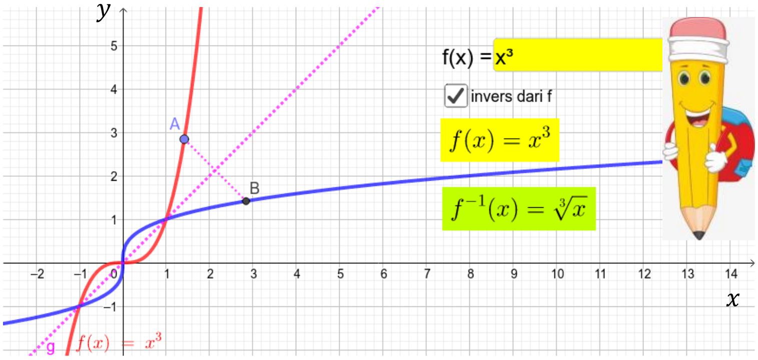
MATEMATIKA ITS



Bab 2: Fungsi

Daryono Budi Utomo

1

MATEMATIKA ITS

Bab 2. Fungsi

- ☑ 2.1 Definisi dan Notasi Fungsi
- ☑ 2.2 Operasi Pada Fungsi
- ☑ 2.3 Grafik Fungsi
- ☑ 2.4 Fungsi Invers

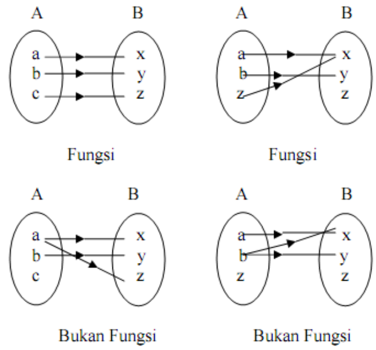
2

2.1 Definisi dan Notasi Fungsi

MATEMATIKA ITS

Definisi Fungsi

Diberikan dua himpunan *A* dan *B* yang tidak kosong.
Suatu fungsi dari *A* ke *B*, ditulis *f*: *A* → *B* adalah aturan yang memasangkan setiap anggota *A* dengan tepat satu anggota *B* dan dinyatakan oleh *y* = *f*(*x*).
A disebut daerah asal (domain) dinotasikan D_f, *B* disebut daerah hasil (range) dinotasikan R_f.
x disebut peubah (vaiabel) bebas, *y* disebut peubah (variabel) tak bebas (terikat)



Contoh 1.

MATEMATIKA ITS

Jika $f(x) = 3x^2 - 1$, maka

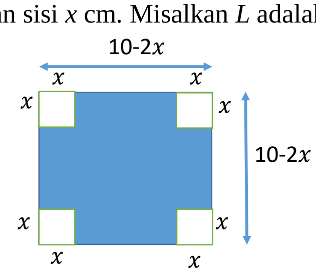
$f(-4) = 3.(-4)^2 - 1 = 47$, $f(0) = 3.0^2 - 1 = 1$, $f(5) = 3.5^2 - 1 = 74$,

Domain: *x* = -4, 0, 5

Range: *y* = 47, -1, 74

Domain yang ditentukan pertimbangan Fisis dan Geometri

Perhatikan ilustrasi berikut:
Bangun persegi dari karton dengan sisi 10 cm, pada masing-masing pojoknya dipotong persegi dengan sisi *x* cm. Misalkan *L* adalah luas (dalam *cm*2) lembaran karton yang tersisa



$L = 100 - 4x^2$, $0 \le x \le 5$

- Nilai $x \geq 0$ karena *x* menyatakan panjang potongan karton
- Nilai *x* tidak bisa melebihi lima, karena panjang karton maksimum 10, jika $x > 5$ tidak mungkin
- Domain dari *L* terbatas oleh kondisi Fisis

Domain Alami/Natural

Domain natural adalah nilai x berupa bilangan real yang diijinkan/diperbolehkan

MATEMATIKA ITS

Contoh 2.

1. Domain $f(x) = 3x^2 - 5$, $D_f = (-\infty, +\infty)$ artinya semua bilangan real
2. Domain $f(x) = \sqrt{2 - x}$,
   Nilai dalam akar $\geq 0 \rightarrow 2 - x \geq 0 \leftrightarrow x \leq 2$, $D_f = (-\infty, -2]$
3. Domain $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$,
   Nilai dalam akar $\geq 0 \rightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \leftrightarrow (x-3)(x+2) \geq 0 \leftrightarrow x \leq -2 \cup x \geq 3$
   $D_f = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$
4. Domain $f(x) = \frac{2x}{x-5}$, $x \neq 5$; $D_f = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$
5. Domain $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$, $x \neq -3$; $x \neq 2$, $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$

Domain Yang Ditentukan Dengan Pembatasan Khusus

MATEMATIKA ITS

Untuk membatasi pengamatan pada percobaan, misal percobaan dengan waktu tertentu sering diperlukan pembatasan domain, pembatasan yang demikian disebut domain yang dibatasi secara khusus

Contoh 3.

Fungsi $f(t) = 3t^2 + 1$ merupakan hasil percobaan yang diperoleh dari waktu 1 menit sampai dengan 10 menit berarti: $D_f = \{t \mid 1 \leq t \leq 10\}$ menit, walaupun secara alami domain f semua nilai bilangan real

Teknik Mendapatkan Range

Kadang kala range fungsi telah jelas sehingga mudah ditentukan akan tetapi ada kalanya sulit ditentukan nilai range dari suatu fungsi.
Jika nilai range suatu fungsi $y = f(x)$ sulit ditentukan, ubahlah menjadi $x = g(y)$

Contoh 4.

1. Domain $f(x) = 3x^2 - 5$, $D_f(-\infty, +\infty)$, untuk nilai *x* negatif hasil *f* selalu positif, nilai *f* yang terkecil adalah -5 sehingga $R_f = [-5, +\infty)$
2. Domain $f(x) = \sqrt{2 - x}$,
   Nilai dalam akar ≥ 0 → $2 - x \geq 0 \leftrightarrow x \leq 2$, $D_f = (-\infty, -2]$, $R_f = [0, +\infty)$
3. Domain $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$,
   Nilai dalam akar ≥ 0 → $x^2 - x - 6 \geq 0 \leftrightarrow (x-3)(x+2) \geq 0 \leftrightarrow x \leq -2 \cup x \geq 3$
   $D_f(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, $R_f = [0, +\infty)$
4. Domain $f(x) = \frac{2x}{x-5}$, $x \neq 5$; $D_f = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$
   Untuk mencari range
   $$f(x) = \frac{2x}{x-5} \leftrightarrow y = \frac{2x}{x-5} \leftrightarrow xy - 5y = 2x \leftrightarrow xy - 2x = 5y \leftrightarrow x(y-2) = 5y$$
   $$\rightarrow x = \frac{5y}{y-2}\ , R_f = \{y \mid y < 2 \cup y > 2, y \in Real\}\ , R_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

Fungsi Yang Didefinisikan Sepotong-Sepotong

Ada kalanya suatu fungsi didefinisikan sepotong sepotong, sebagai ilustrasi perhatikan contoh berikut

Ongkos taksi berdasarkan jarak yang ditempuh kurang dari 5 km Rp. 5000,- selebihnya ada biaya tambahan mengikuti aturan:

$$f(x) = \begin{cases} 5000; & 0 < x \leq 5 \\ 5000 + 200(x-1)\ ; & x > 5 \end{cases}$$

Untuk x = 4,2 maka nilai $f(x)$ = 5000

x = -2 maka nilai $f(x)$ tidak ada

x = 7,4 maka nilai $f(x)$ = 5000 + (7,4 – 1) = 5000 – 200(6,4) = 6800

Nilai Mutlak

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

2.2 Operasi Pada Fungsi

MATEMATIKA ITS

Fungsi f dan g dapat djumlahkan, dikurangkan , dikalikan dan dibagi

Definisi

Diberikan fungsi f dan g rumus untuk jumlah, kurang, hasil kali dan hasil bagi fungsi didefinisikan dengan:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f\ .\ g)(x) = f(x)\ .\ g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Domain $f+g, f-g,\ f.g$ dan $\frac{f}{g}$ didefinisika irisan dari domain f dan g atau dinyatakan dengan: $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g$. Untuk Domain hasil bagi adalah: $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ kecuali di titik titik yang membuat $g(x) = 0$

MATEMATIKA ITS

Contoh 5.

Diberikan $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ dan $g(x) = x - 3$; $D_f = [2, +\infty)$; $D_g = (-\infty, +\infty)$

- $(f+g)(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3 = x + \sqrt{x-2} - 2$
- $(f-g)(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2}$
- $(f\ .\ g)(x) = \left(1+\sqrt{x-2}\right).(x-3) = x - 3 + x\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2}$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty)\ \cap (-\infty, +\infty) = [2, +\infty)$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-3}$, $D_{\frac{f}{g}} = [2, +\infty)$, kecuali di $x = 3$, sehingga :

  $D_{\frac{f}{g}} = [2, 3) \cup (3, +\infty)$

Komposisi Fungsi

MATEMATIKA ITS

Komposisi fungsi merupakan suatu penggabungan dari operasi pada dua jenis **fungsi** $f(x)$ dan $g(x)$ sehingga menghasilkan **fungsi** baru.

Contoh 6.

1. Diberikan $f(x) = x^2 - 2\,; g(x) = x - 1$
   - $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-1) = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 - 2 = x^2 - 2x - 1$
   - $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 - 2) = x^2 - 2 - 1 = x^2 - 3$
   - $(fog)(x) \neq (gof)(x)$

2. Diberikan $f(x) = \frac{x+3}{x-1}\,; g(x) = x + 5\,; (gof)(3) = ?$
   - $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{x+3}{x-1} + 5 = \frac{x+3}{x-1} + \frac{5(x-1)}{(x-1)} = \frac{6x-2}{x-1}$

     $(gof)(3) = \frac{6.3-2}{3-1} = \frac{16}{2} = 8$

Definisi

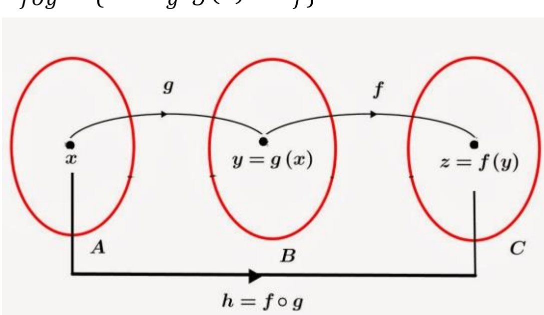
MATEMATIKA ITS

Diberikan fungsi – fungsi f dan g , komposisi f dengan g ditulis dengan fog adalah fungsi yang didefinisikan dengan

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Domain fog terdiri dari semua x dalam domain g dimana $g(x)$ dalam domain f, atau

$D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$



Proses komposisi fungsi $(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$ D_g dipetakan oleh fungsi g menghasilkan R_g, selanjutnya R_g menjadi domain dari fungsi f, namun perlu diperhatikan apakah elemen dari R_g berada pada D_f

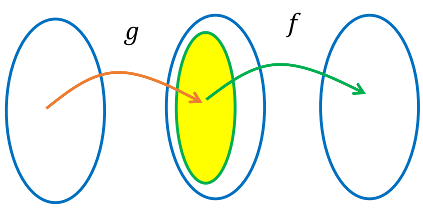
MATEMATIKA ITS

Contoh 7

1.a Diberikan $f(x) = x^2 + 3$; $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = [3, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x}$; $D_g = [0, +\infty)$; $R_g = [0, +\infty)$

- $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$
- $D_{fog} = ?$



$D_g = [0, +\infty)$ $R_g = [0, +\infty)$

$D_f = (-\infty, +\infty)$

$R_g \cap D_f = [0, +\infty)$

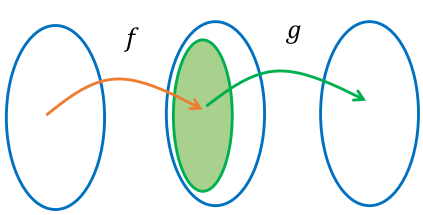
Pemetaan g ; $D_g = [0, +\infty)$ menghasilkan $R_g = [0, +\infty)$ dilanjutkan lagi dengan pemetaan f ; $D_f = (-\infty, +\infty)$ Pemetaan f dengan domainnya tidak bisa dilakukan karena tergantung dari R_g, dengan demikian $R_g \cap D_f = [0, +\infty)$ yag merupakan D_f yang baru (pada Gambar warna kuning) Hasil dari $R_g \cap D_f = [0, +\infty)$ harus berasal dari domain g yaitu $D_g = [0, +\infty)$ yang merupakan $D_{fog} = [0, +\infty)$

MATEMATIKA ITS

1.b Diberikan $f(x) = x^2 + 3$; $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = [3, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x}$; $D_g = [0, +\infty)$; $R_g = [0, +\infty)$

- $(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}$
- $D_{gof} = ?$



$D_f = (-\infty, +\infty)$ $R_f = [3, +\infty)$

$D_g = [0, +\infty)$

$R_f \cap D_g = [3, +\infty)$

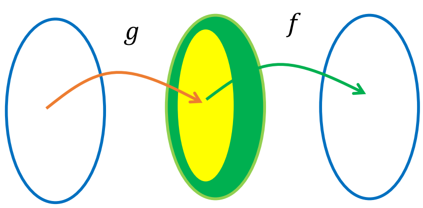
Pemetaan f ; $D_f = (-\infty, +\infty)$ menghasilkan $R_f = [3, +\infty)$ dilanjutkan lagi dengan pemetaan g ; $D_g = [0, +\infty)$ Pemetaan g dengan domainnya tidak bisa dilakukan karena tergantung dari R_f, dengan demikian $R_g \cap D_f = [3, +\infty)$ yag merupakan D_g yang baru (pada Gambar warna hijau) Hasil dari $R_f \cap D_g = [3, +\infty)$ harus berasal dari domain f yaitu $D_f = (-\infty, +\infty)$ yang merupakan $D_{fog} = (-\infty, +\infty)$

MATEMATIKA ITS

2 Diberikan $f(x) = \sqrt{x-2}\,;\ D_f = [2, +\infty)\,;\quad R_f = [0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt{x-3}\,;\ D_g = [3, +\infty)\ ;\quad R_g = [0, +\infty)$

- $(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-3}\big) = \sqrt{\sqrt{x-3} - 2}$
- $D_{fog} = ?$



$D_g = [3, +\infty)$

$R_g = [0, +\infty)$

$D_f = [2, +\infty)$

$R_g \cap D_f = [2, +\infty)$

Pemetaan $g\ ;\ D_g = [3, +\infty)$ menghasilkan $R_g = [0, +\infty)$ dilanjutkan lagi dengan pemetaan $f\ ;\ D_f = [2, +\infty)$ Pemetaan f dengan domainnya tidak bisa dilakukan karena tergantung dari R_g, dengan demikian $R_g \cap D_f = [2, +\infty)$ yag merupakan D_f yang baru (pada Gambar warna kuning) Hasil dari $R_g \cap D_f = [2, +\infty)$ harus berasal dari domain g yaitu $[7, +\infty)$ yang merupakan $D_{fog} = [7, +\infty)$

MATEMATIKA ITS

Fungsi Komposisi $f(x)$ dan $g(x)$

Jika diketahui komposisi fungsi $h(x) = (fog)(x) = 3x^2 + 4$; fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ tidak tunggal artinya $f(x)$ dan $g(x)$ dapat ditemukan lebih dari satu yaitu:

1. $g(x) = 3x^2\ ;\ \ f(x) = x + 4$
2. $g(x) = x\ ;\ \ f(x) = 3x^2 + 4$
3. $g(x) = x - 2\ ;\ \ f(x) = 3x^2 + 12x - 8$
4. …

MATEMATIKA ITS

Contoh 8

Suatu pemetaan $f: R \to R$ dengan $(gof)(x) = 2x^2 + 4x + 6$ dan $g(x) = 2x + 3$ maka $f(x) = \ \dots.$

Jawab

Menentukan $f(x)$

$$(gof)(x) = 2x^2 + 4x + 5$$
$$g\big(f(x)\big) = 2x^2 + 4x + 5$$
$$2\big(f(x)\big) + 3 = 2x^2 + 4x + 5$$
$$2f(x) = 2x^2 + 4x + 2$$
$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 9.

Jika $g(x-2) = 2x - 3$ dan $(fog)(x-2) = 4x^2 - 8x + 3$ maka $f(-3) = \cdots.$

Jawab.

$$g(x-2) = 2x - 3$$
$$(fog)(x-2) = 4x^2 - 8x + 3$$
$$f(g(x-2)) = 4x^2 - 8x + 3$$
$$f(2x-3) = 4x^2 - 8x + 3$$

Menentukan $f(-3)$
Jika $-3 = 2x - 3 \to 2x = 0; \quad x = 0$
Sehingga
$f(-3) = 4(0)^2 - 8(0) + 3 = 3$

Contoh 10.

Diberikan $f(g(x)) = g(f(x))$. Jika $f(x) = 2x + p$ dan $g(x) = 3x + 120$ maka nilai dari $p =$

Jawab.

Menentukan nilai p

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(f(x)) \\ f(3x+120) &= g(2x+p) \\ 2(3x+120)+p &= 3(2x+p)+120 \\ 6x+240+p &= 6x+3p+120 \\ -2p &= -120 \\ p &= 60 \end{aligned}$$

Contoh 11.

Misalkan $f: R \to R$ dan $g: R \to R$; $f(x) = x + 2$ dan $(gof)(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
Misalkan x_1 dan x_2 akar-akar dari $g(x) = 0$ maka $x_1 + 2x_2 = \ \ldots$.

Jawab.

Menentukan $g(x)$

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= 2x^2+4x-6 \\ g(f(x)) &= 2x^2+4x-6 \\ g(x+2) &= 2x^2+4x-6 \\ g(x) &= 2(x-2)^2+4(x-2)-6 \\ g(x) &= 2(x^2-4x+4)+4x-8-6 \\ g(x) &= 2x^2-8x+8+4x-14 \\ g(x) &= 2x^2-4x-6 \end{aligned}$$

Menentukan x_1 dan x_2

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= 2x^2-4x-6 \\ (x-3)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 3$ dan $x_2 = -1$

Jadi:

$x_1 + 2x_2 = 3 + 2(-1) = 1$

Atau:

$x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$

$x_1 + 2x_2 = -1 + 2(3) = 5$

Klasifikasi Fungsi

Berdasarkan letak dari peubah

1. Fungsi Implisit $F(x, y) = 0$ peubah x dan y menjadi satu
   Contoh: $3x^2y + 4y - 7 = 0$
2. Fungsi Eksplisit $y = f(x)$ peubah x dan y terpisah, x dan konstanta di sisi kanan dan y di sisi kiri
   - $y = c$, $c =$ konstanta, fungsi konstan
   - $y = ax + b$ fungsi Polinomial Linier
   - $y = ax^2 + bx + c$ fungsi Polinomial Kuadratik
   - $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fungsi Polinomial Kubik
   - $y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n}$ fungsi Rasional

2.3 Grafik Fungsi

Dalam menggambar grafik fungsi yang perlu diperhatikan:

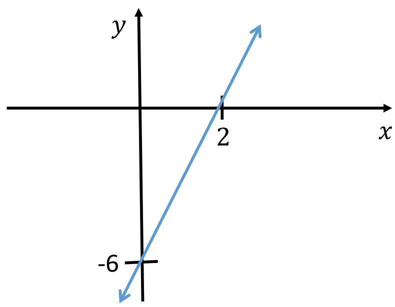
- Domain dan range fungsi
- Titik potong sumbu x, $y = 0$ dan titik potong sumbu y, $x = 0$, hal ini dilakukan apabila mudah mencarinya
- Ciri dari fungsi, $y = ax + b$ fungsi linier grafiknya berupa garis cukup diambil 2 titik, selain itu kurva lengkung
- Ambil beberapa nilai x dalam domain kemudia tentukan nilai y yang merupakan range fungsi dalam bentuk tabel

x					
y					

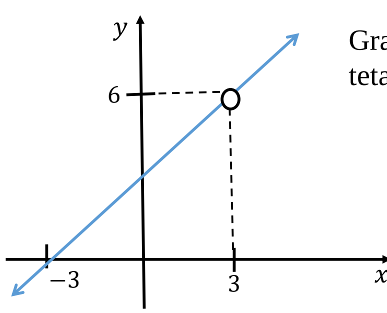
- Ingat bahwa domain fungsi adalah bilangan real maka hubungkan pasangan titik yang mudah dicari

Contoh 8

1. Sket grafik fungsi: $f(x) = 2x - 6$
   - Merupakan fungsi dari garis dengan $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = (-\infty, +\infty)$
   - Titik potong sumbu x ; $y = 0 \to x = 3$; Titik potong sumbu y ; $x = 0 \to y = -6$



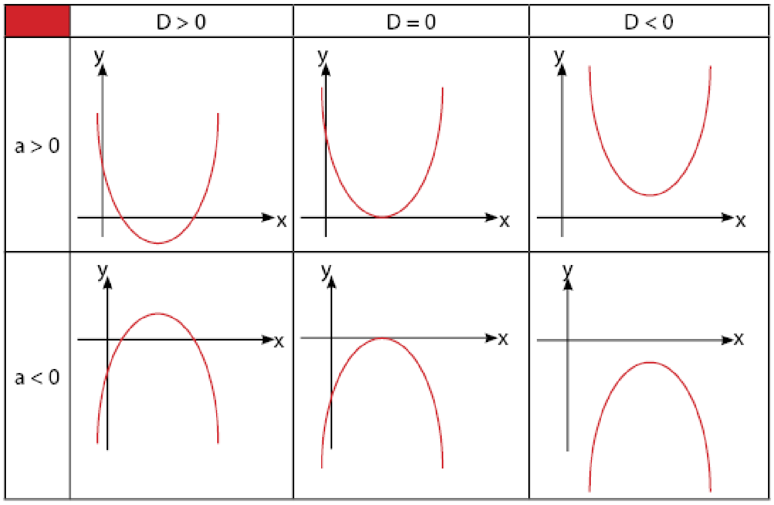
2. Sket grafik fungsi: $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$
   - $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \to y = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3 \,; x \neq 3$
   - Fungsi dari garis dengan $D_f = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
   - Titik potong sumbu x ; $y = 0 \to x = -3$;
     Titik potong sumbu y ; $x = 0 \to y = 3$



Grafik merupakan garis lurus $y = x + 3$, tetapi pada saat $x = 3$ berlubang karena $x \neq 3$

Grafik Parabola: $y = ax^2 + bx + c$

MATEMATIKA ITS



Titik puncak Parabola

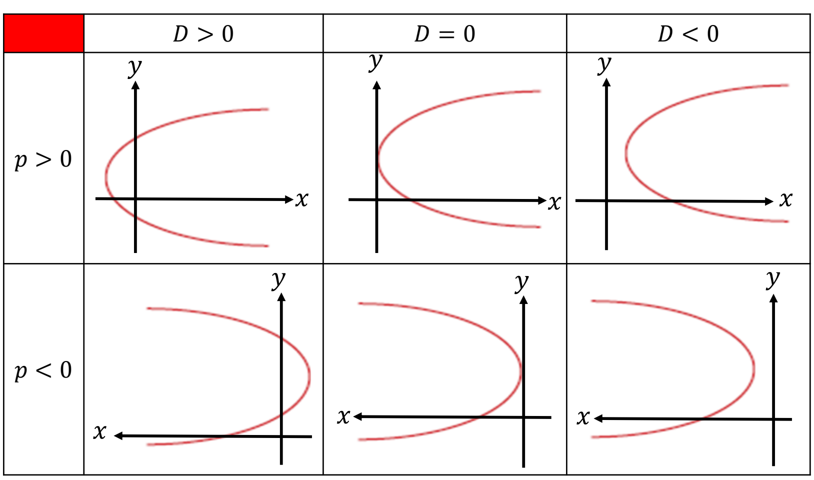
$$x = \frac{-b}{2a}, y = \frac{-D}{4a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

25

Grafik Parabola: $x = py^2 + qy + r$

MATEMATIKA ITS



Titik puncak Parabola

$$x = \frac{-D}{4p}, y = \frac{-q}{2p}$$

$$D = q^2 - 4pr$$

26

Contoh; Sket Grafik Parabola: $y = 2x^2 + 3x - 2$

MATEMATIKA ITS

Jawab

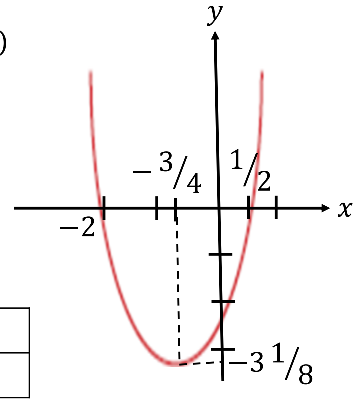
- $y = f(x)$ dan $a = 2 > 0$, parabola terbuka keatas
- Titik potong sumbu *y*, *x* = 0 $\rightarrow y = -2$; $(0, -2)$
- Titik potong sumbu *x*, *y* = 0 $\rightarrow 0 = 2x^2 + 3x - 2 \leftrightarrow (2x - 1)(x + 2) = 0$

$$x = \frac{1}{2} \; ; x = -2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \;\; ; \;\; (-2{,}0)$$

- *Titik puncak Parabola*

$$x = \frac{-3}{2.2} = -\frac{3}{4}$$

$$y = \frac{-(3^2 - 4.2.(-2))}{4.2} = -\frac{25}{8} = -3\frac{1}{8} \rightarrow \left(-\frac{3}{4}, -3\frac{1}{8}\right)$$



- Untuk membantu sket grafik ambil beberapa titik

x	−3	−1	0	1	2
y	7	−3	−2	3	12

Contoh; Sket Grafik Parabola: $y = 3 + 2x - x^2$

MATEMATIKA ITS

Jawab

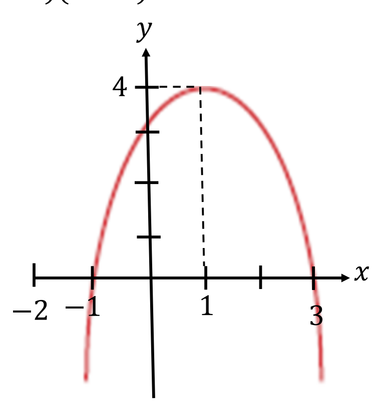
- $y = f(x)$ dan $a = -1 < 0$, parabola terbuka kebawah
- Titik potong sumbu *y*, *x* = 0 $\rightarrow y = 3$; $(0, 3)$
- Titik potong sumbu *x*, *y* = 0 $\rightarrow 0 = -x^2 + 2x + 3 \leftrightarrow (-x - 1)(x - 3) = 0$

$$x = -1 \; ; x = 3 \rightarrow (-1, 0) \;\; ; \;\; (3, 0)$$

- *Titik puncak Parabola*

$$x = \frac{-2}{2.(-1)} = 1$$

$$y = \frac{-(2^2 - 4.(-1)\,3)}{4.(-1)} = -\frac{-16}{-4} = 4 \rightarrow (1{,}4)$$



- Untuk membantu sket grafik ambil beberapa titik

x	−2	0	2	4
y	−5	3	3	−5

MATEMATIKA ITS

Contoh; Sket Grafik Parabola: $x = y^2 - 4y + 4$

Jawab

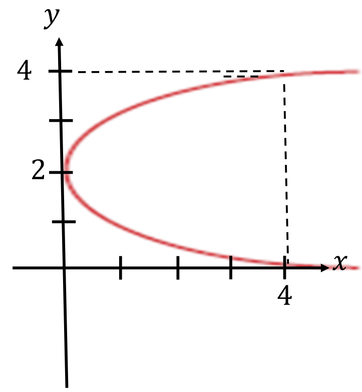
- $x = g(y)$ dan $p = 1 > 0$, parabola terbuka kekanan
- Titik potong sumbu x, $y = 0 \rightarrow x = 4$; $(4, 0)$
- Titik potong sumbu y, $x = 0 \rightarrow 0 = y^2 - 4y + 4 \leftrightarrow (y-2)^2 = 0$

  $y = 2 \rightarrow (0, 2)$
- $Titik\ puncak\ Parabola$

  $$y = \frac{-(-4)}{2.(1)} = 2$$

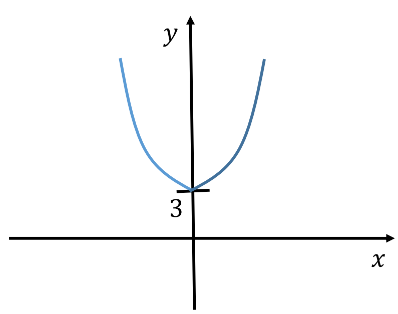
  $$x = \frac{-((-4)^2 - 4.1.4)}{4.(1)} = 0 \rightarrow (0, 2)$$
- Untuk membantu sket grafik ambil beberapa titik

y	−1	0	1	3	4
x	9	4	1	1	4



MATEMATIKA ITS

3. Sket grafik fungsi: $f(x) = x^2 + 3$
   - Fungsi dari parabola terbuka keatas dengan $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = [3, +\infty)$
   - Titik potong sumbu x ; $y = 0 \rightarrow x^2 + 3 = 0$; tidaka ada titik potong sumbu x; Titik potong sumbu y ; $x = 0 \rightarrow y = 3$

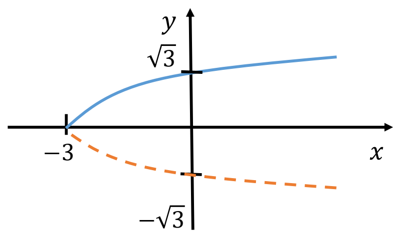


MATEMATIKA ITS

Contoh

4. Sket grafik fungsi: $f(x) = \sqrt{3+x}$
   - $D_f = [-3, +\infty)\,; R_f = [0, +\infty)$
   - Titik potong sumbu x ; $y = 0 \rightarrow \sqrt{3+x} = 0$
     Kedua ruas dikuadratkan didapat: $3 + x = 0 \rightarrow x = -3; (-3, 0)$
     Titik potong sumbu y ; $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{3+0} = \sqrt{3}$
   - Ambil beberapa titik dalam domai

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**
y	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

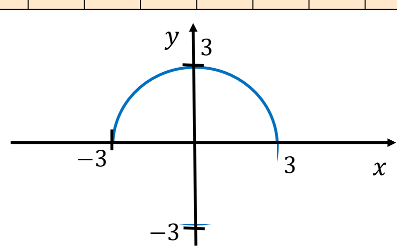


Jika $f(x) = \sqrt{3+x} \leftrightarrow y = \sqrt{x+3}$
Kedua ruas dikuadratkan didapat:
$y^2 = x + 3 \leftrightarrow x = y^2 - 3$
Merupakan grafik parabola terbuka kekanan, karena range > 0 maka grafik yang dibawah sumbu *x* dihilangkan

MATEMATIKA ITS

5. Sket grafik fungsi: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$
   - $D_f: 9 - x^2 \geq 0 \rightarrow D_f[-3, 3]\,; R_f = [0, 3]$
   - Titik potong sumbu x ; $y = 0 \rightarrow \sqrt{9 - x^2} = 0$
     Kedua ruas dikuadratkan didapat:$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = 3$ dan $x = -3\,; (3, 0)\,; (-3, 0)$
     Titik potong sumbu y ; $x = 0 \rightarrow y = 3$
   - Ambil beberapa titik dalam domain

x	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
yY	0	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	0



Jika $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \leftrightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$
Kedua ruas dikuadratkan didapat:
$y^2 = 9 - x^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$
Merupakan grafik lingkaran dengan *P*(0,0) dan *r* = 3, karena range > 0 maka grafik yang dibawah sumbu *x* dihilangkan

MATEMATIKA ITS

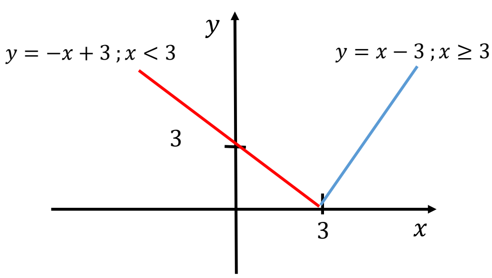
Contoh Grafik Fungsi Mutlak

6. Sket grafik fungsi: $f(x) = |x-3|$
   - $D_f = (-\infty, +\infty)\,; R_f = [0, +\infty)$
   - Berdasarkan defini nilai mutlak:

$$y = |x-3|$$

$$y = \begin{cases} x-3, & x-3 \geq 0 \\ -(x-3), & x-3 < 0 \end{cases} \rightarrow y = f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases}$$

   - Ada dua garis yaitu $y = x-3\,; x \geq 3$ dan $y = -x+3\,; x < 3$



$y = x - 3\,; x \geq 3$

x	3	4	5	6
y	0	1	2	3

$y = -x + 3\,; x < 3$

x	2	1	0	-1
y	1	2	3	1

MATEMATIKA ITS

Contoh Grafik Fungsi Mutlak

7. Sket grafik fungsi: $f(x) = |x-1| + |2x+6|$
   - Berdasarkan defini nilai mutlak:

$$y = |x-1| + |2x+6|$$

$$y = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} + \begin{cases} 2x+6, & 2x+6 \geq 0 \\ -(2x+6), & 2x+6 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases} + \begin{cases} 2x+6, & x \geq -3 \\ -2x-6, & x < -3 \end{cases}$$

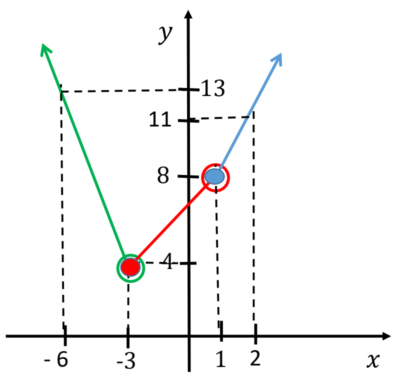
Ada 4 persamaan

1. $y = x - 1 + (2x+6) \rightarrow y = 3x + 5$; Domain: $[1, +\infty) \cap [-3, +\infty) = [1, +\infty)$
2. $y = x - 1 + (-2x-6) \rightarrow y = -x - 7$; Domain: $[1, +\infty) \cap (-\infty, -3) = \emptyset$
3. $y = -x + 1 + (2x+6) \rightarrow y = x + 7$; Domain: $(-\infty, 1) \cap [-3, +\infty) = [-3, +1)$
4. $y = -x + 1 + (-2x-6) \rightarrow y = -3x - 5$; Domain: $(-\infty, 1) \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$

MATEMATIKA ITS

Ada 4 persamaan

1. $y = 3x + 5$; Domain: $[1, +\infty)$
2. $y = -x - 7$; Domain: $\emptyset$ (tidak ada grafiknya)
3. $y = x + 7$; Domain: $[-3, +1)$
4. $y = -3x - 5$; Domain: $(-\infty, -3)$



$y = 3x + 5$; Domain: $[1, +\infty)$

x	**1**	**2**	**3**	**4**
y	8	11	14	19

$y = x + 7$; Domain: $[-3, +1)$

x	**-3**	**-2**	**0**	**1**
y	4	5	7	8

$y = -3x - 5$; Domain: $(-\infty, -3)$

x	**-6**	**-5**	**-4**	**- 3**
y	13	10	7	4

MATEMATIKA ITS

Contoh Grafik Fungsi Mutlak

8. Sket grafik fungsi: $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$

- Berdasarkan defini nilai mutlak:

$$y = |x^2 - 4x - 5|$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & x^2 - 4x - 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 4x - 5), & x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & (x+1)(x-5) \geq 0 \\ -x^2 + 4x + 5, & (x+1)(x-5) < 0 \end{cases}$$

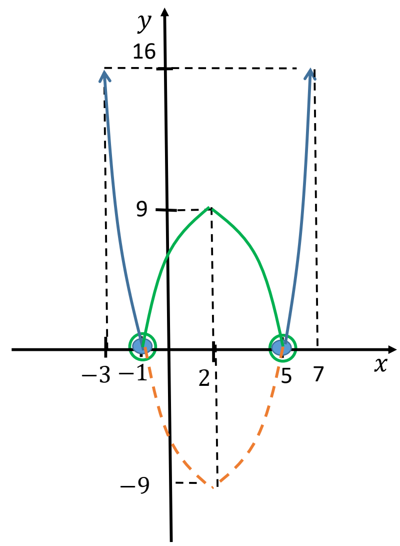
$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, & x \leq -1 \cup x \geq 5 \\ -x^2 + 4x + 5, & -1 < x < 5 \end{cases}$$

1. $y = x^2 - 4x - 5, \;\; x \leq -1 \cup x \geq 5$

x	**-3**	**-2**	**-1**	**5**	**6**	**7**
y	16	7	0	0	7	16

2. $y = -x^2 + 4x + 5, \; -1 < x < 5$

x	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	0	5	8	9	8	5	0



Grafik fungsi: $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$
Sebenarnya adalah grafik dari parabola
$f(x) = x^2 - 4x - 5$, hanya saja karena $y \geq 0$
maka nilai $y < 0$ dicerminkan terhadap sumbu x

Contoh Grafik Fungsi Sepotong-Sepotong

9. Sket grafik fungsi: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; x \geq 2 \\ 2x - 1\,; x < 2 \end{cases}$

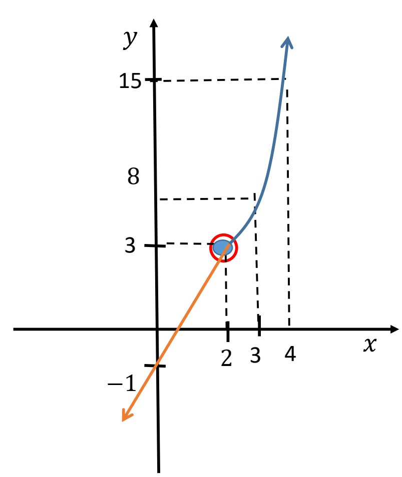
Fungsi $f(x)$ mempunyai dua fungsi:

1. $f(x) = \; x^2 - 1\,; x \geq 2$ (Parabola)

x	**2**	**3**	**4**	**...**
y	3	8	15	...

2. $f(x) = 2x - 1\,; x \geq 2$

x	**0**	**1**	**2**	**...**
y	-1	1	3	...



$f(2) = 3, \; f(5) = 24, \qquad f(-1) = -3$

Contoh Grafik Fungsi Sepotong-Sepotong

MATEMATIKA ITS

9. Sket grafik fungsi: $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x > 1 \\ 2 & ; x = 1 \\ 2x - 1 & ; x < 1 \end{cases}$

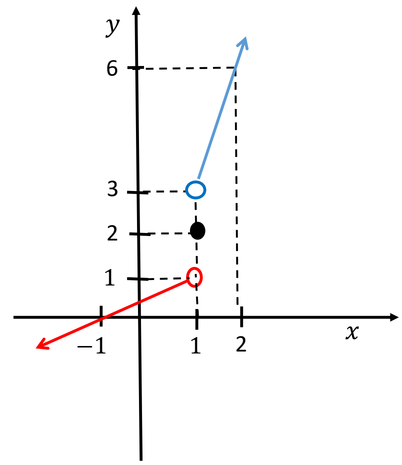
Fungsi $f(x)$ mempunyai dua fungsi:

1. $y = 3x\ ; x > 1$

x	1	2	3	...
y	3	6	9	...

2. $y = 2\ ; x = 1$
3. $f(x) = 2x - 1\ ; x < 1$

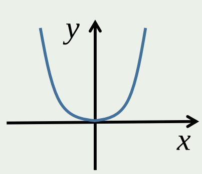
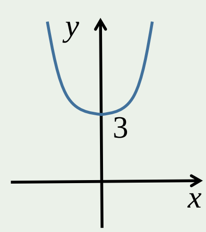
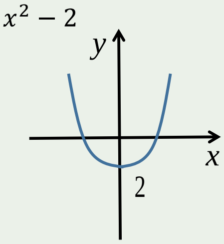
x	1	0	-1	...
y	1	-1	-1	...



$f(2) = 6,\quad f(1.9) = 5{,}7,\quad f(1) = 2$

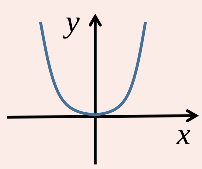
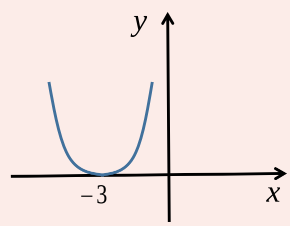
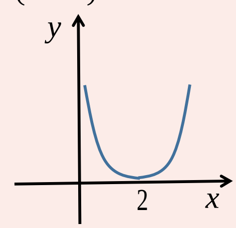
MATEMATIKA ITS

Menggambar Fungsi Dengan Pergeseran

$y = f(x)$	$y = f(x) + c$	$y = f(x) - c$
Grafik asal	Menggeser grafik $y = f(x)$ keatas sejauh c	Menggeser grafik $y = f(x)$ kebawah sejauh c
Contoh: $y = x^2$ 	$y = x^2 + 3$ 	$y = x^2 - 2$ 

MATEMATIKA ITS

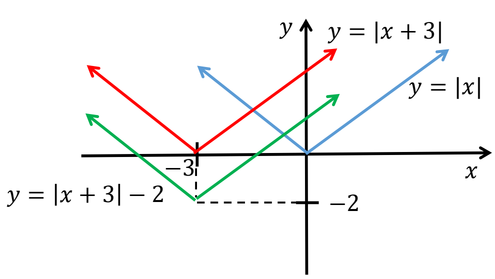
Menggambar Fungsi Dengan Pergeseran

$y = f(x)$	$y = f(x + \mathrm{c})$	$y = f(x - \mathrm{c})$
Grafik asal	Menggeser grafik $y = f(x)$ kekiri sejauh c	Menggeser grafik $y = f(x)$ kekanan sejauh c
Contoh: $y = x^2$ 	$y = (x + 3)^2$ 	$y = (x - 2)^2$ 

MATEMATIKA ITS

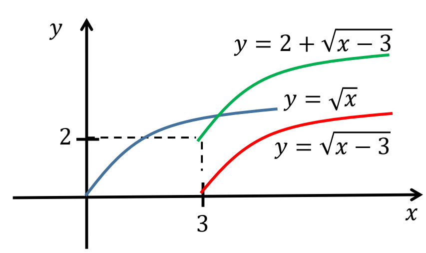
Contoh 9.

1. Sket grafik fungsi: $f(x) = |x + 3| - 2$



- Grafik awal adalah $y = |x|$ (Garis biru)
- Grafik $y = |x + 3|$ grafik $y = |x|$ digeser kekiri sejauh 3 (Garis merah)
- Grafik $y = |x + 3| - 2$ grafik $y = |x + 3|$ digeser kebawah sejauh 2 (Garis hijau)

2. Sket grafik fungsi: $f(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$

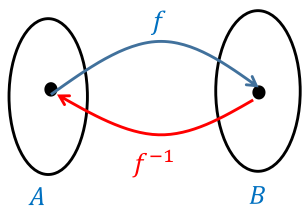


- Grafik awal adalah $y = \sqrt{x}$ (Garis biru)
- Grafik $y = \sqrt{x - 3}$ grafik $y = \sqrt{x}$ digeser kekanan sejauh 3 (Garis merah)
- Grafik $y = 2 + \sqrt{x - 3}$ grafik $y = \sqrt{x - 3}$ digeser keatas sejauh 2 (Garis hijau)

MATEMATIKA ITS

2.4 Fungsi Invers

Fungsi invers dari fungsi f merupakan kebalikan dari f, artinya jika pemetaan fungsi f dari A ke B maka pemetaan fungsi invers f, ditulis f^{-1} dari B ke A.



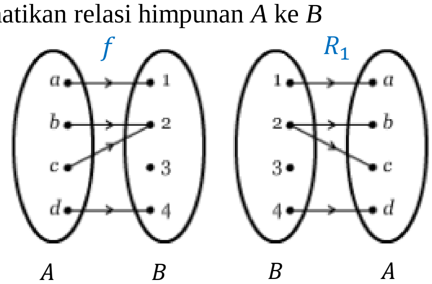
$f : A \to B$

$f^{-1} : B \to A$

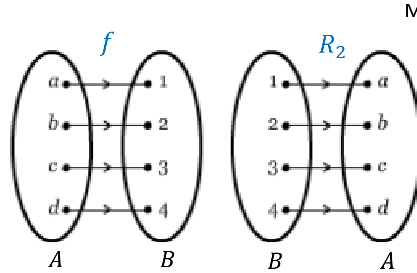
MATEMATIKA ITS

Syarat Fungsi mempunyai Invers

Perhatikan relasi himpunan A ke B



Gambar 1



Gambar 2

Gambar 1:
- $f_1 : A \to B$ adalah fungsi karena untuk setiap $x \in A$ dipetakan tepat satu $y \in B$
- $R_1 : B \to A$ bukan fungsi karena ada satu $x \in A$ mempunyai dua peta di $y \in B$

Gambar 2:
- $f_2 : A \to B$ adalah fungsi karena untuk setiap $x \in A$ dipetakan tepat satu $y \in B$
- $R_2 : B \to A$ adalah fungsi karena untuk setiap $y \in B$ dipetakan tepat satu $x \in A$

Pemetaaan R_2 merupakan pemetaan kebalikan dari f_2, maka dikatakan R_2 adalah invers dari f_2 dinyatakan dengan f_2^{-1}

MATEMATIKA ITS

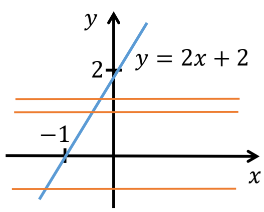
Berdasarkan Gambar 1 dan 2

- Syarat suatu fungsi f mempunyai invers adalah fungsi f harus fungsi satu-satu
- $f: 1-1$ jika setiap $x \in A$ berpasangan satu-satu ke $y \in B$

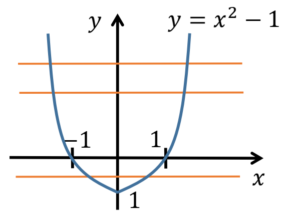
Bagaimana mengetahui $f: 1-1$

Untuk mengetahui bahwa $f: 1-1$ dari grafik f jika dibuat garis yang sejajar dengan sumbu x maka garis hanya memotong di satu titik.

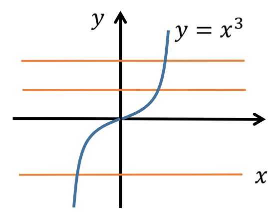
Contoh 10.



$fungsi: 1-1$



$Bukan\ fungsi: 1-1$



$fungsi: 1-1$

MATEMATIKA ITS

Mencari fungsi invers f: f^{-1}

Diberikan $y = f(x)$ fungsi satu – satu, untuk mendapatkan f^{-1} dengan cara:

1. Ubah $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$
2. Ganti x dengan y dan $f(y)$ diganti dengan $f^{-1}(x)$ yang merupakan fungsi invers dari $y = f(x)$

Contoh 11.

1. $f(x) = 2x + 1 \leftrightarrow y = 2x + 1$

$$2x = y - 1 \leftrightarrow x = \frac{y-1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

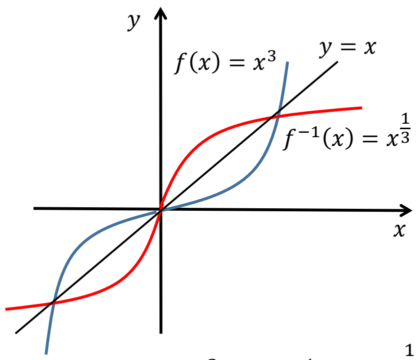
2. $f(x) = x^3 \leftrightarrow y = x^3$

$$x = y^{\frac{1}{3}} \leftrightarrow\rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

Hubungan f dengan f^{-1}

Diberikan $f(x) = x^3 \to f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

1. Grafik $f(x) = x^3$ dan $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$



Grafik $f(x) = x^3$ dan $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$
Simetri terhadap garis $y = x$

2. Domain dan Range $f(x) = x^3$ dan $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$
   - $f(2) = 2^3 = 8 \to f^{-1}(8) = 2$
   - $f(-2) = (-2)^3 = -8 \to f^{-1}(-8) = -2$

   Berlaku untuk nilai x lainnya,

   Jadi:

   Domain f = Range f^{-1} ($D_f = R_{f^{-1}}$)

   Range f = Domain f^{-1} ($R_f = D_{f^{-1}}$)

3. Komposisi fungsi $f(x) = x^3$ dan $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$(f o f^{-1})(x) = f(x^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}})^3 = x$$

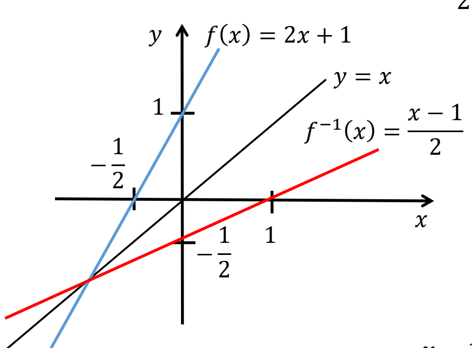
$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$(f o f^{-1})(x) = (f^{-1} o f)(x) = x$$

Contoh 12.

1. Diberikan $f(x) = 2x + 1 \to f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

1. Grafik $f(x) = 2x + 1 \to f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$



Grafik $f(x) = 2x + 1$ dan $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

Simetri terhadap garis $y = x$

2. Domain dan Range

   $f(x) = 2x + 1 \to f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

   $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = (-\infty, +\infty)$

   $D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$; $R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$

   $D_f = R_{f^{-1}}$; $R_f = D_{f^{-1}}$

3. Komposisi fungsi

   $f(x) = 2x + 1 \to f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

$$(f o f^{-1})(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$

$$(f^{-1} o f)(x) = f^{-1}(2x+1) = 2\left(\frac{x-1}{2}\right) + 1 = x$$

$$(f o f^{-1})(x) = (f^{-1} o f)(x) = x$$

MATEMATIKA ITS

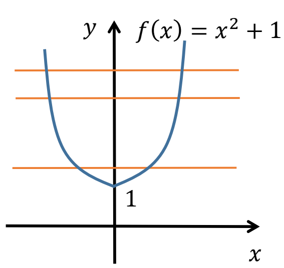
Membuat Fungsi Invers jika fungsi tidak 1-1

- Diberikan $y = f(x)$ bukan fungsi 1-1,
  berarti $y = f(x)$ tidak mempunyai fungsi invers.
- Jika $y = f(x)$ dapat dibuat menjadi fungsi $1-1$
  dengan cara membatasi domainnya, maka $y = f(x)$ mempunyai fungsi invers
- Pembatasan domain dari $y = f(x)$ tanpa mengurangi interval range $y = f(x)$

MATEMATIKA ITS

Contoh 13.

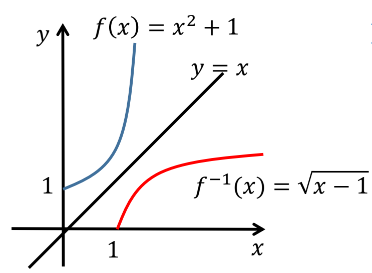
- Diberikan $f(x) = x^2 + 1$; $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = [1, +\infty)$.
- $f(x)$ bukan fungsi $1-1$, agar $f(x)$ fungsi $1-1$ domainnya dibatasi $D_f = [0, +\infty)$



Bukan fungsi: $1-1$

$D_f = (-\infty, +\infty)$

$R_f = [0, +\infty)$



fungsi: $1-1$

$D_f = R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

$R_f = D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$

Fungsi invers

$$y = x^2 + 1 \leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$$
$$D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$
$$R_{f^{-1}} = [0, +\infty)$$

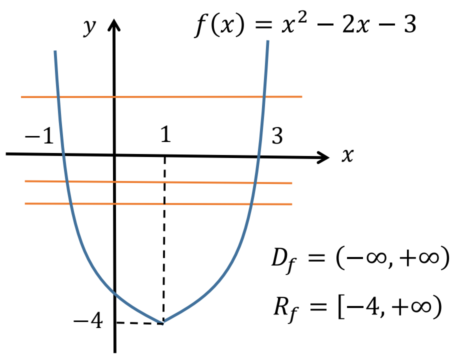
Komposisi Fungsi

$$(fof^{-1})(x) = f\left(\sqrt{x-1}\right)$$
$$= \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 = x$$

MATEMATIKA ITS

Contoh 14.

- Diberikan $f(x) = x^2 - 2x - 3$; $D_f = (-\infty, +\infty)$; $R_f = [-4, +\infty)$.
- $f(x)$ bukan fungsi $1 - 1$, agar $f(x)$ fungsi $1 - 1$ domain f dibatasi



Bukan fungsi: $1 - 1$

Membuat f menjadi fungsi $1 - 1$

- Cara membatasi domain f dengan memperhatikan garis simetri yaitu $x = 1$
- Jadi
  $f(x) = x^2 - 2x - 3$;
  $D_f = [1, +\infty)$; $R_f = [-4, +\infty)$.

MATEMATIKA ITS

Mencari invers f

- Ubah $y = f(x)$ menjadi $x = g(y)$

$$y = x^2 - 2x - 3 \leftrightarrow y = (x-1)^2 - 4$$
$$\leftrightarrow y + 4 = (x-1)^2$$
$$\leftrightarrow (x-1) = \sqrt{y+4}$$
$$\leftrightarrow x = 1 + \sqrt{y+4}$$

- Ganti peubah x dengan y dan y dengan x didapat:

$$y = 1 + \sqrt{x+4} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4} ;$$
$$D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty); \ R_{f^{-1}} = D_f = [-4, +\infty)$$

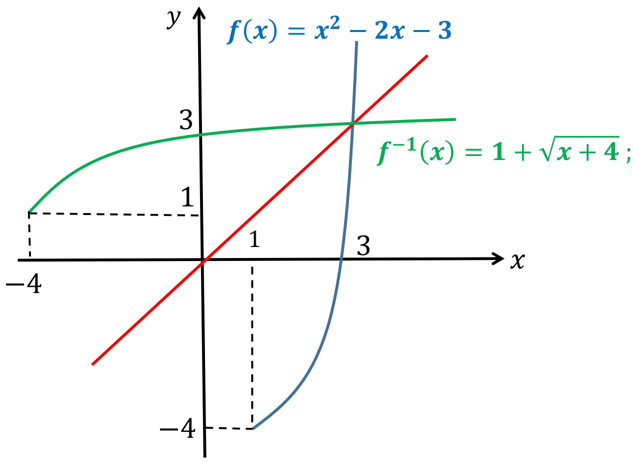
Komposisi fungsi

- $(fof^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(1 + \sqrt{x+4}\right) = \left(1 + \sqrt{x+4}\right)^2 - 2\left(1 + \sqrt{x+4}\right) - 3 = x$
- $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}(x^2 - 2x - 3) = \left(1 + \sqrt{x^2 - 2x - 3 + 4}\right)$

$$= (1 + \sqrt{(x-1)^2} = 1 + x - 1 = x$$

Grafik fungsi

MATEMATIKA ITS



$f(x) = x^2 - 2x - 3$

$D_f = [1, +\infty)$; $R_f = [-4, +\infty)$

x	1	2	3	4	5
y	- 4	-3	0	5	12

$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$;

$D_{f^{-1}} = [1, +\infty)$; $R_{f^{-1}} = [-4, +\infty)$

x	- 4	-3	0	5	12
y	1	2	3	4	5

MATEMATIKA ITS

Limit Fungsi dan Kontinu

Diketahui $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

x	$f(x)$
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1,000	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710