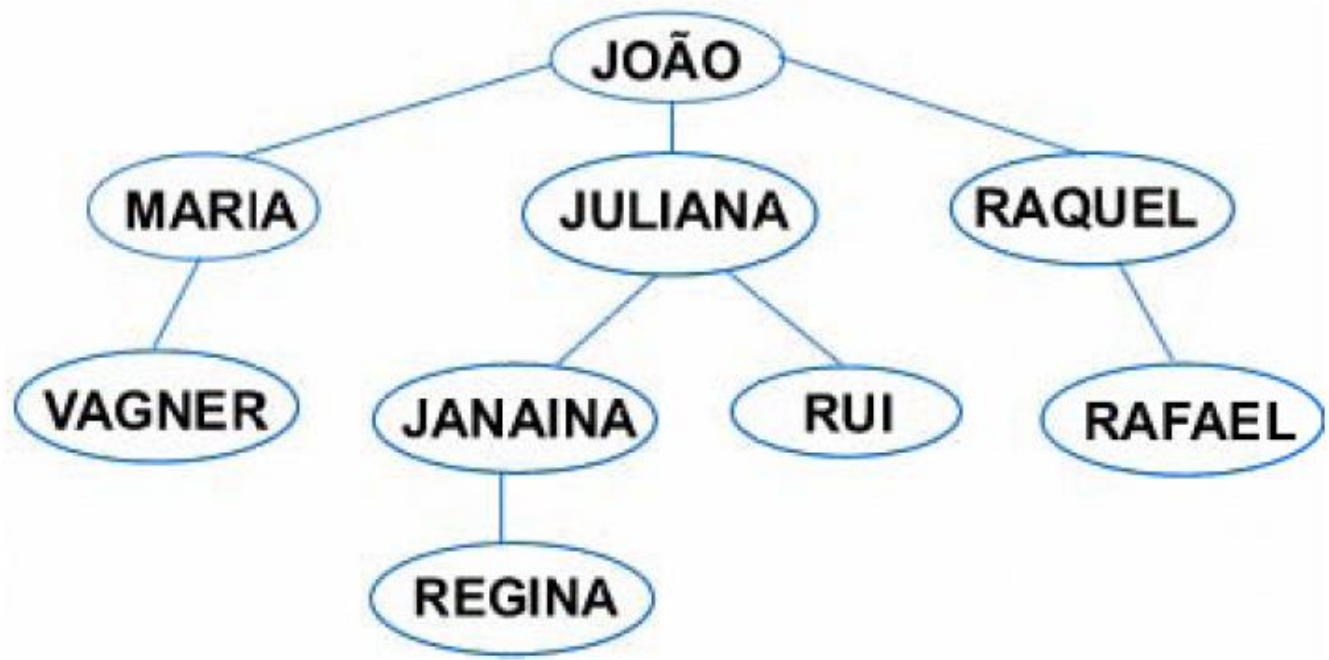
Árvore

Introdução

- Estrutura de árvores: organização dos dados de forma não-linear mantendo um relacionamento hierárquico entre seus elementos.
- Algumas situações onde é necessária uma representação baseada na relação hierárquica entre os elementos
  - Árvores genealógicas
  - Organização de um livro
  - Representação da estrutura organizacional de uma instituição

Introdução

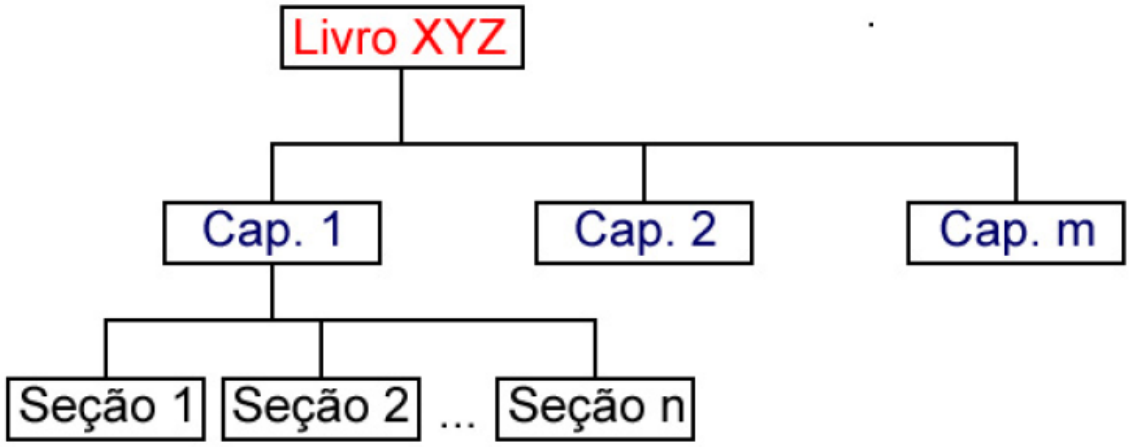
Árvores genealógicas



Introdução

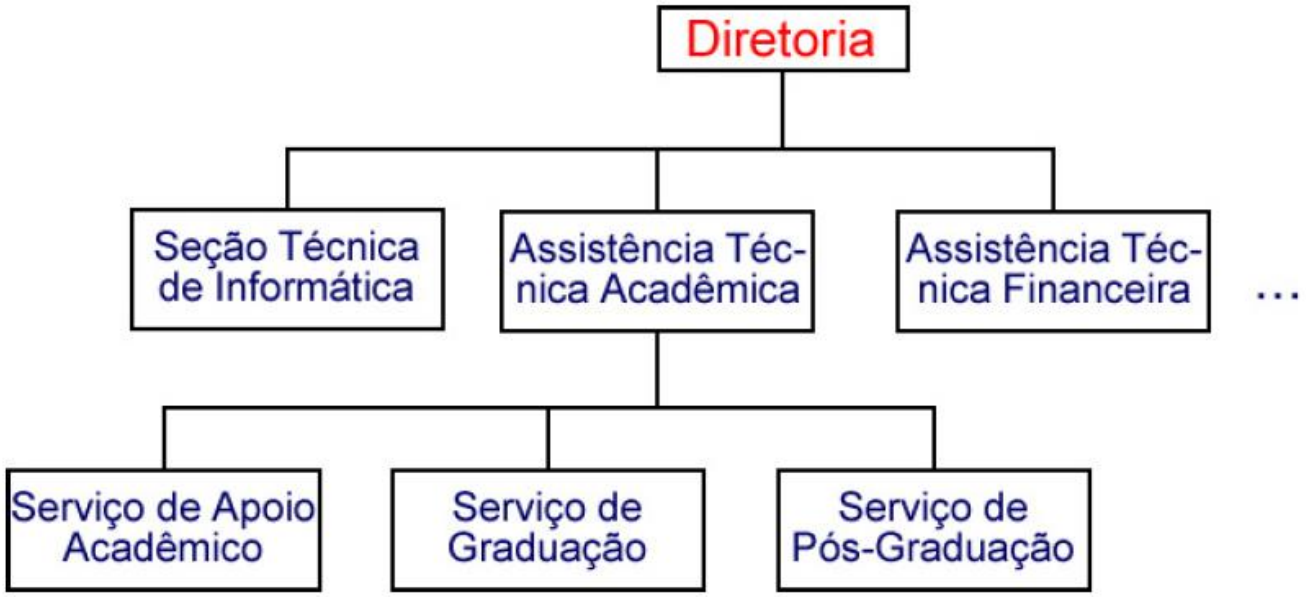
Organização de um livro

1. Livro XYZ
 1.1 Cap. 1
  1.1.1 Seção 1
  1.1.2 Seção 2
  ...
  1.1.n Seção n
 1.2 Cap. 2
  ...
 1.m Cap. m



Introdução

Representação da estrutura organizacional de uma instituição



Introdução

Observe que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore

Definição

Uma árvore enraizada T é um conjunto finito de elementos denominados nós ou vértices onde:

- Um nó especial da árvore, r, é chamado de raiz da árvore
- Os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em n >= 1 conjuntos disjuntos não vazios, T1, T2, T3, ... , Tn, as subárvores de r, cada qual por sua vez uma árvore

Podemos ter

- T = 0, a árvore é dita vazia
- T = {r} U {T1} U {T2} U {T3} U ... {Tn}

Representação

Assim para denotar uma árvore T usamos :

T = {r, T1, T2, T3, ..., Tn}

Dessa forma para representar um árvore podemos usar uma seqüência aninhada de “{“ e “}” :

Por exemplo, a seqüência {{}{}} é aninhada, mas a seqüência {{}} {} não é aninhada

Representação por grafos

Exemplos:

Ta = {A} Obs: A é a raiz da árvore

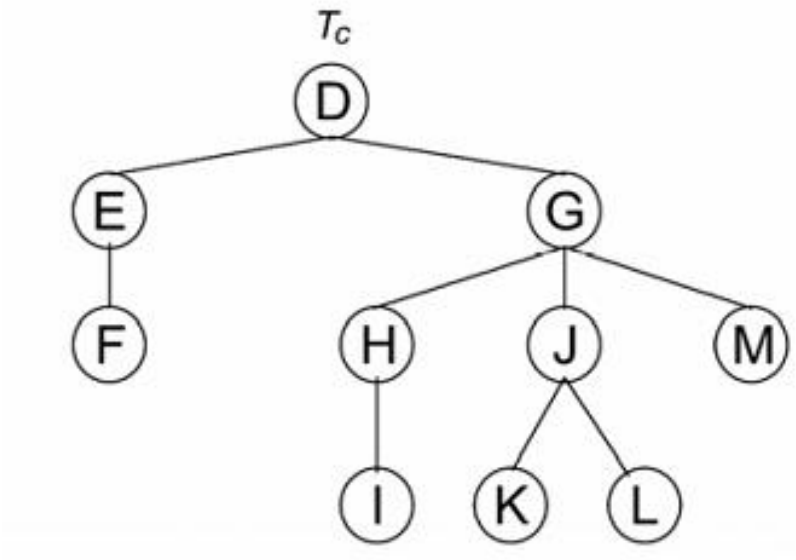
Tb = {B,{C}} Obs: B é a raiz da árvore

Representação

Exemplos:

Tc = {D,{E,{F}} , {G,{H,{I}} , {J,{K},{L}} , {M}}}

Obs: D é a raiz da árvore



Representação

Exercícios:

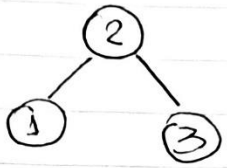
Desenhe as árvores (grafos) a partir da representação aninhada

Td = { 2 , {1}, {3}}

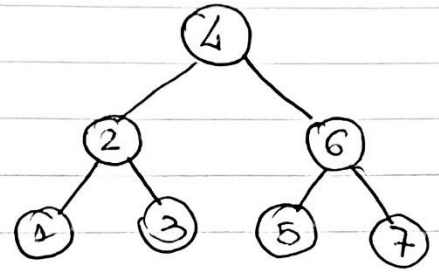
Te = {4, {2, {1},{3}}, {6,{5},{7}}}

Representação

Td = {2, {1}, {3}}

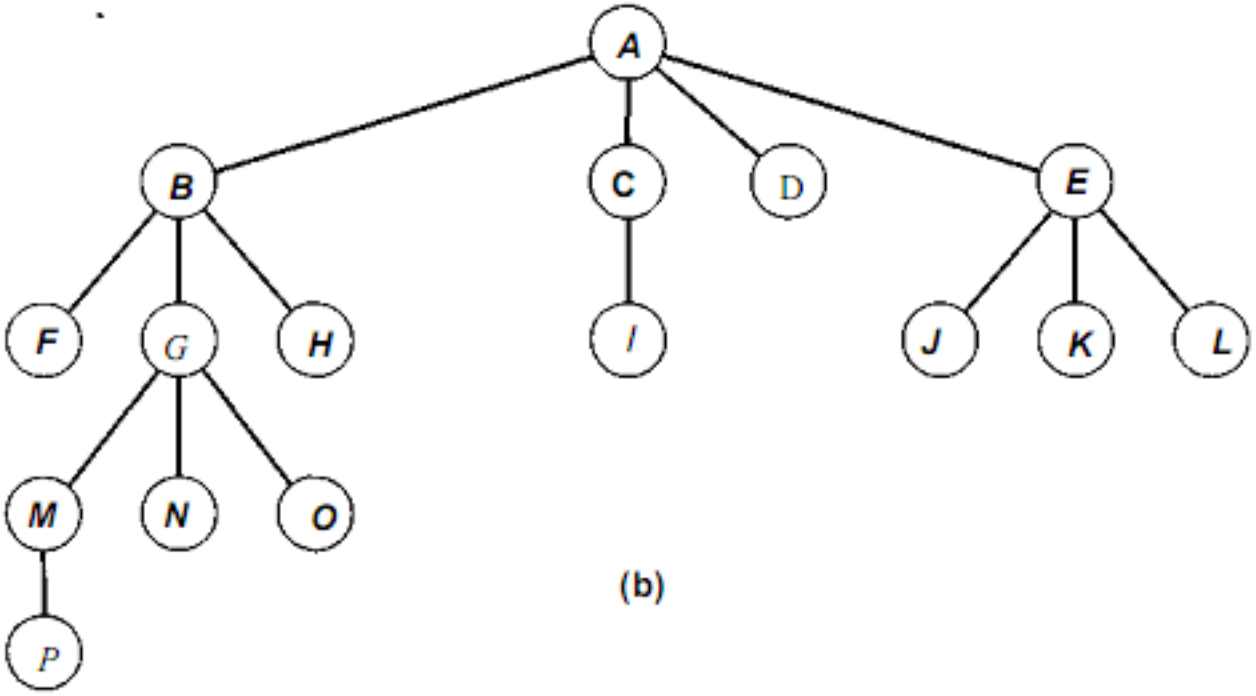


Te = {4, {2, {1}, {3}}, {6, {5}, {7}}}



Definição

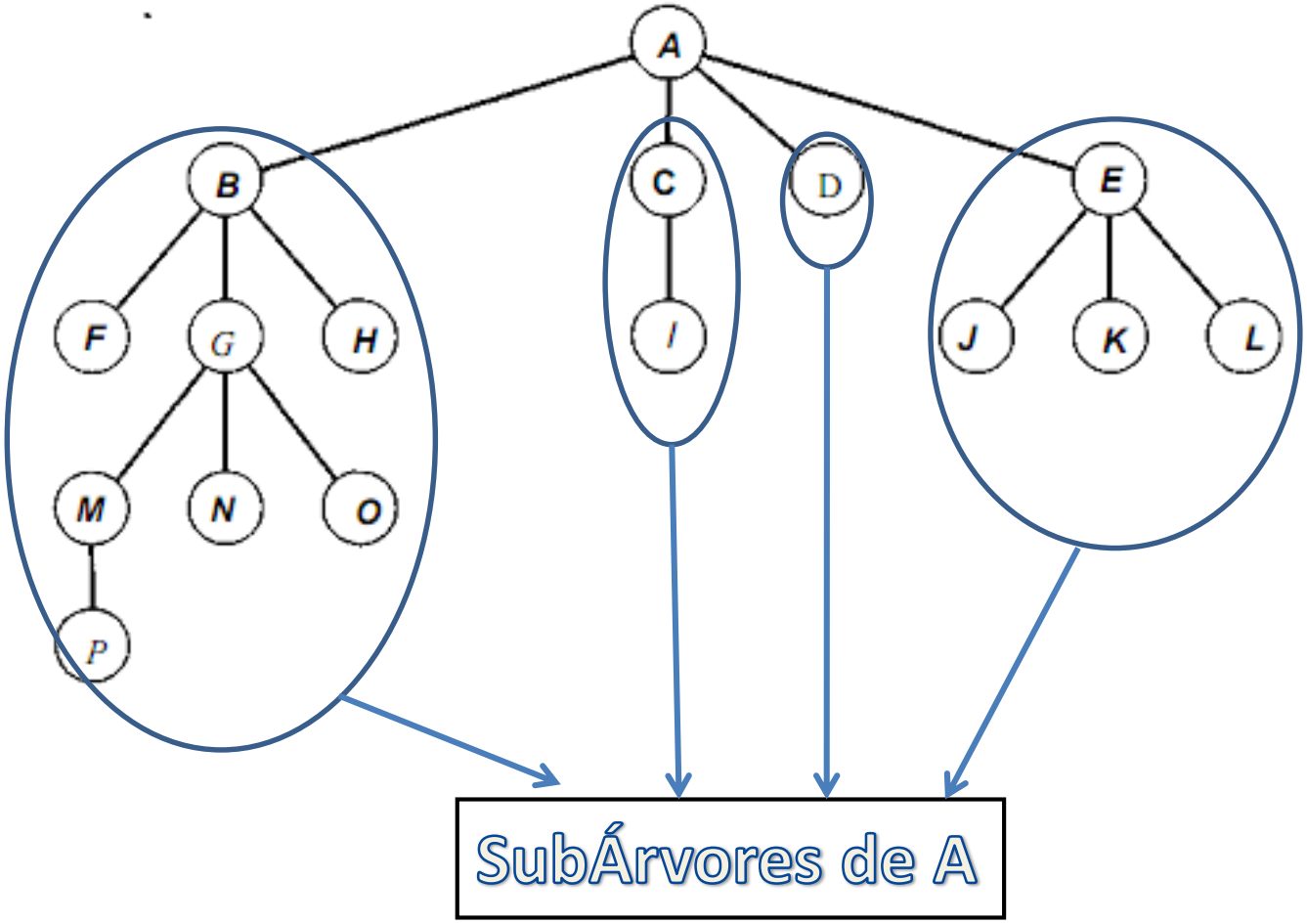
Considere a seguinte árvore:



A, B, C, D, E, ... , P são os nós da árvore. O conteúdo do nó representa o fator de informação.

O nó A é a raiz da árvore

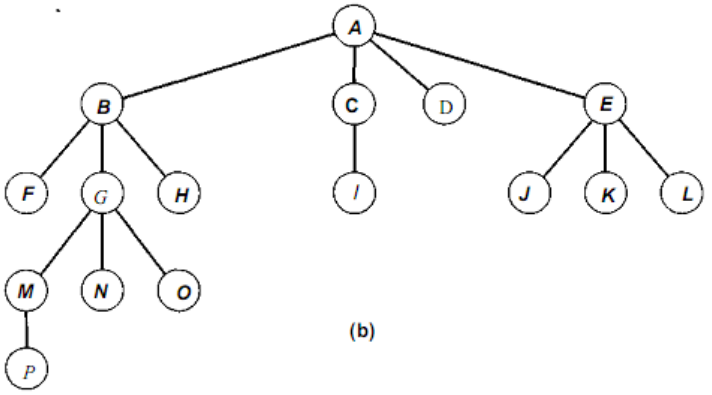
Definição



As raízes das subárvores de um nó X são os filhos de X : B, C, D, E são filhos de A

Definição

Um nó sem filhos é denominado de **nó folha ou nó terminal**. No exemplo os nós D, F, H, I, J, K, L, N, O, P são nós terminais. Os outros nós (aqueles que não possuem filhos) são denominados de **nós não terminais.**



Grau de um nó : número de filhos (subárvores) do nó. No exemplo:

Grau 4 : A

Grau 3 : B, E, G

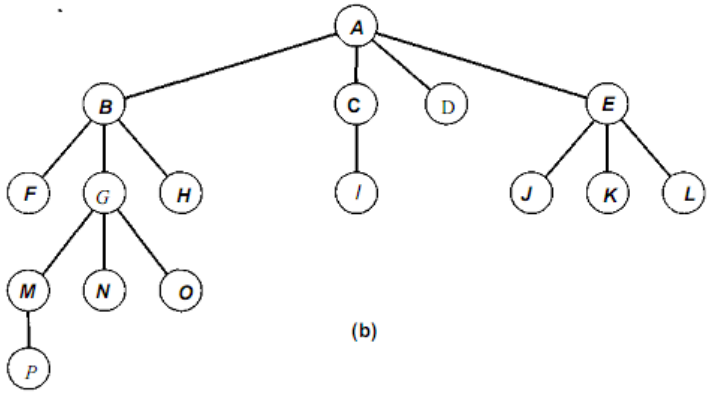
Grau 2 : Não tem

Grau 1 : C, M

Grau 0 : D, F, H, I, J, K, L, N, O, P

Definição

Grau da Árvore : maior grau de um nó da árvore. Neste exemplo o grau da árvore é 4.



Nó ancestral e nó descendente

Um nó n1 é um ancestral de um nó n2 (e n2 é um descendente de n1), se n1 for o pai de n2 ou o pai de algum ancestral de n2.

No exemplo: A é ancestral de B

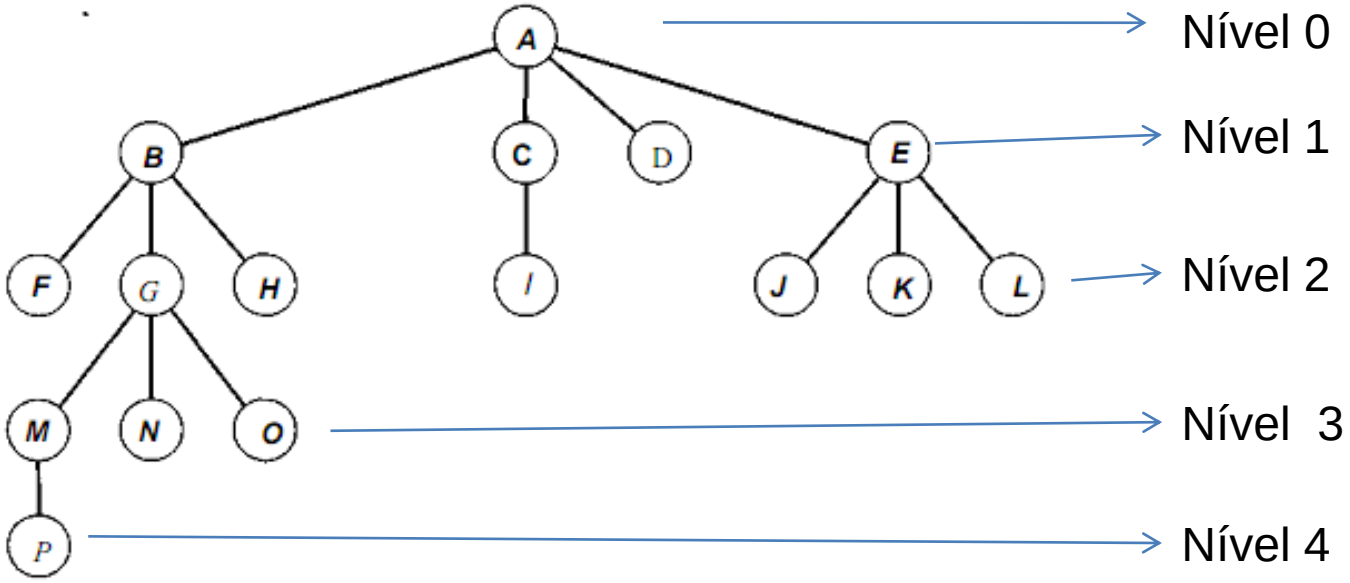
P é descendente de M, G, B, A

Dois nós são **irmãos** se forem filhos do mesmo pai

Definição

Nível

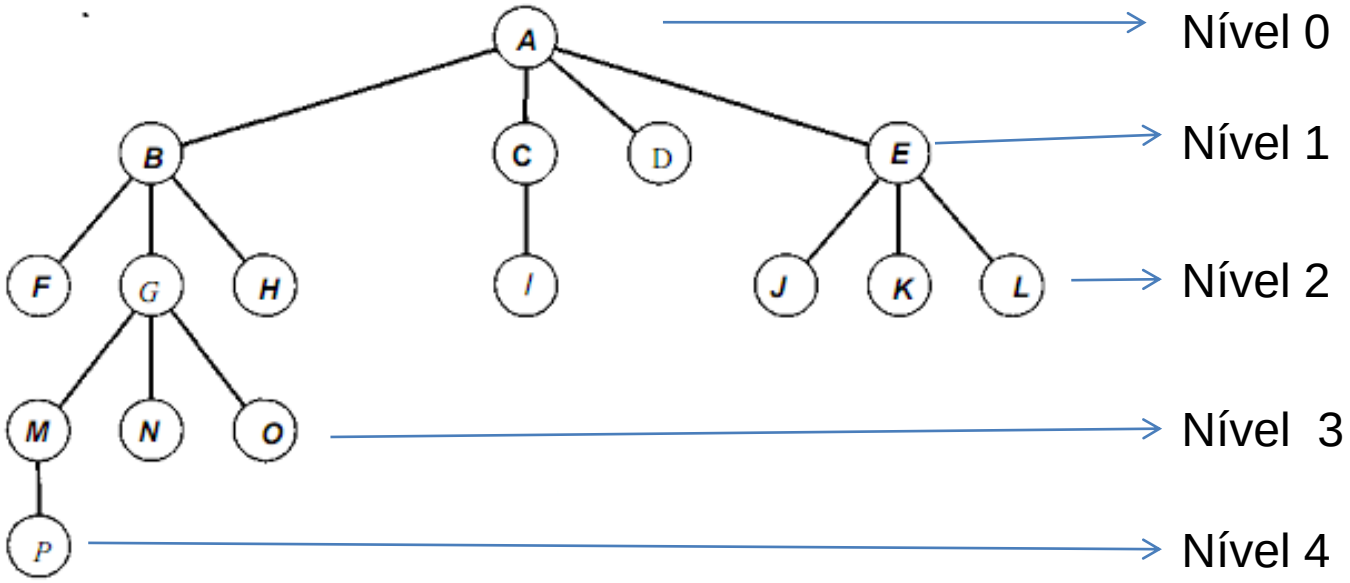
O nível de um nó conceitua-se como o “número de linhas” que liga este nó ao nó raiz da árvore, ou seja, o comprimento *(medido em ramos – ramo é por definição o espaço entre 2 nós, representado pelo segmento de reta que os une)* do caminho que vai desde o nó até a raiz. A raiz tem nível igual a zero



Definição

Altura

A altura de uma árvore é igual ao maior nível da árvore. No exemplo, a altura é igual a 4.



Exercícios

Considere a seguinte árvore:

Ta={a,{b,{c,{d}}, {e,{f},{g}}},{h,{i}}}

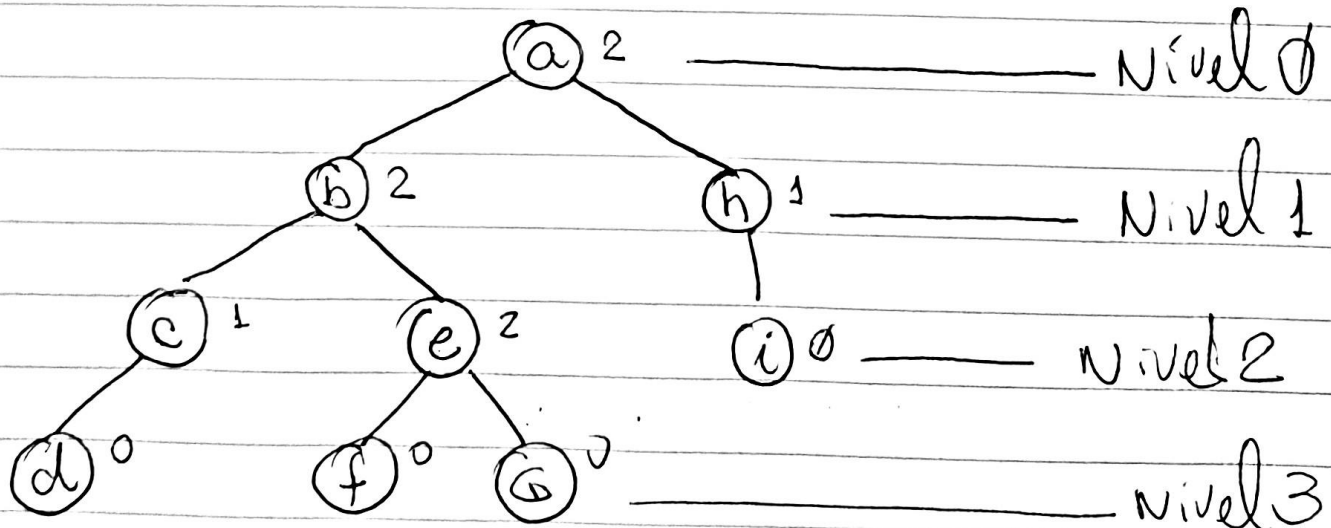
1)Obtenha as representações por grafo da árvore

2)Encontre o grau de cada nó e o grau da árvore.

3)Encontre o nível de cada nó e a altura da árvore

4)Encontre todos os descendentes de b e todos os ancestrais de f.

Ta = {a, {b, {c, {d}}, {e, {f}, {g}}}, {h, {i}}}

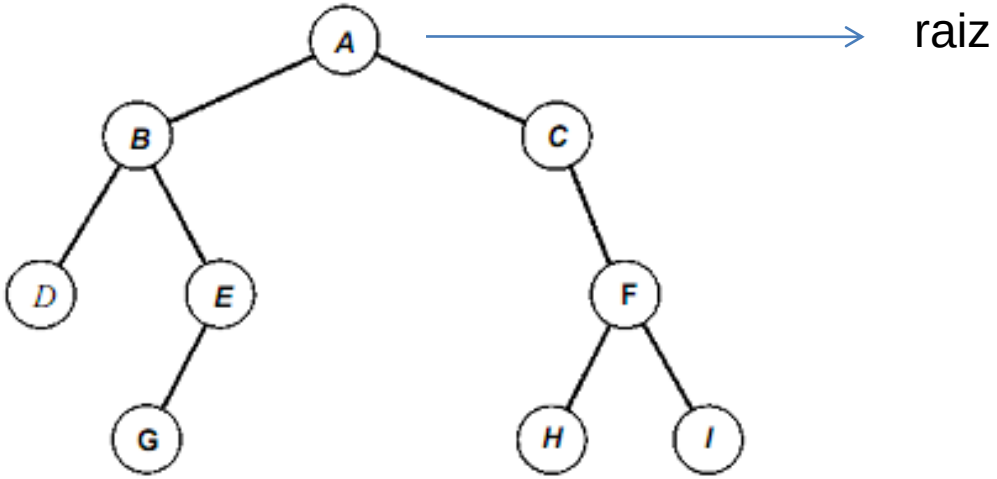


descendentes de b: c, d, e, f, g

ancestrais de f: e, b, a

Árvore Binária

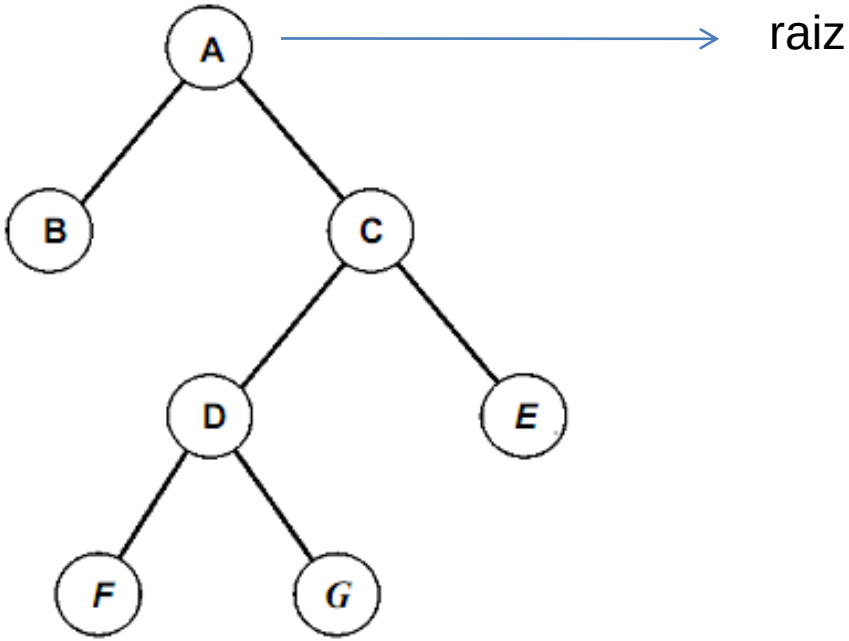
Uma árvore binária é caracterizada pelo fato de que qualquer um de seus nós pode possuir duas subárvores (ou dois filhos): subárvore esquerda e subárvore direita.



O grau de cada nó em uma árvore binária é no máximo 2.

Árvore Binária

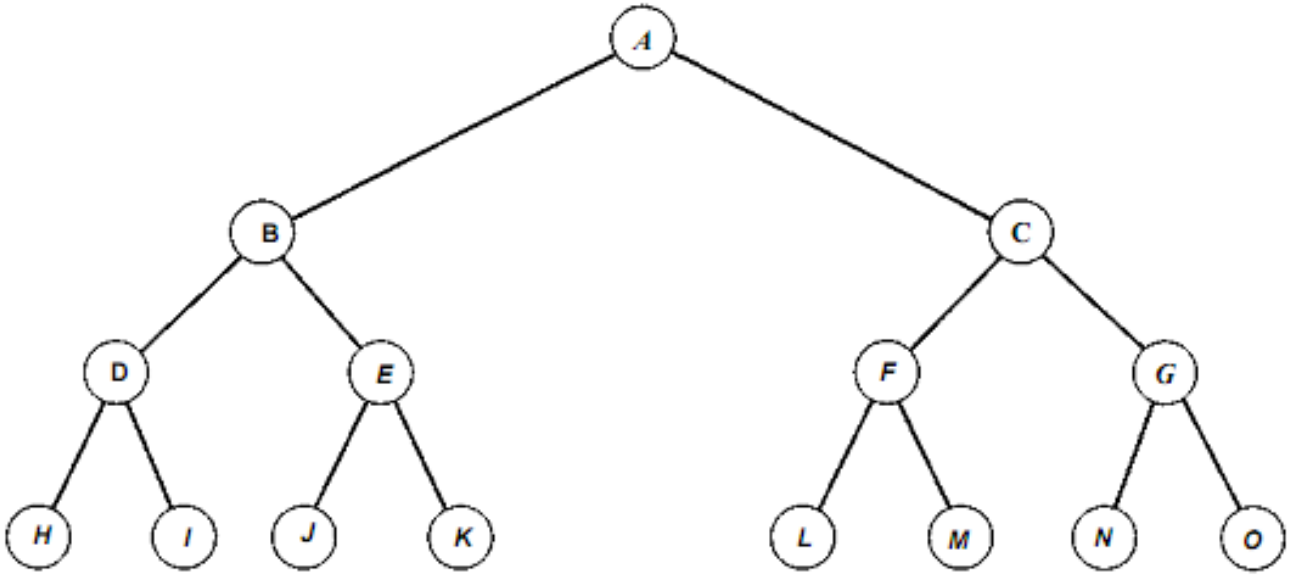
Árvore Estritamente Binária - todo nó que não é folha numa árvore binária possui subárvores esquerda e direita não-vazias



Uma árvore estritamente binária.

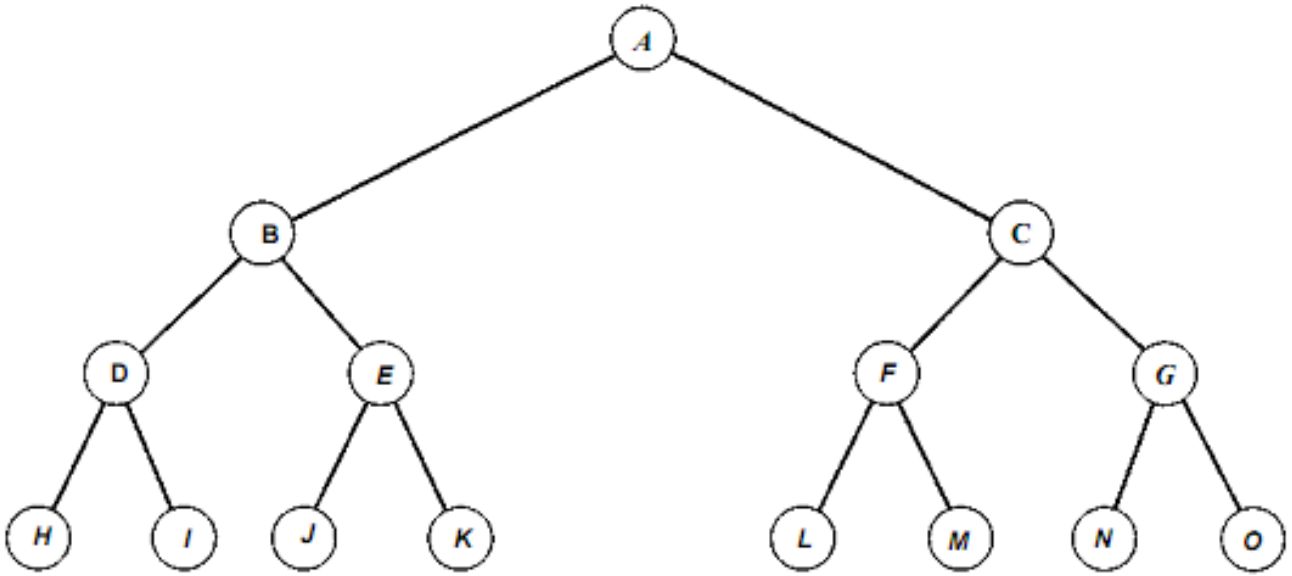
Árvore Binária

Árvore Binária Completa - Uma árvore binária completa de altura (profundidade) d é a árvore estritamente binária em que todas as folhas estejam no nível d.



Árvore Binária

Se uma árvore binária contiver **m** nós no nível **L**, ela conterá no máximo **2m** nós no nível **L + 1**. Como uma árvore binária pode conter no máximo um nó no nível 0 (raiz), ela poderá conter no máximo 2^L nós no nível L.

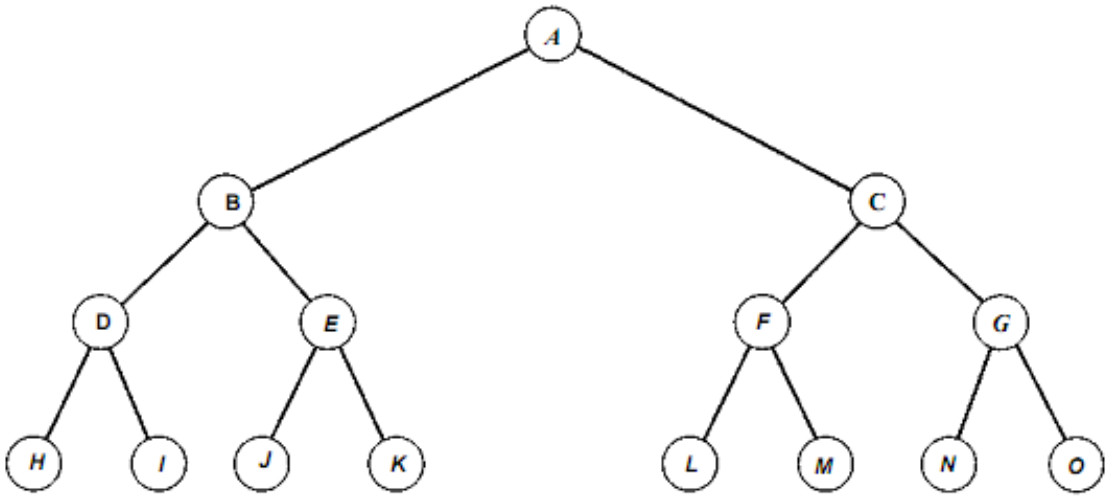


Árvore Binária

O número total de nós numa árvore binária completa de profundidade d, tn, é igual à soma do número de nós em cada nível entre 0 e d. Sendo assim:

$$tn = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^d = \sum_{j=0}^{d} 2^j$$

Por indução esta soma equivale a $2^{d+1} - 1$



Percurso em Árvore Binária

Percurso é percorrer a árvore enumerando cada um de seus nós uma vez. Podemos simplesmente querer imprimir o conteúdo de cada nó ao enumerá-lo, ou podemos processá-lo de alguma maneira. Seja qual for o caso, falamos em **visitar** cada nó à medida que ele é enumerado.

3 Percursos Básicos em Árvore Binária

pré-ordem (Pre-order)

visita a raiz

percorre a subárvore a esquerda em pré-ordem

percorre a subárvore a direita em pré-ordem

em-ordem (In-order)

percorre e subárvore a esquerda em em-ordem

visita a raiz

percorre a subárvore a direita em em-ordem

pós-ordem (Post-order)

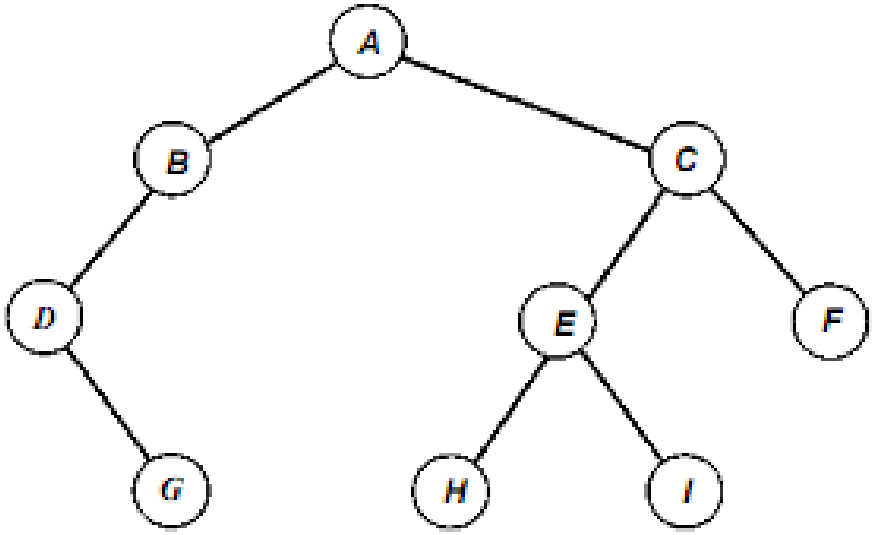
percorre e subárvore a esquerda em pós-ordem

percorre a subárvore a direita em pós-ordem

visita a raiz

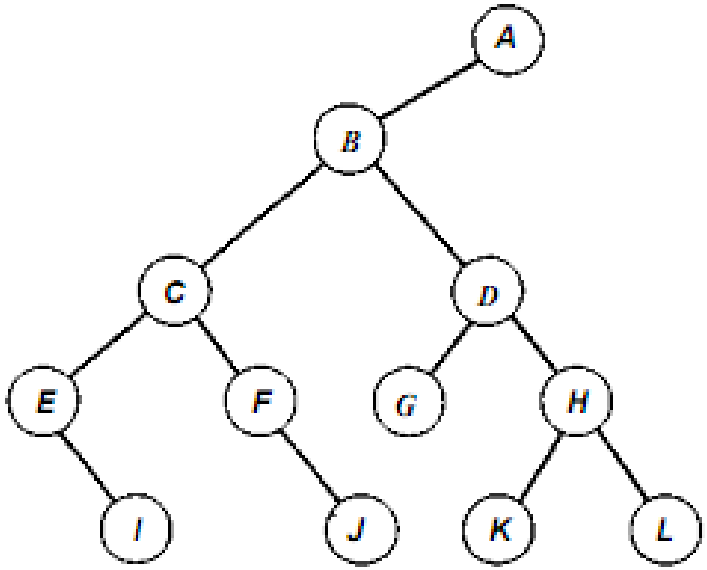
A diferença entre eles está, basicamente, na ordem em que os nós são “visitados”

Percurso em Árvore Binária



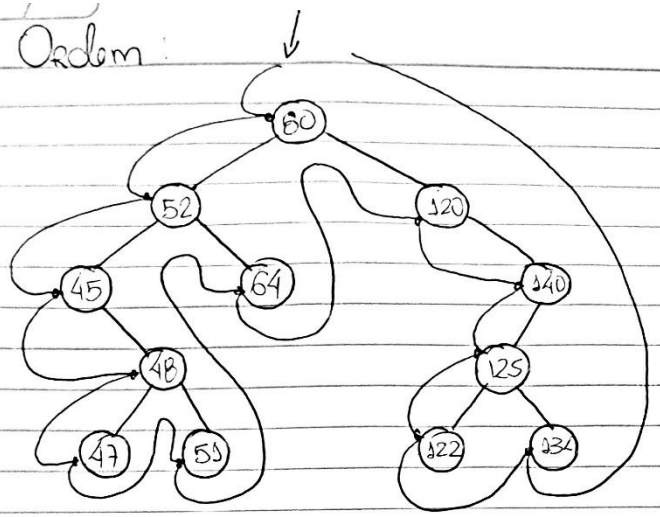
Pré-ordem: *ABDGCEHIF*
Em ordem: *DGBAHEICF*
Pós-ordem: *GDBHIEFCA*

Percurso em Árvore Binária



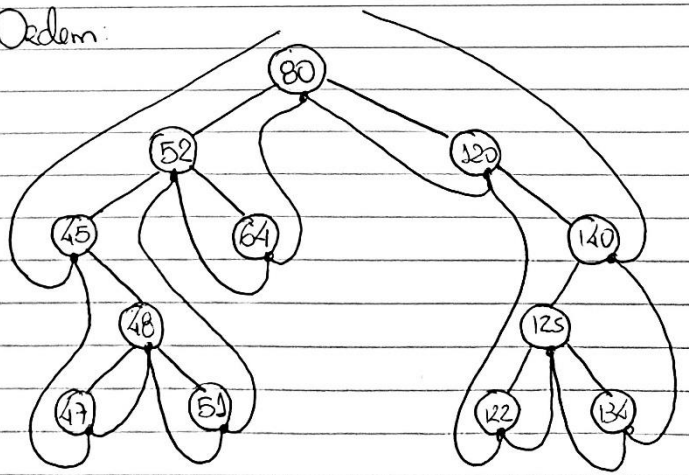
Pré-ordem: *ABCEIFJDGHKL*
Em ordem: *EICFJBGDKHLA*
Pós-ordem: *IEJFCGKLHDBA*

Pre Ordem:



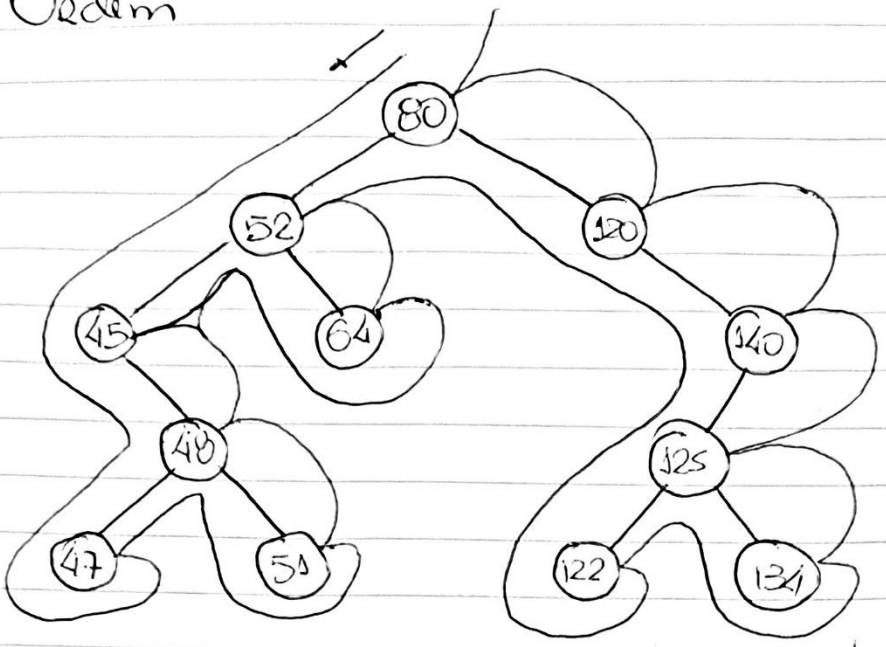
Tocar o lado Esquerdo do nó (visitar)
80, 52, 45, 48, 47, 51, 64, 120, 140, 125, 122, 134

Em Ordem:



Tocar o lado de baixo do nó (visitar)
45, 47, 48, 51, 52, 64, 80, 120, 122, 125, 134, 140

Pos Ordem



Tocar o lado direito do nó (visitar)

47, 51, 48, 45, 64, 52, 122, 134, 125, 140, 120, 80

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca possui as mesmas propriedades de uma Arvore Binária, acrescida das seguintes propriedades:

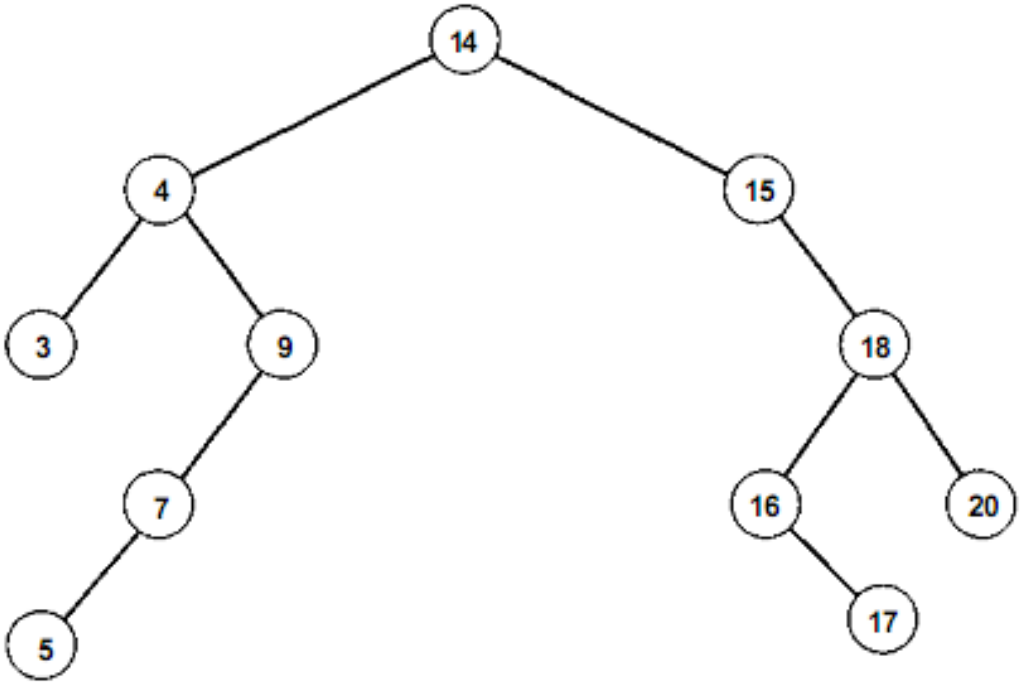
- Os nós pertencentes à sub-árvore esquerda possuem valores menores do que o valor associado ao nó raiz
- Os nós pertencentes à sub-árvore direita possuem valores maiores do que o valor associado ao nó raiz
- Um percurso in-ordem nessa árvore resulta na seqüência de valores em ordem crescente

Árvore Binária de Busca

Se a lista de entrada para a montagem de uma árvore binária de busca for

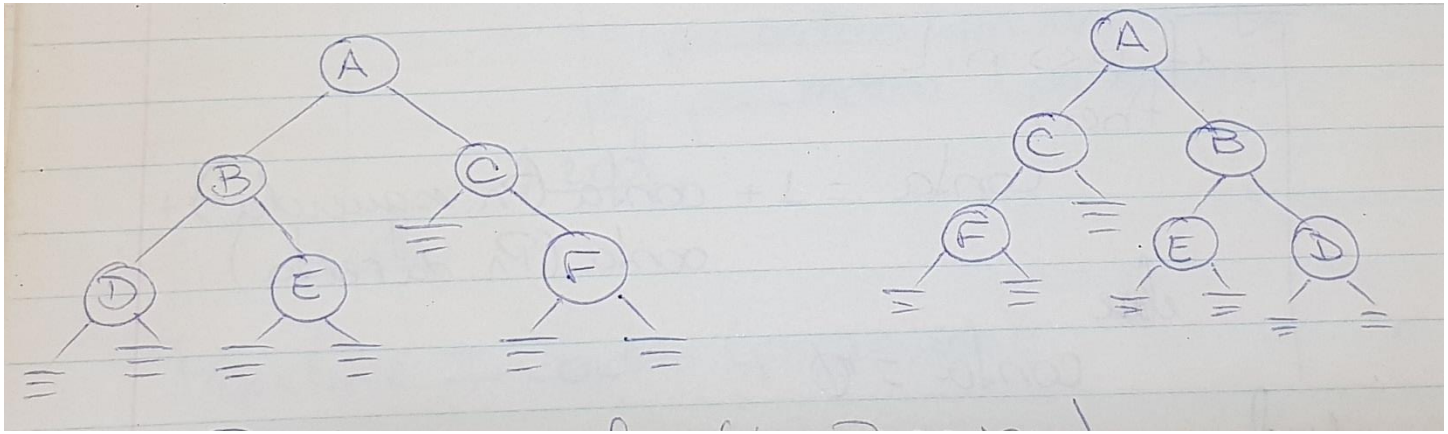
14 15 4 9 7 18 3 5 16 4 20 17 14 5

será produzida a árvore binária



Árvore Binária de Busca

Exercício desafio: Escrever uma função em python para transformar uma árvore em sua imagem especular. Como se tivesse colocado um espelho na árvore.



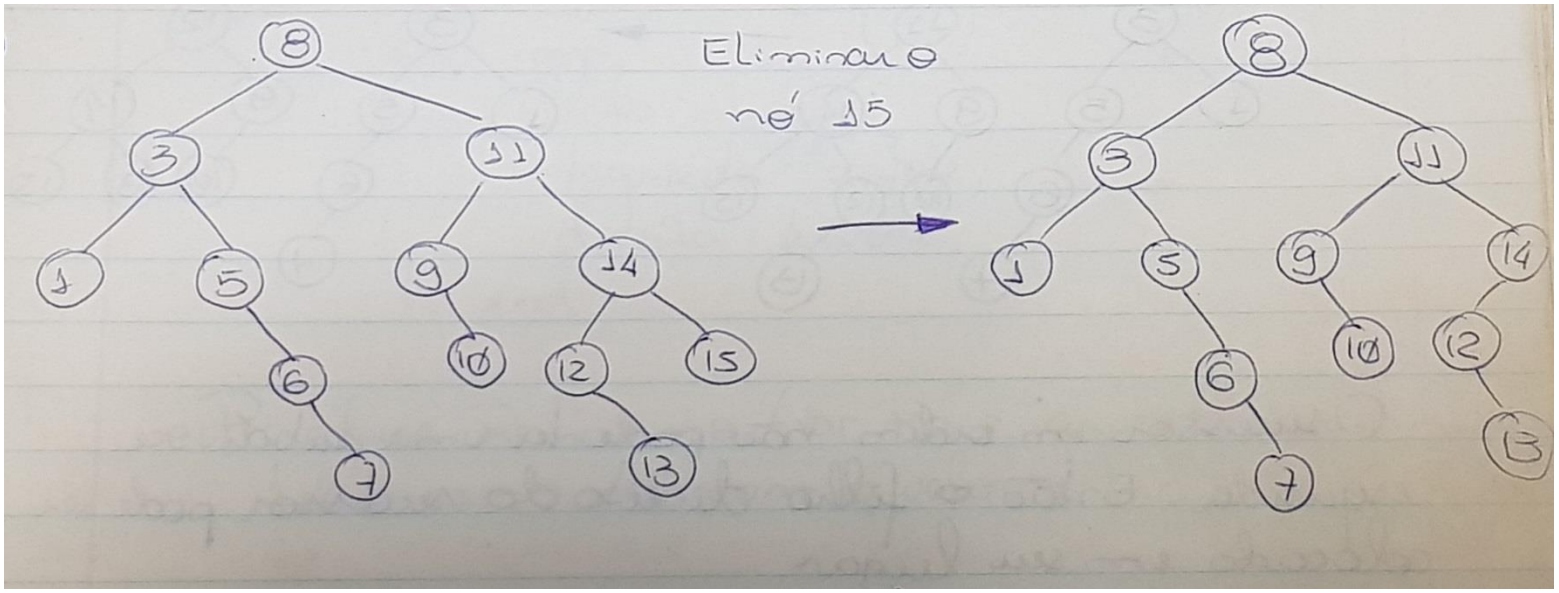
Árvore Binária de Busca

Remoção de Elementos em uma Árvore Binária de Busca

No processo de remoção de um nó em uma arvore binária de busca, podemos considerar 3 casos:

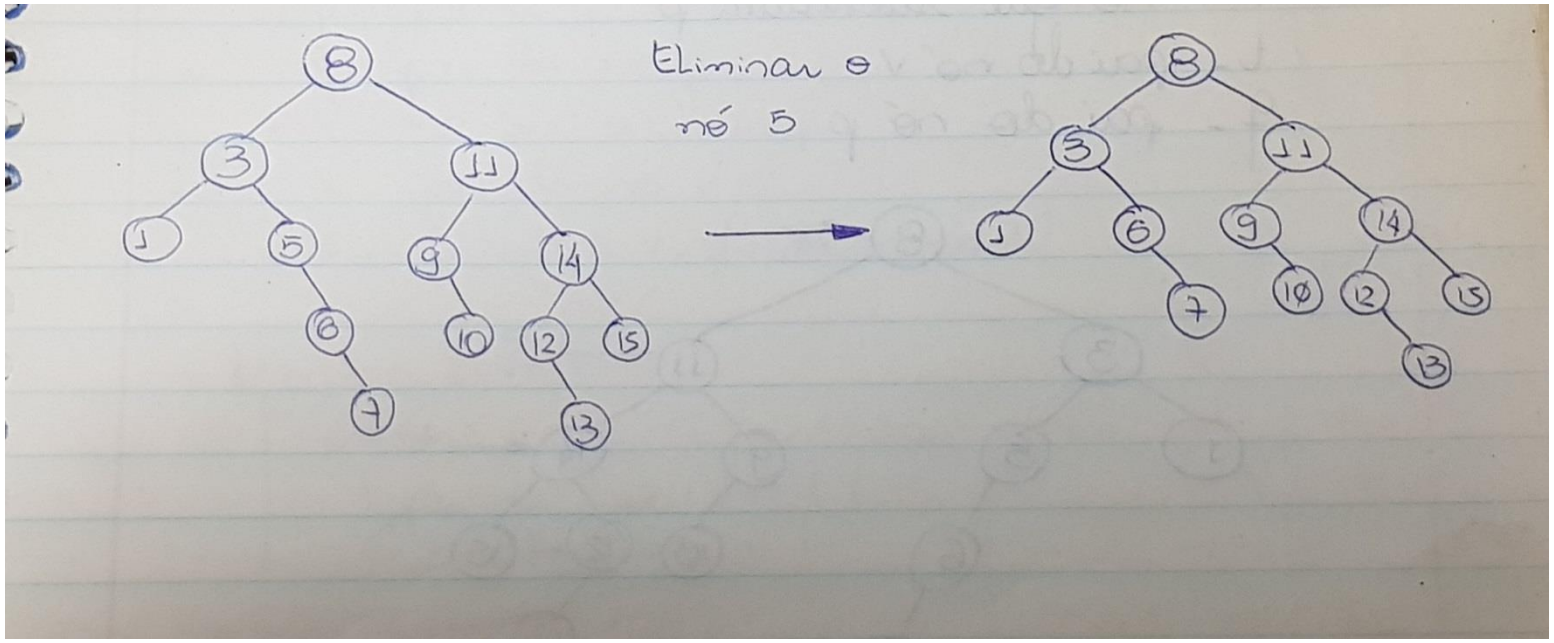
Árvore Binária de Busca

1. Caso – Se um nó a ser removido não possuir filhos, ele poderá ser removido sem ajustes na árvore



Árvore Binária de Busca

2. Caso – Se um nó a ser removido possuir apenas 1 filho, seu único filho poderá ser colocado em seu lugar.



Árvore Binária de Busca

3. Caso – Se um nó a ser removido possuir dois filhos, seu sucessor emOrdem (nó mais a esquerda da subárvore direita) ou seu antecessor emOrdem (nó mais a direita da subárvore esquerda) deve tomar o seu lugar.

Eliminar o nó 11