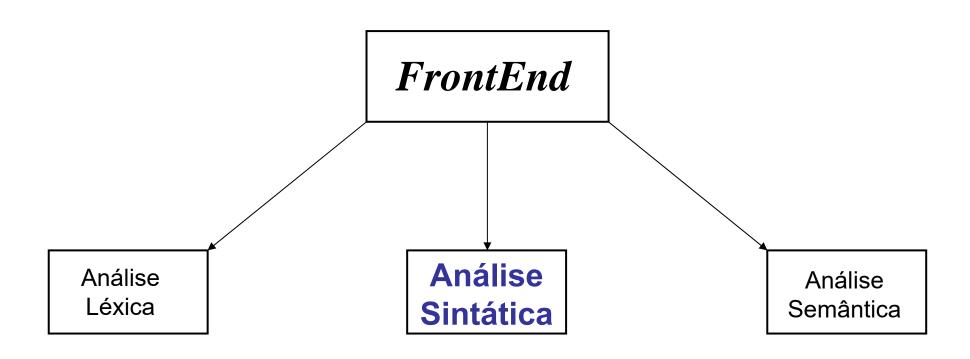
Análise Sintática



 Recebe uma seqüência de tokens do analisador léxico e determina se a string pode ser gerada através da gramática da linguagem fonte.

• É esperado que ele reporte os erros de uma maneira inteligível

• Deve se recuperar de erros comuns, continuando a processar a entrada

 ERs são boas para definir a estrutura léxica de maneira declarativa.

 Será que são "poderosas" o suficiente para conseguir definir declarativamente a estrutura sintática de linguagens de programação ???

- As ERs devem ser capazes de expressar a sintaxe de linguagens de programação.
- E se forem dados nomes para abreviar as ERs?

EXPR =
$$ab(c|d)e$$



EXPR =
$$a b AUX e$$

AUX = $c | d$

Exemplo de ER usando abreviações:

```
digits = [0-9]<sup>+</sup>
sum = (digits "+")* digits
definem somas da forma 28+301+9
```

- Como isso é implementado?
 - O analisador léxico substitui as abreviações antes de traduzir para um autômato finito
 - $sum = ([0-9]^+ "+")^* [0-9]^+$

• É possível usar a mesma idéia para definir uma linguagem para expressões que tenham parênteses balanceados?

```
(1+(245+2))
```

Tentativa:

```
digits = [0-9]*
sum = expr "+" expr
expr = "(" sum ")" | digits
```

```
digits = [0-9]<sup>+</sup>
sum = expr "+" expr
expr = "(" sum ")" | digits
```

O analisador léxico substituiria sum em expr:

Depois substituiria expr no próprio expr:

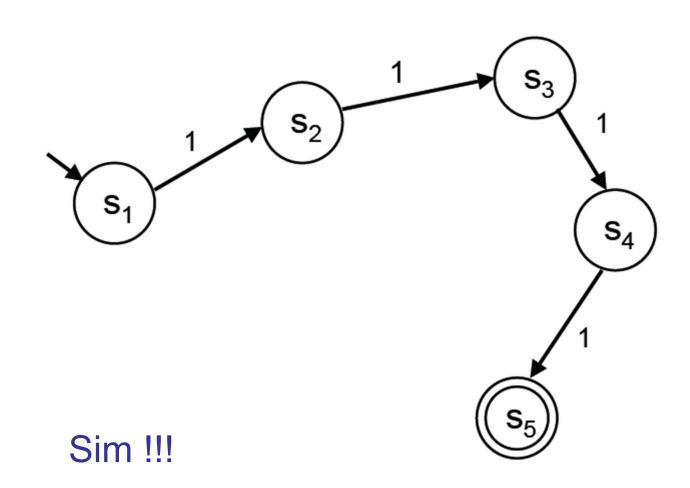
Continua tendo expr's do lado direito!

 As abreviações não acrescentam a ERs o poder de expressar recursão.

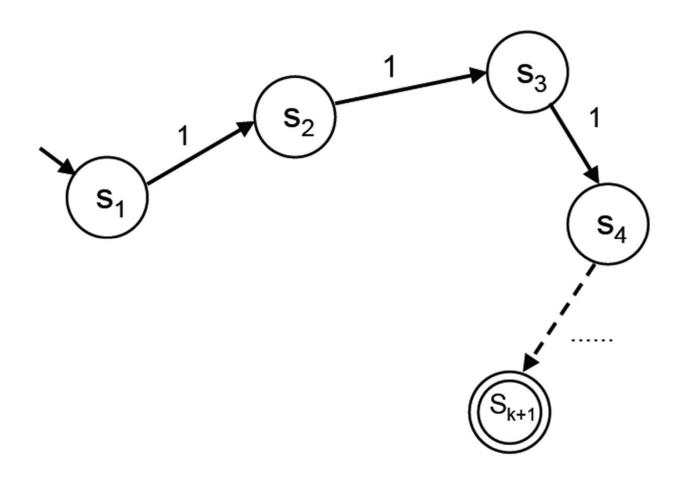
 É isso que se precisa para expressar a recursão mútua entre sum e expr e também expressar a sintaxe de linguagens de programação.

O que está faltando?

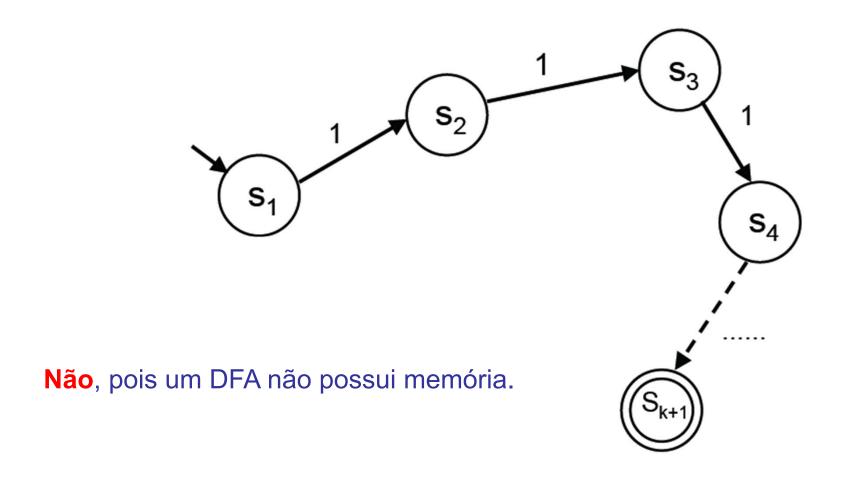
É possível contar 4 "1"s com um DFA?



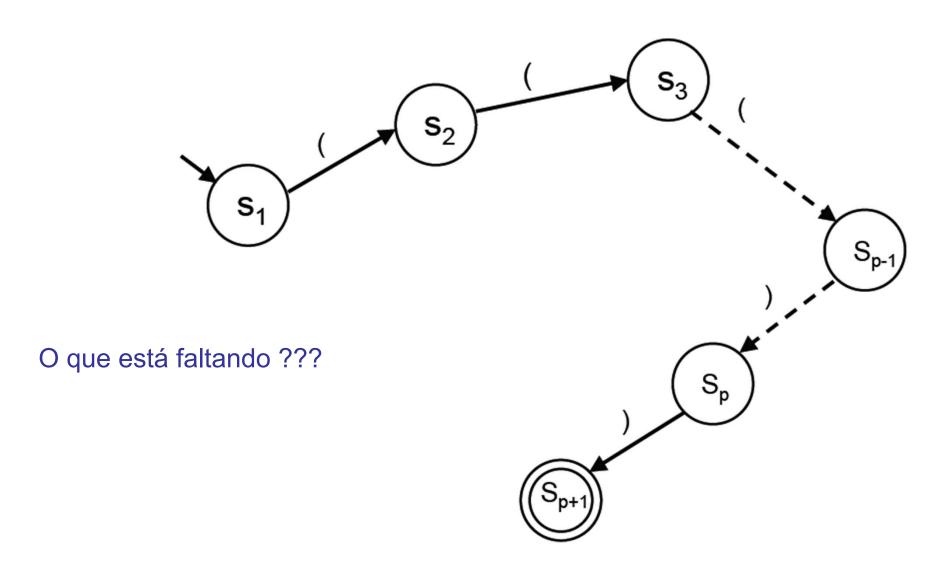
É possível contar k "1"s com um DFA?



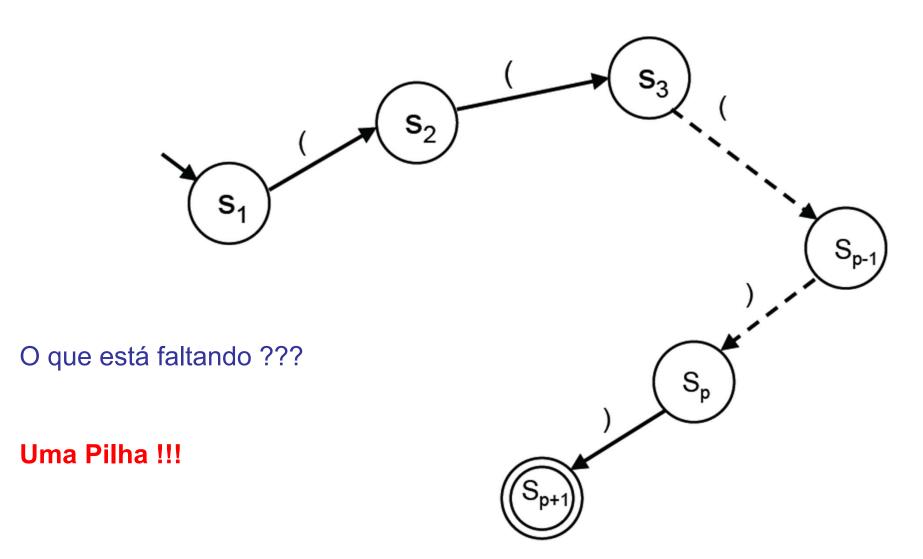
É possível contar k "1"s com um DFA?



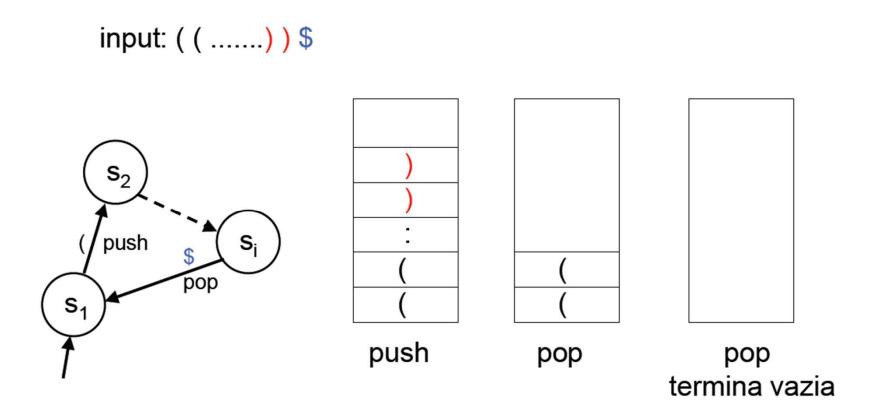
Como então casar ((...)) para um k qualquer?



Como então casar ((...)) para um k qualquer?



Contando com uma Pilha



Descrevem uma linguagem através de um conjunto de produções da forma:

onde existem zero ou mais símbolos no lado direito.

Produções funcionam como regras de substituição:

Símbolos:

- terminais: pertencem ao alfabeto da linguagem
- não-terminais: aparecem do lado esquerdo de alguma produção
- Nenhum terminal aparece do lado esquerdo de uma produção
- Existe um não-terminal definido como símbolo inicial.
 Normalmente é o da primeira regra

- Gerar cadeias da linguagem:
 - 1. Escreva a variável inicial.
 - 2. Encontre uma variável escrita e uma regra para essa variável. Substitua essa variável pelo lado direito da regra.
 - 3. Repita 2 até não restar variáveis

1.
$$A \rightarrow 0A1$$

$$2. A \rightarrow B$$

$$3. B \rightarrow \#$$

A sequência de substituições é chamada de derivação.

Ex:

- $A \rightarrow 0A1$
- $A \rightarrow B$
- $B \rightarrow \#$
 - 000#111
 - $A \rightarrow 0A1 \rightarrow 00A11 \rightarrow 000A111 \rightarrow 000B111 \rightarrow 000#111$

Linguagem: O conjunto de todas as cadeias que podem ser geradas dessa maneira

```
1. SENTENCE → NOUN-PHRASE VERB-PHRASE
2. NOUN-PHRASE → CMPLX-NOUN | CMPLX-NOUN PREP-PHRASE
3. VERB-PHRASE → CMPLX-VERB | CMPLX-VERB PREP-PHRASE
4. PREP-PHRASE → PREP CMPLX-NOUN
5. CMPLX-NOUN → ARTICLE NOUN
6. CMPLX-VERB → VERB | VERB NOUN-PHRASE
7. ARTICLE → a | the
8. NOUN → boy | girl | flower
9. VERB → touches | likes | sees
10. PREP → with
```

Como é a derivação para:

a boy sees

```
1. S \rightarrow S; S

2. S \rightarrow id := E

3. S \rightarrow print(L)

4. E \rightarrow id

5. E \rightarrow num

6. E \rightarrow E + E

7. E \rightarrow (S, E)

8. L \rightarrow E

9. L \rightarrow L, E
```

Possível código fonte:

$$a := 7; b := c + (d := 5 + 6, d)$$

Derivações

```
a := 7; b := c + (d := 5 + 6, d)
<u>S</u>; id := E
id := E; id := E
id := num ; id := E
id := num ; id := E + E
id := num ; id := \underline{E} + (S, E)
id := num ; id := id + (\underline{S}, E)
id := num ; id := id + (id := \underline{E}, E)
id := num ; id := id + (id := E + E, E)
id := num ; id := id + (id := \underline{E} + E, id)
id := num ; id := id + (id := num + <math>\underline{E}, id)
id := num ; id := id + (id := num + num, id)
```

1.
$$S \rightarrow S$$
; S
2. $S \rightarrow id := E$
3. $S \rightarrow print(L)$
4. $E \rightarrow id$
5. $E \rightarrow num$
6. $E \rightarrow E + E$
7. $E \rightarrow (S, E)$
8. $L \rightarrow E$
9. $L \rightarrow L$, E

Derivações

left-most: o não terminal mais a esquerda é sempre o expandido;

• *right-most*: idem para o mais a direita.

• Qual é o caso do exemplo anterior?

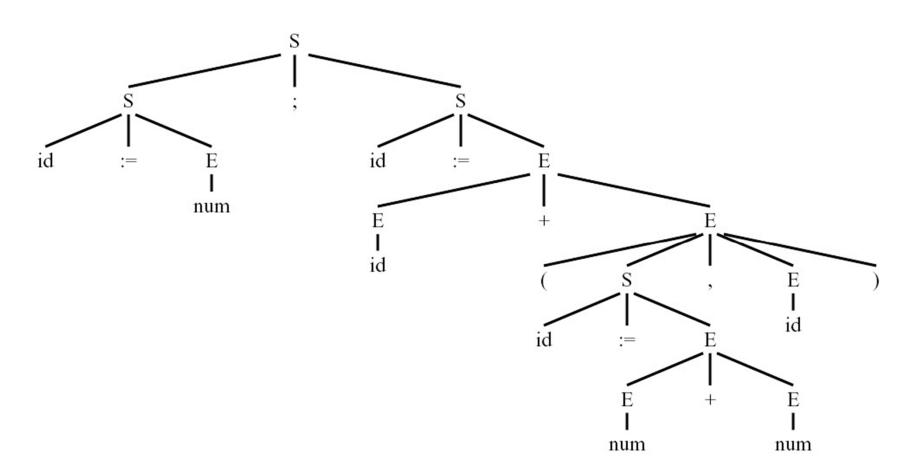
Parse Trees

 Constrói-se uma árvore conectando-se cada símbolo em uma derivação; da qual ele foi derivado.

Duas derivações diferentes podem levar a uma mesma parse tree.

Parse Trees

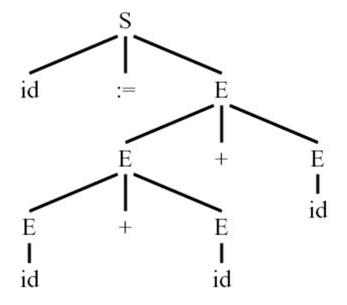
a := 7; b := c + (d := 5 + 6, d)

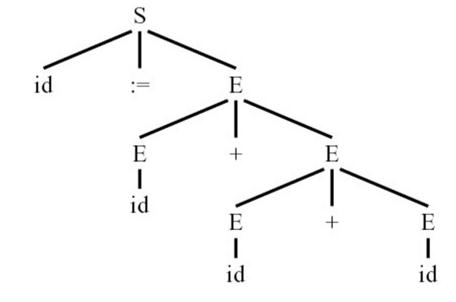


Gramáticas Ambíguas

Gramáticas Ambíguas: Podem derivar uma sentença com duas parse trees diferentes

id := id+id+id





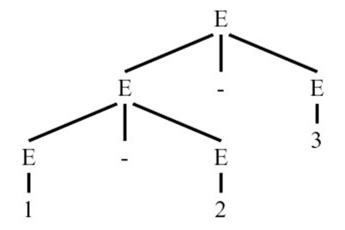
É ambígua?

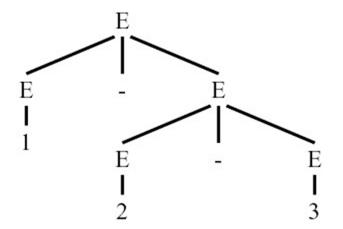
$$E \rightarrow id$$
 $E \rightarrow num$
 $E \rightarrow E * E$
 $E \rightarrow E / E$
 $E \rightarrow E + E$
 $E \rightarrow E - E$

 $E \rightarrow (E)$

Construa *Parse Trees* para as seguintes expressões:

Exemplo: 1-2-3



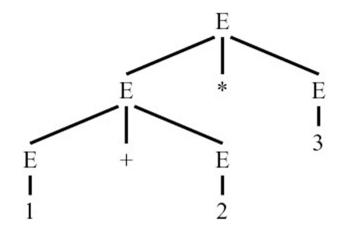


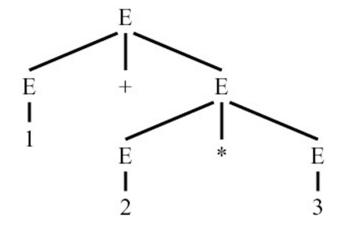
Ambígua!

$$(1-2)-3=-4$$
 e $1-(2-3)=2$

$$1-(2-3)=2$$

Exemplo: 1+2*3





Ambígua!

$$(1+2)*3 = 9$$
 e $1+(2*3) = 7$

$$1+(2*3)=7$$

Gramáticas Ambíguas

- Gera uma mesma cadeia com duas árvores sintáticas diferentes
- Pode-se formalizar assim:
 - Gramáticas ambíguas geram alguma cadeia ambiguamente
 - Uma cadeia é gerada ambiguamente se possui duas ou mais derivações mais à esquerda diferentes.
- Os compiladores usam as parse trees para extrair o significado das expressões
- A ambigüidade se torna um problema
- Pode-se, geralmente, mudar a gramática de maneira a retirar a ambigüidade

Gramáticas Ambíguas

Alterando o exemplo anterior:

- Deseja-se colocar uma precedência maior para * em relação a + e –
- Também deseja-se que cada operador seja associativo à esquerda:

Consegue-se isso introduzindo novos não-terminais

Gramáticas para Expressões

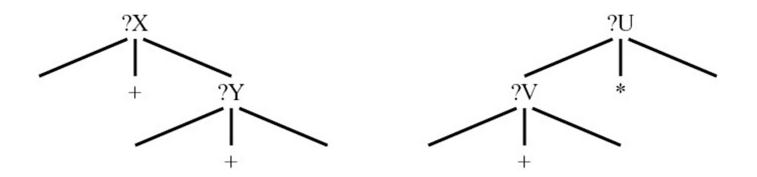
$$E \rightarrow E + T$$
 $T \rightarrow T^*F$ $F \rightarrow id$
 $E \rightarrow E - T$ $T \rightarrow T/F$ $F \rightarrow num$
 $E \rightarrow T$ $T \rightarrow F$ $F \rightarrow (E)$

Construa as derivações e *Parse Trees* para as seguintes expressões:

Gramáticas para Expressões

$$E \rightarrow E + T$$
 $T \rightarrow T^*F$ $F \rightarrow id$
 $E \rightarrow E - T$ $T \rightarrow T/F$ $F \rightarrow num$
 $E \rightarrow T$ $T \rightarrow F$ $F \rightarrow (E)$

Essa gramática pode gerar as árvores abaixo?



Gramáticas Ambíguas

 Geralmente pode-se transformar uma gramática para retirar a ambigüidade

Algumas linguagens não possuem gramáticas não ambíguas

Mas elas não seriam apropriadas como linguagens de programação

Parsing

CFG's geram as linguagens.

Parsers são reconhecedores das linguagens.

Para qualquer CFG é possível obter um *parser* que roda em $O(n^3) \rightarrow$ Algoritmos de Early[70] e CYK (Cocke-Younger-Kasami).

 $O(n^3)$ é muito lento para programas grandes.

Existem classes de gramáticas para as quais podemos construir *parsers* que rodam em tempo linear. Exemplo:

LL: left-to-right, left-most derivation

LR: left-to-right, right-most derivation

Análise Descendente (Predictive Parsing)

Também chamada de recursive-descent ou top-down

É um algoritmo simples, capaz de fazer o parsing de gramáticas LL

Cada produção se torna uma cláusula em uma função recursiva

Tem-se uma função para cada não-terminal

A análise descendente produz uma derivação à esquerda

Ela precisa determinar a produção a ser usada para expandir o não-terminal corrente

Análise Descendente (Predictive Parsing)

$$E \rightarrow +EE$$

$$E \rightarrow *EE$$

$$E \rightarrow a$$

$$E \rightarrow b$$

Expressões pré-fixas

Considere a cadeia +b*ab

Como é sua derivação mais à esquerda?

 $S \rightarrow if E then S else S$

 $S \rightarrow begin S L$

 $S \rightarrow print E$

 $L \rightarrow end$

 $L \rightarrow ; SL$

 $E \rightarrow num = num$

Como seria um parser

para essa gramática?

```
int IF=1, THEN=2, ELSE=3, BEGIN=4, END=5, PRINT=6, SEMI=7, NUM=8, EQ=9;
int token = getToken();
void advance() {token=getToken();}
void eat(int t) {if (token==t) advance(); else error();}
void S(){
    switch(token) {
         case IF: eat(IF); E(); eat(THEN); S(); eat(ELSE); S(); break;
         case BEGIN: eat(BEGIN); S(); L(); break;
         case PRINT: eat(PRINT); E(); break;
         default: error(); }
                                                                       S \rightarrow if E then S else S
void L(){
                                                                       S \rightarrow begin S L
    switch(token) {
                                                                       S \rightarrow print E
         case END: eat(END); break;
                                                                       L \rightarrow end
         case SEMI: eat(SEMI); S(); L(); break;
                                                                       L \rightarrow : SL
         default: error(); }
                                                                       E \rightarrow num = num
void E(){ eat(NUM); eat(EQ); eat(NUM); }
```

Fim de Arquivo

Criar um novo não terminal como símbolo inicial

$$E \rightarrow E + T$$

$$E \rightarrow E - T$$

$$E \rightarrow T$$

$$T \rightarrow T * F$$

$$T \rightarrow F$$

$$F \rightarrow \text{id}$$

$$F \rightarrow \text{(E)}$$

$$S \rightarrow E \$$$

$$E \rightarrow E + T$$

$$E \rightarrow E - T$$

$$E \rightarrow T$$

$$T \rightarrow T * F$$

$$T \rightarrow T / F$$

$$T \rightarrow T$$

$$S \rightarrow E \$$$

 $E \rightarrow E + T$
 $E \rightarrow E - T$
 $E \rightarrow T$
 $T \rightarrow T / F$
 $T \rightarrow F$
 $T \rightarrow F$
 $F \rightarrow id$
 $F \rightarrow num$
 $F \rightarrow (E)$

Vamos aplicar a mesma técnica para essa outra gramática ...

```
void S() { E(); eat(EOF); }

void E() {
    switch (tok) {
        case ?: E(); eat(PLUS); T(); break;
        case ?: E(); eat(MINUS); T(); break;
        case ?: T(); break;
        default: error(); }
}

void T() {
    switch (tok) {
        case ?: T(); eat(TIMES); F(); break;
        case ?: T(); eat(DIV); F(); break;
        case ?: F(); break;
        default: error(); }
}
```

- Como seria a execução para 1*2-3+4 ?
- E para 1*2-3?

Funciona ???

```
S \rightarrow E \$
E \rightarrow E + T
E \rightarrow E - T
E \rightarrow T
T \rightarrow T * F
T \rightarrow T / F
T \rightarrow F
F \rightarrow id
F \rightarrow num
F \rightarrow (E)
```

Como decidir entre E+T, E-T e T na função que implementa o não-terminal E?

- Tanto E como T podem derivar cadeias começando com id, num ou (
- E se fosse possível olhar um número k>1 de símbolos para frente na entrada?

Como decidir entre E+T, E-T e T na função que implementa o não-terminal E?

- Tanto E como T podem derivar cadeias começando com id, num ou (
- E se fosse possível olhar um número k>1 de símbolos para frente na entrada?

Essas cadeias podem ter tamanho arbitrário: O problema permanece

Análise descendente recursiva (preditiva) só funciona onde o primeiro símbolo terminal de cada sub-expressão permite escolher a produção adequada a ser utilizada na derivação

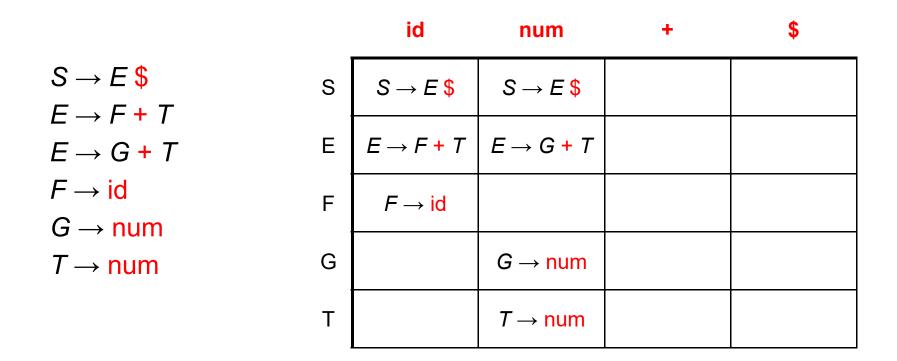
Análise Descendente

$$S \rightarrow E \$$$

 $E \rightarrow F + T$
 $E \rightarrow G + T$
 $F \rightarrow id$
 $G \rightarrow num$
 $T \rightarrow num$

Como seria a análise da cadeia num+num\$?

Análise Descendente LL(1)



Como seria a análise da cadeia num+num\$?

Conjunto FIRST

 Dada uma cadeia γ de terminais e não terminais FIRST(γ) é o conjunto de todos os terminais que podem iniciar uma cadeia derivada de γ.

• Exemplo usando gramática ao lado:

$$\gamma = T * F$$
FIRST(γ) = { id, num, (}

$$S \rightarrow E$$
\$
 $E \rightarrow E + T$
 $E \rightarrow E - T$
 $E \rightarrow T$
 $T \rightarrow T * F$
 $T \rightarrow T / F$
 $T \rightarrow F$
 $F \rightarrow id$
 $F \rightarrow num$
 $F \rightarrow (E)$

Predictive Parsing

Se uma gramática tem produções da forma:

$$X \longrightarrow \gamma_1$$

$$X \longrightarrow \gamma_2$$

 Caso os conjuntos FIRST(γ₁) e FIRST(γ₂) tenham intersecção, então a gramática não pode ser analisada com um predictive parser

Por que?

A função recursiva não vai saber que caso executar

Calculando FIRST

$$Z \rightarrow d$$

$$Z \rightarrow X Y Z$$

$$Y \rightarrow$$

$$Y \rightarrow c$$

$$X \rightarrow Y$$

$$X \rightarrow a$$

• Como seria para $\gamma = XYZ$?

Pode-se simplesmente fazerFIRST(XYZ) = FIRST(X) ?

Nullable

Nullable(X) é verdadeiro se X pode derivar a cadeia vazia.

$$Z \rightarrow d$$

$$Z \rightarrow X Y Z$$

$$Y \rightarrow$$

$$Y \rightarrow c$$

$$X \rightarrow Y$$

$$X \rightarrow a$$

$$Nullable(Y) = yes$$

$$Nullalble(X) = yes$$

$$Nullable(Z) = no$$

Follow

FOLLOW(X) é o conjunto de terminais que podem imediatamente seguir X

 $t \in FOLLOW(X)$ se existe alguma derivação contendo Xt

Cuidado com derivações da forma XYZ*t*, onde Y e Z podem ser vazios

$$Z \rightarrow d$$

$$Z \rightarrow X Y Z$$

$$Y \rightarrow$$

$$Y \rightarrow c$$

$$X \rightarrow Y$$

$$X \rightarrow a$$

$$FOLLOW(Y) = \{d,a,c\}$$

$$FOLLOW(Z) = \{ \}$$

FIRST, FOLLOW e Nullable

- Nullable(X) é verdadeiro se X pode derivar a cadeia vazia
- FIRST(γ) é o conjunto de terminais que podem iniciar cadeias derivadas de γ
- FOLLOW(X) é o conjunto de terminais que podem imediatamente seguir X
 - $-t \in FOLLOW(X)$ se existe alguma derivação contendo Xt
 - Cuidado com derivações da forma XYZt, onde Y e Z podem ser vazios

FIRST, FOLLOW e Nullable

Initialize FIRST and FOLLOW to all empty sets, and Nullable to all false.

```
for each terminal symbol Z FIRST[Z] \leftarrow \{Z\}
repeat
  for each production X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k
     if Y_1 \dots Y_k are all Nullable (or if k = 0) then Nullable[X] \leftarrow true
     for each i from 1 to k, each j from i + 1 to k
      if Y_1 \dots Y_{i-1} are all Nullable (or if i = 1)
        then FIRST[X] \leftarrow FIRST[X] \cup FIRST[Y_i]
      if Y_{i+1} ... Y_k are all Nullable (or if i = k)
        then FOLLOW[Y_i] \leftarrow FOLLOW[Y_i] \cup FOLLOW[X]
      if Y_{i+1} \dots Y_{i-1} are all Nullable (or if i + 1 = j)
         then FOLLOW[Y_i] \leftarrow FOLLOW[Y_i] \cup FIRST[Y_i]
until FIRST, FOLLOW, and Nullable did not change in this iteration.
```

Generalizando para cadeias: FIRST

• FIRST($X \gamma$) = FIRST[X], if not nullable[X]

• FIRST($X \gamma$) = FIRST[X] U FIRST(γ), if nullable[X]

 A cadeia γ é Nullable se cada símbolo em γ é Nullable

Generalizando para cadeias: FOLLOW

 Se houver uma produção A → αBβ, então, tudo em FIRST(β) irá para FOLLOW(B)

 Se houver uma produção A → αB, ou uma produção A → αBβ onde FIRST(β) é Nullable, então tudo em FOLLOW(A) irá para FOLLOW(B)

Exemplo

$$Z \rightarrow d$$
 $Z \rightarrow X \ Y \ Z$
 $Y \rightarrow X \ Y \ No$
 $Y \rightarrow C$
 $X \rightarrow Y$
 $X \rightarrow Y$
 $X \rightarrow Y$
 $X \rightarrow A$

Exemplo

$Z \rightarrow d$		
$Z \rightarrow X Y Z$		nullable
$Y \rightarrow$	X	yes
$Y \rightarrow c$	X Y Z	yes yes no
$X \rightarrow Y$	_	
$X \rightarrow a$		

FIRST

a c

C

a c d

FOLLOW

a c d

a c d

Construindo um Predictive Parser LL(1)

- Cada função relativa a um não-terminal precisa conter uma cláusula para cada produção
- A escolha da produção adequada é baseada no próximo token
- Isto é feito através da predictive parsing table
- Dada uma produção X → γ
- Para cada terminal T ∈ FIRST(γ)
 - Coloque a produção $X \rightarrow \gamma$ na linha X, coluna T.
- Se γ é nullable:
 - Coloque a produção na linha X, coluna T para cada
 T ∈ FOLLOW[X].

Exemplo

		nullable	FIRST	FOLLOW
$Z \rightarrow d$	X	yes	a c	a c d
$Z \rightarrow U$	Y	yes yes no	c	a c d
$Z \rightarrow X Y Z$	Z	no	a c d	
$Y \rightarrow$				
$Y \rightarrow c$				
$X \rightarrow Y$				
$X \rightarrow a$				

Exemplo

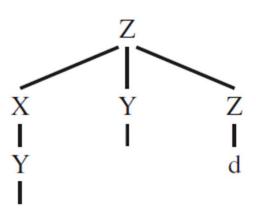
			nullable	FIF	RST	FOLLOW
7 . 4	1	X	yes	a	С	a c d
$Z \rightarrow d$		Y	yes		c	a c d
$Z \rightarrow X Y Z$		Z	no	a	c d	
$Y \rightarrow$						
					Fur	nciona ???
$Y \rightarrow c$			a	C		d
$X \rightarrow Y$	X		$\begin{array}{c} X \to a \\ X \to Y \end{array}$	<i>X</i> –	<i>→ Y</i>	$X \to Y$
$X \rightarrow a$	Y		$Y \rightarrow$	Y - Y -	<i>→ → c</i>	$Y \rightarrow$
	Z	Z	$\rightarrow XYZ$	$Z \rightarrow$	XYZ	$Z \to d$ $Z \to XYZ$

Construindo um Predictive Parser LL(1)

Não Funciona!! Por quê?

- A gramática é ambígua
- Note que algumas células da tabela do predictive parser têm mais de uma entrada!
- Isso sempre acontece com gramáticas ambíguas!





Construindo um Predictive Parser LL(1)

- Linguagens cujas tabelas não possuam entradas duplicadas são denominadas de LL(1)
 - Left to right parsing, leftmost derivation, 1-symbol lookahead
- A definição de conjuntos FIRST pode ser generalizada para os primeiros k tokens de uma string
 - Gera-se uma tabela onde as linhas são os não-terminais e as colunas são todas as seqüências possíveis de k terminais
- Isso é raramente feito devido ao tamanho explosivo das tabelas geradas
- Gramáticas analisáveis com tabelas LL(k) são chamadas LL(k)
- Nenhuma gramática ambígua é LL(k) para nenhum k!

$$E \rightarrow TE'$$
 $E' \rightarrow +TE'$
 $E' \rightarrow$
 $T \rightarrow FT'$
 $T' \rightarrow *FT'$
 $T' \rightarrow$
 $F \rightarrow (E)$
 $F \rightarrow id$

$$S \to E$$
 inserção do fim de arquivo $E \to TE'$ $E' \to +TE'$ $E' \to T$ $T \to FT'$ $T' \to *FT'$ $T' \to F \to (E)$ $F \to id$

$$S \rightarrow E\$$$
 $E \rightarrow TE'$
 $E' \rightarrow +TE'$
 $E' \rightarrow FT'$
 $T' \rightarrow FT'$

	Nullable	FIRST	FOLLOW
Ε	N	(id) \$
E'	S	+)\$
Т	N	(id	+)\$
T'	S	*	+)\$
F	N	(id	* +) \$
S	N	(id	

$$S \rightarrow E$$

$$E \rightarrow TE'$$

$$E' \rightarrow +TE'$$

$$E' \rightarrow$$

$$T \rightarrow FT'$$

$$T' \rightarrow *FT'$$

$$T' \rightarrow$$

$$F \rightarrow (E)$$

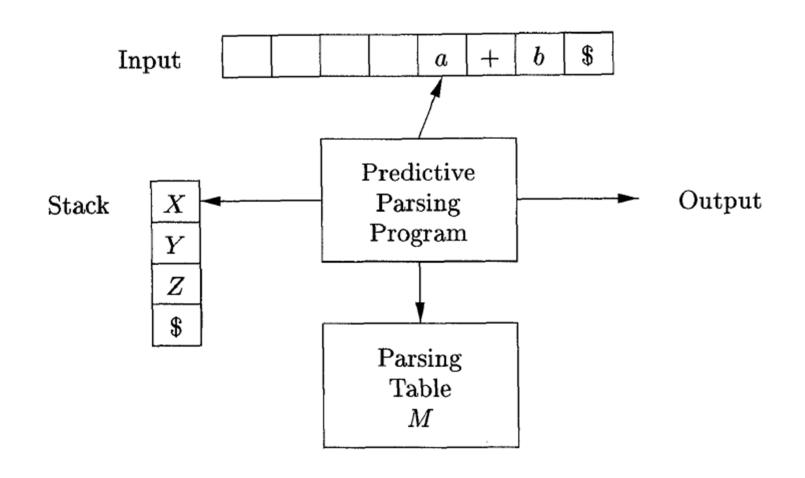
$$F \rightarrow id$$

	Nullable	FIRST	FOLLOW
Е	N	(id)\$
E'	S	+) \$
Т	N	(id	+)\$
T'	S	*	+)\$
F	N	(id	* +) \$
S	N	(id	

NON -	INPUT SYMBOL						
TERMINAL	id	+	*	1)	- \$	
\overline{E}	$E \to TE'$			$E \to TE'$			
E'		E' o +TE'			$E' \rightarrow$	E' ightarrow	
T	$T \to FT'$			T o FT'	}	j	
T'		$T' \rightarrow$	T' o *FT')	$T' \rightarrow$	T' ightarrow	
F	$F o \mathbf{id}$			F o (E)			
S	$S \rightarrow ES$			$S \rightarrow ES$			

Análise Sintática LL(1)

TOP-DOWN PARSING



Análise Sintática LL(1)

$$S \rightarrow E$$

$$E \rightarrow TE'$$

$$E' \rightarrow +TE'$$

$$E' \rightarrow$$

$$T \rightarrow FT'$$

$$T' \rightarrow *FT'$$

$$T' \rightarrow$$

$$F \rightarrow (E)$$

$$F \rightarrow id$$

NON -	INPUT SYMBOL						
TERMINAL	id	+	*	()	\$	
\overline{E}	$E \to TE'$			$E \to TE'$,	
E'		E' o +TE'			$E' \rightarrow$	E' ightarrow	
T	$T \to FT'$	}		T o FT'	})	
T'		$T' \rightarrow$	$T' \to *FT'$		$T' \rightarrow$	T' ightarrow	
F	$F o \mathbf{id}$			F o (E)			
S	$S \rightarrow ES$			$S \rightarrow ES$			

A cadeia abaixo pertence a linguagem gerada pela gramática?

NON -	INPUT SYMBOL					
TERMINAL	id	+	*	()	\$
E	$E \to TE'$			$E \to TE'$		
E'		$E' \rightarrow +TE'$			$E' \rightarrow$	E' ightarrow
T	$T \to FT'$			T o FT')
T'		$T' \rightarrow$	$T' \to *FT'$)	$T' \rightarrow$	T' ightarrow
F	$F o \mathbf{id}$			F o (E)		
S	$S \rightarrow ES$			$S \rightarrow E$ \$		

MATCHED	STACK	INPUT	ACTION
	E\$	id + id * id\$	
	TE'\$	id + id * id\$	output $E \to TE'$
	FT'E'\$	id + id * id\$	output $T \to FT'$
	id $T'E'$ \$	id + id * id\$	output $F \to \mathbf{id}$
\mathbf{id}	T'E'\$	$+\operatorname{id}*\operatorname{id}\$$	$\mathrm{match}\ \mathbf{id}$
\mathbf{id}	E'\$	+ id * id \$	output $T' \to \epsilon$
${f id}$	+ TE'\$	$+\operatorname{id}*\operatorname{id}\$$	output $E' \to + TE'$
id +	TE'\$	$\mathbf{id}*\mathbf{id}\$$	match +
$\mathbf{id} \; + \;$	FT'E'\$	$\mathbf{id}*\mathbf{id}\$$	output $T \to FT'$
$\mathbf{id} \; + \;$	id $T'E'$ \$	$\mathbf{id}*\mathbf{id}\$$	output $F \to \mathbf{id}$
id + id	T'E'\$	*id\$	match id
id + id	*FT'E'\$	*id\$	output $T' \to *FT'$
$\mathbf{id} + \mathbf{id} \ *$	FT'E'\$	$\mathbf{id}\$$	match *
id + id *	id $T'E'$ \$	id\$	output $F \to \mathbf{id}$
id + id * id	T'E'\$	\$	$\mathrm{match}\ \mathbf{id}$
id + id * id	E'\$	\$	output $T' \to \epsilon$
id + id * id	\$	\$	output $E' \to \epsilon$