

学校编码: 10384
学号: 27720101152678

分类号 T192 密级 公开
UDC

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

人口因素驱动的动态 Nelson-Siegel
利率期限结构模型

A Tale of Two Structure:
Implications of Demographic Changes for the Yield Curve

方 莲

指导教师姓名: 牛霖琳 教授

专 业 名 称: 西方经济学

论文提交日期: 2014 年 3 月

论文答辩时间: 2014 年 5 月

学位授予日期: 2014 年 7 月

答辩委员会主席: 答辩主席

评阅人: 老师一 老师二

2014 年 3 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

() 1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

(☒) 2. 不保密，适用上述授权。

(请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。)

声明人（签名）：

年 月 日

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

摘 要

本文根据已有的利率期限结构模型的理论文献，以 Diebold and Li 拓展的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型为基础，提出了一个以人口因素驱动的动利率期限结构拓展模型。文章将介绍动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的发展过程及其后的拓展模型，探讨利率期限结构动态行为可分解为具有平稳特征的长期均衡状态下的利率均值回复部分与非平稳的时变部分，并指出长期均衡利率水平的平稳组成部分由具有稳定可预测性的人口年龄结构变动决定，从而在现有模型的基础上引入人口年龄结构变动的分析。在直观上，当 MY_t 比较大（小），即在特定的时点上一个地区的中年群体（年轻群体）占总人口的比重较大，则这个中年群体由于收入大于支出从而推动了对储蓄（消费）的需求上升。在保证市场出清的条件下，利率则随之下降（上升）。

本文将试图建立一个以人口因素驱动的动利率期限结构拓展模型。一方面，该模型不仅能够理论上为理解利率期限结构的长期均衡水平波动提供很好的宏观经济解释，阐述了人口年龄结构变动在低频率层次上（low-frequency）影响未来利率的预期水平与变动方向，而且能够提供一个分析宏观经济基础变量与利率期限结构之间稳定关系的桥梁；另一方面，该模型不仅继承了动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的简约特征（Principle of Parsimony），模型的估计参数较少，实证估计与拟合回归更加灵活，而且人口年龄结构变动本身所具有的稳定的可预测性特征有利于增强对未来利率期限结构的水平变动的预测能力。

关键词： 利率期限结构；动态 Nelson-Siegel 模型；人口年龄结构；债券市场

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

Abstract

Here is your English Abstract.

Keywords: keyword1; keyword2; keyword3

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

目 录

摘 要	I
英文摘要	III
目 录	V
英文目录	VII
插图目录	IX
表格目录	XI
术语表	XI
第一章 绪论	1
1.1 研究背景与研究动机	1
1.2 研究目的及意义	3
1.3 研究框架	4
第二章 文献综述	7
2.1 利率期限结构：理论与模型	7
2.1.1 基本概念介绍	7
2.1.2 利率期限结构的基本问题	12
2.1.3 利率期限结构的理论与模型	14
2.1.4 利率期限结构模型	15
2.1.5 利率期限结构的实证分析	19
2.2 动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型	21

2.2.1	影响因子的经济解释	21
2.2.2	模型估计与预测	23
2.3	人口年龄结构变动与期限结构	25
第三章	模型设定	31
3.1	模型	31
3.1.1	人口年龄结构与长期利率水平	31
3.1.2	短期利率的局部均值回复	34
3.1.3	估计方法	35
3.2	数据说明	37
第四章	实证结果	41
4.1	模型参数估计	43
4.1.1	斜率因子与曲度因子	43
4.1.2	人口因子载荷分析	49
4.2	收益率曲线拟合	54
4.2.1	样本内拟合	54
4.2.2	收益率长期动态特征与人口因素	56
第五章	结论	61
	参考文献	63
	硕士期间发表的论文	67
	致 谢	69

Contents

Abstract	III
Contents	VII
CHAPTER 1 Introduction	1
1.1 Background and Motivation	1
1.2 Purpose	3
1.3 Structure	4
CHAPTER 2 Literature Review	7
2.1 Term Structure Theory and Modeling	7
2.1.1 Basic Terms and Notations	7
2.1.2 Basic Questions	12
2.1.3 Theory and Model	14
2.1.4 Term Structure Modeling	15
2.1.5 Yield Curve Modeling: Quantitative Approach	19
2.2 Dynamic Nelson-Siegel Term Structure Model	21
2.2.1 Economic Interpretation of DNS Model	21
2.2.2 Estimation and Forecasting	23
2.3 Demographic Change	25
CHAPTER 3 Model Specification	31
3.1 The Model	31
3.1.1 Demographic Structure and Long Term Interest Rate	31
3.1.2 Mean-reverting	34
3.1.3 Two Steps LSE	35

3.2 Data	37
CHAPTER 4 Empirical Results	41
4.1 Parameters Estimation	43
4.1.1 Slope and Curvature Factors	43
4.1.2 Demographic Loading	49
4.2 Yiled Curve Fitting	54
4.2.1 In-sample Fitting	54
4.2.2 Long-term Characteristics and Demographic Factors	56
CHAPTER 5 Conclusion	61
References	63
Publications as the Degree Candidate	67
Thanks	69

插图目录

2.1	收益率曲线的几种类型	13
2.2	动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的因子载荷分析	22
2.3	美国短期利率与 MY_t	28
2.4	中长期美国债券收益率与 MY_t	29
3.1	实际收益率曲线：1970:01–2000:12.	38
4.1	斜率因子 $\hat{\beta}_{2t}$	45
4.2	曲度因子 $\hat{\beta}_{3t}$	46
4.3	一阶差分的斜率因子， $\Delta\hat{\beta}_{2t}$	50
4.4	一阶差分的曲度因子， $\Delta\hat{\beta}_{3t}$	51
4.5	$\Delta\hat{\beta}_{2t}$ 的残差项	52
4.6	$\Delta\hat{\beta}_{3t}$ 的残差项	53
4.7	人口因子载荷	54
4.8	收益率曲线的样本拟合情况：1970:01 - 1984:12。	55
4.9	特定时点上的收益率曲线拟合效果	56
4.10	短期、中期以及长期收益率拟合	57
4.11	利率中预测的久性平稳部分与利率水平值	58
4.12	收益率的平稳部分与不同到期日收益	59

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

表格目录

3.1	收益率的描述性统计特征：1970:01–2000:12	39
4.1	模型参数估计结果	44
4.2	ADF 单位根检验	46
4.3	Johansen 协整检验	47
4.4	VAR 滞后阶数	48
4.5	VAR 参数估计	49
4.6	估计的影响因子与实际因子的相关关系	60

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

术语表

MY_t 一个社会总人口中的中年人口与青年人口的总数比值，第 28 页

$P_t(\tau)$ 在 t 时刻的到期期限是 τ 的贴现债券价格，第 14 页

$T \mapsto Y(T)$ 期限结构，指的是一个变量与其在不同到期日之间的函数一一映射关系，第 13 页

第一章 绪论

利率是经济和金融领域的核心变量，不仅是学术界研究与讨论的重要话题，而且长期受到政府政策部门与市场投资者的广泛关注。利率反映了宏观经济运行状态、商业周期、货币与财政政策影响效果、社会变化和人们对未来的预期，是连接实际经济因素与货币因素的中介变量，在数量上揭示了货币信贷市场的不同期限的资金供求关系，是各国中央银行用来控制短期利率进而影响中长期利率变化和改善实体经济的主要货币政策传递机制；同时，利率还是金融市场中各类资产定价、金融产品设计、利率风险管理与套期保值的基准依据，如著名的 Black-Scholes 期权定价公式以无风险利率作为基准参数输入。由于利率的随机性特征，利率建模也因此在经济与金融领域成为一个最为复杂和最富挑战性的研究热点^[23]。

1.1 研究背景与研究动机

利率期限结构（Term Structure of Interest Rates）是用来描述某一时点上，不同到期日债券的到期收益率与到期期限之间关系的数学模型，在图形上则表现为一系列可观察的曲线族。对于零息票国债的利率期限结构，也称作“收益率曲线”（Yield Curve）。一方面，利率期限结构受宏观经济与金融领域多种因素的影响，整个经济系统中的各种因素都直接或间接地通过货币市场与金融市场因素影响债券市场，从而影响利率期限结构的形成机制。典型的收益率曲线形状包括四种，即上升的收益率曲线、向下倾斜的收益率曲线、呈拱形的收益率曲线和平坦的收益率曲线。从短期上看，收益率曲线能够捕捉到几乎所有的宏观经济指标的变动情况^[2,36]，从而为中央银行制定货币政策及市场参与者制定投资策略提供有关当前经济运行状况的基本信息。而在中长期，收益率曲线的水平利率反映的是市场对未来经济走势的理性预期。这也从另一方面说明了其代表市场利率的基准水平和未来变动方向，对利率期限结构的变动分析能够揭示众多有价值的经济信息，这些信息通过收益率曲线的形状、长短期利率的利差、长期均衡利率水平的变动等因素反映出来。例如

利率期限结构作为先行商业周期指标 (**predictor**) 用于预测经济增长率^[25]、股票收益率^[10,12]、预期通货膨胀率^[18]甚至汇率^[11]。因此,对利率期限结构动态特征的研究显得尤为重要,特别是在固定收益证券 (**Fixed-Income**) 的投资领域,利率期限结构分析是一个重要的手段。Piazzesi (2010)^[39] 在一篇利率期限结构的综述性文章中列举了至少四点原因,这包括预测未来短期利率、制定有效的中央银行货币政策、国债发行策略、衍生品定级与套期保值。

然而,这些有关利率期限结构的理论与模型却有诸多的缺陷。一方面,要么利率期限结构模型能够在理论上提供严谨的分析,却不能够满足实证要求,模型估计和预测的灵活性较差,难以反映实际的各种可能的收益率曲线和利率期限结构的动态特征;另一方面,一些利率期限结构模型在实证方面取得了相对的成功,虽然能够对历史数据做良好的收益率曲线统计规律性分析,在样本内拟合与样本外预测都得到了一定的实证支持,但是缺乏坚实的经济理论基础,不能够提供对各种潜在变量的宏观经济学解释。

新近发展的以包含宏观基础变量与金融市场变量的无套利仿射利率期限结构模型 (**Macro-Finance Model**) 旨在为解释利率期限结构的动态特征提供理论支持,并在实际应用中提供了良好的样本内收益率曲线拟合以及在短期利率预测效果具有明显优势,尤其是 Diebold and Li (2006)^[16] 在 Nelson and Siegel (1987)^[37] 提出的静态三因子利率期限结构的基础上拓展的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型 (以下简称为 **DNS**)。该模型不仅在对美国国债收益率的样本内拟合十分成功,而且在预测方面也成绩斐然,尤其以预测中长期 (12 月以上) 收益率更具明显优势,因此被很多从事经济政策制定和从事实证研究人员使用。动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型也因此成为后来学界研究利率期限结构模型的重要参考依据。然而,这个模型也同样面临着缺乏宏观经济学解释的尴尬:虽然 Diebold and Li 提供了三个因子的直观解释,即影响利率期限结构的因素可以归结为水平因子 (**Level Factor**)、斜度因子 (**Slope Factor**) 以及曲度因子 (**Curvature Factor**),且三个因子分别对应各种经济与金融市场的长期影响因素、短期影响因素和中期影响因素。然而,对于为何动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型能够对中长期零息票国债收益率上有

如此强劲的预测能力，Diebold and Li 及其后的拓展模型并未给出明确的答案¹。这也是后来有关利率期限结构模型发展以及本文的研究动机。

一个地区人口年龄结构指的是在某个特定时点上，由按不同年龄阶段划分的群体在总人群数的比例关系。与利率期限结构的形态相类似，人口年龄结构在图像上也表现为一系列的动态曲线族。自工业革命以来，人口结构变化一直伴随着社会经济发展的整个过程，并对经济发展产生巨大的影响。其中，人口老龄化更是各国政府普遍重视的一个社会经济问题。早在 18 世纪，Malthus (1798)^[31] 便指出人口增长快于生产资料增长的自然规律将导致一个地区社会经济的崩溃。一些劳动经济学家、金融学家在 20 世纪 90 年代初就已经开始关注人口年龄结构变化对地区经济、社会发展、金融市场产生的全局性、整体性、长期性的影响。他们试图通过严格的经济学理论假设与模型来研究人口年龄结构与宏观经济变量和金融市场之间的关系。从横截性层面看 (the cross-section)，投资者在不同的年龄阶段有不同的投资偏好与风险喜恶态度，对财富的配置策略和金融资产的投资需求也随之变化，相应的，不同年龄阶段的人口群体在总人口的比例变化必然会影响整个宏观经济的运行状况、总消费、劳动供给、社会保险、养老金体系管理以及政府财政货币政策，例如一个正处于人口老龄化阶段的社会面临住房购买量下降及金融投资需求上升的压力，市场要求的风险贴水 (risk premium) 提高，这将导致证券收益率相应地降低^[3]。Geanakoplos et al. (2004)^[22] 用一个世代交叠模型 (Overlapping-Generation Model, OLG) 探讨了美国人口年龄结构与金融市场信贷之间的关系。根据资产投资的生命周期理论^[34]，一个典型的代表性消费者在年轻时由于收入不足以承担消费支出，在此阶段会通过资本市场进行借款，而当她进入中年阶段，其收入迅速上升并超过支出，此时她会倾向于将多余的收入进行投资（货币市场如银行机构，或者资本市场如购买证券），而等到该消费者退休之时，她会使用以前的储蓄收入以度晚年。这种典型的投资行为将通过社会加总的方式来决定货币市场与金融市场的均衡证券价格，继而决定均衡时的债券收益率和利率水平。由此可见，人口年龄结构作为一个重要的影响因素与利率期限结构的长期均衡水平的波动存在着密切的关系。这类由人口年龄结构的变动所引致的对利率期限结构模型的影响只有在一个世代期限范畴内才能显现效果。

¹相关的文献资料将在 2.2 中详细讨论。

1.2 研究目的及意义

虽然一些金融学家早已开始关注人口年龄结构变动对金融市场特别是证券收益率的影响,如 Yoo (1994)^[45] 研究发现:人口年龄结构变动对不同风险的金融产品的投资需求有显著影响。最近 DellaVigna and Pollet (2005)^[15] 的一项研究也表明人口年龄结构变动会影响资本市场参与者对即期与远期市场的预测,对投资决策进而对资产价格产生影响。尽管如此,以往利率期限结构模型的相关研究并没有直接考察人口年龄结构对利率期限结构长期均衡水平波动的分析。这主要是由于传统利率期限结构模型的研究方法以有关不同年龄阶段的人口群体的投资风险厌恶的同质性假设为基础,对利率期限结构的建模便无从考察随着人口年龄变化,整个金融市场的投资需求以及债券收益率是如何变动的。目前主要的宏观金融利率期限结构模型(MF-TSM)也只是关注少数几个宏观变量对利率期限结构的影响,并没有将人口年龄结构作为一个长期影响因子纳入模型分析中。本文根据已有的利率期限结构模型的理论文献,以 Diebold and Li 拓展的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型为基础,提出了一个以人口因素驱动的动态利率期限结构拓展模型。一方面,该模型不仅能够理论上为理解利率期限结构的长期均衡水平波动提供很好的宏观经济解释,阐述了人口年龄结构变动在低频度层次上(low-frequency)影响未来利率的预期水平与变动方向,而且能够提供一个分析宏观经济基础变量与利率期限结构之间稳定关系的桥梁;另一方面,该模型不仅继承了动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的简约特征(Principle of Parsimony),模型的估计参数较少,实证估计与拟合回归更加灵活,而且人口年龄结构变动本身所具有的稳定的可预测性特征有利于增强对未来利率期限结构的水平变动的预测能力。

1.3 研究框架

本文的研究框架如下:

第一章为“绪论”,介绍了本文的研究背景与研究意义。

第二章“文献回顾”部分则对现代利率期限结构模型研究的相关文献资料进行简

要回顾及评述。本章介绍了动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的发展过程及其后的拓展模型，并讨论了在该模型的基础上引入人口年龄结构变动的分析。

第三章描述了本文的“模型设定及数据”。该部分将试图建立一个由人口因素驱动的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型，通过考察人口年龄结构的动态特征，论证其反映的货币市场长期均衡时的利率水平的变动状况，即人口年龄结构变动决定了动态 Nelson-Siegel 模型中的长期影响因子。同时，该部分将对本文所使用的数据进行相应的说明。

第四章报告模型估计的“实证结果”。本章首先对美国国债收益率数据做了样本内的拟合处理，随后对模型参数进行估计。

第五章分析了模型的样本外“预测结果”。

第六章为“结论”，对本文提出的模型及其实证结果进行简要总结，并提出了进一步研究的方向。

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

第二章 文献综述

长期以来，众多经济学家和金融学家对利率期限结构的形成机制投入了大量的精力与心血。对利率期限结构的研究经历了从传统的以解释其形成机理为主的定性分析到以统计拟合与预测为主的现代定量分析的发展过程，产生了大量的用于解释利率期限结构的形成机制与动态特征的利率期限结构模型。本章将对相关文献进行梳理，对现代利率期限结构模型研究的文献资料进行回顾及评述。这部分将着重介绍动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的发展过程及其后的拓展模型，探讨利率期限结构动态行为可分解为具有平稳特征的长期均衡状态下的利率均值回复部分与非平稳的时变部分，并指出长期均衡利率水平的平稳组成部分由具有稳定可预测性的人口年龄结构变动决定，从而在现有模型的基础上引入人口年龄结构变动的分析。

2.1 利率期限结构：理论与模型

本节将从历史演变的角度对有关利率期限结构的理论与模型做一个简要的评述。在这个过程中，从对现有理论的不足做一个批判性的审阅，从而引出后文即将介绍的文章立题。

2.1.1 基本概念介绍

在深入探讨本文所论述的研究问题之前，我们首先来给出一些在金融经济理论与债券市场分析中常用的基本概念，并由此来介绍一些本文使用的数学符号与标记。

银行账户与随机折现因子

银行账户 (Bank Account)，也称做货币市场账户，指的是市场投资者将资金投放在一个具有较低风险性质、同时具有较高流动性功能的短期账户。我们用 $B(t)$ 来表示该账户随时间变化的动态轨迹，则

$$\text{连续时间} \quad dB(t) = r_t B(t) dt, \quad (2.1)$$

$$\text{离散时间} \quad B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r_t \Delta t), \quad (2.2)$$

其中， r_t 为短期利率水平。相对离散时间模型而言，连续时间模型在数学建模上更为复杂，但它能够提供充分的特性来得到更精确的理论解和更精练的经验假设。鉴于篇幅所限，本文将主要讨论在连续时间状态下的利率建模问题。由方程 (2.1) 可得到银行账户在一段时间内对短期利率的解析式：

$$B(t) = \exp \left\{ \int_s^t r(u) du \right\}, \quad B(0) = 1. \quad (2.3)$$

该公式表达了货币具有的时间价值属性：假定在初始时期一单位的货币账户资金如何随着时间而增加。那么，如果我们反过来求解，即想要知道在未来某个时期为一个单位的货币在当前时期的价值，就得到了折现因子

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left\{ - \int_t^T r(u) du \right\}. \quad (2.4)$$

远期利率协议

在所有的金融市场中，债券市场为投资者提供了数目众多且种类齐全的金融产品以利其根据自身需要进行套期保值与对冲风险。而在与利率有关的债券金融产品中，远期利率协议 (FRA) 构成了其中最为根本也最为关键的基础金融合约。记 $P(t, T)$ 为在 t 时刻的到期期限是 T 的贴现债券的价格，且有 $P(T, T) = 1$ ，用 $F(t; T, S)$ 来表示在 t 时期签订的、直至 T 时期开始交割的、到期日为 S 的远期利率合约的收益率：

- 在 t 时期，卖出 $P(t, T)$ 单位到期日为 T 的远期利率合约；同时，买入 $\frac{P(t, T)}{P(t, S)}$ 单位到期日为 S 的远期合约。则此期间投资者的净收入为零。
- 等到 T 时期，需要支付的 $P(T, T) = 1$ 。
- 直到 S 时刻，投资者可以获得收益， $\frac{P(t, T)}{P(t, S)}$ 。

那么，在这个投资过程中，由该远期利率协议带来的简单复利收益可记为

$$F(t; T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right], \quad (2.5)$$

式中 $\tau(\cdot, \cdot)$ 表示两个时期之间的时间长短，以年为单位计算。相应的，按照连续复利计算的远期收益为

$$R(t; T, S) = \frac{\ln P(t, S) - \ln P(t, T)}{\tau(T, S)}. \quad (2.6)$$

根据方程 (2.5)，可以推出即期简单利率为

$$L(t, T) = F(t; T, T) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left[\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right]. \quad (2.7)$$

而根据方程 (2.6) 得到连续即期利率

$$R(t, T) = R(t; T, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}. \quad (2.8)$$

以上我们得到的是远期利率在不同复利计算情况下的结果。由于在有关利率产品的金融建模中，远期利率（forward rate）往往更具有重要意义。一方面，在等价鞅测度下，远期利率是即期利率的期望值，另一方面，许多的金融变量可以通过构造与远期利率的无套利条件得到。一个远期即期利率是远期利率 $F(t; T, S)$ 在未来的极限值，即

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S) = \lim_{S \rightarrow T^+} \frac{1}{\tau(T, S)} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right] = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (2.9)$$

从以上的分析我们不难看出，短期利率 r_t 与上述各个情况下得到的利率之间存在以下关系：

$$r_t = \lim_{S \rightarrow T^+} R(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} L(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t; T, S). \quad (2.10)$$

利率互换

下面我们来介绍另外一种利率产品：利率互换（Interest Rate Swap, IRS）：

- 固定支付：约定在未来的一个时间段内按照合同约定的比例支付，假定该水平值为 K
- 浮动利率：合同的另一方则需要根据合同拟采用的浮动利率水平来做对冲支付，一般而言，该浮动利率为短期简单复利的 LIBOR, $L(T_{i-1}, T_i)$ 。

我们记该时间段为 $\mathcal{T} = \{T_\alpha, T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta-1}, T_\beta\}$, $\tau_i = \tau(T_{i-1}, T_i)$, 且有 $\tau = \{\tau_{\alpha+1}, \tau_{\alpha+2}, \dots, \tau_{\beta-1}, \tau_\beta\}$ 。

则我们可以得到 IRS 的合约价值为

$$V_{IRS} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i \left[K - L(T_{i-1}, T_i) \right] \quad (2.11)$$

我们不难发现，利率互换可以看作一系列的远期利率协议的总和，即

$$\begin{aligned} V_{IRS} &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{FRA} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(t, T_i) \tau_i [K - F(t; T_{i-1}, T_i)] \\ &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i K - N \boxed{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i F(t; T_{i-1}, T_i)}. \end{aligned}$$

对于方框内的式子，我们可以做如下运算

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i F(t; T_{i-1}, T_i)} &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau(T_{i-1}, T_i) \cdot \frac{1}{\tau(T_{i-1}, T_i)} \left[\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right] \\ &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \left[P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) \right] = P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta}) \end{aligned}$$

从而，

$$V_{IRS} = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i K - N \left(P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta}) \right) \quad (2.12)$$

为来得到无套利条件，我们要求互换利率使得该利率互换的价值为零，即

$$\begin{aligned} V_{IRS} = 0 &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i S_{\alpha, \beta}(t) - N \left(P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta}) \right) \\ \Rightarrow S_{\alpha, \beta}(t) &= \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i} \end{aligned} \quad (2.13)$$

对此，我们可以这样理解：

- 首先，投资者为了对冲未来利率不确定所带来的影响，要求在未来的某个时间段内以固定的收益 $P(t, T_{\alpha})$ 提前买入债券，而将在更远的未来 T_{β} 抛售手里的债券，价值为 $P(t, T_{\beta})$ ，其总和的盈余收益为 $P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})$ 。
- 在合约期间，投资者放弃的机会成本总共为 $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i$ 。
- 因此，在满足市场无套利的条件下，互换利率因该使得该投资策略的超额收益率是零，即该投掷策略的收益与互换利率持平，是故

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}) - P(t, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i}$$

我们知道任一两个债券价格可以通过远期即期利率产生联系，例如

$$\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_\alpha)} = \frac{P(t, T_{\alpha+1})}{P(t, T_\alpha)} \cdot \frac{P(t, T_{\alpha+2})}{P(t, T_{\alpha+1})} \cdots \frac{P(t, T_\beta)}{P(t, T_{\beta-1})} = \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{1 + \tau_j F(t; T_{j-1}, T_j)}$$

从而，我们也可以利用这个关系来推导得到远期即期利率与远期互换利率的关系

$$\begin{aligned} S_{\alpha, \beta}(t) &= \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i K} = \frac{1 - \frac{P(t, T_\beta)}{P(t, T_\alpha)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_\alpha)}} \\ &= \frac{1 - \prod_{j=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + \tau_j F(t; T_{j-1}, T_j)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1 + \tau_j F(t; T_{j-1}, T_j)}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

因此，我们可以使用方程 (2.9) 与方程 (2.10) 方程 (2.14) 来得到各种债券市场变量的无套利关系，该关系意味着我们只需要知道其中一个变量值，便能够推测出其他几个变量。比如，利用方程 (2.9)，如果按照事先约定的远期利率，则能够求得相应期限的债券价格，

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, u) du \right\}. \quad (2.15)$$

同时，记 $y(t, T)$ 是连续复利情况下的债券即期收益率 (instantaneous spot yield)，则有

$$y(t, T) = R(t, T) = - \frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)} = \frac{1}{\tau(t, T)} \int_t^T f(t, u) du. \quad (2.16)$$

由于债券市场价格具有一定的随机性特征，以上该等式只有在非常严格的条件下才能成立。同时需要主意的是，由于远期利率是在当前期形成的对未来即期利率的预测，受到金融市场各种冲击的影响，具有高度的不确定性与风险，这也通过以上关系反馈到债券市场的价格上来。

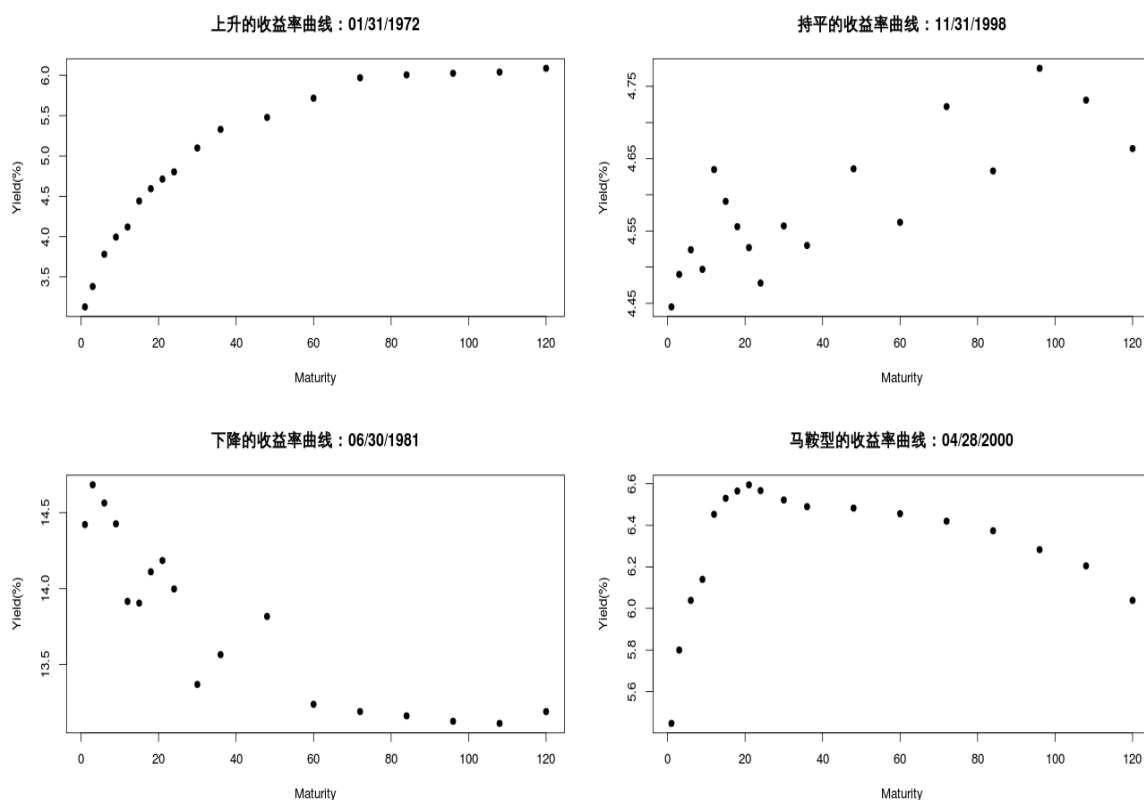


图 2.1 收益率曲线的几种类型

2.1.2 利率期限结构的基本问题

所谓的期限结构，指的是一个变量与其在不同到期日之间的函数映射关系，如利率期限结构，波动率期限结构等。从数学的角度看，即以下的一一映射：

$$T \mapsto Y(T). \quad (2.17)$$

利率期限结构是关于债券的到期收益率与其在某个时点上不同的到期日之间的函数关系，也称为收益率曲线，即

$$T \mapsto \begin{cases} L(t, T), & t < T \leq t+1; \\ R(t, T), & T > t+1. \end{cases} \quad (2.18)$$

典型的利率期限结构有三种，分别是上升的、下降的以及平行的。

我们在上述也分析过，由于短期利率与到期收益率、债券价格等诸多变量之间存在的关系，利率期限结构包含啦了有关实体经济与金融的重要信息，为我们理解宏观经济形势、金融市场变化、债券收益等提供啦重要的线索。比如，在等价鞅测度的情况下，对于任一金融资产的收益，

$$\pi_t = \mathbb{E}[D(t, T)H(T)|\mathcal{F}_t], \quad (2.19)$$

其中， π_t 是在未来的资产收益，具有不确定性，其期望由在未来收益 $H(T)$ 的折现得到，随机折现因子 $D(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T r(u)du\right\}$ 。特别的，对于债券而言， $H(T) = P(T, T) = 1$ 。因此，债券价格在当前期可以表示为

$$P(t, T) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r(u)du}|\mathcal{F}_t] = e^{-\int_t^T f(t, u)du}. \quad (2.20)$$

后面一个等式由方程 (2.15) 得到。函数映射， $T \mapsto P(t, T)$ ，将债券收益率与其到期日联系在一起，这又称“价格折现曲线” (Discount Curve)

债券价格是由债券本身产生的由一系列未来现金流按照贴现率计算的现值总和。金融市场上交易的债券的期限结构并不完整，因此构造一条完整的利率期限结构需要根据现有的零息票债券和付息债券价格计算所有零息票债券的到期收益率。在方程 (2.20) 中，通过了解以上三个变量中的两个就能推算出剩下的变量。通过债券价格、剩余期限、现金流或远期短期利率等已知变量，就可以估计出贴现函数的形式，进而利用即期利率与贴现率的关系，可以很好的拟合利率期限结构。利率期限结构模型的理论关注的是不同期限结构的债券到期收益率，即 $y_t(\tau)$ ，并试图解释影响利率期限结构变动的运行机制和驱动因素，为预测未来利率变动方向提供有效信息。

2.1.3 利率期限结构的理论与模型

早期的利率期限结构理论主要关注利率期限结构的形成机制的经济理论，包括预期假说、流动性偏好假说、市场分割理论及优先聚产理论。如预期假说 (Expectation Hypothesis) 认为整个债券市场是统一的，不同到期期限的债券之间

具有完全的替代性，从而每个债券购买者在不同期限的债券之间没有任何的个人特殊偏好。据此，利率期限结构的形态只取决于整个市场对未来利率的预期，长期债券的预期收益率是预期短期利率的几何平均，而预期的未来短期利率等于收益率曲线隐含的远期利率。流动性偏好假说（Liquidity Preference Hypothesis）则关注不同金融市场的风险程度是不一样的，投资者持有的长期债券要比短期债券更具风险，这包括违约风险、利率风险、通胀风险、对手风险等。对于一个风险规避的投资者，其对高流动性、低风险债券的偏好将使得短期债券的利率水平低于长期债券，这一部分对流动性的风险贴水（risk premium）导致了对不同期限债券的供给与需求形式上的不平衡，收益率曲线的形态取决于流动性风险贴水。该理论对远期利率的预测能力得到了大多数研究人员的认同，但是对流动性风险贴水的性质目前分歧依然较大。Culbertson (1957)^[14] 提出了市场分割假说（Market Segmentation Hypothesis），认为整个金融市场是由不同期限、不同投资风险的债券组成的，所有的投资者都偏好于使其资产寿命和债券寿命相匹配的投资，即预期的未来短期即期利率与隐含远期利率之间没有特定的关系。因此，各种债券的收益率由该债券的供求状况决定，不受其他期限债券预期收益率的影响。此后，Modigliani and Sutch (1966)^[35] 提出了优先聚产理论（Preferred-Habitat Theory），认为不同类型的投资者具有期限偏好的习惯，他们一般会在自身优先偏好的期限市场进行投资交易，但是如果在某一方面出现重大的收益率诱导因素，则会转向其他市场。根据优先聚产理论，长期利率和短期利率的关系不仅表现在：长期利率取决于市场对未来短期利率预测的平均值，而且还要加上一项正值的期限升水。考虑了偏好习性的因素就可以更好地解释收益曲线。收益曲线的形状由预期未来利率与风险升水共同决定，它们正向或反向地引导市场参与者脱离了偏好习性。

2.1.4 利率期限结构模型

随着 Black and Scholes (1973)^[6] 提出的期权定价公式被理论和实务界广泛接受和采用，整个金融领域进入了以数量分析为主的研究时期。与此同时，利率期限结构模型也开始采用现代统计拟合技术以及时间序列分析方法，把现有的收益率作为因变量，到期期限为自变量，对收益率曲线进行样本内拟合，并以估计的参数作为

预测的依据。不同期限的利率受到经济系统中多种因素的综合影响，其运动过程表现出一定的随机性，但同时又具有向一个长期均衡水平回复的特征，收益率曲线的形状也会随时间推进而变化。为了描述这种随机行为，后来发展的利率期限结构模型引入了随机分析的方法，用随机期限结构模型来刻画到期收益率与到期期限之间的非确定函数关系及其动态特征，从而为资产定价和利率风险管理提供基准和参照系。利率期限结构模型主要分为动态利率期限结构模型和静态利率期限结构模型。前者主要通过随机微分方程刻画利率期限结构模型的动态特征，参数估计比较复杂且需要大样本信息。而后者事先设定收益率曲线的函数形式，然后通过选取债券的横截面数据来估计函数中的参数变量，进而对收益率曲线进行拟合和估计，实际操作比较灵活。

动态利率期限结构模型可以按照其随机理论基础，分为一般均衡模型 (Equilibrium) 与无套利机会模型 (No-Arbitrage)。均衡模型从分析经济系统的均衡条件入手，通过设定短期利率的演变过程来推出短期无风险利率 r_t 的一个随机过程，然后寻找该随机过程对债券价格和期权价格的含义，从而推出债券价格和期权价格的解析解或数值解，利率期限结构的动态特征取决于一系列不同到期期限的短期利率。如 Vasicek (1977)^[43] 设定短期利率 r_t 为一个 Ornstein–Uhlenbeck 随机过程：

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2.21)$$

其中 k , θ 和 σ 为常数， dW_t 是一个（连续的）布朗运动过程， $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ 。在方程 (2.21) 中，我们注意到参数 (κ, θ, σ) 决定了整个随机过程的特征：

- κ ：是随机过程的「变化率」，即控制了整个随机过程向长期均值回归的快慢程度；
- θ ：代表了随机过程的「长期均值水平」，O-U 过程最显著的特征是其具有了「均值回复」，即在变化率 κ 的控制下变量趋于稳定的状态。这个在利率期限结构建模中经常使用，如最早的 Vasicek 利率模型就是一个典型的 O-U 过程。
- σ ：表示随机过程的「瞬时方差」。

由Vasicek 提出的短期利率模型是一个随机微分方程（SDE），可以得到其显式解

$$r(t) = e^{-\kappa t}(r(s) - \theta) + \theta + \int_s^t \sigma e^{-\kappa(t-u)} dW(u) \quad (2.22)$$

Vasicek 进一步给出了纯贴现零息票债券在 t 时刻的解析表达式为：

$$\begin{aligned} P(t, T) &= A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \\ B(t, T) &= -\frac{1}{\kappa} \left[1 - e^{-\kappa(T-t)} \right], \\ A(t, T) &= \exp \left[\frac{(B - \tau(t, T))(k^2\theta - \sigma^2/2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4\kappa} \right]. \end{aligned}$$

这个模型考虑了短期利率具有一个均值回复（mean-inverting）的特征，即短期利率以速率 k 趋向长期均衡水平 θ ，

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[r(t)|r(s)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\kappa t}(r(s) - \theta) + \theta = \theta. \quad (2.23)$$

Vasicek 模型的主要缺点是其推导的短期利率可能为负值，这在现实世界是不可能存在的。这点不难从方程（2.22）得到。首先从短期利率是一个随机布朗运动的线性转换，我们可以知晓短期利率也服从正太分布，且

$$r(t) \sim \mathcal{N} \left(e^{-\kappa t}(r(s) - \theta) + \theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa} [1 - e^{-2\kappa t}] \right). \quad (2.24)$$

则可以得知

$$Pr(r < 0) > 0 \quad a.s. \quad (2.25)$$

对此，Cox et al. (1985)^[13] 提出了一个短期利率为非负值的 CIR 模型，该模型基于典型消费者最优化的均衡条件，通过假设短期利率服从以下的风险中性过程：

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t, \quad (2.26)$$

这同样捕捉到了短期利率的均值回复漂移项，但该随机项的标准差同短期利率关联，即其标准差随着短期利率的上升而上升。CIR 利率期限结构模型的优点是它产生于经济系统中的内在变量和总体均衡条件，因此包含了典型消费者的风险规避、时间消费偏好、财富限制等众多的投资选择，其缺点是模型太过于复杂，在参数估计与模型预测方面不利于实际操作。Brennan and Schwartz (1979)^[7] 最早提出了一个包含两因子的利率期限结构模型。在该模型中，短期利率 r_t 趋向于长期均衡利率水平 R_t ，而后者这服从一定的随机演变过程，即：

$$\begin{aligned} dr_t &= (\alpha_1 + \beta_1(R_t - r_t))dt + r_t\sigma_1dW_{1t}, \\ dR_t &= (\alpha_2 + \beta_2r_t + c_2R_t)dt + R_t\sigma_2dW_{2t}. \end{aligned}$$

该模型的缺点在于没有清楚的解释短期利率为何趋向于长期利率，即什么经济因素决定了长期均衡状态下的利率水平。

而无套利机会模型则采用相对定价原理，以实际观察到的利率期限结构为模型输入变量，假设市场上不存在套利机会，推算得到不同到期期限的债券的市场价格，从而根据预期理论得到未来瞬时利率必须服从的随机过程。无套利机会均衡模型能够较为精确的拟合当前的利率期限结构。这包括 Ho and Lee (1986)^[27] 模型、HJM 模型^[26]、Hull and White (1990)^[28] 模型等。如 Hull and White (1990)^[28] 对 Vasicek 模型和 CIR 模型^[13] 的扩展，在短期利率中加入了时变参数 δ_t ：

$$dr_t = [\delta_t + k_t(\theta_t - r_t)]dt + \sigma_t dW_t. \quad (2.27)$$

这个模型的优点在于随机项具有时间衰减特征，短期利率在远期是一个确定性的过程，因此长期利率比短期利率更容易预测。

此外，利率期限结构模型还可以按照所设定的影响因子的参数个数分为两大类：(1) 单因子模型中只含一个随机因子，这意味着收益率曲线上各点的随机因子完全相关，从而短期利率是影响债券收益率曲线的唯一状态变量；(2) 多因子模型则假定利率期限结构的随机动态演变过程是由几个因子共同推动的，这些因子可以是宏观经济的冲击或者收益率曲线本身的状况，如收益水平、收益率曲线的斜度与曲

度、长短期利率的利差等。单因素模型在设定上比较简单，容易操作，但存在着许多缺点。例如，假定短期利率是长期利率的决定函数，因此不同期限结构的零息票债券收益率之间完全相关，这与实际不符。Litterman and Scheinkman (1991)^[30] 使用因素分析法对单因素模型和多因素模型的拟合收益率曲线效果做了检验，结果表明，多因素模型比单因素模型的拟合效果更好，因而能更好地描述实际利率期限结构的特征。Balduzzi et al. (1998)^[4] 认为包含利率的条件均值 (conditional mean) 与中央趋势 (central tendency) 的两因子模型能更好的预测短期利率。而 Pearson and Sun (1994)^[38] 则认为两个因素是不够的，必须至少使用三个因素来解释利率期限结构的水平移动与扭曲的特征。一般而言，两因子模型可以解释利率方差变化的 90% 以上，而三因子模型能够解释 98% 以上。因此，后期的研究一般都采用多因素模型。

此外，近年来利率期限结构模型有了一些新的发展，这如市场模型、随机域模型、非参数模型及跳跃扩散模型等，可参考 Brigo and Mercurio (2007)^[8]。由于文本篇幅所限，故此不做赘述。

综上所述，有关利率期限结构的研究均有设定利率的均值回复特性，即短期利率会趋向一个长期均衡利率水平。然而，关于什么经济因素决定这个形成机制，目前尚缺深入的研究。后文将对此进行探讨，并指出人口年龄变动是决定利率的长期均衡水平波动的结构性社会经济因素。

2.1.5 利率期限结构的实证分析

利率期限结构的实证分析指的是利用现代统计手段与时间序列方法对利率期限结构进行定量研究，试图理解影响利率期限结构模型变动的形成机制与经济因素，提高对未来不同期限结构利率的预测能力。对于利率期限结构的实证分析，Laurini and Hotta (2010)^[29] 评论说：

…(这些) 实证模型对数据规律加以综合分析，并能够很好地预测未来收益率曲线的变动情况。它们既不囿于理论的偏颇，又符合均衡与无

套利机会的一般条件。

利率期限结构模型的静态拟合指的是利用曲线样条逼近技术，将到期收益率视为一个依赖剩余到期期限的多项式函数，而各个参数变量为常数，从而对收益率曲线进行拟合。这包括分段拟合与整段拟合（参数化拟合）两类。前者如 McCulloch (1971)^[32] 尝试用一个二次多项式样条函数（polynomial splines）对收益率曲线进行样条逼近，该方法要求事先指定样条基函数，将贴现函数表示为基函数的线性组合，然后使用回归技术来拟合。样条拟合的缺陷在于其估计的收益率曲线在长期部位可能出现振荡，对长期利率的估计不准确。由于指数函数的衰减特征与收益率曲线有很多相似之处，用其拟合收益率曲线效果更好。因此，Vasicek and Fong (1982)^[44] 用指数多项式函数代替多项式函数，利用指数样条模型对收益率曲线进行拟合。此后，Shea (1984)^[41] 发现指数样条函数说估计的远期利率曲线的远端部分会呈现大幅振荡的态势，提出了基于 B 样条函数（B-Spline）对收益率曲线进行拟合。

要得出完整的利率期限结构，需要知道任意到期时间 τ 对应的零息债券价格，但市场上交易的只是一些特定到期时间的债券，并且大多数为付息债券，因此构造收益率曲线需要从现有的零息债券和付息债券价格中计算和模拟出所有到期时间对应的零息债券价格。分段拟合的缺陷在于模型估计的参数较多，对数据特征及计算量要求大，且操作复杂。而整段模型以“简约原则”（The Principle of Parsimony）为指导，通过参数化拟合方法对收益率曲线进行整体拟合，从而实现对模型参数的非线性优化拟合。Nelson and Siegel (1987)^[37] 首先提出使用参数化拟合技术对收益率曲线进行整段拟合估计，即利用指数衰减函数与收益率曲线相似的形态特征来估计瞬时远期利率。Nelson and Siegel 用 Laguerre 函数（Laguerre Function）表示瞬时远期利率为：

$$f_t(\tau) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda\tau} + \beta_3 [(-\lambda\tau)e^{-\lambda\tau}], \quad (2.28)$$

式中， $\theta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda)'$ 为模型待估计的参数。由方程 (2.16) 可推出收益率曲线为

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du$$

$$= \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{[1 - e^{-\lambda\tau}]}{\lambda\tau} - \beta_3 e^{-\lambda\tau}. \quad (2.29)$$

该模型的优点在于模型参数少（只有四个参数待估计）、参数所代表的经济含义明确，并且有足够的灵活度来拟合不同形状的收益率曲线。这个又被称做“Nelson-Siegel”利率期限结构模型(以下称 NS 模型)，可以对远期利率和即期利率曲线的水平、隆起、U 形状等特征进行拟合，特别适用于样本债券数据较少的情况下对收益率曲线的拟合和估计。同时，NS 模型还具有良好的样本外预测能力。此外，Svensson (1994)^[42] 对 NS 模型进行了扩展，加入一个指数衰减项以提高模型对复杂收益率曲线形态的拟合能力，即

$$y_t(\tau) = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \frac{[1 - e^{-\lambda_1\tau}]}{\lambda_1\tau} - \beta_3 e^{-\lambda_1\tau} + \beta_4 \left(\frac{[1 - e^{-\lambda_2\tau}]}{\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_2\tau} \right). \quad (2.30)$$

Svensson 模型提高了 NS 模型对收益率曲线的双峰和双 U 形状的拟合能力。

NS 模型及其拓展形式克服了样条拟合函数的缺陷，且在实际数据拟合和理论解释方面均有良好表现，被广泛应用于金融实践当中，如 BIS (2005)^[5] 的一项研究表明，包括比利时、芬兰、法国、德国等国家在内的中央银行都广泛的采用 NS 模型或其拓展形式对收益率曲线进行拟合与估计，并以此对未来的长短期利率做预测。

2.2 动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型

NS 模型在收益率曲线拟合方面依然是一个静态拟合的模型，其中的参数没有反映出收益率曲线的动态特征。这启发后来的研究对其进行拓展到能包含收益率曲线动态特征行为的模型。其中，以 Diebold and Li (2006)^[16] 所做的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型模型较为成功。该模型的经济含义更加明确，三个影响因子能符合收益率曲线的长期、短期、中期的行为特征。

首先，Diebold and Li (2006)^[16] 对原始的 NS 模型形式进行了改写：

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right] + \beta_{3t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right], \quad (2.31)$$

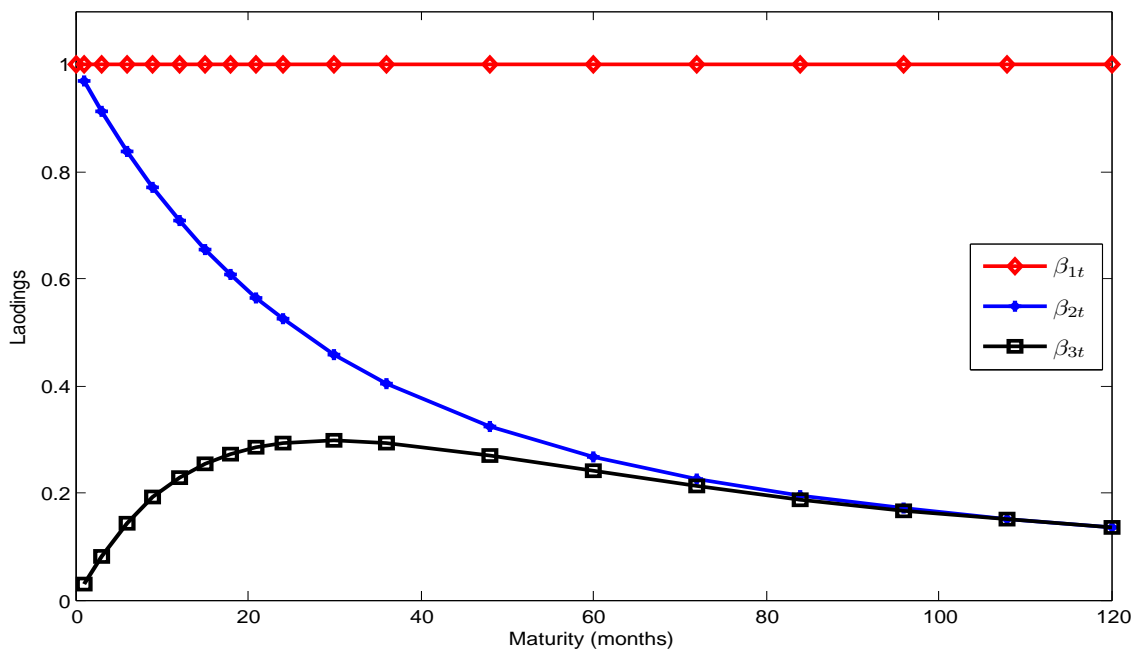


图 2.2 动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的因子载荷分析

模型的待估计参数为 $\theta = (\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, \lambda)'$ ，即 $\beta_t = (\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})'$ 分别对应于方程 (2.29) 中的 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$ ， λ 控制着指数衰减的速度，较小的数值产生缓慢的衰减速度，并能对长期期限的收益率曲线有更好的拟合效果，反之，较大的 λ 则使得函数的衰减速度增加，对短期期限的收益率曲线拟合地更好，一般来说， λ 取使得 β_{3t} 的因子载荷达到最大的数值，即 $\lambda = \arg \max_{\lambda} \{[1 - \exp(-\lambda\tau)]/(\lambda\tau) - \exp(-\lambda\tau)\}$ ，通常令 $\lambda = 0.0609$ 。

2.2.1 影响因子的经济解释

相比于其他利率期限结构模型，动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型中的因子所包含的经济意义更加明确。模型的因子载荷 (Factor Loading) 为

$$\left[1, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right],$$

如图 (2.2) 所示。三个隐含因子， $\beta_t = (\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})'$ ，很好的刻画了收益率曲线的长期、短期与中期的动态特征：

水平因子 β_{1t} 的因子载荷为常数项 1，即

$$\beta_{1t} = y_t(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \beta_{1t} + \beta_{2t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right] + \beta_{3t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right] \right\},$$

即 β_{1t} 是到期期限趋于无穷时 $y_t \tau$ 的极限，在实际中，被看做是长期均衡条件下的利率水平， β_{1t} 的变动代表了整体债券市场的未来变动方向。这个因子受到经济系统基础层面的影响，如代表性消费者的投资风险厌恶程度的改变、社会结构尤其是人口年龄结构的波动等。

斜度因子 动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的第二个部分 β_{2t} 的载荷因子是到期期限 τ 的指数递减函数，从 1 开始随着期限的增加而迅速衰减为 0，这反映的是短期利率的变化情况，受到宏观政策冲击、长短期利差、金融市场噪声等影响。

曲度因子 而 β_{3t} 的载荷因子是 $\left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right]$ ，一开始从 0 处逐渐递增，在中间部位达到最大值，然后随着到期期限的延长开始缓慢递减直至为 0。这表明 β_{3t} 主要对中期期限的收益率有较多的影响，而对长期及短期收益率部分没有影响，从而改变的是收益率曲线的曲度。

模型参数 $\beta_t = (\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})'$ 的取值情况，决定了利率期限结构的动态特征，可以很好地刻画出不同收益率曲线的单调 (monotonic)、驼峰 (humped) 以及 S 形状等多种形态，由模型拟合的形状与实际的利率曲线结构比较相符。同时，这三个动态因子也服从一个向量自回归过程 (VAR)：

$$\beta_t = \mu + \Phi(L)\beta_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.32)$$

式中， $\beta_t = [\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}]'$ ， $\Phi(L)$ 为滞后运算因子 (lag operation)，且有 $\mathbb{E}_t[\varepsilon_t] = 0$ ， $\mathbb{E}_t[\varepsilon_t \varepsilon_t'] = \Omega$ ，对于任何的非负值 k ， $\mathbb{E}_t[\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}'] = 0$ ，即干扰项服从独立正态分布： $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$ 。

2.2.2 模型估计与预测

动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型中的参数不在是常数项，而是一个服从向量自回归过程（VAR）的隐含因子（Latent Factors），可表示为状态空间方程（State Function），而到期收益率与影响因子之间的关系构成测量方程（Measurement Function），即

$$\mathbf{y}_t(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\xi}_t, \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(L)\boldsymbol{\beta}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.34)$$

式中，

$$\mathbf{y}_t(\boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_T) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_1}}{\lambda_t\tau_1} & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_1}}{\lambda_t\tau_1} - e^{-\lambda_t\tau_1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_2}}{\lambda_t\tau_2} & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_2}}{\lambda_t\tau_2} - e^{-\lambda_t\tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_T}}{\lambda_t\tau_T} & \frac{1-e^{-\lambda_t\tau_T}}{\lambda_t\tau_T} - e^{-\lambda_t\tau_T} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_t = \begin{pmatrix} \beta_{1t} \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}_t = \begin{pmatrix} \xi_t(\tau_1) \\ \xi_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \xi_t(\tau_T) \end{pmatrix}, \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_T) \end{pmatrix}, \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Omega}).$$

在状态空间表示的情况下，可以采用 Kalman 滤波构造样本函数，通过最大化似然函数对模型参数进行估计，并将参数估计值带入状态空间模型即可得到隐含变量 $\boldsymbol{\beta}_t$ 的平滑值。

动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型所展现的收益率曲线的动态变化具有持续性特征，如水平因子 β_{1t} 的高度自相关可以很好的刻画出收益率曲线变化的强持续性

性，而斜度因子 β_{2t} 的低自相关性则可以代表长短期利差的低持续性。同时，收益率曲线的远端波动较为稳定，反映了整体经济系统的长期变化趋势。Diebold and Li (2006)^[16] 论证了动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型所具有的一些特性，尤其是能够刻画出整个收益率曲线的动态特征，且在一阶向量自回归 (VAR(1)) 的情况下，模型的参数只需经过两步法就能得到估计。同时，该模型在预测方向尤为突出，优于一般的模型如利率随机游走模型 (Random Walk Model)、收益率自回归模型 (AR(1)) 等模型，特别是动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型在预测中长期收益率时均比其他模型有显著的提高。然而，对于为何动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型能够对中长期零息票国债收益率上有如此强劲的预测能力，Diebold and Li 及其后的拓展模型并未给出明确的答案。

2.3 人口年龄结构变动与期限结构

一些人口经济学界和金融学家早已在上个世纪 90 年代开始关注人口年龄结构变动对金融市场特别是证券收益率的影响。下文将简要回顾已有的关文献资料，并指出所选取的代表人口年龄结构变动的指标变量的作用与意义。需要指出的是，目前关于人口年龄结构变动对利率期限结构的影响的研究尚处开始阶段，相关的理论与实证资料仍然欠缺。本文的研究目的之一就是希望能起到抛砖引玉的作用，有待后续的改善、提高。

人口年龄结构变动，尤其老龄化，是一个当今全球公认的亟待解决的问题，这在一些发达国家显得尤为突出。从个体家庭角度看，老龄化意味着每个生产性劳动力所需要供养的人口比例负担加大，相应的需要减少当前的消费水平并，并增加对未来不确定风险的投资，如增加储蓄、购买金融资产、养老保险等。而从社会总体看，这将导致生产性劳动力供给的下降、社会总体消费疲软、对未来不确定性的风险投资上升等。

然而，目前有关人口年龄结构变动与资产价格和收益率的相关关系的研究依然匮乏。正如 Bakshi and Chen (1994)^[3] 批评：

人口年龄结构变动能够通过各种方式影响经济动态。虽然已有经济学家着手研究人口年龄结构变动对社会总体消费、储蓄、劳动供给以及社会项目 (social program) 的影响, 我们队人口年龄结构变动能否以及如何影响金融市场却知之甚少。

在少数的理论文献中, Bakshi and Chen (1994)^[3] 提出了一个引入人口年龄结构变动的代表性消费者资产定价模型 (The Representative-Agent Pricing Model)。他们假设: 典型的投资者的风险厌恶程度会随着年龄的增加而增加。由最优化投资决策条件可以推出表示代表性消费者对不同资本产品的投资需求的 Euler 方程:

$$\mathbb{E}_t \left[\delta \cdot \frac{u_C(C_{t+\Delta t}, A_{t+\Delta t})}{u_C(C_t, A_t)} \cdot \frac{P_{n,t+\Delta t}}{P_{n,t}} \right] = 1. \quad (2.35)$$

因此, 通过影响金融市场上不同年龄阶段的投资者的生命周期投资策略 (life-cycle portfolio investment strategies), 人口年龄结构变动对金融市场的资产价格与回报率产生显著的影响。Abel (2003)^[1] 在一个世代交叠模型 (OLG) 的框架下分析了出生率变化与资产供给之间的关系, 发现美国在二战后出现的婴儿潮人群相对于其他稳定的出生率的人群会导致资产价格上升, 进而降低资产回报率。而 Brooks (2002)^[9] 则使用同样的模型, 并利用模拟数据来分析人口年龄结构变动对风险贴水的影响。利用美国金融消费调查 (Survey of Consumer Finances, SCF) 中的横截面数据资料, Yoo (1994)^[45] 发现人口年龄结构变动与短期国库券的实际利率之间有显著的负相关关系。在一篇总结性的文章里, Poterba (2004)^[40] 重新检验了人口年龄结构变动与国库券、长期政府债券及公司股票回报率之间的关系, 得出了与 Abel (2003)^[1] 不同的结论, 即: 各个年龄结构人口数量的变化与资本回报的相关关系十分微弱。

Geanakoplos et al. (2004)^[22] (以下简称 GMQ 模型) 在一个封闭的经济模型基础上加入了人口年龄结构变动, 提出了一个更加精细的世代交叠模型。GMQ 模型通过模拟美国婴儿出生率的动态特征, 刻画了美国人口年龄结构变化的周期性变动 (周期长度为 20 年)。他们根据美国在过去一个世纪内的人口年龄结构变化情况, 将整个社会的人口总量按照年龄分为三个群体: (1) 青年人群, 由于收入不足以承担消费支出, 在此阶段会通过资本市场进行借款; (2) 中年群体, 其收入迅速上升

并超过支出，此时会倾向于将多余的收入进行投资（货币市场如银行机构，或者资本市场如购买证券）；(3) 退休群体，可以一次性的获得先前的所有投资款项以及相关收益，从而使用以前的储蓄收入以度晚年。该模型假设人口年龄结构在奇数期 (odd) 与偶数期 (even) 之间波动：

$$\Delta_t = (\Delta_t^y, \Delta_t^m, \Delta_t^r) = \begin{cases} \Delta_1 = (N, n, N) & t = \text{奇数期} \\ \Delta_2 = (n, N, n) & t = \text{偶数期} \end{cases} \quad (2.36)$$

式中， Δ_t^y 表示青年人群的人口数量， Δ_t^m 中年人群的人口数量， Δ_t^r 表示退休人群的人口数量。由无套利机会条件 (No-Arbitrage) 可知

$$\frac{D + q_o^e}{q_e^e} = \frac{1}{q_o} = 1 + r_o$$

$$\frac{D + q_e^e}{q_e^e} = \frac{1}{q_e} = 1 + r_e,$$

式中， D 表示股利分红， q 为股票价格， $q_o < q_e$ ($r_o > r_e$) 意味着 $q_e^e < q_o^e$ 。而反映人口年龄结构动态特征的指标， $\frac{\Delta_t^m}{\Delta_t^y}$ ，对金融市场产生重要的影响：通过资本市场资金的借贷，不同年龄阶段的人口群体对金融产品的投资需求的变化决定了资本市场的均衡价格。在 GMQ 模型中，债券与股票被视为具有完全替代性的金融产品，人口年龄结构变动也决定了货币市场的长期均衡利率水平。基于有效市场假说关于资本市场具有信号指示的功能，DellaVigna and Pollet (2005)^[15] 探讨了人口年龄结构变动对即期与远期资本市场的影响，其研究结果显示，短期人口年龄结构变动对投资者的投资决策，进而对资产价格有重要影响。这种对不同金融市场的长期均衡价格与回报率的预测能力主要来自人口年龄结构变动具有稳定的可预测性。

以上文献资料主要关注人口年龄结构变动对金融市场价格的影响，而对于人口年龄结构变动与利率期限结构之间的关系，目前的研究尚处起步，仍未有一个统一的研究框架。其中较为成功的当属 Favero et al. (2012)^[21] 在仿射利率期限结构模型 (ATSM) 中引入人口结构变量。在该模型中，

$$y_t(\tau) = -\frac{1}{\tau} (A_\tau + B'_\tau X_t + \Gamma_\tau \cdot MY_t(\tau)) + \varepsilon_{t,t+1} \quad \varepsilon_{t,t+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2)$$

$$r_t = \delta_0 + \delta_1' X_t + \delta_2 MY_t$$

$$X_t = \mu + \Phi X_{t-1} + v_t \quad v_{t,t+1} \sim i.i.d.\mathcal{N}(0, \Omega).$$

式中, MY_t 为一个社会总人口中的中年人口与青年人口的总数比值。在该模型中, 短期利率可表示为宏观状态变量 $X_t = [f_t^o, f_t^u]$ 与当前社会人口变量 MY_t 的一个函数关系, 而整个收益率曲线则与未来的人口年龄结构变动通过状态方程产生联系。Favero et al. (2012)^[21] 发现在仿射利率期限结构模型中引入反映人口年龄结构变化的变量能够很好的捕捉到长期均衡利率的持久性组成部分, 从而比传统的利率期限结构模型能更好地解释长期利率的变化。

根据 Geanakoplos et al. (2004)^[22] 及 Favero et al. (2012)^[21] 的研究, 本文采用一个反映社会总人口中的中年人口 (40-49) 与青年人口 (20-29) 的总数比值, 记作「 MY_t 」。该比值变量能够很好的反映出货币市场长期均衡时的利率水平的变动状况。如图 (2.3) 和图 (2.4) 所示, MY_t (倒数) 与不同期限的利率水平之间存在着强烈的协同运动 (co-movement) 的关系。值得注意的是, 这种变动规律以大约一个代际 (Generational Frequency) 的时频出现交替轮换。 MY_t 这一反映人口年龄结构变动的可预测指标能够较好的刻画出不同期限利率。

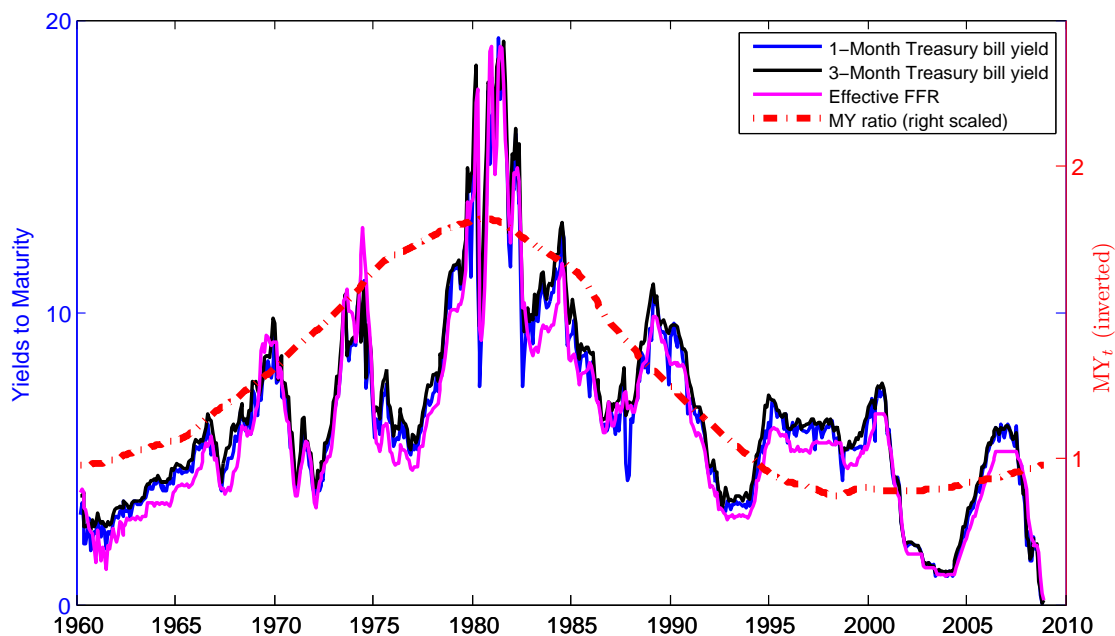
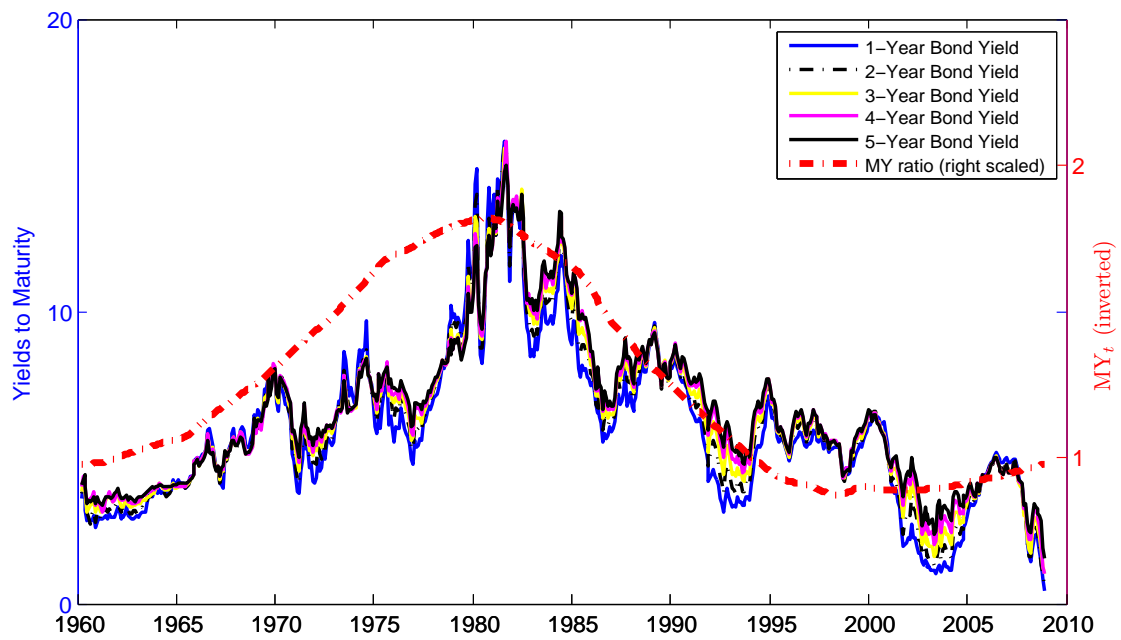


图 2.3 美国短期利率与 MY_t

图 2.4 中长期美国债券收益率与 MY_t

在直观上，当 MY_t 比较大（小），即在特定的时点上一个地区的中年群体（年轻群体）占总人口的比重较大，则这个中年群体由于收入大于支出从而推动了对储蓄（消费）的需求上升。在保证市场出清的条件下，利率则随之下降（上升）。GMQ 模型的实证研究也证实了理论研究的结论。即：股票实际回报率与 MY 存在显著的统计关系。人口年龄结构变动与不同期限利率的变动之间存在着紧密的关系，这也符合经济学的直觉推理。同时，在一定的时期内，人口年龄结构具有相对可靠的预测性，可被视为一个外生变量，例如美国人口调查局（BoC）每五年都会进行一次人口预测项目（Population Projection）以提供未来的人口结构走势，该项目提供的报告具有一定的准确性。因此，建立一个由人口因素驱动的利率期限结构模型不仅能够有助于增强利率期限结构模型的理论解释能力，为理解影响长期均衡状态利率水平提供良好的理论支持，而在由于人口年龄结构变动的可预测性，将进一步提高对未来利率期限结构模型变动的预测能力，从而为政策制定和市场投资提供有效的信息价值。

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

第三章 模型设定

本章主要介绍模型的构建，将试图建立一个由人口因素驱动的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型，通过考察人口年龄结构的动态特征，论证其反映的货币市场长期均衡时的利率水平的变动状况，即人口年龄结构变动决定了动态 Nelson-Siegel 模型中的长期影响因子。同时，该部分将对本文所使用的数据进行相应的说明。

3.1 模型

记 $y_t(\tau)$ 为一个剩余到期期限为 τ 期的债券到期收益率，该变量可以分解为两部分：(1) 一个由经济系统中的永久性冲击决定的长期均衡利率水平的组成部分，记为 $K_t(\tau)$ ，该状态随人口年龄结构变动在周期长度为一个世代交叠的频度上变化；(2) 一个反映商业周期冲击的局部均值回复的组成部分， $X_t(\tau)$ ：

$$y_t(\tau) = K_t(\tau) + X_t(\tau), \quad (3.1)$$

式中 K_t 代表了利率中受到经济永久性冲击的长期项（预期水平），而 X_t 是利率中的代表条件均值为 0 的均值回复项。在方程 (3.1) 中，长期项 K_t 对应于方程 (2.31) 中表示动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的水平因子（Level Factor），受到经济系统基础层面的影响，如代表性消费者的投资风险厌恶程度的改变、社会结构尤其是人口年龄结构的波动等。而反映短期利率变化的均值回复项 X_t 对应于动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的斜度因子（Slope Factor）与曲度因子（Curvature Factor）。

3.1.1 人口年龄结构与长期利率水平

在第 (2.1.3) 章有关利率期限结构的理论与模型的讨论中, 利率在较长期限内表现为均值回复 (Mean-Reverting) 的特性, 以往的模型缺少对这一方面做深入的经济解释, 特别是推动长期利率水平的波动的基础因素 (fundamental factors)。现代时间序列理论表明, 模型变量的可预测性主要有该数据时间序列中具有趋向均值性质的长期影响因子所决定。

根据利率期限结构的期望理论 (Expectation Hypothesis of the Term Structure), 一个 τ 期的利率由该时期内短期利率的数算平均值加上一个期限贴水 (term premium), 这意味着对于一个 τ 期的无风险利率可以表示为该时期内单期无风险即期利率的算术平均值, 即利率的长期期望值为:

$$K_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\tau-1} K_{t+j|t}, \quad (3.2)$$

式中 $K_{t+j|t}$ 表示在当前时期 t 对未来 $t+j$ 期的即期利率的预测, 即 $K_{t+j|t} = \mathbb{E}_t[K_{t+j}|\mathcal{J}_t]$, 其中 $\mathcal{J}_t = \{\mathcal{J}_{t-1}, \mathcal{J}_{t-2}, \dots\}$ 为市场上已知的所有信息集。

方程 (3.1) 表明即期利率并非一个平稳的时间序列, 而是一个趋向于时变水平的非平稳序列。Fama and Bliss (1987)^[20] 指出利用不同期限的远期利率有效可以提高对未来即期利率的预测, 并推断这是由于即期利率朝向一个不变的预期利率水平回复的特征决定的。而 Fama (2006)^[19] 利用美国国债 1986 年到 2004 年的数据对该模型做了重新检验, 发现现有的数据并不支持预期的均值回复利率水平是一个固定数值的说法, 而是趋向一个时变的长期利率水平, 这个长期的利率水平受到经济系统中永久性冲击 (permanent shocks) 的影响, 从而在时间序列上表现为水平的波动。相类似的, Balduzzi et al. (1998)^[4] 认为, 即期利率既有一个向条件均值 (conditional mean) 靠拢的特性, 长期债券收益率包含有对短期利率预测的信息, 同时, 即期利率中还含有一个时变的中央趋势 (central tendency), 即利率趋向一个长期限债券收益率的特性。因此, 为了更好地对利率的未来波动进行预测, 必须建立一个包含代表条件均值的短期债券收益与一个代表中央趋势的长期债券收益的

因子模型才能提高对利率的预测能力。而远期利率对未来即期利率的预测能力主要归功于利率中所包含的具有平稳特性的趋势组成部分，这一组成部分本身与随着时间而变动，并非一个固定的数值。对于如何建立即期利率的预测模型，问题的关键在于正确刻画即期利率中能够代表长期持久性变动方向的驱动因素。

然而，对于经济系统中的何种冲击能够被视为永久性冲击可以对利率产生影响，目前的研究成果并不足以令人信服。比如，由 Fisher 方程

$$r_t = i_t - \pi_{t+1}^e, \quad (3.3)$$

可知实际利率为名义利率与预期通货膨胀率的函数关系，则可以通过该关系来解释利率的变动。例如 Goto and Torous (2003)^[24] 认为美联储在货币供给政策上的转变导致预期通货膨胀率的变化，这种机制转变 (regime shift) 是导致利率水平波动的主要原因。然而，这种解释依然没有抓住决定问题的关键：即使是美联储的行为也是一种内生性的反映，同其他内生变量一样受到经济系统各种变量的外生冲击。因此，需要进一步探讨影响利率的长期动态行为特征的结构性变化。本文认为，这个反映长期利率变动方向的水平因素 (Level Factor) 受到经济系统基础层面的影响，如代表性消费者的投资风险厌恶程度的改变、社会结构尤其是人口年龄结构的波动等。人口年龄结构作为一个重要的影响因素与利率期限结构的长期均衡水平的波动存在着密切的关系。这类由人口年龄结构的变动所引致的对利率期限结构模型的影响只有在在一个世代期限范畴内才能显现效果。

在方程 (3.2) 中，进一步假设这个未来的即期利率由社会人口的年龄结构分布决定。或者换一个角度看，如 Favero et al. (2012)^[21] 认为各国的中央银行在做货币政策决策时，都会考虑到社会的人口结构特征对政策传导机制的影响。因此，即期利率可以由表示人口年龄结构变化的变量 MY_t 来表示：

$$K_{t+j|t} = \omega(\tau)MY_{t+j|t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (3.4)$$

$$MY_{t+j|t} = \mathbb{E}_t[MY_{t+j}|\mathcal{J}_t], \quad \mathcal{J}_t = \{\mathcal{J}_{t-1}, \mathcal{J}_{t-2}, \dots\} \quad (3.5)$$

式中 $\omega(\tau)$ 表示未来短期即期利率对未来人口年龄变化所作预测而生成的载荷因子

(Loading factor)，对每一期的债券到期日进行调整，而 $MY_{t+j|t}$ 是金融市场对未来人口年龄结构变化的预测，该预测值可以在美国人口调查局（Bureau of the Census, BoC）提供的人口预测项目中查到，具有一定的可信度。模型参数 ω_t 表示被预测到的人口年龄结构变动对当期即期利率的影响因子。

因此，未来 τ 期的长期利率水平可以表示为：

$$\begin{aligned} K_t(\tau) &= \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\tau-1} K_{t+j|t} = \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\tau-1} [\omega(\tau) MY_{t+j|t} + \varepsilon_t] \\ &= \omega(\tau) \cdot \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{\tau-1} MY_{t+j|t} + \varepsilon_t = \omega_t MY_t(\tau) + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (3.6)$$

式中，人口预测变量， $MY_t(\tau) = \sum_{j=0}^{\tau-1} MY_{t+j|t} = \mathbb{E}_t[MY_{t+j} | \mathcal{I}_t]$ 表示对当期人口年龄结构变化所做的递归移动平均预测（iterative average）。这个人口变量在方程（3.6）中意味着整个社会经济系统的人口年龄结构变动对长期均衡状态下利率水平影响需要在用整个世代的时间才能显现出效果。人口年龄结构变动带来的对利率期限结构的冲击具有一定的周期性、滞后性与持久性。

3.1.2 短期利率的局部均值回复

方程（3.1）中表示短期利率的局部均值回复特征的组成部分 X_t 由动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的斜度因子与曲度因子共同决定：

$$X_t(\tau) = \beta_{2t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right] + \beta_{3t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right], \quad (3.7)$$

式中的模型参数的含义与方程（2.31）一致，即： λ 控制着指数衰减的速度， β_{2t} 代表斜度因子，而 β_{3t} 表示曲度因子。Balduzzi et al. (1998)^[4] 将这种决定短期利率向长期水平做局部回复的因子称为“条件均值”（Conditional Mean）。在方程（3.7）中， $X_t(\tau)$ 覆盖了收益率曲线在短端变化的特征：斜度因子反映的是短期利率的变化情况，受到宏观政策冲击、长短期利差、金融市场噪声等影响，而曲度因子反映的是与商业周期有关的冲击给收益率曲线带来的影响。

因此，剩余到期期限为 τ 期的债券到期收益率 $y_t(\tau)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} y_t(\tau) &= \omega(\tau)MY_t(\tau) + X_t(\tau) \\ &= \omega(\tau)MY_t(\tau) + \beta_{2t}\left[\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right] + \beta_{3t}\left[\frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1.3 估计方法

在方程 (3.8)，载荷因子为

$$\text{Loading} = \left[\omega(\tau), \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}, \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right]'$$

人口因素建模的困难

这里，本文使用的模型不同与动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的一点在于，我们事先不假定在原来的 Nelson-Siegel 模型中第一个载荷因子是一个参量，即 Diebold and Li (2006)^[16] 将其视位单位向量进行处理。然而，我们在以上的分析中看到，影响收益率曲线的一个长期趋势并不是一个稳定的时间序列，而是具有来在一个人口变化周期内波动游历的特征。这要求我们在给利率建模过程中需要考虑到人口因素尤其是在一个人口变化周期频率上的有效信息。我们即将在下文中分析到，标志人口变化趋势的一个重要指标，社会群体当中年轻人口与中年人口的比率，可以作为一个影响收益率曲线变化的因子加入到利率期限模型当中。

然而，由于我们并不能从数据中直接推断出 $MY_t(\tau)$ 的载荷因子， $\omega(\tau)$ ，具体的函数形式。这一方面，是因为数据本身只能提供计量经济学家从外部已经发生的行为来观测与推断经济人的主观决策，而不能有完全的确定的函数形式；另一方面，也是本文需要进一步拓展的地方，即我们目前尚且缺乏一套合理而有效的金融理论来联系人口年龄变化所带来的经济社会影响与利率期限结构的具体关系。鉴于此，我们在做模型估计时，难免有所限制。

两步最小二乘法

为来得到人口年龄变化对收益率曲线的载荷因子，本文采用来（分）两步最小二乘法的估计方法。

首先，我们利用市场已知的债券曲线（zero-coupon bond curve）来估计影响收益率曲线的短期与中期载荷因子，则将可以用来解释收益率曲线不为长期因子，也即人口变化所引起的周期性波动的成分，余下的可以通过对人口变量再做一次回归即可得到人口因素的载荷因子。令

$$y_t(\tau) = \left[\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right]' \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{2t} \\ \hat{\beta}_{3t} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

待求得有关短期与中期因子， (β_{2t}, β_{3t}) ，我们得到

$$K_t(\tau) = y_t(\tau) - \hat{y}_t(\tau) = \hat{\omega}(\tau) MY_t(\tau).$$

在本式中， $MY_t(\tau) = \sum_{j=0}^{\tau-1} MY_{t+j|t} = \mathbb{E}_t[MY_{t+j}|\mathcal{J}_t]$ 是一个在当前期， t ，所预测的未来人口年龄的变化趋势，是金融市场对未来人口年龄结构变化的可测信息束。由方程（3.10）得到了对于不同的到期日，我们有异质特征的载荷因子，这个能够反映出人口结构变化对收益率曲线的常远影响。

至此，我们可以将方程（3.8）写成向量形式为：

$$y_t(\tau) = \underset{3 \times 1}{\mathbf{H}_t(\tau)}' \underset{3 \times 1}{\boldsymbol{\beta}_t} = \left[\omega(\tau) \quad \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \quad \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right] \begin{bmatrix} MY_t \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

式中 $\mathbf{H}_t(\tau) = \left[\omega(\tau), \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}, \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right]'$ 是一个 3×1 的列向量。由于 $MY_t(\tau)$ 具有稳定的可预测性，该值由 BoC 所做的人口趋势预测项目提跟随。从而，未来的

人口年龄结构变动会影响整条收益率曲线的动态特征，这种影响需要在大概一个世代的频度上显现。

3.2 数据说明

本文使用的数据为按照未平滑 Fama-Bliss 方法计算的美国零息票国债收益率，即

$$y_t(\tau) = -\frac{\log P_t(\tau)}{\tau}. \quad (3.11)$$

该数据样本从 CRSP 政府债券数据库提取，囊括了 1970 年 1 月份至 2000 年 12 月份。对于一些具有明显期权特征（可买入债券，callable bonds）以及一些具有特别流动性问题的政府债券将给予剔除。如此，本文使用的样本观测共包括 18 个序列值，涵括了到期期限为 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 与 120 月的收益率。

图(3.1)给出了整条收益率曲线的直观图形。表(3.1)则提供了样本数据的统计特征。关于收益率曲线的一些明显的特征化事实总结如下：

- (i) 一般而言，剩余到期期限越长，到期收益率越高，亦即长期收益率高于短期收益率。比如，期限为 1 个月的政府票据（bill）的收益率只有 6.4448，而 10 年期的国债收益率则为 8.0474。总的说来，长短期国债之间的利差关系变化体现在国债收益率曲线上，使国债收益率曲线表现出各不同的形态，在一定程度上预示了宏观经济发展周期的变化趋势。
- (ii) 水平因子呈现出较高的自相关关系，这说明长期收益率在比较稳定的范围内变动。在理论上，收益率曲线的两个主要特征——收益率差和收益率水平，两者都包含着整个市场未来的变化方向。收益率差反映了未来短期利率的变化，未来的短期利率包含着未来真实利率与市场对未来利率变化方向的理性预期。由于真实利率在长期中的波动是比较小的，未来短期利率的上升主要反映了市场的预期变化，在较长的预测时期尤其如此。

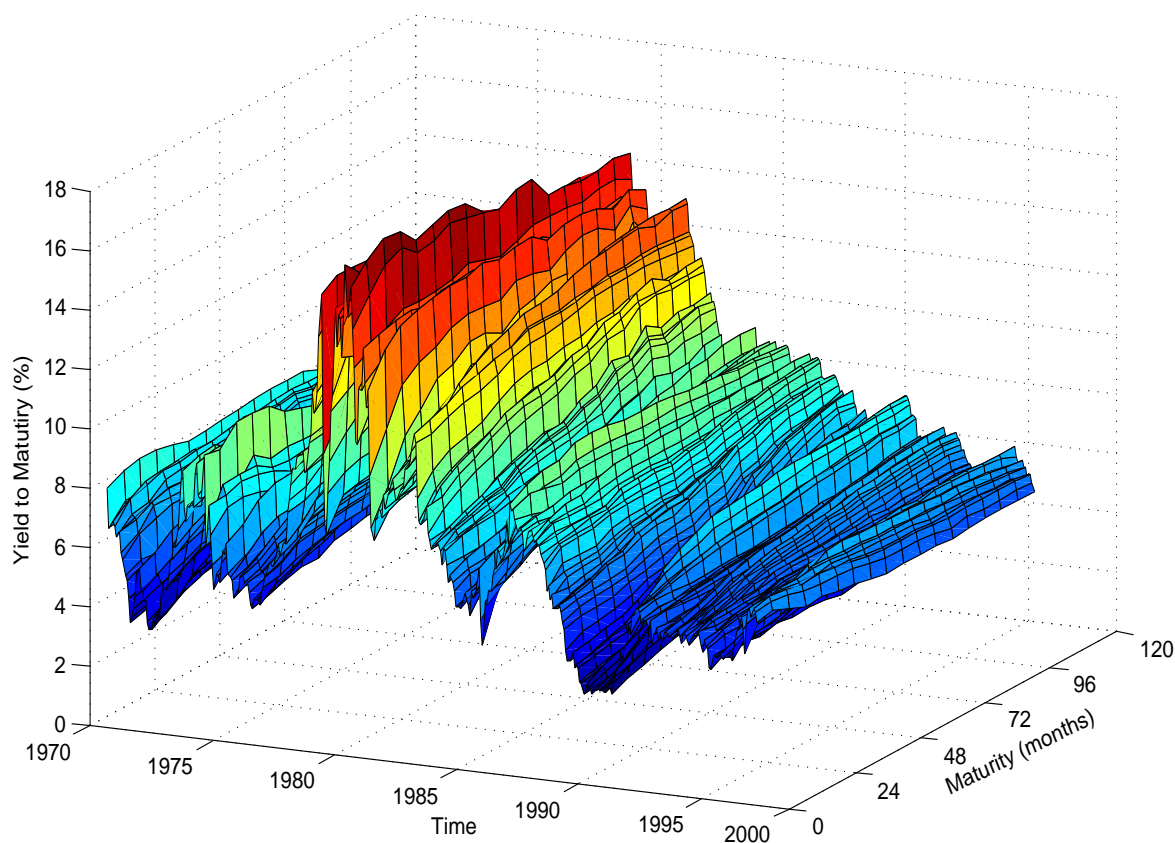


图 3.1 实际收益率曲线：1970:01–2000:12.

(iii) 收益率曲线在短端的波动比长端的波动大。这也印证了水平因子的自相关系数较高，而斜度因子和曲度因子的自相关系数都比较低。收益率曲线的水平变化代表整体债券市场的未来变动方向。这个因子受到经济系统基础层面的影响，如代表性消费者的投资风险厌恶程度的改变、社会结构尤其是人口年龄结构的波动等。

本文所使用的人口数据可以在美国人口调查局 (BoC) 的网站上查询到。这里，我采用 Favero et al. (2012)^[21] 提供的已经整理的数据库¹。在任何时点上，预测的 n 期 MY 比值是利用人口预测项目提供的有关数据计算的 n 期移动平均值。由于人口年龄结构具有比较稳定的变化趋势，通过计算出生率及死亡率，由社会色提供的人口模型能够为预测未来人口年龄结构变化提供相当准确的预测。当然，如 Miles (2012)^[33] 提到的，当重大的灾难性事件发生时，这一预测项目也可能不一定准确。然而，从市场理性预期的角度上看，这些关于未来的不确定风险已经包含

¹网页地址如下：Prof. Carlo Favero's website.

在风险贴水中。因此，本文在使用人口数据时，已经预先的假定人口预测项目的可靠性。

表 3.1 收益率的描述性统计特征：1970:01–2000:12

τ	Mean	Sd.Dev.	Mix	Max	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(3)$	$\hat{\rho}(12)$	$\hat{\rho}(30)$
1	6.4448	2.5824	2.6920	16.1620	0.9653	0.8943	0.6897	0.2797
3	6.7549	2.6553	2.7320	16.0200	0.9720	0.9081	0.7113	0.2956
6	6.9826	2.6619	2.8910	16.4810	0.9737	0.9104	0.7274	0.3321
9	7.1047	2.6398	2.9840	16.3940	0.9736	0.9104	0.7343	0.3562
12	7.2006	2.5693	3.1070	15.8220	0.9723	0.9080	0.7378	0.3744
15	7.3057	2.5174	3.2880	16.0430	0.9741	0.9146	0.7464	0.3995
18	7.3783	2.5022	3.4820	16.2290	0.9750	0.9168	0.7529	0.4183
21	7.4412	2.4898	3.6380	16.1770	0.9760	0.9202	0.7564	0.4319
24	7.4588	2.4428	3.7770	15.6500	0.9758	0.9179	0.7542	0.4412
30	7.5517	2.3650	4.0430	15.3970	0.9755	0.9213	0.7640	0.4638
36	7.6309	2.3408	4.2040	15.7650	0.9776	0.9274	0.7703	0.4767
48	7.7687	2.2839	4.3080	15.8210	0.9782	0.9336	0.7755	0.4984
60	7.8407	2.2483	4.3470	15.0050	0.9809	0.9382	0.7898	0.5179
72	7.9566	2.2216	4.3840	14.9790	0.9811	0.9417	0.7987	0.5326
84	7.9873	2.1819	4.3520	14.9750	0.9810	0.9393	0.7817	0.5351
96	8.0460	2.1711	4.4330	14.9360	0.9827	0.9459	0.8063	0.5470
108	8.0782	2.1796	4.4290	15.0180	0.9829	0.9465	0.8076	0.5523
120 (β_1) ¹	8.0474	2.1353	4.4430	14.9250	0.9828	0.9447	0.7836	0.5433
β_2 ²	1.2924	1.4246	-3.5050	4.0600	0.9270	0.7855	0.4065	-0.1188
β_3 ³	0.1152	0.7073	-1.8370	3.1690	0.7826	0.5586	0.2544	0.0746

注：自相关系数为 95% 置信区间。

¹ 实证的水平因子被定义为 10 年期到期收益率： $\beta_1 = y(120)$ ；

² 斜度因子为： $\beta_2 = y(120) - y(3)$ ；

³ 曲度因子为： $\beta_3 = 2y(24) - y(120) - y(3)$ 。

第四章 实证结果

本章将报告模型估计的实证结果。本章首先对美国国债收益率数据做了样本内的拟合处理，随后对模型参数进行估计。

$$y_t(\tau) = \mathbf{H}_t(\tau)' \boldsymbol{\beta}_t = \begin{bmatrix} \omega(\tau) & \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} & \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MY_t \\ \beta_{2t} \\ \beta_{3t} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

上文已经说明，动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型所刻画的收益率曲线的动态特征由模型的参数变量决定。与 Diebold and Li (2006)^[16] 一致，本文设定方程 (3.8) 中的两个影响因子服从一个向量自回归过程 (VAR)，

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(L)\boldsymbol{\beta}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4.2)$$

式中 $\boldsymbol{\beta}_t = [\beta_{2t}, \beta_{3t}]'$ ， $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 服从多元高斯分布， $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Omega})$ 。未知参数为 $\{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Omega}\}$ 。其中，模型参数 $\boldsymbol{\beta}_t$ 的 OLS 估计由两步最小二乘法得到：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{y}_t(\tau) = \begin{pmatrix} y_t(1) \\ y_t(3) \\ \vdots \\ y_t(120) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-\lambda_t}}{\lambda_t} & \frac{1-e^{-\lambda_t}}{\lambda_t} - e^{-\lambda_t} \\ \frac{1-e^{-3\lambda_t}}{3\lambda_t} & \frac{1-e^{-3\lambda_t}}{3\lambda_t} - e^{-3\lambda_t} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1-e^{-120\lambda_t}}{120\lambda_t} & \frac{1-e^{-120\lambda_t}}{120\lambda_t} - e^{-120\lambda_t} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_t = (\mathbf{G}'\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}'\mathbf{Y}_t. \quad (4.4)$$

这样便构成了两步估计法：(1) 先采用最大释然函数估计法，利用实际的收益率曲线对模型参数进行估计，得到 $\hat{\beta}_t$ ；(2) 第二步则对参数的向量自回归估计未知参数 $\{\hat{\mu}, \hat{\Phi}, \hat{\Omega}\}$ 。设定模型参数服从一个向量自回归过程不仅能够在参数估计上提供便利，这也意味着对收益率曲线的预测等同于对参数动态特征的刻画。这将在下文中具体论述。

```

1  setwd("/home/william/Desktop/Thesis_XeTex/")
2
3  data <- read.table("data", header = TRUE)
4  data <- data[1:372,-1]
5
6  n.data <- nrow(data)          ## number of data
7  tau <- c(1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36,
8          48, 60, 72, 84, 96, 108, 120)
9  n.tau <- length(tau)         ## number of maturity
10 lambda <- 0.0609 ## As in Diebold-Li(2006)
11 #####
12 yld <- as.matrix(data[,1:18])
13 my <- as.matrix(data[,22:39])
14
15 M <- matrix(, nrow = 18, ncol = 2)
16 rownames(M) <- c("1m", "3m", "6", "9m", "12m", "15m", "18m", "21m", "24m", "30m",
17                 "36m", "48m", "60m", "72m", "84m", "96m", "108m", "120m")
18
19 for (i in 1:18){
20   M[i,1] = ( 1 - exp(-lambda * tau[i]) ) / ( lambda * tau[i] )
21   M[i,2] = ( 1 - exp(-lambda * tau[i]) ) / ( lambda * tau[i] ) - exp( - lambda *
22           tau[i])
23 }
24
25 Beta <- matrix(, nrow = n.data, ncol = 2)
26 colnames(Beta) <- c("beta2", "beta3")
27
28 for (i in 1:n.data){
29   Beta[i,] <- coef( lm(yld[i, 1:18] ~ M -1) ) ## no intercept
30 }

```

模型中代表长期均衡利率水平的缓慢演变过程的成分, $K_t(\tau)$, 则可以通过如下估计:

$$\hat{K}_t = \hat{\omega}_t M Y_t(\tau). \quad (4.5)$$

```

1 yld.tilde <- yld - Beta %*% t(M)
2 yld.tilde <- ts(yld.tilde, start=c(1970, 1), end=c(2000, 12), frequency=12)
3
4 w <- matrix(, nrow = 18, ncol = 1) ## demographic loadings
5 for ( i in 1:18 ){
6   w[i] <- coef(lm(yld.tilde[,i] ~ my[,i] - 1))
7 }
8
9 yld.fit <- matrix(, nrow = n.data, ncol = 18)
10 for (j in 1:n.data){
11   for (i in 1:18){
12     yld.fit[j,i] <- w[i] * my[j,i] + M[i,1] * Beta[j,1] + M[i,2] * Beta[j,2]
13   }
14 }

```

4.1 模型参数估计

模型需要估计的参数, $\hat{\beta}_t = (\beta_{2t}, \beta_{3t})'$, 由方程 (4.3) 得到。

$$\hat{\beta}_t = (\mathbf{G}_t' \mathbf{G}_t)^{-1} \mathbf{G}_t' \mathbf{Y}_t, \quad (4.6)$$

式中 $\mathbf{G}_t(\tau) = \left[\frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau}, \frac{1-e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right]'$, \mathbf{Y}_t 为不同期限的实际国债的收益率向量。

4.1.1 斜率因子与曲度因子

通过两步最小二乘法, 我们可以得到斜率因子 (β_{2t}) 与曲度因子 (β_{3t}) 的参数估计值。

表 4.1 模型参数估计结果

$\hat{\beta}_t$	Mean	SD	Min	Max	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(3)$	$\hat{\rho}(12)$	$\hat{\rho}(30)$
$\hat{\beta}_{2t}$	2.48	2.13	-1.42	10.65	0.955	0.852	0.579	0.049
$\hat{\beta}_{3t}$	25.53	7.30	14.22	49.97	0.976	0.927	0.760	0.540

表 (4.1) 给出了相关的统计结果。可以看到, 两个因子在短期内的自相关系数较高, 到 12 期后仍然分别为 (0.579, 0.760)。图 (4.1) 与图 (4.2) 画出了相应的自相关及偏相关系数。

传统的计量回归方法通常要求所使用的时间序列必须是一个平稳的随机过程。然而, 现实中许多的经济现象往往都不平稳的过程, 产生了许多不平稳时序数据, 甚至是整个经济系统偶尔伴随有结构性突变。比如, 我们在上面的分析中应当注意到, 影响整个收益率曲线的因素可以分为两大类: 一个是具有平稳性质的、在一个世代叠交的频率上发生的人口因素; 另外的这是影响利率中短期动态特征的、非平稳的斜率因子与曲度因子。对于后者, 倘若采取传统的普通最小二乘法, 就会出现「伪」回归和「无意义」回归的现象。有鉴于此, Engle and Granger (1987)^[17] 首先提出了一种处理非平稳序列的全新的研究方法——协整(co-integration)研究方法。为了在下一步对斜度因子与曲度因子做时间序列建模, 我们首先需要先其二者进行单位根检验, 即检验序列本身是非平稳的, 但其一阶差分是平稳的。

单位根检验

本文采用的是扩展的 Dickey-Fuller 单位根检验, 通常是在时间序列分析当中用来辨识个别变量的样本资料是否存在单根。对于任何一个时间序列, $\{z\}_t^T$, 为了验证在其是否存在单位根, 可以使用以下回归来检验:

$$z_t = \mu + ct + \alpha_t z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi \Delta z_{t-i} + \epsilon_t$$

$$H_0: \alpha = 1 \quad \text{v.s.} \quad H_1: \alpha < 1$$

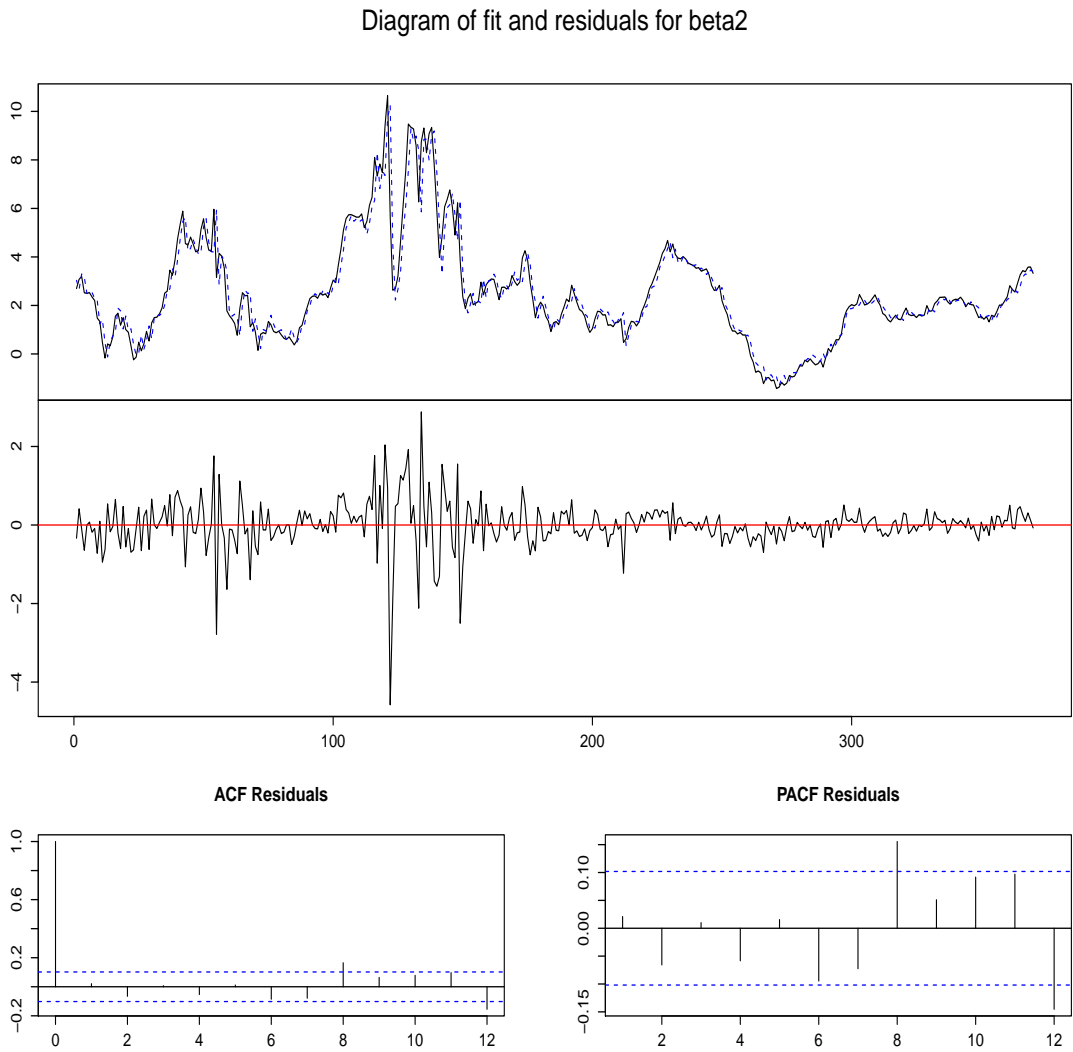


图 4.1 斜率因子 $\hat{\beta}_{2t}$

其中， $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$ 是 z_t 的差分序列。接受原假设意味着时间序列含有单位根。从表（4.2）的检验结果可以得知，两个因子在 5% 的显著水平上存在单位根的原假设无法拒绝，而一阶差分后可以拒绝非稳态的原假设。因而所有变量序列都是 $I(1)$ ，即均具有单位根。

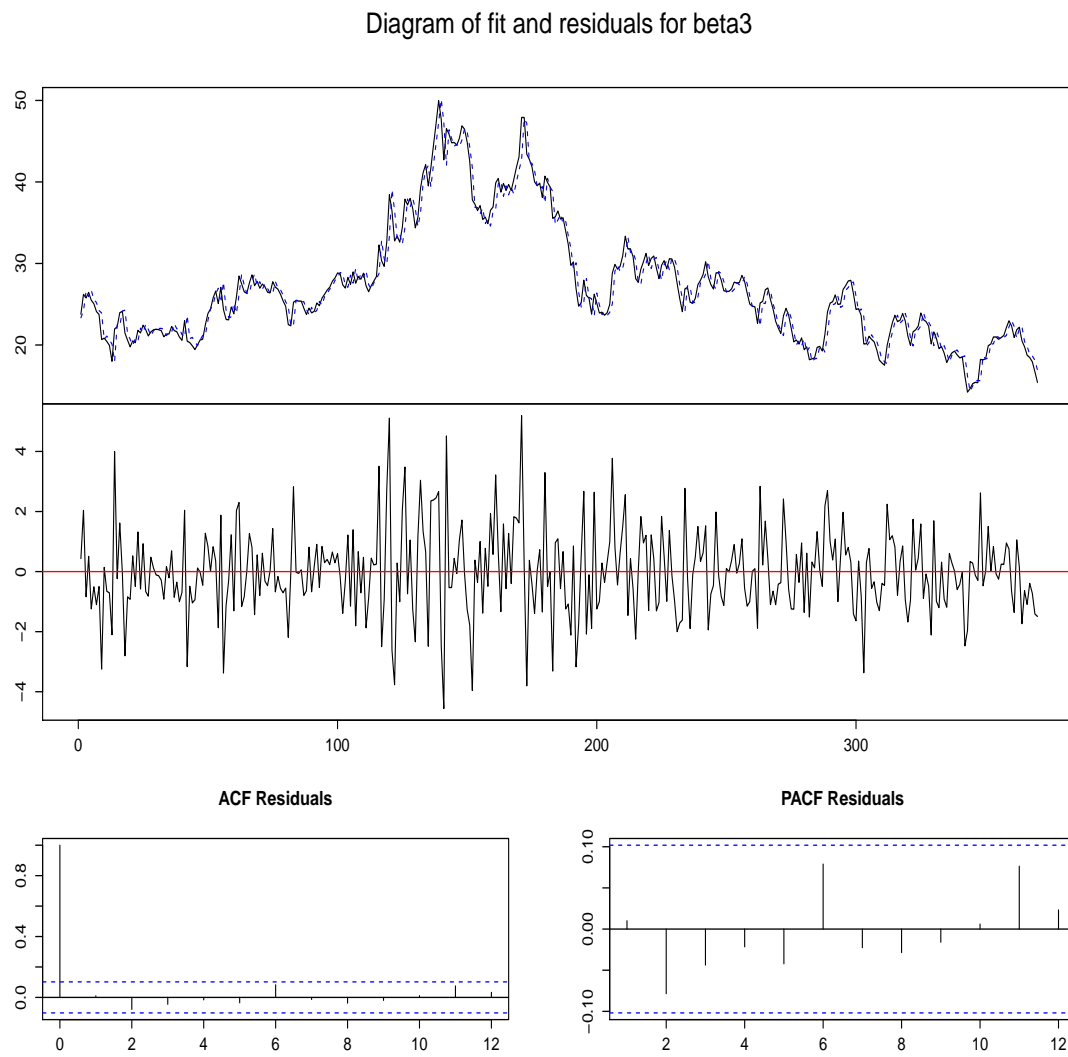
图 4.2 曲度因子 $\hat{\beta}_{3t}$

表 4.2 ADF 单位根检验

$\hat{\beta}_t$	Lags	Test Value	Critical Value		
			1%	5%	10%
$\hat{\beta}_{2t}$	2	-3.0401	-3.98	-3.42	-3.13
$\Delta\hat{\beta}_{2t}$	1	-14.0956***	-3.44	-2.87	-2.57
$\hat{\beta}_{3t}$	2	-1.9081	-3.98	-3.42	-3.13
$\Delta\hat{\beta}_{3t}$	1	-14.1453***	-3.44	-2.87	-2.57

表 4.3 Johansen 协整检验

\mathcal{H}_0	Test Value		Critical Value		
	$p = 2$	$p = 3$	90%	95%	99%
$r = 1$	6.52	5.32	10.49	12.25	16.26
$r = 0$	17.26	14.43	16.85	18.96	23.65

协整检验

由以上的单位根检验我们知道，影响收益率曲线短期动态特征的两个斜率因子与曲度因子的时间序列是一个 $I(1)$ 过程。即它们具备构造协整方程组的必要条件。如果两个（或两个以上）的时间序列是非平稳的，但它们的某种线性组合却是平稳的，则这两个（或两个以上）的非平稳的时间序列之间存在长期的均衡关系（或协整关系）。从经济研究的角度看，两个时间序列之间存在的协整关系意味着我们可以使用一个变量来影响另外的变量，二者之间存在一种相互联系的均衡关系。为此，我们对上述各个变量序列之间做长期的协整分析。

表（4.3）列出了对方程（4.2）做 Johansen 协整检验的结果。结果显示，零阶协整的原假设无法被接受，而一阶协整的原假设无法被拒绝。

选择滞后期

我们已经知道收益率曲线中的两个斜率因子与曲度因子为一个 $I(1)$ 的协整关系。为了建立一个向量自回归模型（ $VAR(p)$ ），我们还需要恰当的选择其滞后期，即利用适当的信息原则确定 VAR 的阶数。这包括 AIC、BIC、HQ 等多种信息准则。由于各个信息准则所关注的侧重点不同，并没有一个固定的模式。一方面，主要考虑到模型不能过于复杂，如果选择的滞后期过多，则模型估计比较困难；另一方面，我们也同时兼顾其他信息准则。根据表（4.4）的检验结果，HQ 和 SC 准则都给出的最优滞后期是 1 期，而 AIC 和 FPE 为 8 期，考虑到后者建模过于复杂。由于各个信息准则所关注的侧重点不同，并没有一个固定的模式。因此，这里选择向量自回归滞后期为 1 期，即 $\Delta\beta_t \sim VAR(1)$ 。

表 4.4 VAR 滞后阶数

Criteria	1	2	3	4	5	6	7	8
AIC(n)	-0.147*	-0.150	-0.138	-0.123	-0.133	-0.151	-0.163	-0.167
HQ(n)	-0.113*	-0.099	-0.070	-0.038	-0.031	-0.032	-0.026	-0.013
SC(n)	-0.061*	-0.022	0.034	0.092	0.125	0.149	0.181	0.220
FPE(n)	0.864	0.860	0.871	0.884	0.876	0.860	0.850	0.847*

注: * 5% 显著水平上最佳滞后期:

¹ AIC: Akaike information criterion

² HQ: Hannan-Quinn information criterion

³ SC: Schwarz information criterion

⁴ FPE: Final prediction error

对于任何一个时间序列, $\{\hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}'$, 首先对 $\hat{\beta}_{2t}$ 和 $\hat{\beta}_{3t}$ 取一阶差分以得到平稳序列:

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\beta}_{2t} \\ \Delta \hat{\beta}_{3t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\beta}_{2,t-1} \\ \Delta \hat{\beta}_{3,t-1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}(0, \Omega). \quad (4.7)$$

令 $\Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}_t = (\Delta \hat{\beta}_{2t}, \Delta \hat{\beta}_{3t})'$ 。因此, 可以将方程 (4.7) 写做更加紧密的形式:

$$\Delta \hat{\mathbf{B}}_t = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}_t \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-1} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \hat{\mathbf{B}}_{t-1} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t, \quad (4.8)$$

式中, $\hat{\mathbf{B}}_t = [\hat{\beta}_t, \hat{\beta}_{t-1}]'$, $\tilde{\mu} = [\hat{\mu}, \mathbf{0}]'$, $\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, 以及 $\tilde{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t, \mathbf{0}]'$, 即

$$\Delta \hat{\mathbf{B}}_t = \tilde{\mu} + \hat{\Gamma} \Delta \hat{\mathbf{B}}_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_t. \quad (4.8')$$

从而 h 期后的预测为

$$\Delta \hat{\mathbf{B}}_{t+h|t} = \sum_{j=0}^{h-1} \hat{\Gamma}^j \tilde{\mu} + \hat{\Gamma}^h \Delta \hat{\mathbf{B}}_t. \quad (4.9)$$

表 4.5 VAR 参数估计

	$\hat{\Phi}$		$\hat{\mu}$	$\hat{\Omega}$	
$\Delta \hat{\beta}_{2t}$	0.1215 (0.0512)	0.0633 (0.0220)	-0.0016 (0.0323)	0.3848	
$\Delta \hat{\beta}_{3t}$	-0.0563 (0.1209)	0.0937 (0.05120)	-0.0188 (0.0762)	0.045	2.147

注: VAR 的动态过程由方程 (4.7) 表示。括号里报告了标准差。

经过 VAR 拟合后, 我们得到图 (4.3) 和图 (4.4), 表明一阶差分后的向量自回归模型是平稳的。

残差分析

最后, 图 (4.5) 和图 (4.6) 给出了残差图, 表明残差符合白噪声随机过程 (White Noise), 即序列无关、服从高斯正态分布。

4.1.2 人口因子载荷分析

通过以上的第一步最小二乘回归, 我们从而可以进一步分析人口趋势对利率期限结构的因子载荷。对于不同的到期日, 我们分别估计出其相应的因子载荷, 这些

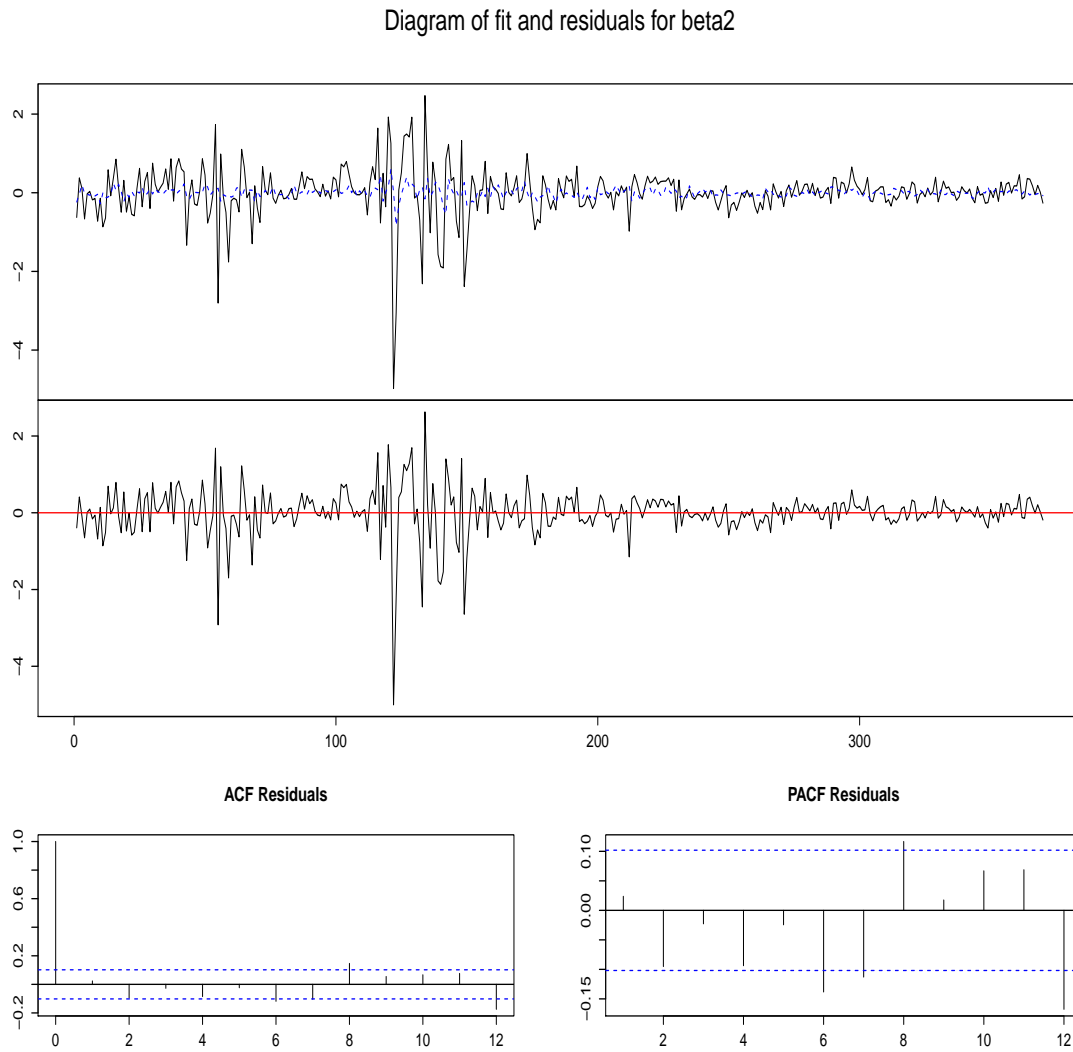


图 4.3 一阶差分的斜率因子, $\Delta\hat{\beta}_{2t}$

代表来人口因素对收益率曲线长期、稳定的影响。这可以用来解释收益率曲线中不能被短期与中期的斜率因子与曲度因子所解释的长期、平稳的部分变化。下文将进一步解释在利率期限结构模型中引入反映人口年龄结构变化的变量能够很好的捕捉到长期均衡利率的持久性组成部分,从而比传统的利率期限结构模型能更好地解释长期利率的变化。

```

1 yld.tilde <- yld - Beta %*% t(M)
2 w <-matrix(, nrow = n.maturity, ncol = 1) ## demographic loadings
3 for ( i in 1:n.maturity ){
4   w[i] <- coef(lm(yld.tilde[,i] ~ my[,i] - 1))

```

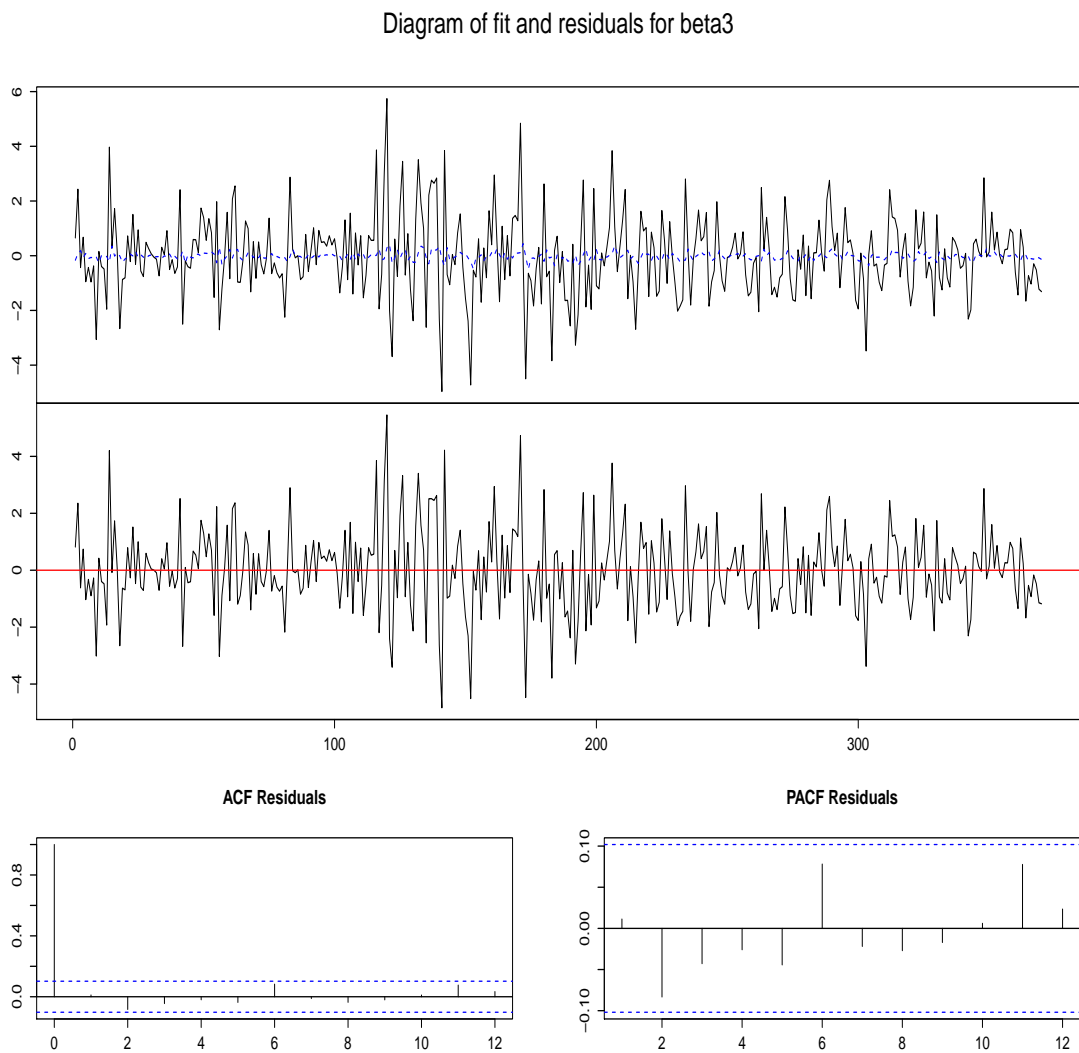


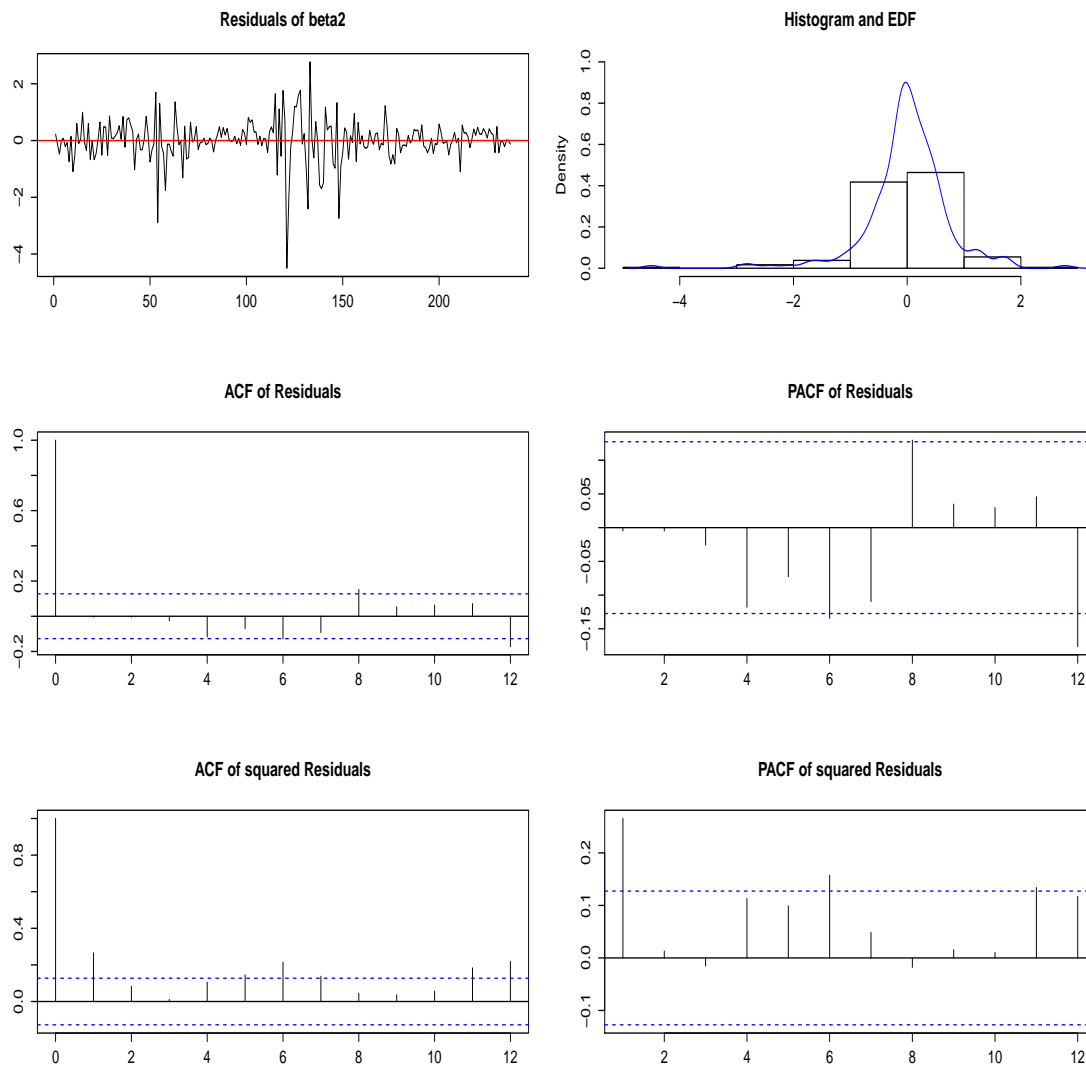
图 4.4 一阶差分的曲度因子, $\Delta\hat{\beta}_{3t}$

```

5 }
6 yld.fit <- matrix(, nrow = n.data, ncol = n.maturity)
7 for (j in 1:n.data){
8   for (i in 1:n.maturity){
9     yld.fit[j,i] <- w[i] * my[j,i] + M[i,1] * Beta[j,1] + M[i,2] * Beta[j,2]
10  }}

```

图 (4.7) 给出来收益率曲线的因子载荷图形。我们知道, 在动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型中, 原来的三个影响收益率动态特征的因子分别为水平因子、斜率

图 4.5 $\Delta\hat{\beta}_{2t}$ 的残差项

因子与曲度因子，即 $\{\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ 。但是，在本文之前，现有的文献几乎都将水平因子载荷设定为一个单位参数，即在长期不会对收益率曲线产生任何影响。显然，这个假定过于随意，缺乏说服力。产生该问题的主要原因，还是在于现有的利率期限结构理论没有充分考虑到人口因素的结构性、宏观性、整体性的影响。

在图（4.7）中，我们注意到人口因子载荷先是在短期内由正逐渐下降至负值（绿色线条），然后在逆向增加，并且在更长的到期日上升。

- 由于人口因素在短期内的变化不是很大，由其带来的对收益率曲线的影响相

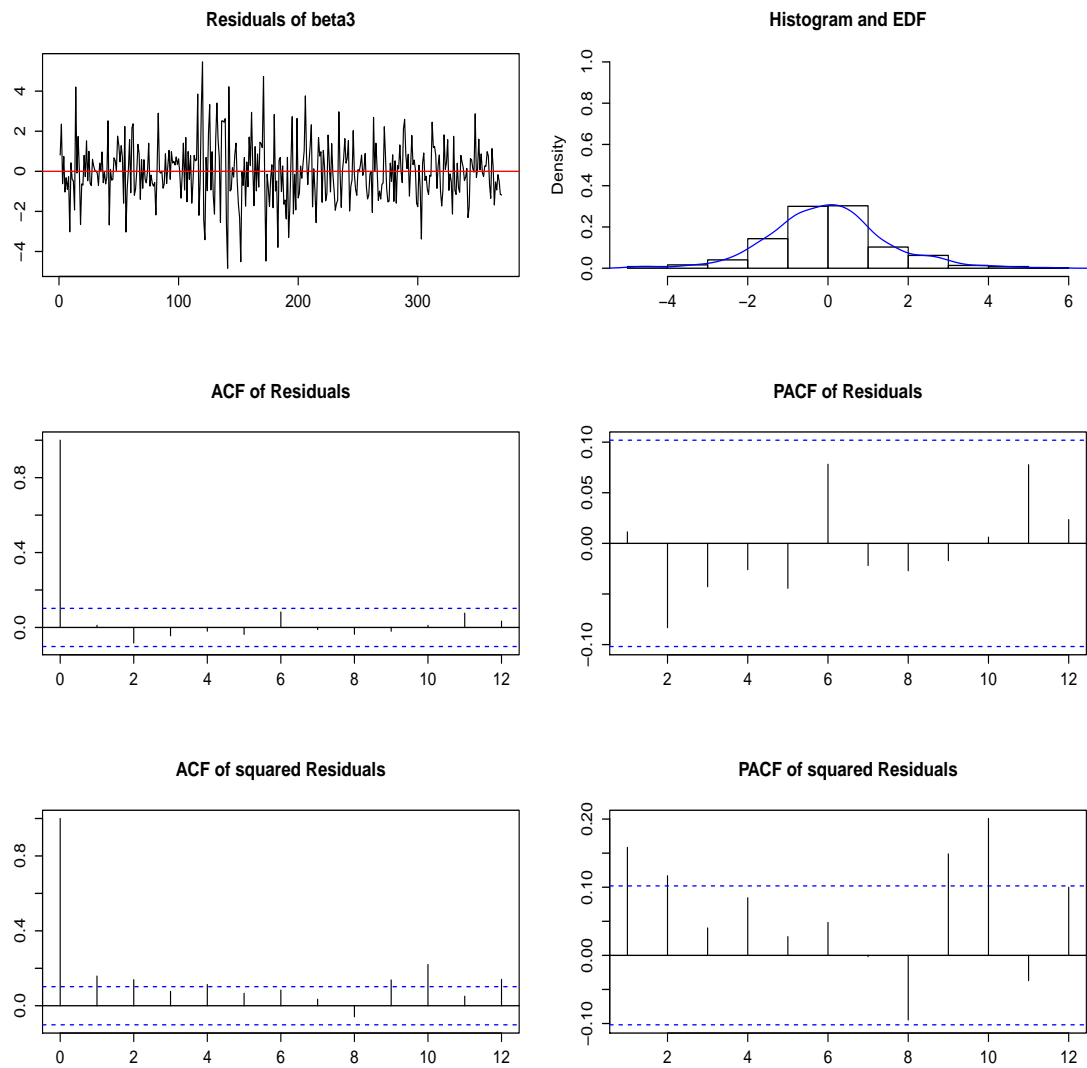


图 4.6 $\Delta \hat{\beta}_{3t}$ 的残差项

对较弱。用一个社会人群当中的中年人口与年轻人口的比率作为影响收益率曲线长期变化行为的因子，对于解释短期内的变动比较有限。我们知道，变量 MY_t 的变化是一个缓慢持久的过程，需要在大约为一个世代频率范畴内对经济产生久期的影响。而这个能够很好的解释一个家庭共同作为投资人在分散与规避风险方面的决策行为。这是目前金融研究中消费-资本资产定价理论 (C-CAPM)。

- 通常，家庭为了对冲未来不确定带来的收入波动，需要将部份资产投资在风险相对较小、流动性较强的金融产品上。由政府、市政部门、企业公司等发

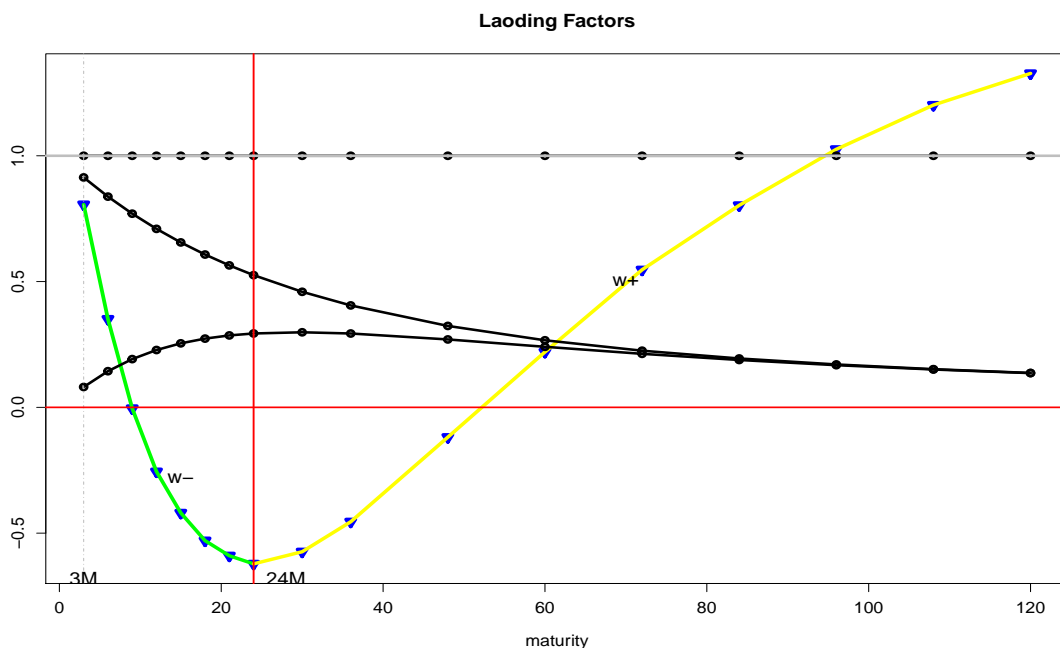


图 4.7 人口因子载荷

行的债券类金融证券在短期内具有一定的波动性，但从长期来看，则具有相对风险小、流动性强等特征，而债券市场正是满足来家庭投资的需要。因此，从长期来看，经济社会当中的人口年龄变化趋势诱导着家庭金融理财行为，继而对债券的长期收益率曲线带来持久稳定的影响。

- 因此，将人口年龄结构变化引入到利率期限结构模型中，不仅有利于我们理解长期收益率曲线的动态变化特征，而且我们可以利用这种稳定而可预测的人口趋势来实现对未来收益率的预测。

4.2 收益率曲线拟合

使用带人口年龄结构变量的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型对实际的收益率进行拟合：

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{\omega}_t M Y_t(\tau) + \hat{\beta}_{2t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right] + \hat{\beta}_{3t} \left[\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right]. \quad (4.10)$$

这里，设定 λ_t 为 0.0609 从而使中期的曲度因子的载荷系数最大化^[16]。

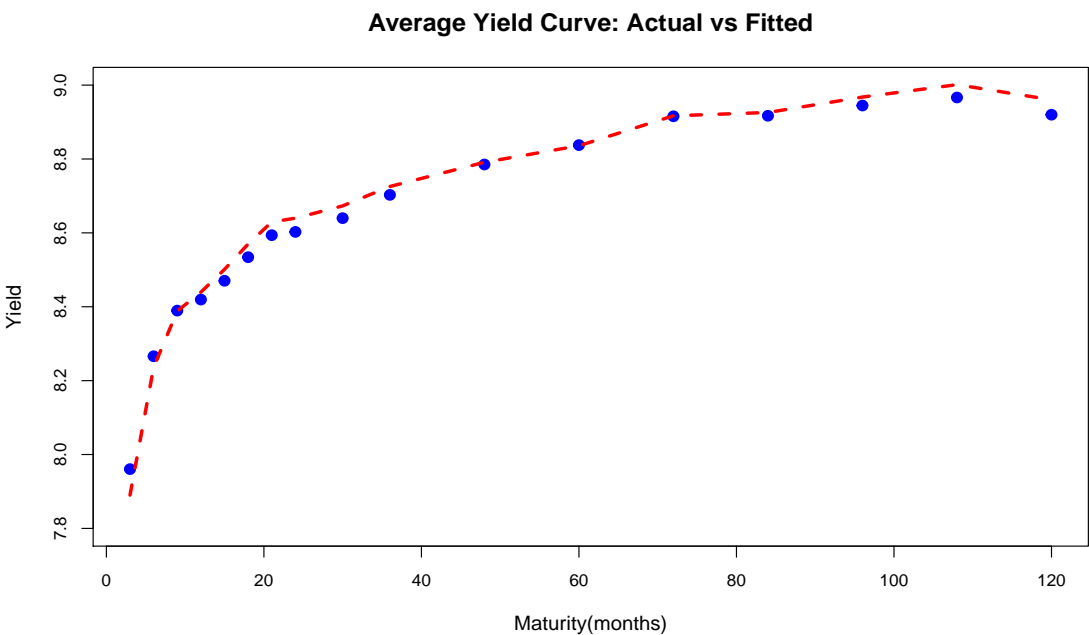


图 4.8 收益率曲线的样本拟合情况：1970:01 - 1984:12。

4.2.1 样本内拟合

图（4.8）刻画了人口年龄结构变量的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型对实际的收益率的样本内拟合情况。该图显示，在动态 Nelson-Siegel 模型中引入人口年龄结构变量，能够很好地对收益率曲线进行拟合。同样的，图（4.9）显示该模型能够对不同类型的收益率曲线做较好的样本拟合，如上升的收益率曲线、下降的收益率曲线以及呈拱形的收益率曲线。然而，注意到图（4.9）右下角显示的是 1989 年 5 月 31 日的国债收益率曲线，当日不同收益率呈现不规则的分布，因此，对其做的样本拟合并不是十分理想。这说明利用人口因素驱动的利率期限结构模型对于能够反映经济系统规律性的、长期的变化趋势比较敏感，而对于一些短暂的经济冲击则无法及时反馈。

图（4.10）对代表利率期限结构模型的水平因子、斜度因子及曲度因子与模型估计的三个因子 $\{\hat{K}_t, \hat{\beta}_{2t}, \hat{\beta}_{3t}\}$ 分别进行了拟合。在上图中，有人口年龄结构所决定的长期利率的平稳部分， \hat{K}_t ，能够很好的捕捉到收益率曲线的水平变动情况，亦即货币市场对未来利率的理性预期。这点在表（4.6）中也得到了印证，估计得到

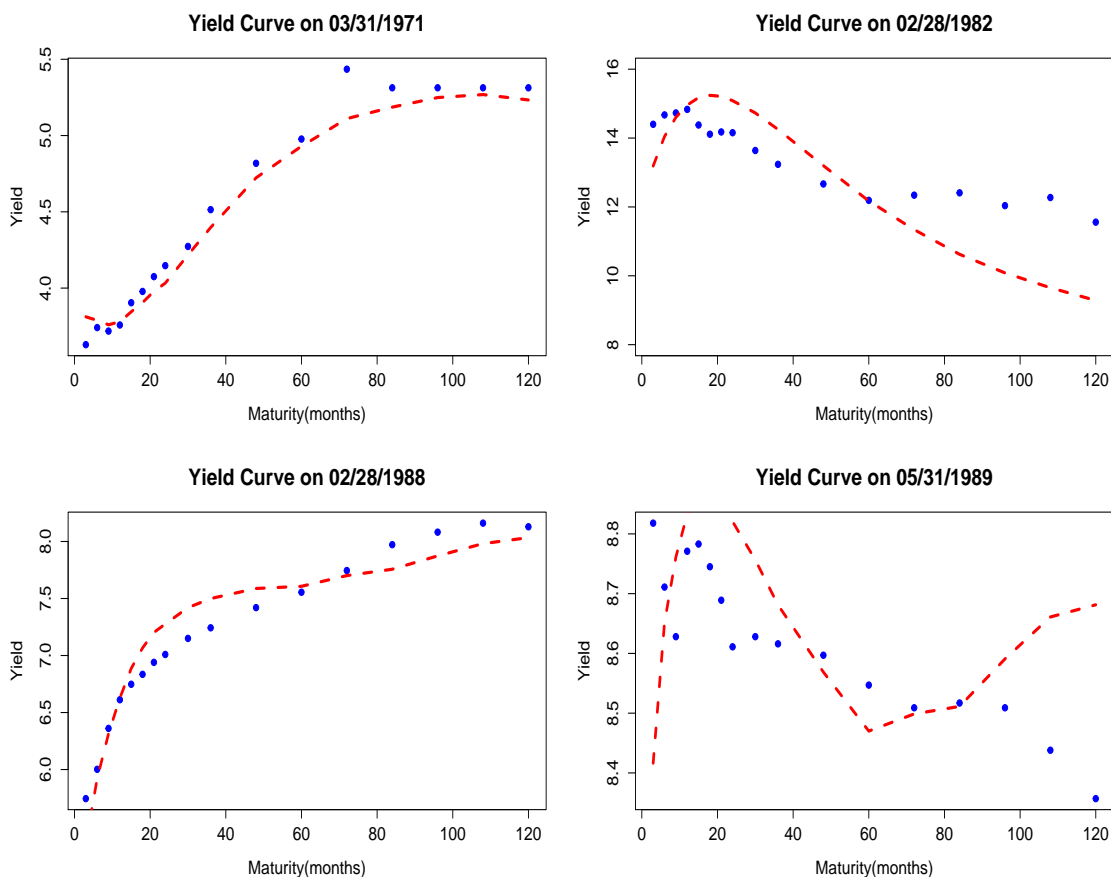


图 4.9 特定时点上的收益率曲线拟合效果

的 \hat{R}_t 与实际收益率曲线的水平值的相关系数达到了 0.9789。这肯定了将人口年龄结构变量引入利率期限结构模型能够很好地反映代表长期均衡利率的水平变动。而且，由于人口年龄结构的可预测性，这能够为预测未来利率提供很好的基础。

4.2.2 收益率长期动态特征与人口因素

为了更清楚的看出这个由人口年龄结构决定的平稳部分为何能够反映长期利率水平，图（4.11）给出在不同预测长度的 $\{\hat{R}_t(\tau)\}$ 的预测值。随着到期期限增加， $\{\hat{R}_t(\tau)\}$ 对收益亏曲线中的水平值的拟合越来越好。图（4.12）分别给出来不同期限长短的收益率曲线的拟合情况。可以看到，在短期内，由人口因素驱动的收益率曲线并不能很好的拟合实际收益率曲线，这些短期特征主要是受到斜率因子和曲度因子， $\{\beta_{2t}, \beta_{3t}\}$ 影响；然而，由这两个因子所不能够捕捉的代表收益率曲线长期

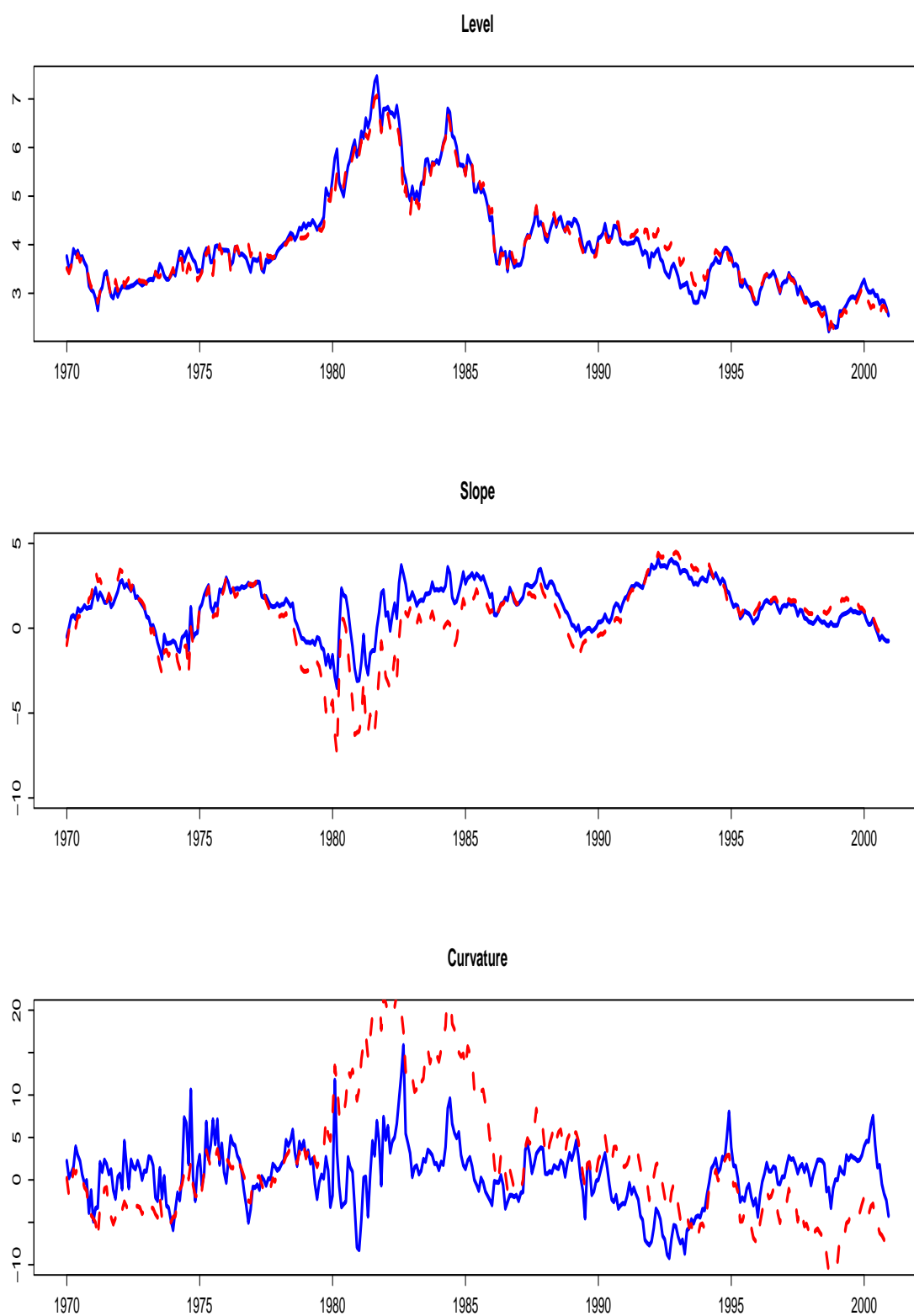


图 4.10 短期、中期以及长期收益率拟合

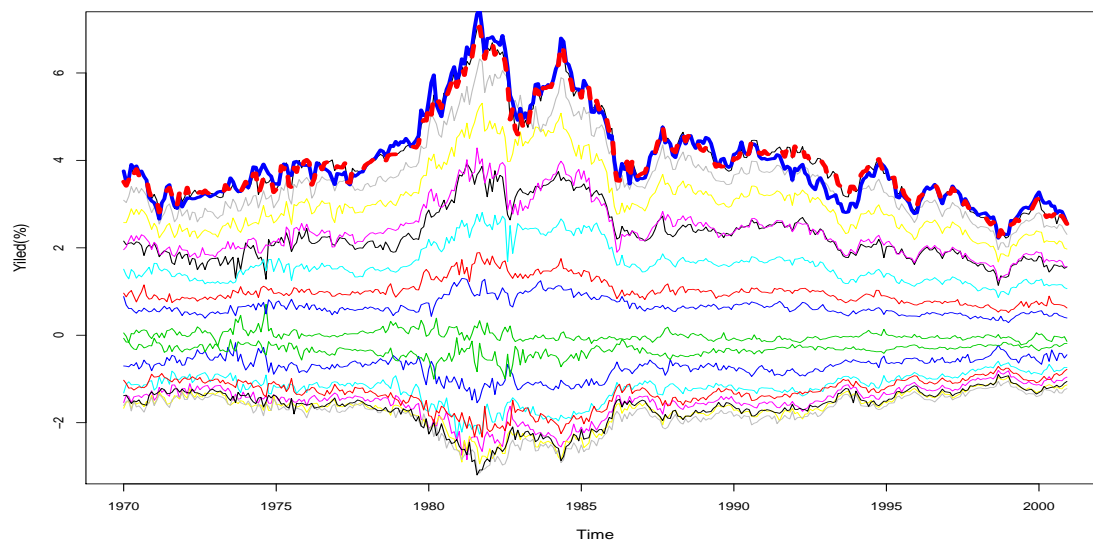


图 4.11 利率中预测的久性平稳部分与利率水平值

水平却能在由人口因素的模型下得到很好的解释，即在图（4.12）的第三部份，我们看到人口因素在一个较长的频率上良好的拟合来长期利率水平。

此外，表（4.6）显示 $\{\hat{K}_t(\tau)\}$ 的自相关系数较高，滞后一期的自相关系数为 0.979，滞后 12 期的自相关系数仍然高达 0.770，这说明其在收益率曲线中确实能够反映出具有久性特征的长期利率水平的变动情况。

对于另外两个影响因子， $\hat{\beta}_{2t}$ 和 $\hat{\beta}_{3t}$ ，则代表了收益率的短期及中期行为。二者的自相关系数在短期内比较高，而随着和滞后期的增加，其自相关系数急剧下降，这也说明了两个影响因子只能刻画出收益率曲线在中短期的随机性行为特征，而无法反映利率在长期的动态特征。

通过对模型参数的估计，可以得到一条对实际收益率较好拟合的曲线函数。这个由人口年龄结构驱动、并考虑了短期利率行为特征的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型能够在样本内对实际收益率做很好的拟合分析，并给估计得到的参数也可以给以合理的经济学解释。因此，下一章将利用此模型来对未来收益率曲线做样本外的预测。

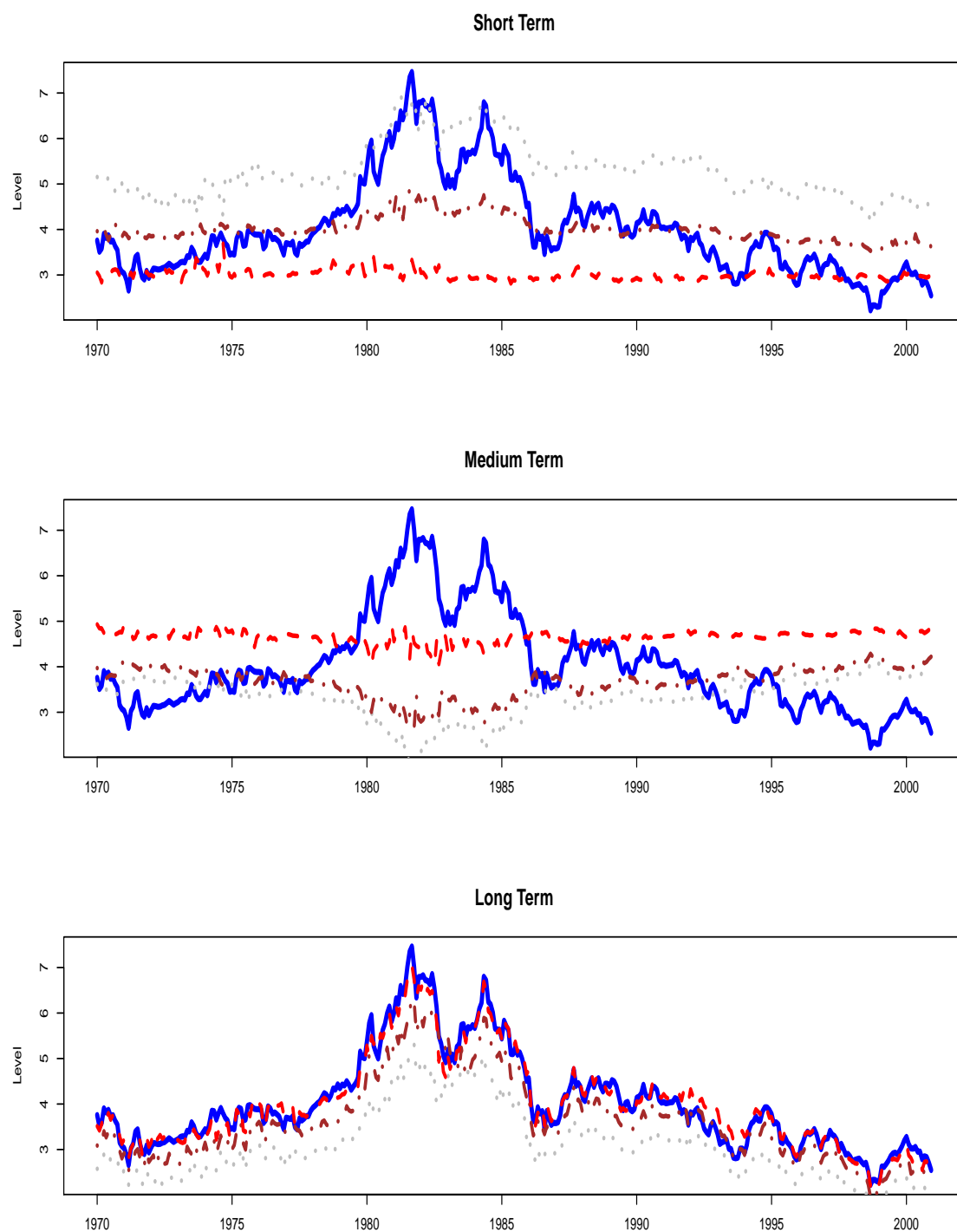


图 4.12 收益率的平稳部分与不同到期日收益

表 4.6 估计的影响因子与实际因子的相关关系

	\hat{K}_t	$\hat{\beta}_{2t}$	$\hat{\beta}_{3t}$	L	S	C	$\hat{\rho}(1)$	$\hat{\rho}(3)$	$\hat{\rho}(12)$	$\hat{\rho}(30)$
\hat{K}_t	1						0.979	0.945	0.770	0.539
$\hat{\beta}_{2t}$	-0.459	1					0.955	0.852	0.579	0.049
$\hat{\beta}_{3t}$	-0.964	0.459	1				0.976	0.927	0.760	0.540
L	0.984	-0.567	-0.984	1						
S	0.046	0.858	-0.042	-0.076	1					
C	0.206	-0.265	-0.429	0.333	-0.083	1				

注: 在 R 中自相关系数的统计置信区间为 95%。

第五章 结论

在直观上,当 MY_t 比较大(小),即在特定的时点上一个地区的中年群体(年轻群体)占总人口的比重较大,则这个中年群体由于收入大于支出从而推动了对储蓄(消费)的需求上升。在保证市场出清的条件下,利率则随之下降(上升)。GMQ 模型的实证研究也证实了理论研究的结论。即:股票实际回报率与 MY 存在显著的统计关系。人口年龄结构变动与不同期限利率的变动之间存在着紧密的关系,这也符合经济学的直觉推理。同时,在一定的时期内,人口年龄结构具有相对可靠的预测性,可被视为一个外生变量,例如美国人口调查局(BoC)每五年都会进行一次人口预测项目(Population Projection)以提供未来的人口结构走势,该项目提供的报告具有一定的准确性。因此,建立一个由人口因素驱动的利率期限结构模型不仅能够有助于增强利率期限结构模型的理论解释能力,为理解影响长期均衡状态利率水平提供良好的理论支持,而在由于人口年龄结构变动的可预测性,将进一步提高对未来利率期限结构模型变动的预测能力,从而为政策制定和市场投资提供有效的信息价值。

本文根据已有的利率期限结构模型的理论文献,以 Diebold and Li 拓展的动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型为基础,提出了一个以人口因素驱动的动态利率期限结构拓展模型。一方面,该模型不仅能够理论上为理解利率期限结构的长期均衡水平波动提供很好的宏观经济解释,阐述了人口年龄结构变动在低频度层次上(low-frequency)影响未来利率的预期水平与变动方向,而且能够提供一个分析宏观经济基础变量与利率期限结构之间稳定关系的桥梁;另一方面,该模型不仅继承了动态 Nelson-Siegel 利率期限结构模型的简约特征(Principle of Parsimony),模型的估计参数较少,实证估计与拟合回归更加灵活,而且人口年龄结构变动本身所具有的稳定的可预测性特征有利于增强对未来利率期限结构的水平变动的预测能力。

由于目前本文在利率期限结构预测方面所做的工作仍然有待改进,故此未给出结果报告。这一点将在今后的工作中进一步的完善。

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

参考文献

- [1] Andrew B Abel. The effects of a baby boom on stock prices and capital accumulation in the presence of social security. Econometrica, 71(2):551, 2003.
- [2] Andrew Ang and Monika Piazzesi. A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. Journal of Monetary economics, 50(4):745–787, 2003.
- [3] Gurdip S Bakshi and Zhiwu Chen. Baby boom, population aging, and capital markets. Journal of Business, pages 165–202, 1994.
- [4] Pierluigi Balduzzi, Sanjiv Ranjan Das, and Silverio Foresi. The central tendency: A second factor in bond yields. The Review of Economics and Statistics, 80(1):62–72, 1998.
- [5] BIS. Zero-coupon yield curves: Technical documentation. Bank for International Settlements, Basle, 2005.
- [6] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. The journal of political economy, pages 637–654, 1973.
- [7] Micheal J. Brennan and Eduardo S. Schwartz. A continuous time approach to the pricing of bonds. Journal of Banking & Finance, 3(2):133–155, 1979.
- [8] Damiano Brigo and Fabio Mercurio. Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit. Springer, 2007.
- [9] Robin Brooks. Asset-market effects of the baby boom and social-security reform. American Economic Review, pages 402–406, 2002.
- [10] John.Y. Campbell. Stock returns and the term structure. Journal of financial economics, 18(2): 373–399, 1987.
- [11] Richard H Clarida, Lucio Sarno, Mark P Taylor, and Giorgio Valente. The out-of-sample success of term structure models as exchange rate predictors: a step beyond. Journal of International Economics, 60(1):61–83, 2003.
- [12] John.H. Cochrane and Monika Piazzesi. Bond risk premia. American Economic Review, pages 138–160, 2005.
- [13] John C. Cox, Jonathan E. Ingersoll Jr, and Stephen A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pages 385–407, 1985.
- [14] John M Culbertson. The term structure of interest rates. The Quarterly Journal of Economics, 71 (4):485–517, 1957.
- [15] Stefano DellaVigna and Joshua M Pollet. Attention, demographics, and the stock market. 2005.

- [16] Francis X. Diebold and Canlin Li. Forecasting the term structure of government bond yields. Journal of Econometrics, 130(2):337–364, 2006.
- [17] Robert F Engle and Clive WJ Granger. Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. Econometrica: journal of the Econometric Society, pages 251–276, 1987.
- [18] Eugene F Fama. Term-structure forecasts of interest rates, inflation and real returns. Journal of Monetary Economics, 25(1):59–76, 1990.
- [19] Eugene F. Fama. The behavior of interest rates. Review of Financial Studies, 19(2):359–379, 2006.
- [20] Eugene F. Fama and Robert Bliss. The information in long-maturity forward rates. The American Economic Review, pages 680–692, 1987.
- [21] Carlo A. Favero, Arie E. Gozluklu, and Haoxi Yang. Demographics and the behavior of interest rates. IGIER Working Papers, 2012.
- [22] John Geanakoplos, Michael Magill, and Martine Quinzii. Demography and the long-run predictability of the stock market. Brookings Papers on Economic Activity, 2004(1):241–307, 2004.
- [23] Rajna Gibson, Francois-Serge Lhabitant, and Denis Talay. Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature. Foundations and Trends in Finance, 5(1-2), 2010.
- [24] Shingo Goto and Walter Torous. The conquest of us inflation: Its implications for the fisher hypothesis and the term structure of nominal interest rates. University of South Carolina and UCLA, working paper (November), 2003.
- [25] Campbell R Harvey. Term structure forecasts economic growth. Financial Analysts Journal, pages 6–8, 1993.
- [26] David Heath, Robert Jarrow, and Andrew Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. Econometrica: Journal of the Econometric Society, pages 77–105, 1992.
- [27] Thomas S. Y. Ho and Sang-Bin Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. Journal of Finance, pages 1011–1029, 1986.
- [28] John Hull and Alan White. Pricing interest-rate-derivative securities. Review of financial studies, 3(4):573–592, 1990.
- [29] Márcio P. Laurini and Lutz K. Hotta. Bayesian extensions to diebold-li term structure model. International Review of Financial Analysis, 19(5):342–350, 2010.
- [30] Robert B. Litterman and José Scheinkman. Common factors affecting bond returns. The Journal of Fixed Income, 1(1):54–61, 1991.
- [31] Thomas Robert Malthus. An essay on the principle of population. J. Johnson, London, 1798.
- [32] J. Husto McCulloch. Measuring the term structure of interest rates. The Journal of Business, 44(1):19–31, 1971.
- [33] David Miles. Demographics, house prices and mortgage design. Bank of England, 2012.

- [34] Franco Modigliani and Richard Brumberg. Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. FRANCO MODIGLIANI, page 1, 1954.
- [35] Franco Modigliani and Richard Sutch. Innovations in interest rate policy. The American Economic Review, pages 178–197, 1966.
- [36] Emanuel Moench. Forecasting the yield curve in a data-rich environment: A no-arbitrage factor-augmented var approach. Journal of Econometrics, 146(1):26–43, 2008.
- [37] Charles R. Nelson and Andrew F. Siegel. Parsimonious modeling of yield curves. The Journal of Business, 60(4):473–489, 1987.
- [38] Neil D Pearson and Tong-Sheng Sun. Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the cox, ingersoll, and ross model. The Journal of Finance, 49(4): 1279–1304, 1994.
- [39] Monika Piazzesi. Affine term structure models. Handbook of financial econometrics, 1:691–766, 2010.
- [40] James M Poterba. The impact of population aging on financial markets. In Global demographic change: economic impacts and policy challenges: Jackson Hole, Wyoming, August 26-28, 2004: a symposium, page 163. Federal Reserve Bank of Kansas City, 2004.
- [41] Gary S Shea. Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: Equilibrium models and spline approximations. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 19(03):253–269, 1984.
- [42] Lar E.O. Svensson. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. 1994.
- [43] Oldrich A. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of financial economics, 5(2):177–188, 1977.
- [44] Oldrich A. Vasicek and Gifford H. Fong. Term structure modeling using exponential splines. The Journal of Finance, 37(2):339–348, 1982.
- [45] Peter S Yoo. Age distributions and returns of financial assets. Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper Series, 1994.

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

硕士期间发表的论文

- [1] 方莲 The Fiscal Theory of the Price Level. Working Paper, 2011.

This Draft Version: 10:23 Friday 9th May, 2014

Typeset by X_YL^AT_EX.

© Fang Lian.

致 谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！…

