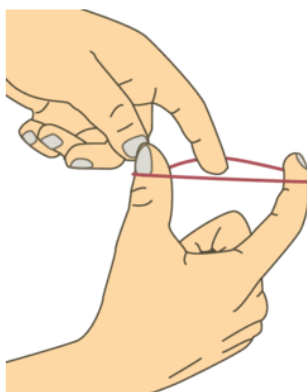
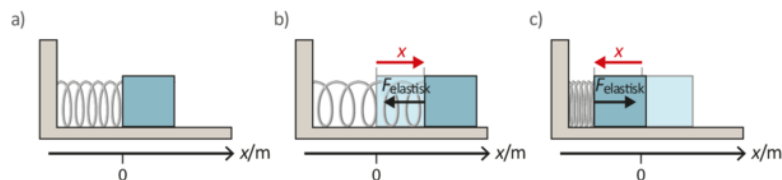


"En verden af fysik A" side 94 – 100

En svingning kan defineres som en bevægelse, hvor et legeme bevæger sig frem og tilbage omkring en ligevægtsposition kaldt *hvilepositionen*. Mange svingninger fremkommer, når et materiale med elastiske egenskaber påvirkes af en kraft. Dette princip kan fx illustreres ved at spænde en almindelig husholdningselastik ud mellem to fingre og derefter sætte elastikken i svingninger ved at trække ud i den og give slip. Elastikkens svingninger svarer fuldstændigt til de svingninger, der kan dannes på fx en guitarstreng, og ligesom guitarstrengen vil elastikken give en tone, der afhænger af hvor hårdt, den er spændt ud. Tonehøjden afspejler frekvensen af de lydbølger, der skabes, når luften omkring elastikken sættes i svingninger.



Et elastisk materiale er kendetegnet ved, at en deformation eller forskydning i materialet resulterer i en modsatrettet kraft, der forsøger at bringe materialet tilbage til hvilepositionen. For små deformationer er størrelsen af den modsatrettede kraft proportional med størrelsen af forskydningen. En kraft med denne egenskab kaldes en *elastisk kraft*.



Figur 14.1 a) Et legeme forbundet til en fjeder i hvilepositionen ($x = 0$). b) Når fjederen strækkes ($x > 0$), yder den en elastisk kraft modsatrettet forskydningen, altså tilbage imod ligevægtspositionen (dvs. $F_{\text{elastisk}} < 0$). c) Når fjederen presses sammen ($x < 0$), yder den igen en elastisk kraft modsatrettet forskydningen og tilbage imod ligevægtspositionen (dvs. $F_{\text{elastisk}} > 0$).

Et eksempel på et system, der påvirkes af en elastisk kraft, er et legeme forbundet til en fjeder og placeret på et vandret underlag (se figur 14.1). Hvis legemet flyttes fra hvilepositionen, så fjederen enten strækkes eller presses sammen, reagerer fjederen med en modsatrettet kraft, der forsøger at bringe legemet tilbage til hvilepositionen. Denne elastiske kraft F_{elastisk} kaldes også for *fjederkraften* og er ligefrem proportional med forskydningen x :

$$F_{\text{elastisk}} = -k \cdot x$$

Formlen angiver både størrelsen og retningen på kraften, idet minusset viser, at kraft og forskydning altid er modsatrettede (jf. figur 14.1).

Proportionalitetskonstanten k kaldes *fjederkonstanten* og måles i enheden N/m.

Den er et mål for, hvor stor kraft det kræver at strække fjederen en vis længde.

Formlen kaldes for *Hookes lov* efter den engelske fysiker Robert Hooke (1635-1703), der beskrev denne sammenhæng omkring 1675.

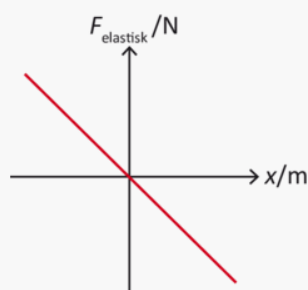
Fysisk størrelse	Symbol	Enhed	Beskrivelse
Fjederkonstanten	k	$\frac{\text{N}}{\text{m}}$	Et mål for kraften der kræves, for at et elastisk materiale strækkes eller sammenpresses.

Formel 14.1: Hookes lov for en elastisk kraft

Hvis en fjeder eller et elastisk materiale strækkes eller sammenpresses med forskydningen x væk fra ligevægtspositionen, vil den yde en modsatrettet elastisk kraft F_{elastisk} (fjederkraften), der er rettet tilbage mod ligevægtspositionen og givet ved:

$$F_{\text{elastisk}} = -k \cdot x$$

Her angiver k det elastiske materiales fjederkonstant.



Figur 14.2 Sammenhængen mellem elastisk kraft og forskydningen. Bemærk at kraften bliver negativ ved positiv forskydning, svarende til at kraft og forskydning har modsat retning.

Eksempel 14.1: Forlængelse af fjeder



Spørgsmål



En fjeder med fjederkonstanten 50 N/m har længden 20 cm, når den er ustrakt. Hvor stor kraft skal der trækkes med for at fordoble længden af fjederen?

Svar



Hvis fjederens længde skal fordobles, skal der skabes en forskydning på 20 cm. Den nødvendige kraft for at strække fjederen dette stykke skal modsvare den elastiske kraft fra fjederen. Den elastiske kraft, som fjederen yder ved denne strækning, bestemmes ud fra formel 14.1:

$$F_{\text{elastisk}} = -k \cdot x = -50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,20 \text{ m} = -10 \text{ N}$$

Der skal altså påføres en kraft på 10 N for at overvinde den elastiske kraft fra fjederen og strække denne til dobbelt længde.

I mange situationer er det relevant at betragte en fjeder, der hænger lodret i stedet for vandret, fx som ophæng til et lod, der svinger i fjederen. Hvis et lod hænges i fjederen, strækkes fjederen på grund af tyngdekraften på loddet. I det følgende vises det, at Hookes lov stadig kan bruges til at beskrive kraften fra fjederen under disse omstændigheder, men med udgangspunkt i den nye hvileposition for fjederen med loddet på.

Udledning

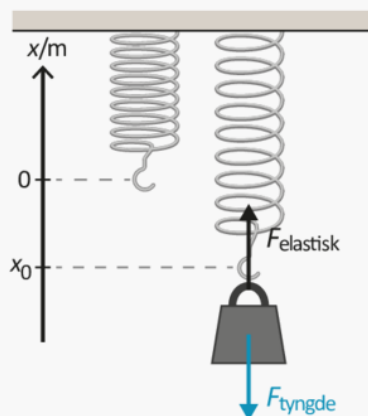
Der betragtes en fjeder med fjederkonstant k , der hænges lodret (se figur 14.3). Systemet beskrives med en lodret stedakse, hvis nulpunkt defineres ved enden af fjederen i den ubelastede hvileposition. Der placeres et lod med massen m i enden af fjederen, der derved strækkes til en ny hvileposition x_0 . Når fjederen er blevet strakt til positionen x_0 , er størrelsen af den elastiske kraft givet ved:

$$F_{\text{elastisk}} = k \cdot |x_0|$$

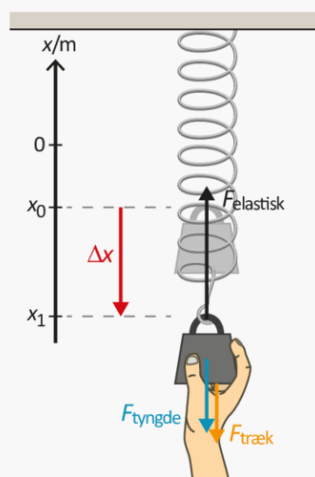
Her er taget den numeriske værdi af x_0 , fordi størrelsen af kraften skal være positiv.

Hvis loddet hænger stille i ligevægtspositionen x_0 , følger det af Newtons 1. lov, at den resulterende kraft på loddet er nul. Da loddet påvirkes af den elastiske kraft fra fjederen samt tyngdekraften, er den resulterende kraft givet ved:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{elastisk}} - F_{\text{tyngde}} = k \cdot |x_0| - m \cdot g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot |x_0| = m \cdot g$$



Figur 14.3 Hvileposition for fjederen med og uden lod på, samt kræfterne på loddet i hvilepositionen.



Figur 14.4 Fjederen strækkes yderligere længden Δx ved at påføre en trækraft på loddet.

Hvis der trækkes ned i loddet, så fjederen strækkes yderligere et stykke Δx , er den i alt udvidet en strækning x_1 (se figur 14.4). For at opnå denne strækning, skal der ydes en nedadrettet trækraft $F_{\text{træk}}$, der sammen med tyngdekraften modsvarer den elastiske kraft fra fjederen. Den resulterende kraft på loddet i position x_1 er så:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{elastisk}} - F_{\text{tyngde}} - F_{\text{træk}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$F_{\text{træk}} = F_{\text{elastisk}} - F_{\text{tyngde}} = k \cdot |x_1| - m \cdot g$$

Heri indsættes, at $x_1 = x_0 + \Delta x$:

$$F_{\text{træk}} = k \cdot |x_0 + \Delta x| - m \cdot g \Leftrightarrow$$

$$F_{\text{træk}} = k \cdot |x_0| + k \cdot |\Delta x| - m \cdot g$$

Her er det ved sidste lighedstegn anvendt, at x_0 og Δx har samme fortegn, hvilket gør det muligt at opdele leddet med den numeriske værdi. Fra ligning (I) anvendes, at $k \cdot |x_0| = m \cdot g$, hvilket indsættes på højresiden:

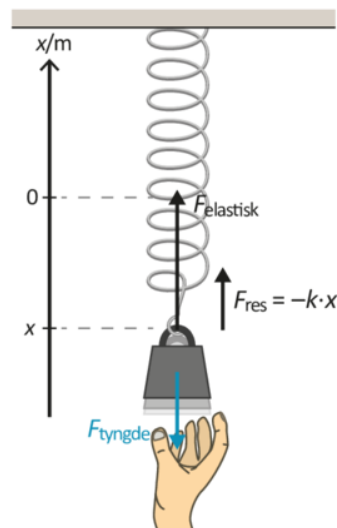
$$F_{\text{træk}} = m \cdot g + k \cdot |\Delta x| - m \cdot g = k \cdot |\Delta x|$$

Denne ligning viser, at kraften til at strække fjederen det ekstra stykke er proportional med afstanden mellem slutpositionen x_1 og hvilepositionen x_0 med loddet på. Trækkraften går til at modvirke forøgelsen af den elastiske kraft fra fjederen, når den strækkes ud over den nye hvileposition x_0 . Dermed er det vist, at den elastiske kraft fra den ophængte fjeder er proportional med afstanden, som den strækkes fra den nye hvileposition x_0 . Dette er netop i overensstemmelse med Hookes lov, men med den nye hvileposition x_0 som udgangspunkt.

Hookes lov for en ophængt fjeder med belastning

Et lod ophængt i en fjeder påvirkes af en elastisk kraft givet ved Hookes lov, når det forskydes en strækning fra sin hvileposition. Nulpunktet for forskydningen vælges i dette tilfælde ved hvilepositionen for loddet, når det hænger i fjederen.

Af ovenstående følger en vigtig konsekvens for den resulterende kraft på et ophængt lod. Hvis loddet flyttes væk fra ligevægtspositionen og slippes, vil det under påvirkning af fjederkraften og tyngdekraften søge tilbage mod ligevægtspositionen. Den resulterende kraft på loddet kan i denne situation bestemmes med Hookes lov, hvor der regnes med udgangspunkt i loddets ligevægtsposition. Dette skyldes, at tyngdekraften på loddet netop udlignes af fjederkraften i ligevægtspositionen, og det er således kun strækningen fra ligevægtspositionen frem til slutpositionen, der bidrager til den resulterende kraft. Nedenstående eksempel omhandler denne situation.



Eksempel 14.2: Lod på en fjeder

Spørgsmål

Et lod med massen 100 g er ophængt i en fjeder med fjederkonstanten 5,0 N/m.

1. Hvor stor kraft skal der til for at strække fjederen 15 cm fra hvileposition?
2. Bestem loddets acceleration idet det slippes fra positionen, hvor fjederen er strakt 15 cm i forhold til hvilepositionen.

Svar

Situationen betragtes i forhold til en stedakse, der har nulpunkt ved hvileposition og peger opad.

a.

Den elastiske kraft beregnes vha. Hookes lov:

$$F_{\text{elastisk}} = -k \cdot x = -5,0 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (-0,15 \text{ m}) = 0,75 \text{ N}$$

Kraften, der skal til for at strække fjederen, skal have samme størrelse som den elastiske kraft. Størrelsen af den søgte kraft er altså 0,75 N.

b.

For at bestemme accelerationen anvendes Newtons 2. lov. Idet det antages, at loddet kun er påvirket af den elastiske kraft fra fjederen og tyngdekraften, får man, at:

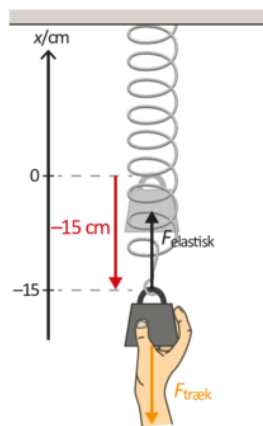
$$F_{\text{res}} = F_{\text{elastisk}} \Leftrightarrow m \cdot a = -k \cdot x$$

Her er udnyttet, at Hookes lov i denne situation giver den resulterende kraft, når nulpunktet er valgt ved loddets hvileposition. Når accelerationen a isoleres, og de kendte størrelser indsættes, fås:

$$a = \frac{-k \cdot x}{m} = \frac{-5,0 \text{ N/m} \cdot (-0,15 \text{ m})}{0,100 \text{ kg}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Loddet får altså en opadrettet acceleration på $7,5 \text{ m/s}^2$.

Hookes lov for en fjeder kan eftervises eksperimentelt ved at måle samhørende værdier af fjederkraften og strækningen af fjederen. Forsøget kan laves med en fjeder, hvori der ophænges lodder af forskellig masse. Fjederkraften kan bestemmes ud fra tyngdekraften på lodderne, og fjederens strækning kan måles. Man kan også lave forsøget ved at hænge en fjeder med et lod i en kraftmåler, og sætte loddet i svingning over en bevægelsessensor (se figur 14.5). Når loddet svinger op og ned, strækkes og sammenpresses fjederen undervejs i svingningen, og der kan opsamles sammenhørende værdier af strækning og kraft. Derfra kan genereres en afbildning af sammenhængen mellem fjederkraften og strækningen væk fra fjederens hvileposition, hvorved Hookes lov kan eftervises og fjederkonstanten bestemmes.



Figur 14.5

[...]



14.1



En fjeder med fjederkonstanten 200 N/m påvirkes med en kraft på 70 N . Hvor meget strækkes fjederen?



14.2



En fjeder med en fjederkonstant på $1,0 \text{ kN/m}$ hænges lodret.

- a. Hvor meget strækkes fjederen, hvis den belastes med en masse på $2,0 \text{ kg}$?
- b. Hvor stor masse skal fjederen belastes med, for at strække den 10 cm ?



14.3



En fjeder belastes med et lod, hvorved fjederen strækkes med 10 cm .

- a. Hvad er udstrækningen af fjederen, hvis der hænges endnu et identisk lod på?
- b. Hvor mange lodder skal fjederen belastes med, for at den samlede strækning bliver 50 cm ?