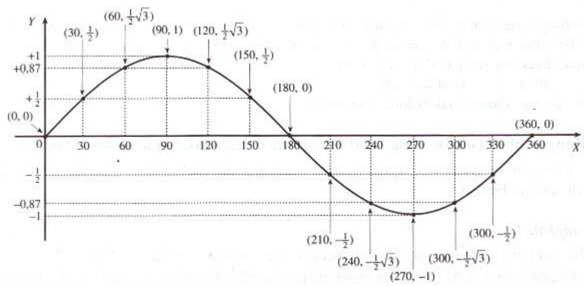
MATEMATIKA ITS

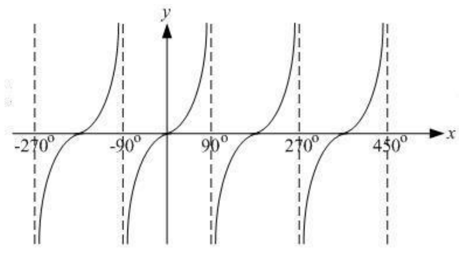
3.5 Kontinu

Kontinu artinya terus menerus atau tidak terputus.
Suatu fungsi *f* dikatakan kontinu berarti grafik dari *f* tidak ada yang terputus

Contoh 24.

Selidiki apakah fungsi $f(x) = \sin x$ dan $f(x) = \tan x$ fungsi kontinu





$y = \text{Tan } x$

$f(x) = \sin x$ kontinu di semua $x \in R$

$f(x) = \tan x$ diskontinu di $x = \pm 90^0, \pm 270^0, \ldots$

MATEMATIKA ITS

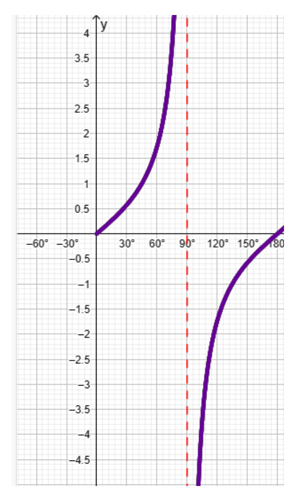
$$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^- ; \tan x = +\infty \;\; ; \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \; ; \textit{limit kiri}$$

$$x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ ; \tan x = -\infty \;\; ; \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty \; ; \textit{limit kanan}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \textit{tidak ada } (\textit{limit kiri } \neq \textit{limit kanan})$$

$$f(x) = \tan x \to f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0} = \textit{tak terdefinisi}$$

$$\to f(x) \textit{ diskontinu di } x = \frac{\pi}{2}$$



MATEMATIKA ITS

Contoh-contoh fungsi kontinu

1. $f(x) = ax + b$ grafik berupa garis kontinu di semua $x \in R$
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafik berupa parabola kontinu di semua $x \in R$
3. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ fungsi Polinomial kontinu di semua $x \in R$

Definisi Kontinu

Suatu fungsi $f(x)$ kontinu di $x = a$ jika memenuhi

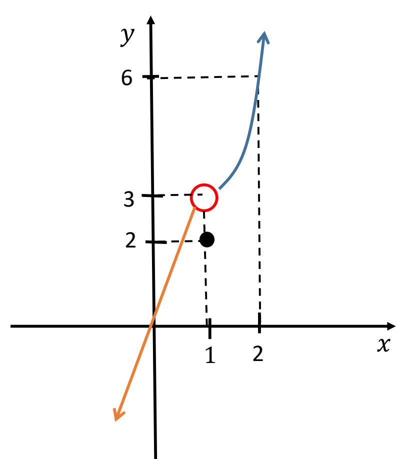
1. $f(a)$ ada
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ ada
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

MATEMATIKA ITS

Contoh 25.

1. Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$$



Jawab

Syarat kontinu

1. $f(1) = 2$
2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 2) = 3$

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 3x = 3$

   $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ ada
3. $f(1) \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Tiga syarat tidak dipenuhi maka $f(x)$ diskontinu di $x = 1$

MATEMATIKA ITS

2. Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di x = - 2

$$f(x) = \begin{cases} x+4\,, & x \geq -2 \\ 2x+5, & x < -2 \end{cases}$$

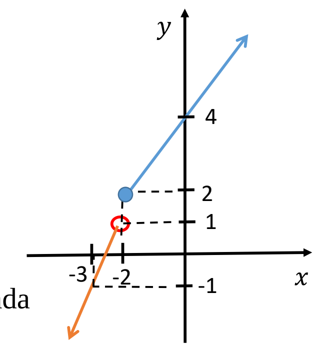
Jawab

Syarat kontinu

1. $f(-2) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (2x+5) = 1$

   $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (x+4) = 2$

   $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \to \lim\limits_{x\to -2} f(x)$tidak ada



Nilai limit tidak dipenuhi maka $f(x)$ diskontinu di x = -2

MATEMATIKA ITS

3. Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di x = 2

$$f(x) = \begin{cases} x-1\,, & x \geq 2 \\ 5-x^2, & x < 2 \end{cases}$$

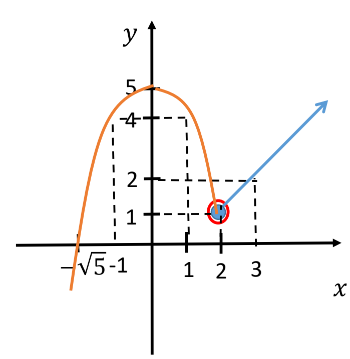
Jawab

Syarat kontinu

1. $f(2) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (5-x^2) = 1$

   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x-1) = 1$

   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \;=\; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ada
3. $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$



Tiga syarat dipenuhi maka $f(x)$ kontinu di x = 2

4. Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di $x = 2$

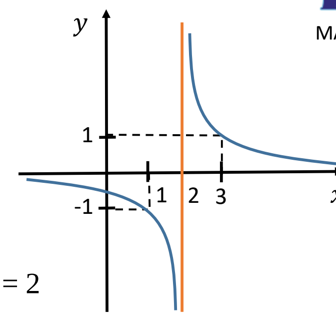
$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Jawab

Syarat kontinu

1. $f(2) =$ tidak ada

Syarat 1 tidak dipenuhi maka $f(x)$ dikontinu di $x = 2$



$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

3.6 Kontinu Yang Dapat Dihilangkan

$f(x)$ diskontinu di $x = \boldsymbol{a}$, diskontinu dapat dihilangkan/dihapus jika $\lim_{x\to a} f(x) =$ ada untuk membuat $f(x)$ kontinu dengan cara mendefinisikan kembali $f(x)$

MATEMATIKA ITS

Contoh 26.

Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di x = 1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$$

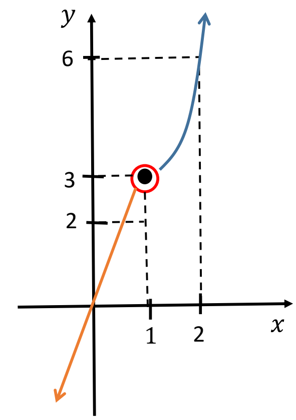
Jawab

Berdasarkan contoh sebelumnya $f(x)$ diskontinu, karena $f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$ tetapi nilai limitnya ada yaitu

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

Jadi diskontinuitas $f(x)$ dapat dihapuskan dengan mengubah atau mendefinisikan fungsi menjadi:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 1 \\ \boxed{3,} & x = 1 \\ 3x, & x < 1 \end{cases}$$



MATEMATIKA ITS

Contoh 27.

Selidiki apakah $f(x)$ kontinu di x = - 2 , jika diskoninu apakah dapat dihilangkan

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\,, & x \geq -2 \\ 2x + 5, & x < -2 \end{cases}$$

Jawab

Syarat kontinu

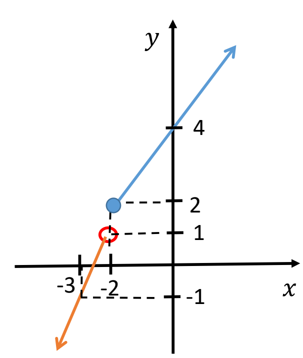
1. $f(-2) = 2$
2. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (2x + 5) = 1$

   $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x + 4) = 2$

   $\lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f(x)$ tidak ada

Nilai limit tidak dipenuhi maka $f(x)$ diskontinu di x = -2

Karena nilai limitnya tidak ada maka diskontinu tidak dapat dihilangkan



MATEMATIKA ITS

Akhir Bab 3.

NEXT Diferensiasi