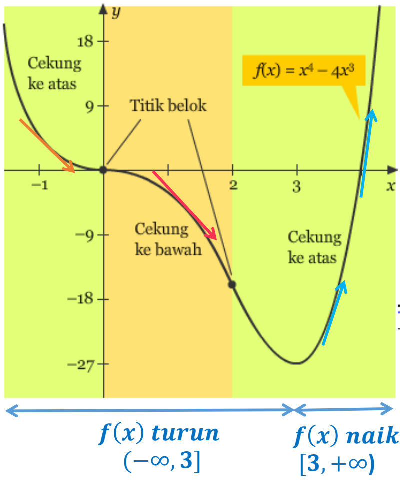
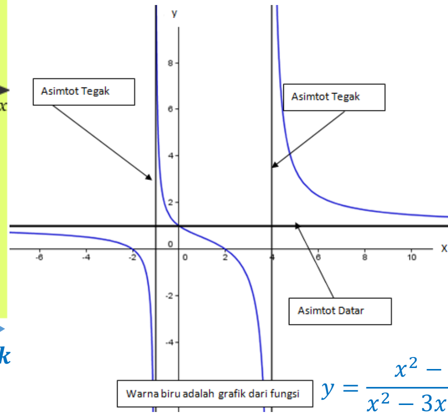




$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$$

MATEMATIKA ITS

Bab 5. Aplikasi Turunan

Daryono Budi Utomo

1

MATEMATIKA ITS

Bab 5. Aplikasi Turunan

- ☑ 5.1 Laju – Laju yang berkaitan
- ☑ 5.2 Grafik Fungsi Polinomial
- ☑ 5.3 Grafik Fungsi Rasional
- 5.4 Grafik Asmitot Miring
- 5.5 Masalah Grafik Yang Lain (Garis Singgng Tegak)
- 5.6 Maksimum Minimum Absolut
- 5.7 Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

2

MATEMATIKA ITS

5.1 Laju – Laju yang berkaitan

- Menentukan laju perubahan yang tidak diketahui dengan cara mengkaitkan laju perubahan tersebut dengan variabel lain yang nilai dan turunannya yang diketahui
- Bentuk soal pada laju yang berkaitan biasanya adalah soal cerita, sehingga kemampuan menganalisis soal sangat diperlukan, maka ada baiknya kita mensketsa apa yang diketahui dari soal kedalam bentuk gambar agar lebih memudahkan untuk memahami dan menjawab pertanyaan yang diajukan.

MATEMATIKA ITS

Contoh 1

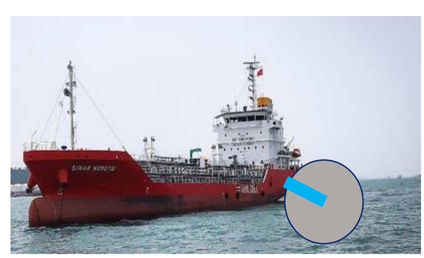
Diasumsikan bahwa minyak tumpah yang berasal dari Tanker yang bocor menyebar dalam bentuk lingkaran yang jari-jarinya bertambah dengan laju konstan 2m/det. Seberapa cepatkah luas daerah tumpahan bertambah jika jari jari pancaran 60 m

Penyelesaian

$t =$ waktu (detik) tumpahan minyak

$r =$ jari-jari (detik) tumpahan minyak setelah t detik

$A =$ luas daerah tumpahan (m^2) setelah t detik



Jika $\frac{dA}{dt}$ menyatakan laju pertambahan luas tumpahan

$\frac{dr}{dt}$ menyatakan laju pertambahan jari-jari

$$A = \pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$r = 60 \rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi(60\ m)(2m/det) = 240\pi\ m^2/det$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 2

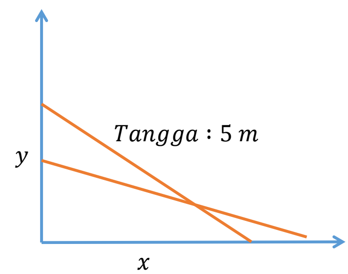
Tangga dengan panjang 5 m bersandar pada dinding, tangga tergelincir sedemikian hingga bagian bawah bergerak menjauhi dinding dengan laju 2 m/det ketika bagian bawah berjarak 4 m dari dinding. Berapa cepat bagian atas turun kebawah?

Penyelesaian

$t =$ waktu (detik) waktu yang diperlukan tangga tergelincir

$x =$ Jarak (meter) bagian bawah tangga ke dinding

$y =$ Jarak (meter) bagian atas tangga ke lantai



Jika $\frac{dx}{dt} = 2\ m/det$ maka $\frac{dy}{dt} = ?$

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Jika $x = 4$, maka y = 3,

Karena $\frac{dx}{dt} = 3, maka\ \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2\ m/det) = -\frac{8}{3}\ m/det$

(Turun Kebawah)

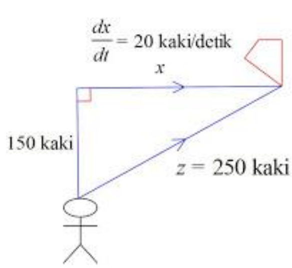
MATEMATIKA ITS

Contoh :

Seorang anak laki-laki menerbangkan layang-layang yang tingginya 150 kaki. Jika layang-layang tersebut bergerak horizontal menjauhi anak itu pada 20 kaki/detik, seberapa cepat tali layang-layang terpakai ketika layang-layang itu 250 kaki dari anak laki-laki tersebut ?

Jawab:

Langkah pertama ada baiknya kita mensketsa kedalam gambar apa yang diketahui dari soal agar lebih mudah memahaminya :



$\frac{dz}{dt} = \ ...?$ saat $z = 250$ kaki

$$x^2 + 150^2 = z^2$$
$$x^2 + 150^2 = 250^2$$
$$x^2 + 22500 = 62500$$
$$x^2 = 40000$$
$$x = 200 \text{ kaki}$$

$$z^2 = x^2 + 150^2$$
$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 0$$
$$2(250)\frac{dz}{dt} = 2(200)(20)$$
$$500\frac{dz}{dt} = 8000$$
$$\frac{dz}{dt} = 16 \text{ kaki/detik}$$

MATEMATIKA ITS

5.2 Grafik Fungsi Polinomial

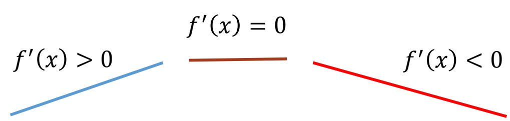
Menggambar grafik fungsi polinomial secara ringkas adalah sebagai berikut:

1. Turunan pertama:

   Menentukan interval fungsi naik/turun dan titik ekstrem berupa titik maksimum/minimum

   Diberikan $y = f(x)$, turunan pertama dari fungsi ini adalah $y = f'(x)$ yang merupakan gradien garis singgung yang menghasilkan interval sebagai berikut:

   - Jika $f'(x) > 0$ artinya gradien garis singgung naik, berarti $y = f(x)$ fungsi naik
   - Jika $f'(x) < 0$ artinya gradien garis singgung turun, berarti $y = f(x)$ fungsi turun
   - Jika $f'(x) = 0$ artinya gradien garis singgung sejajar dengan sumbu, fungsi tidak naik /turun



7

MATEMATIKA ITS

2. Turunan kedua:

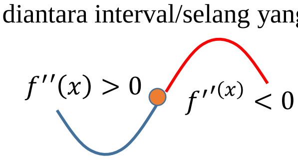
   Menentukan interval kecekungan fungsi, apakah fungsi cekung keatas (menahan air) atau fungsi cekung kebawah (menumpahkan air) dan titik belok

   Diberikan $y = f(x)$, turunan kedua dari fungsi ini adalah $y = f''(x)$ yang merupakan kecekungan yang menghasilkan interval sebagai berikut:

   - Jika $f''(x) > 0$ artinya fungsi cekung keatas
   - Jika $f''(x) < 0$ artinya fungsi cekung kebawah
   - Jika $f''(x) = 0$ didapat titik belok artinya perubahan interval dari cekung keatas ke cekung kebawah atau sebaliknya

3. Titik potong sumbu y, $x = 0$ dan titik potong sumbu x, y = 0 apabila fungsi Aljabar mudah difaktorkan (optional)

4. Ambil beberapa titik diantara interval/selang yang dihasilkan (1) dan (2)



8

MATEMATIKA ITS

Contoh 1.

Sket garfik fungsi: $f(x) = 3x^2 - x^3$

Jawab

1. Turunan Pertama: Interval fungsi naik/turun dan titik Ekstrem

$$f(x) = 3x^2 - x^3 \rightarrow f'(x) = 6x - 3x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow 3x(2 - x) = 0\,; x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 2$$

$$x_1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 3.0^2 - 0^3 = 0 \;\;;\;\; x_2 = 2 \;\rightarrow\; y_2 = 3.2^2 - 2^3 = 4$$

Titik Ekstrem: (0, 0) dan (2, 4)

MATEMATIKA ITS

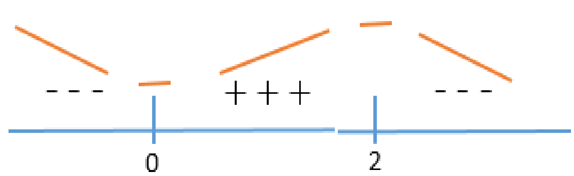
- Menentukan interval fungsi naik/turun dan titik ekstrem → Uji tanda

  Ambil nilai *x* kiri 0 diantara 0 dan 2 dan kanan 2 diujikan keturunan pertama

  $f'(x) = 6x - 3x^2\,; f'(-1) = \;-9 < 0 \;\rightarrow f(x)\; turun\; pada\; interval\; (-\infty, 0]$

  $f'(x) = 6x - 3x^2\,; f'(1) = \;3 > 0 \rightarrow f(x)\; naik\; pada\; interval\; [0, 2]$

  $f'(x) = 6x - 3x^2\,; f'(3) = \;-9 < 0 \;\rightarrow f(x)\; turun\; pada\; interval\; [2, +\infty)$



MATEMATIKA ITS

- Titik ekstrem minimum perpindahan fungsi turun ke fungsi naik
- Titik ekstrem maksimum perpindahan fungsi naik ke fungsi turun

Titik (0, 0) perpindahan fungsi turun ke fungsi naik → titik minimum relatif
Titik (2, 4) perpindahan fungsi naik ke fungsi turun → titik maksimum relatif

3. Turunan kedua: Kecekungan fungsi dan titik belok

$$f'(x) = 6x - 3x^2 \ \rightarrow f''(x) = 6 - 6x$$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ 6 - 6x = 0; x = 1, y = 3.1^2 - 1^3 = 2 \text{ (di substitusi ke soal)}$$

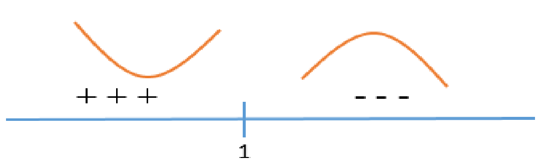
Titik (1, 2) adalah titik belok yaitu perubahan kecekungan fungsi dari cekung kebawah berpindah cekung keatas atau sebaliknya

MATEMATIKA ITS

- Uji tanda kecekungan fungsi

Ambil nilai *x* kiri 0 dan kanan 1 diujikan keturunan kedua

- $f''(x) = 6 - 6x\,; f''(0) = \ 6 > \ 0 \rightarrow$
  $f(x)\ cekung\ keatas\ pada\ interval\ (-\infty, 1]$
- $f''(x) = 6 - 6x\,; f''(2) = -6 < 0 \ \rightarrow$
  $f(x)\ cekung\ kebawah\ pada\ interval\ [1, +\infty)$



MATEMATIKA ITS

3. $f(x) = 3x^2 - x^3\ ; -1 \le x \le 2.5$

   Titik potong sumbu y, $x = 0$ didapat $y = 0$

   Titik potong sumbu x, $y = 0$ didapat:

   $3x^2 - x^3 = 0,$

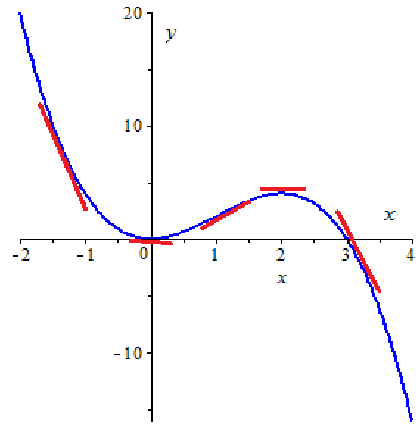
   $x^2(3 - x) = 0;$

   $x = 0\ dan\ x = 3$

4. Ambil beberapa titik

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	20	2	0	2	4	0	-16

5. Gambar grafik



MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

Sket garfik fungsi: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 10$

Jawab

1. Turunan Pertama: Interval fungsi naik/turun dan titik Ekstrem

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 10 \rightarrow f'(x) = -4x^3 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0\ ;\ -4x^3 + 12x^2 = 0\ ;\ -4x^2(x-3) = 0\ ;\ x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 3$$

$$x_1 = 0 \rightarrow y_1 = -0^4 + 4.0^3 - 10 = -10\ ;$$

$$x_2 = 3 \rightarrow y_2 = -3^4 + 4.3^3 - 10 = 17$$

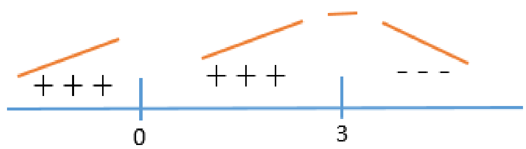
Titik Ekstrem: (0, -10) dan (3, 17)

MATEMATIKA ITS

- Menentukan interval fungsi naik/turun dan titik ekstrem → Uji tanda

  Ambil nilai x kiri 0 diantara 0 dan 3 dan kanan 3 diujikan keturunan pertama

  - $f'(x) = -4x^3 + 12x^2\,; f'(-1) = \ 16 > 0 \rightarrow f(x)\ naik\ pada\ interval\ (-\infty, 0]$
  - $f'(x) = -4x^3 + 12x^2\,; f'(1) = \ 8 > 0 \rightarrow f(x)\ naik\ pada\ interval\ [0, 3]$
  - $f'(x) = -4x^3 + 12x^2\,; f'(4) = \ -64 < 0 \rightarrow f(x)\ turun\ pada\ interval\ [3, +\infty)$



$(0, -10)$ *bukan titik ekstrem karena tidak ada perubahan fs naik atau turun*

$(3, 17)$ *titik ekstrem maksimum relatih perubahan fs naik ke fs turun*

MATEMATIKA ITS

- Titik ekstrem minimum perpindahan fungsi turun ke fungsi naik
- Titik ekstrem maksimum perpindahan fungsi naik ke fungsi turun

Titik (0, 0) bukan titik ekstrem, **grafik tidak mempunyai titik minimum relatif**

Titik (3, 17) perpindahan fungsi naik ke fungsi turun → titik maksimum relatif

2. Turunan kedua: Kecekungan fungsi dan titik belok
   - $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 \ \rightarrow f''(x) = -12x^2 + 24x$
   - $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ -12x^2 + 24x = 0\,; \ -12x(x-2) = 0, x_1 = 0;\ x_2 = 2$

     $x_1 = 0 \ \rightarrow \ y_1 = -0^4 - 3.0^3 - 10 = -10 \ \ ;$

     $x_2 = 2 \ \rightarrow \ y_2 = -2^4 + 4.2^3 - 10 = 6$

   Titik (0, -10) dan (2, 6) adalah titik belok yaitu perubahan kecekungan fungsi dari cekung kebawah berpindah cekung keatas atau sebaliknya

- Uji tanda kecekungan fungsi

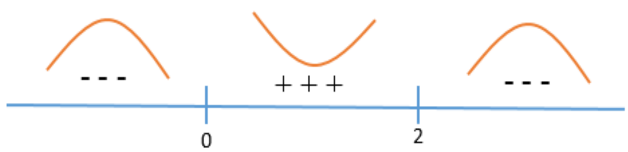
  Ambil nilai *x* kiri 0 diantara 0 dan 2 dan kanan 2 diujikan keturunan kedua

  - $f''(x) = -12x^2 + 24x\,; f''(-1) = -12 < 0$

    $\rightarrow f(x)\ cekung\ kebawah\ pada\ interval\ (-\infty, 0]$
  - $f''(x) = -12x^2 + 24x\,; f''(1) = 12 > 0$

    $\rightarrow f(x)\ cekung\ keatas\ pada\ interval\ (-\infty, 0]$
  - $f''(x) = -12x^2 + 24x\,; f''(3) = -36 < 0$

    $\rightarrow f(x)\ cekung\ kebawah\ pada\ interval\ [3, +\infty)$



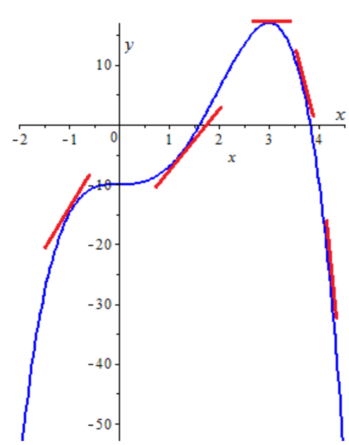
3. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 10$
   - Titik potong sumbu *y*, *x* = 0 didapat *y* = -10
   - Titik potong sumbu x, y = 0;

     $-x^4 + 4x^3 - 10 = 0$ **sulit didapat abaikan**

4. Ambil beberapa titik

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-58	-15	-10	-7	6	17	-10

5. Sket Grafik



MATEMATIKA ITS

Contoh 3.

Sket garfik fungsi: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

Jawab

1. Turunan Pertama: Interval fungsi naik/turun dan titik Ekstrem

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5 \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0\,;\; 4x^3 - 16x = 0\,;\; 4x(x^2 - 4) = 0\,;$$

$$x_1 = 0\,;\; x_2 = 2\;\;;\;\; x_3 = -2$$

$$x_1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 = 0^4 - 8.0^2 + 5 = 5$$

$$x_2 = 2 \;\rightarrow\; y_2 = 2^4 - 8.2^2 + 5 = -11$$

$$x_3 = -2 \;\rightarrow\; y_3 = (-2)^4 - 8.(-2)^2 + 5 = -11$$

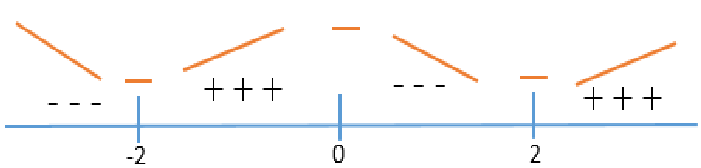
Titik Ekstrem: (0, 5) ; (2, -11) dan (-2, -11)

MATEMATIKA ITS

- Menentukan interval fungsi naik/turun dan titik ekstrem → Uji tanda

Ambil nilai *x* kiri -2 diantara -2 dan 0, diantara 0 dan 2, kanan 2 diujikan turunan pertama

- $f'(x) = 4x^3 - 16x\,; f'(-3) = -60 < 0$
  $\rightarrow f(x)\; turun\; pada\; interval\; (-\infty, -2]$
- $f'(x) = 4x^3 - 16x\,; f'(-1) = 12 > 0 \rightarrow f(x)\; naik\; pada\; interval\; [-2, 0]$
- $f'(x) = 4x^3 - 16x\,; f'(1) = -12 < 0 \rightarrow f(x)\; turun\; pada\; interval\; [0, 2]$
- $f'(x) = 4x^3 - 16x\,; f'(3) = 60 > 0 \rightarrow f(x)\; naik\; pada\; interval\; [2, +\infty)$



MATEMATIKA ITS

- Titik (-2, -11) perpindahan fungsi turun ke fungsi naik → titik ekstrem minimum relatif
- Titik (0, 5) perpindahan fungsi naik ke fungsi turun → titik maksimum relatif
- Titik (2, -11) perpindahan fungsi turun ke fungsi naik → titik ekstrem minimum relatif

MATEMATIKA ITS

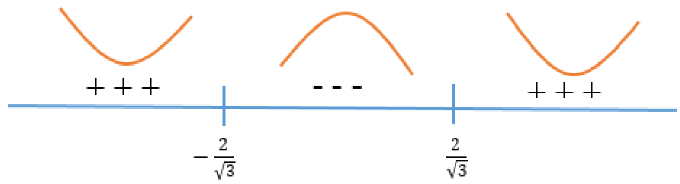
2. Turunan kedua: Kecekungan fungsi dan titik belok

- $f'(x) = 4x^3 - 16x \ \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16$
- $f''(x) = 0 \ \rightarrow \ 12x^2 - 16 = 0\ ;\ 12x^2 = 16\ ;\ x^2 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3};$
- $x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \ \rightarrow \ y_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 5 = \frac{16}{9} - 8.\frac{4}{3} + 5$

  $= \frac{16-96+75}{9} = -\frac{5}{9}$
- $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \ \rightarrow \ y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8.\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 5 = \frac{16}{9} - 8\frac{4}{3} + 5 = -\frac{5}{9}$

Titik $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ dan $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$ adalah titik belok yaitu perubahan kecekungan fungsi dari cekung kebawah berpindah cekung keatas atau sebaliknya

- Uji tanda kecekungan fungsi



Ambil nilai x kiri $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ diantara $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ dan $\frac{2}{\sqrt{3}}$ dan kanan $\frac{2}{\sqrt{3}}$ diujikan keturunan kedua

- $f''(x) = 12x^2 - 16\,; f''(-2) = 12.(-2)^2 - 16 = 32 > 0$

  $\rightarrow f(x)\ cekung\ keatas\ pada\ interval\ (-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}]$
- $f''(x) = 12x^2 - 16\,; f''(0) = 12.(0)^2 - 16 = -16 < 0$

  $\rightarrow f(x)\ cekung\ kebawah\ pada\ interval\ [\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$
- $f''(x) = 12x^2 - 16\,; f''(2) = 12.(2)^2 - 16 = 32 > 0$

  $\rightarrow f(x)\ cekung\ kebawah\ pada\ interval\ [\frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$

3. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$

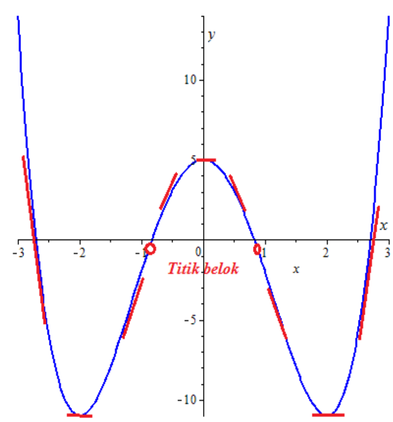
   Titik potong sumbu y, $x = 0$ didapat $y = 5$

   Titik potong sumbu x, $y = 0$; $x^4 - 8x^2 + 5 = 0$
   sulit didapat abaikan

4. Ambil beberapa titik

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
y	24	-11	-2	5	2	-11	24

5. Sket Grafik



$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

Fungsi naik/turun dan titik ekstrem

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x \to f'(x) = 0; 4x^3 - 9x^2 + 6x = 0$

$\leftrightarrow x(4x^2 - 9x + 6) = 0$

$x_1 = 0\,; y = 1$

$x_2 = x_3$ *imajiner*

$f(x)$ *naik* $[0, +\infty)$; *turun* $(-\infty, 0]$

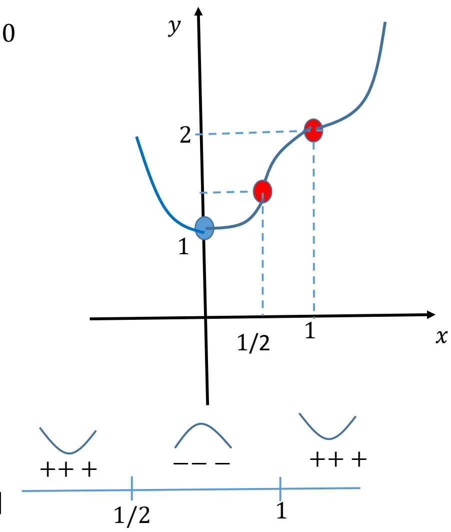
Kecekungan fungsi dan titik belok

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 9x \to f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$

$f''(x) = 0\,;\ \ 12x^2 - 18x + 6 = 0\,;$

$x_1 = 1\,;\ \ y = 2\,;\ \ x_2 = \frac{1}{2}; y = \frac{23}{16}$

$f(x)$ *cekung keatas* $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$; *kebawah* $[1/2, 1]$



5.3 Grafik Fungsi Rasional

Fungsi rasional berbentuk:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ dimana } P(x) \text{ dan } Q(x) \text{ fungsi polinomial}$$

Urutan menggambar grafik fungsi rasional

1. Asimtot datar:

   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a\ ;\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = a\ ;\quad y = a$ asimtot datar

2. Asimtot tegak:

   $Q(x) = 0$

3. Turunan pertama: Titik ekstrem dan interval fungsi naik/turun
4. Turunan kedua: Titik belok dan interval kecekungan fungsi (cekung keatas/kebawah)
5. Titik potong sumbu *y*, *x* = 0 dan titik potong sumbu *x*, *y* = 0 jika ada
6. Ambil beberapa titik

Contoh

Sket grafik $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$

Jawab

1. Asimtot datar:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1 \;\; ; \;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1 \;\; ; \quad y = 1 \text{ asimtot datar}$$

2. Asimtot tegak

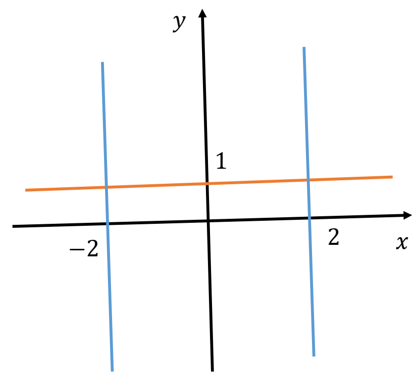
$$x^2 - 4 = 0 \;\; ; \quad x_1 = 2 \;\; ; \quad x_2 = -2$$

$$x = -2^- \approx -2.000 \ldots 1 \to f(x) = \frac{(-2.000 \ldots 1)^2 + 2}{(-2.000 \ldots 1)^2 - 4} = +\infty$$

$$x = -2^+ \approx -1{,}999 \ldots 9 \to f(x) = \frac{(-1.999 \ldots 9)^2 + 2}{(-1.999 \ldots 9)^2 - 4} = -\infty$$

$$x = 2^+ \approx 2.000 \ldots 1 \to f(x) = \frac{(2.000 \ldots 1)^2 + 2}{(2.000 \ldots 1)^2 - 4} = +\infty$$

$$x = 2^- \approx 1{,}999 \ldots 9 \to f(x) = \frac{(1.999 \ldots 9)^2 + 2}{(1.999 \ldots 9)^2 - 4} = -\infty$$



3. Turunan pertama: Titik ekstrem dan fungsi naik/turun

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2-4) - (x^2+2)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 4x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-12x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to -12x = 0 \leftrightarrow x = 0\,; y = \frac{0^2+2}{0^2-4} = -\frac{1}{2}$$

Interval fungsi naik/turun : $f(x)$ naik pada $(-\infty, 0]$

$f(x)$ turun pada $[0, +\infty,)$

$+ + +$ $\quad - - -$

0

MATEMATIKA ITS

4 Turunan kedua: Titik belok dan kecekungan fungsi

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-12)(x^2-4)^2 - (-12x)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)[(-12)(x^2-4) + (48x^2)]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{36x^2+48}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 36x^2 + 48 = 0$

$x =$ imajiner, tidak ada titik belok

Kecekungan fungsi diuji pada nilai ekstrem dan asimtot tegak:

$f(x)$ cekung keatas pada $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ dan cekung kebawah $(-2, 2)$

$+ + +$ | $- - -$ | $- - -$ | $+ + +$

-2 0 2

MATEMATIKA ITS

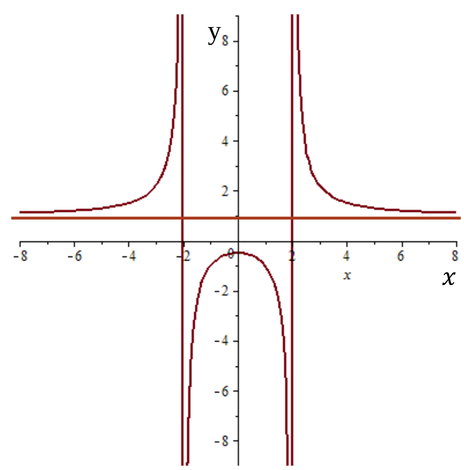
5. Titik potong sumbu *y*, *x* = 0 ; $y = \frac{x^2+2}{x^2-4} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$

   Titik potong sumbu *x*, y = 0 tidak ada

6. Ambil beberapa titik

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
y	18/8	9/5	-1	-1/2	-1	9/5	18/5

7. Grafik fungsi



MATEMATIKA ITS

Contoh

Sket grafik $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

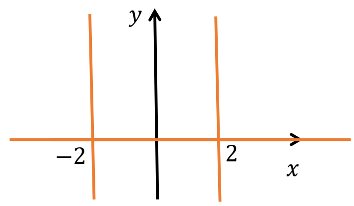
Jawab

1. Asimtot datar:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \;\; ; \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-4} = 0 \;\; ; \quad y = 0 \text{ (sumbu } x\text{) asimtot datar}$$

2. Asimtot tegak:

$$x^2 - 4 = 0 \;\; ; \quad x_1 = 2 \;\; ; \quad x_2 = -2$$



31

MATEMATIKA ITS

3. Turunan pertama: Titik ekstrem dan fungsi naik/turun

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2-4)-(x)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to -x^2 - 4 = 0 \leftrightarrow \text{Imajiner, tidak ada titik ekstrem}$$

Interval fungsi naik/turun :

Nilai $f'(x)$ selalu negatif untuk semua x, $f(x)$ turun pada $(-\infty, +\infty,)$

32

4 Turunan kedua: Titik belok dan kecekungan fungsi

MATEMATIKA ITS

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x)(x^2-4)^2 - (-x^2-4)(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)[(-2x)(x^2-4) - (-x^2-4)(4x)]}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$f''(x) = 0 \rightarrow 2x^3 + 24x = 0 \rightarrow 2x(x^2+12) = 0\,; x = 0$ dan Imajiner

$x = 0$ titik belok

Kecekungan fungsi diuji pada titik belok dan asimtot tegak:

$f(x)$ cekung kebawah pada $(-\infty, -0)$ dan cekung keatas $(0, +\infty)$

$- - -$ | $+ + +$ | $- - -$ | $+ + +$

-2 0 2

MATEMATIKA ITS

5. Titik potong sumbu y, $x = 0$; $y = \frac{x}{x^2-4} \rightarrow y = 0$

   Titik potong sumbu x, $y = 0$; $x = 0$

6. Ambil beberapa titik

x	-4	-3	-1	0	1	3	4
y	-4/12	-9/5	-1/3	0	1/3	9/5	4/12

$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

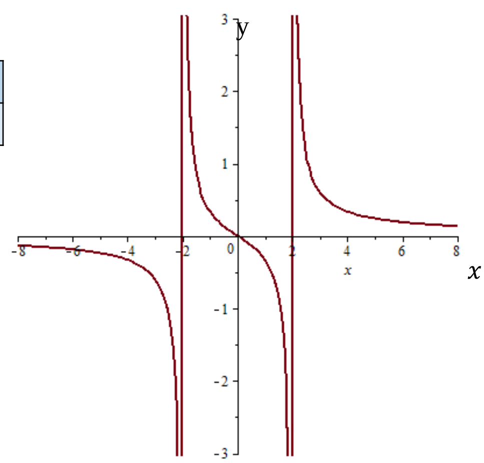
$x = -2^- \rightarrow f(x) = \frac{-2.000\ldots1}{+kecil\ sekali} = -\infty$

$x = -2^+ \rightarrow f(x) = \frac{-1.999\ldots9}{-kecil\ sekali} = +\infty$

$x = 2^- \rightarrow f(x) = \frac{1.999\ldots9}{-kecil\ sekali} = -\infty$

$x = 2^+ \rightarrow f(x) = \frac{2.000\ldots1}{+kecil\ sekali} = +\infty$

7. Grafik fungsi



MATEMATIKA ITS

$Latihan : Sket\ grafik\ f(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+x-1}$

Jawab

1. Asimtot datar:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x-2}{x^2-4} = 1 \ ; \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x-2}{x^2-4} = 1; \quad y = 1$$

2. Asimtot tegak:

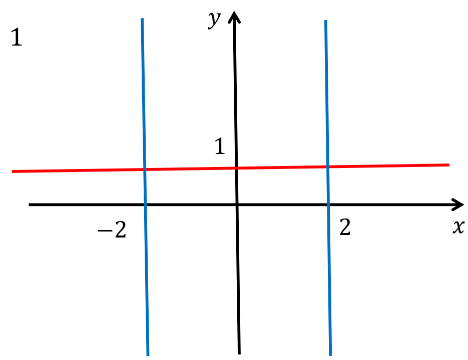
$$x^2 - 4 = 0 \ ; \quad x_1 = 2 \ ; \quad x_2 = -2$$

$$x = -2^- \to f(x) = \frac{+}{+} = +\infty$$

$$x = -2^+ \to f(x) = \frac{+}{-} = -\infty$$

$$x = 2^- \to f(x) = \frac{-}{-} = +\infty$$

$$x = 2^+ \to f(x) = \frac{-}{+} = -\infty$$



MATEMATIKA ITS

3. Turunan pertama: Titik ekstrem dan fungsi naik/turun

$$f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-4)-(x^2-3x-2)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^2-4x+12}{(x^2-4)^2}$$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 4x + 12 = 0 \leftrightarrow$ Imajiner, tidak ada titik ekstrem

Interval fungsi naik/turun :

Nilai $f'(x)$ selalu positif untuk semua x, $f(x)$ naik pada $(-\infty, +\infty,)$

MATEMATIKA ITS

4. Turunan kedua: Titik belok dan kecekungan fungsi

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 12}{(x^2 - 4)^2}$$

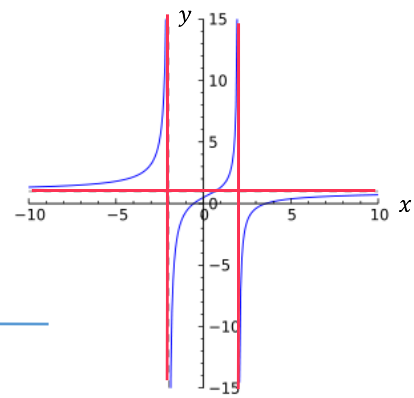
$$f''(x) = \frac{-6x^3 + 12x^2 - 72x + 16}{(x^2 - 4)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^3 - 6x^2 + 36x - 8 = 0 \leftrightarrow$$

Interval kecekungan fungsi :

$+ + +$ $- - -$ $+ + +$ $- - -$

-2 0 2



MATEMATIKA ITS

Bab 5. Aplikasi Turunan Lanjut ….

- *Gambar Grafik asimtot miring*
- *Garis Singgung tegak*
- *Maksimum dan minimum Absolut*
- *Masalah Maksimum dan Minimuum*