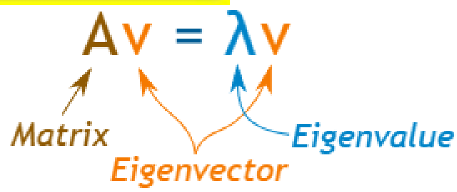
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Invers Matriks



MATEMATIKA ITS

Suplemen B: Matriks dan Determinan (Lanjutan)

Daryono Budi Utomo

1

1

MATEMATIKA ITS

Suplemen B: Matriks, Determinan dan Sistem Persamaan Linier

B.1 Matriks dan Operasinya

B.2 Operasi Baris Elementer (OBE) dan Matriks Invers

B.3 Sistem Persamaan Linier

☑ B.4 Determinan

☑ B.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

2

MATEMATIKA ITS

B. 4. DETERMINAN

B.4.1 Pengertian Determinan

Determinan suatu matriks adalah besaran skalar yang diperoleh dari jumlah produk unsur-unsur matriks bujur matriks, dilambangkan dengan dua garis vertikal atau dengan menuliskan det dan menuliskan nama matriksnya. misalnya. |A|, det(A), det A

Nilai Determinan

- Determinan 1×1 dinyatakan $|A| = |a| = a$
- Determinan 2×2 dinyatakan $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

MATEMATIKA ITS

Menghitung Determinan

Ukuran 2 x 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $+$

Ukuran 3 x 3

Metoda Sarrus → Khusus determinan ukuran 3 x 3

Tambahkan kolom 1 dan 2 dan letakkan di belakang determinan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\Bigg| = \begin{matrix}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - \\ (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})\end{matrix}$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

MATEMATIKA ITS

Contoh 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (2\times 1)-(-3\times 5)=17$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right| = \begin{array}{l} (2.3.5+(-1)(-2)(-4)+1.0.0)\ - \\ ((-1).0.(5)+2.(-2).0+1.3.(-4)) \end{array} = 34$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 8 & -1 & 6 & 3 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & 7 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & -3 & 2 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 9 & -5 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Salah !

Jangan dilakukan !

MATEMATIKA ITS

Sifat – sifat Determinan

1. Jika A mempunyai sebuah atau lebih baris (kolom) nol semua, maka det(A) = 0
2. det(A) = det(A^T)
3. Jika matriks persegi A adalah matriks segitiga atas atau bawah, maka det(A) = hasil kali elemen pada diagonalnya
4. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A yang dilakukan dengan OBE/OKE tunggal yaitu dengan mengalikan dengan k pada salah satu baris atau kolom dari A, maka det(B) = k det(A)
5. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu menukarkan baris atau kolom dari A, maka det(B) = - det(A)
6. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari matriks A dengan OBE/OKE yaitu penggandaan dari baris atau kolom dari A kemudian ditambah atau dikurang pada baris atau kolom yang lain, maka det(B) = det(A)
7. Jika matriks persegi A mempunyai dua baris atau dua kolom yang sebanding, maka det(A) = 0

MATEMATIKA ITS

Menghitung Determinan Ukuran *n* x *n*

- Buat matriks segitiga (atas/bawah) dengan OBE
- Nilai determinan ukuran *n* x *n* adalah perkalian diagonalnya

Contoh 6.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 6 & 11 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim (B_2 + B_1) \\ \sim (B_3 - 3B_1) \\ \sim (B_4 + 2B_1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -18 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \sim (B_3 - B_2) \\ \sim (B_4 - 3B_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{pmatrix} \sim (B_4 + 11B_3) \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -330 \end{pmatrix} \qquad |D| = 2 \times 2 \times (-1) \times (-330) = 1320$$

MATEMATIKA ITS

Minor dan Kofaktor

Jika matriks persegi A, maka minor anggota a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} dan didenisikan sebagai determinan dari sub-matriks dari matriks awal dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j, sedangkan kofaktor anggota a_{ij} ditulis:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Kofaktor: $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$; $C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18$; $C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6$; $C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -12$; $C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 20$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17$; $C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2$; $C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14$

Matriks Kofaktor: $C = \begin{pmatrix} -7 & 18 & 2 \\ -6 & -12 & 20 \\ 17 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

Menghitung Determinan Dengan Minor dan Kofaktor

Determinan dari matriks persegi A dapat dihitung dengan mengalikan anggota-anggota baris atau kolom dengan kofaktornya dan menjumlahkannya.
Untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$, perluasan kofaktor dengan baris ke-i, adalah:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Dan perluasan kofaktor dengan baris ke-i, adalah

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Contoh 8.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \underset{Tanda\ Kofaktor}{\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}}$$

Perluasan kofaktor dengan baris ke-1,

$$|A| = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 30 - 8 + 12 = 34$$

Perluasan kofaktor kolom 2

$$|A| = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= -8 + 42 + 0 = 34$$

Contoh .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \underset{Tanda\ Kofaktor}{\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}}$$

Pilih perluasan kofaktor dengan baris ke-3, (karena banyak nilai 0)

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Perluasan kofaktor dengan baris ke-1,

$$|A| = (-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (-6)\left(3\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right)$$
$$= (-6)(-135 + 15 + 0) = (-6)(-120) = 720$$

Mencari Matriks Invers dengan Adjoint

MATEMATIKA ITS

Matriks Adjoint

Jika matriks persegi A dengan ukuran n dan C_{ij} adalah kofaktor dari matriks A, maka transpose dari matriks kofaktor dinamakan adjoint(A) ditulis $Adj(A)$.

Matriks kofaktor A

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks $Adj(A) = C^T$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \cdots & c_{n2} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & \cdots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh 9.

MATEMATIKA ITS

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18 \quad ; \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -12; \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17; \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

Matriks Kofaktor A: $C = \begin{pmatrix} -7 & 18 & 2 \\ -6 & -12 & 20 \\ 17 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

Matriks Adj(A): $Adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 17 \\ 18 & -12 & 2 \\ 2 & 20 & -14 \end{pmatrix}$

Menentukan Invers Matriks

Jika matriks persegi A mempunyai invers, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Contoh

Diberikan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Tentukan invers matriks A

Penyelesaian

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = (1.5.8 + 2.3.1 + 3.2.0) - (2.2.8 + 1.3.0 + 3.5.1) = 46 - 47 = -1$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Kofaktor matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40; \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13 \quad ; \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16; \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 \quad ; \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 \quad ; \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad ; \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{-1}\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}_{C^T = Adj(A)} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian SPL Dengan Aturan Cramer

MATEMATIKA ITS

Jika $Ax = b$ merupakan SPL dengan n variabel dan $\det(A) \neq 0$, maka SPL tersebut mempunyai penyelesaian:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \;; x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \;; \;\ldots x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_j ; $j = 1, \ldots, n$ adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota matriks A pada kolom ke-j dengan b, aturan tersebut dinamakan dengan Aturan Cramer

Contoh

Diberikan SPL berbentuk:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 3 \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

MATEMATIKA ITS

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = (1.5.8 + 2.3.1 + 3.2.0) - (2.2.8 + 1.3.0 + 3.5.1) = 46 - 47 = -1$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{matrix} = (1.5.8 + 2.3.3 + 3.2.0) - (2.2.8 + 1.3.0 + 3.5.3) = 58 - 47 = -19$$

Kolom 1 matriks A diganti dengan kolom matriks b

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = (1.2.8 + 1.3.1 + 3.2.3) - (1.2.8 + 1.3.3 + 3.2.1) = 37 - 31 = 6$$

Kolom 2 matriks A diganti dengan kolom matriks b

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix} = (1.5.3 + 2.2.1 + 1.2.0) - (2.2.3 + 1.2.0 + 1.5.1) = 19 - 17 = 2$$

Kolom 3 matriks A diganti dengan kolom matriks b

MATEMATIKA ITS

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-19}{-1} = 19$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$(x_1, x_2, x_2) = (19,-6,-2)$$

B.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

MATEMATIKA ITS

Definisi: Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A matriks persegi $n \times n$, $\bar{x}$ vektor tak nol di R^n dinamakan vektor eigen dari A, jika $Ax = \lambda x$. Dalam ini untuk skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan $\bar{x}$ dikatakan vektor eigen yang berhubungan dengan nilai λ.

Teorema:

Jika A matriks persegi $n \times n$, maka λ adalah nilai eigen dari A, jika dan hanya jika

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0} \quad atau \quad \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

yang dinamakan dengan persamaan karakteristik dari A.

$\lambda x - Ax = 0 \rightarrow x(\lambda - A) = 0 \rightarrow x \neq 0, maka\ (\lambda - A) = 0$
$karena\ A\ matriks\ n \times n\ maka\ \lambda\ dikalikan\ denga\ I_n\ sehingga\ (\lambda I - A) = 0$
$Untuk\ mendapatkan\ nilai\ \lambda$ dihitung nilai $(\lambda I - A) = 0$

Contoh.

Tentukan nilai eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari *A*.

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dengan ekspansi kofaktor pada kolom ke-2

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)(-\lambda) - 2] = 0$$
$$(1-\lambda)[\lambda^2 - \lambda - 2] = 0$$
$$(1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$$

Contoh 14.

Tentukan nilai eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\det(\lambda I - A) = 0} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \ Tanda\ kofaktor$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari *A*

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & \lambda-2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-2)[(\lambda-2)^2 - 1] + (-\lambda+1) - \big(1 + (\lambda-2)\big) = 0$$
$$(\lambda-2)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] - (\lambda-1) - (\lambda-1) = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1) - 2(\lambda-1) = 0$$
$$(\lambda-1)[(\lambda-3)(\lambda-2) - 2] = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4) = 0$$

Jadi, matriks *A* memiliki tiga buah nilai eigen yaitu : $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$

Contoh

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristik dari A

$$\det(\lambda.I - A) = 0 \leftrightarrow \begin{vmatrix} (\lambda-2) & -1 \\ -1 & (\lambda-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-2) - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

diperoleh $\lambda = 1$; $\lambda = 3$

Vektor Eigen

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \leftrightarrow (\lambda - A)\bar{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = t \end{cases} \rightarrow \textit{Vektor}\ \text{Eigen} : \overline{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Untuk $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = t \end{cases} \rightarrow \textit{Vektor}\ \text{Eigen} : \overline{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Contoh 16

MATEMATIKA ITS

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian: persamaan karakteristik dari *A*: $\det\left(\lambda.I - A\right) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \leftrightarrow \det\begin{pmatrix} (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda-1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor: Pilih Baris I

$$(\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2)+0+0=0 \leftrightarrow (\lambda-1)\,(\lambda)\,(\lambda-2)=0$$

diperoleh $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 2$

Vektor Eigen

MATEMATIKA ITS

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \leftrightarrow (\lambda - A)\bar{x} = 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda - a_{33} \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_3 = 0 \to \textit{Vektor}\ \text{Eigen}: \bar{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \\ x_2 = 0 \end{cases}$
- Untuk $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 0-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0-1 & -1 \\ 0 & -1 & 0-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \to \textit{Vektor}\ \text{Eigen}: \bar{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \\ x_2 = x_3 \end{cases}$
- Untuk $\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \to \textit{Vektor}\ \text{Eigen}: \bar{v_3} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

MATEMATIKA ITS

$$\begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & -1\\ 0 & -1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0 \leftrightarrow \begin{cases}x_1=t\\ x_3=0\\ x_2=0\end{cases} \rightarrow \mathit{Vektor}\ \text{Eigen}: \overline{v_1}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}t$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$
$0x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$
$0x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 0$

MATEMATIKA ITS

Akhir Suplemen B

NEXT

Sampai Jumpa
Di Kalkulus 2