

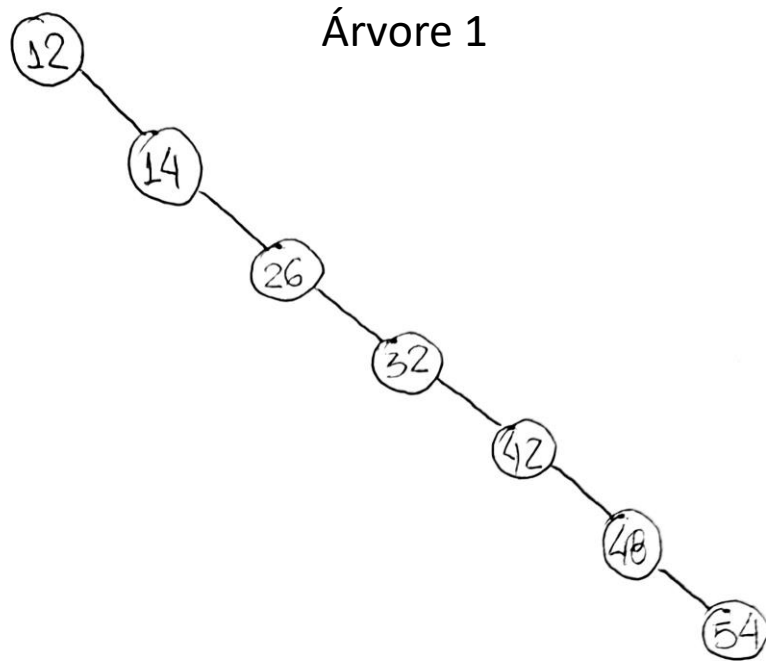
Árvores Binárias Balanceadas

Árvores AVL

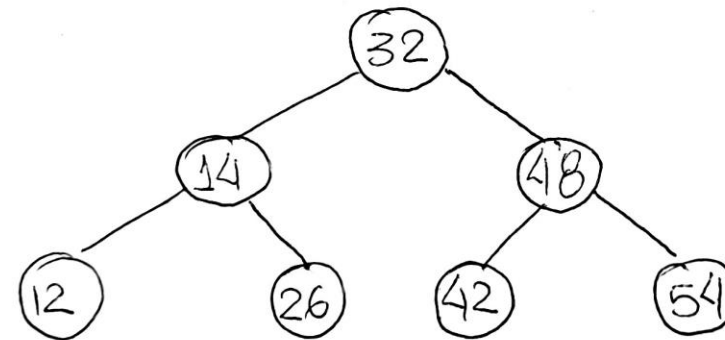
Prof. Fernando Orsi

Árvore Balanceada

Considere as seguintes árvores binárias de busca:



Árvore 2



O número médio de comparações para encontrar um determinado elemento na árvore 1 é maior que na árvore 2. A árvore 1 não está balanceada e a árvore 2 está balanceada.

Árvore Balanceada

- O conceito de árvores balanceadas e algoritmos de balanceamento foram introduzidos por **Adelson-Velskii** e **Landis**. Esses dois autores conceberam as árvores AVL.
- Uma árvore binária balanceada (AVL) é uma árvore binária na qual as alturas das duas subárvores de todo nó nunca difere em mais de 1.
- O balanceamento ou fator de balanceamento de um nó é definido como a altura de sua subárvore esquerda menos a altura de sua subárvore direita.

$$FB = h_e - h_d$$

Árvore Balanceada

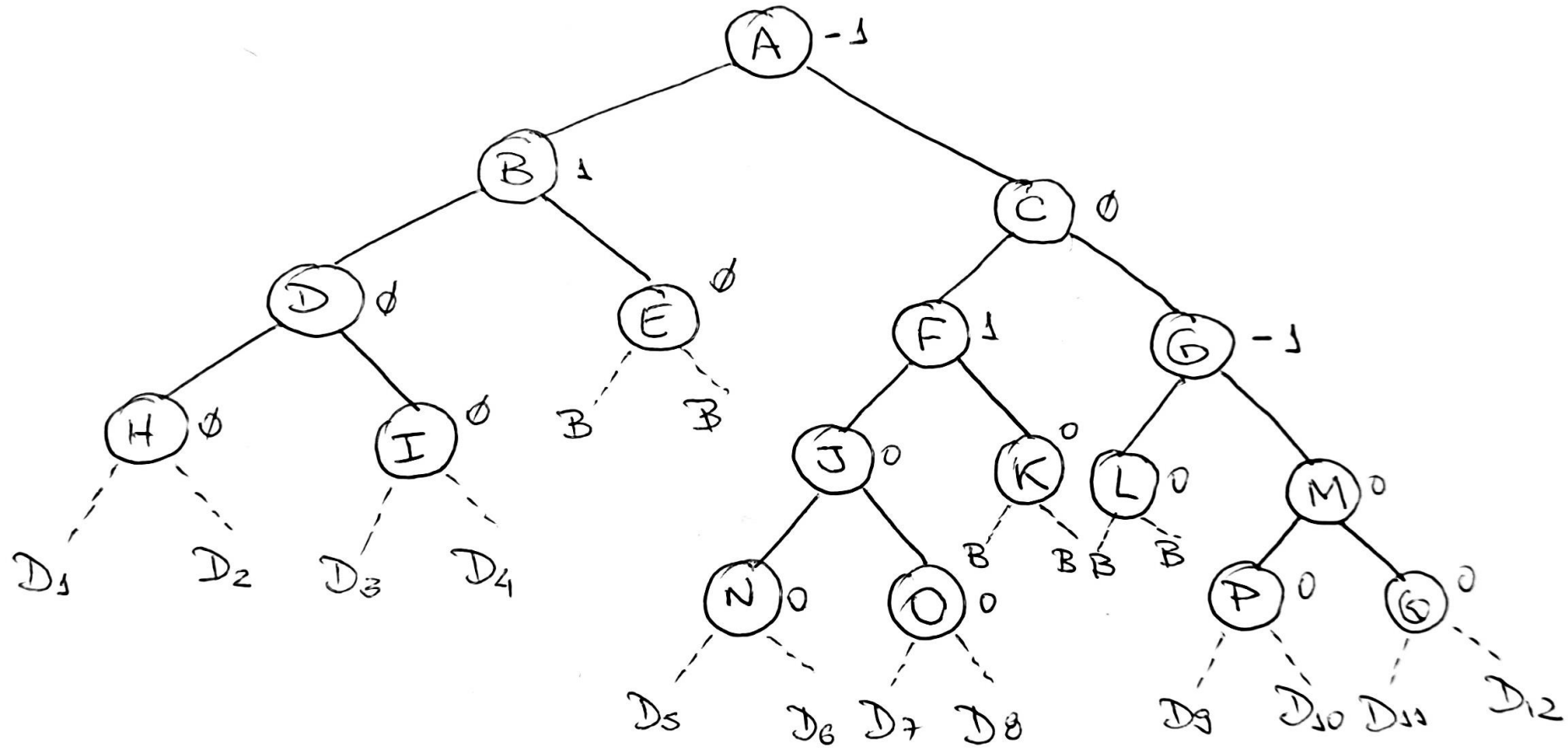
- Então cada nó numa árvore binária balanceada (AVL) tem um fator de balanceamento igual a 1, -1 ou 0.
- Assim, se uma árvore T está balanceada, então todas as suas subárvores também estão balanceadas.
- Se o valor do balanceamento de um nó de uma árvore T for diferente de 1, -1 e 0, então a árvore não está balanceada.

Árvore Balanceada

Suponha que um nó seja inserido em um árvore AVL. O nó é inserido na subárvore esquerda. Três situações podem ser identificadas:

1. Se a altura da subárvore esquerda for igual a altura da subárvore direita, as subárvores esquerda e direita adquirem alturas diferentes, mas o critério de balanceamento não é violado.
2. Se a altura da subárvore esquerda for menor que a altura da subárvore direita, as subárvores esquerda e direita assumem alturas iguais, provocando uma melhora no fator de balanceamento da árvore.
3. Se a altura da subárvore esquerda for maior que a altura da subárvore direita, o critério de balanceamento é violado e a árvore deve ser reconstruída.

- Considere o exemplo, onde a inserção de elementos pode provocar o Desbalanceamento ou manter a árvore Balanceada



Árvore Balanceada

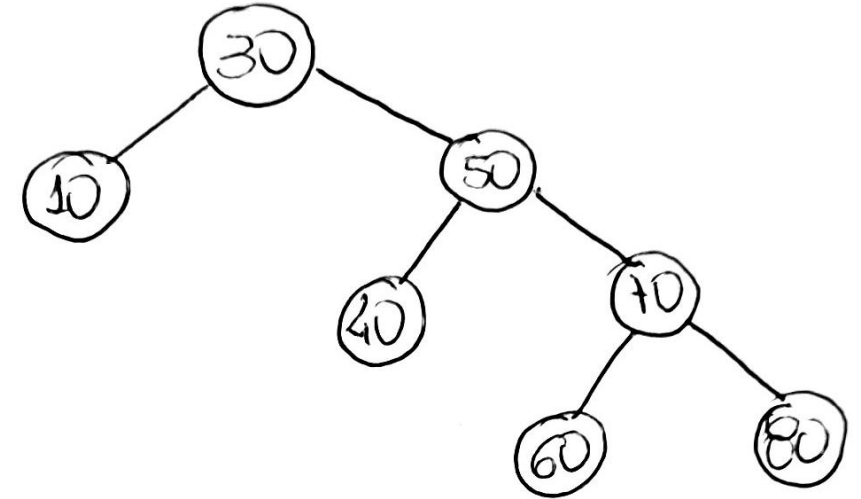
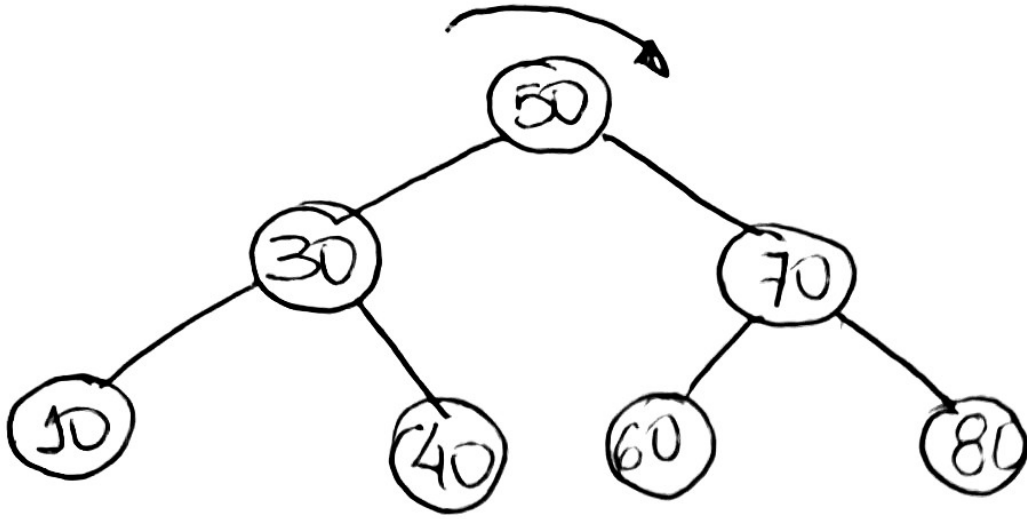
Para manter uma árvore balanceada é necessário efetuar uma transformação na árvore, tal que:

1. O percurso em-ordem da árvore transformada deve ser o mesmo da árvore original, ou seja, a árvore transformada continua sendo uma árvore binária de busca.
2. A árvore deve ficar balanceada.

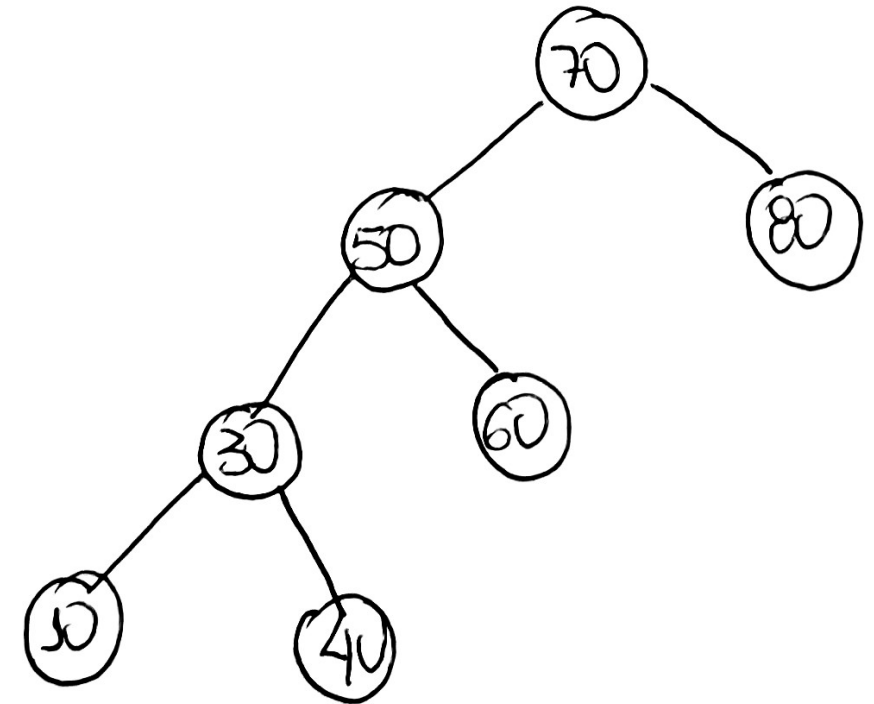
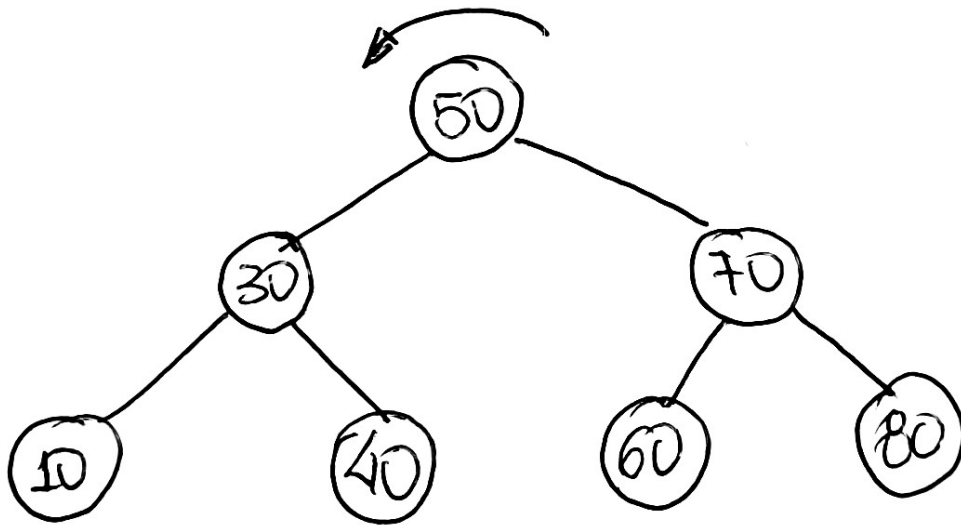
Árvore Balanceada

O modo para transformar uma árvore e fazer com que ela continue como uma árvore binária de busca, é fazer rotações na árvore.

- Rotação á direita no nó 50



- Rotação á esquerda no nó 50

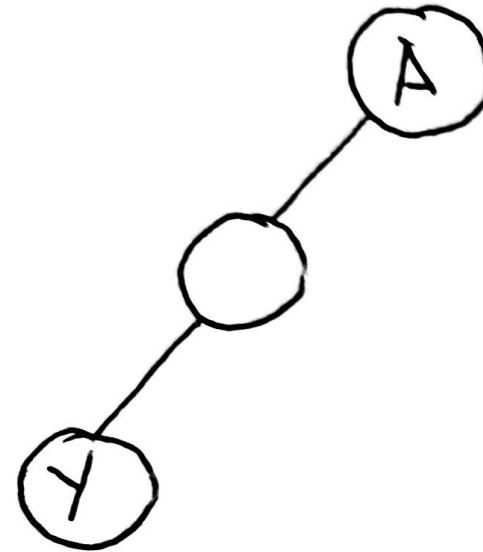


Árvore Balanceada

O processo para reequilibrar um árvore que ficou desbalanceada é conduzido por quatro tipo de rotação – EE, DD, ED e DE. Estas rotações são caracterizadas pelo nó ancestral mais próximo A, cujo fator de balanceamento passou a ser -2 ou +2, devido a inserção de um nó Y na árvore.

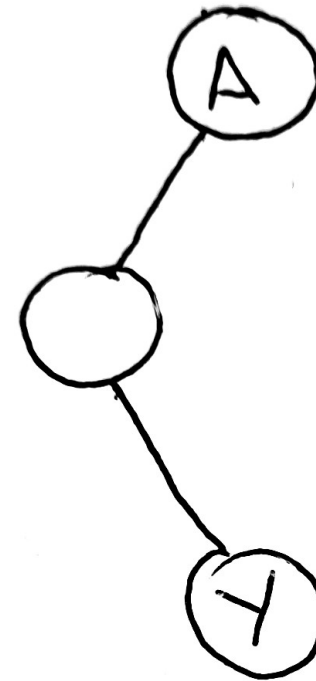
Rotação EE

O nó Y é inserido
na subárvore
esquerda do filho
esquerdo de A.



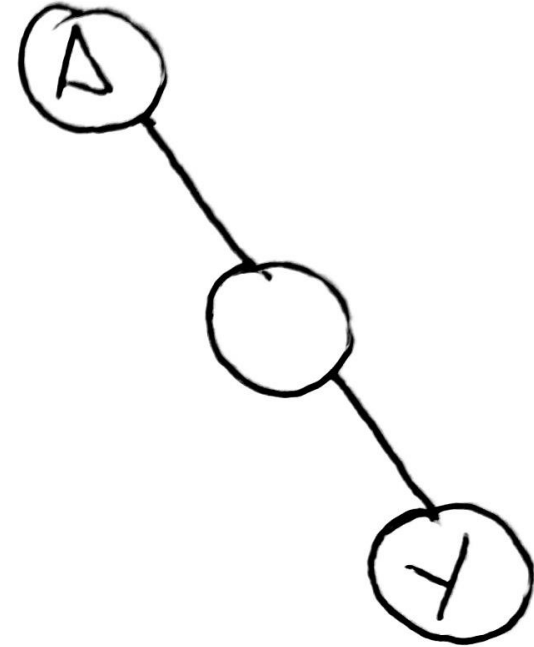
Rotação ED

O nó Y é inserido
na subárvore
direita do filho
esquerdo de A.



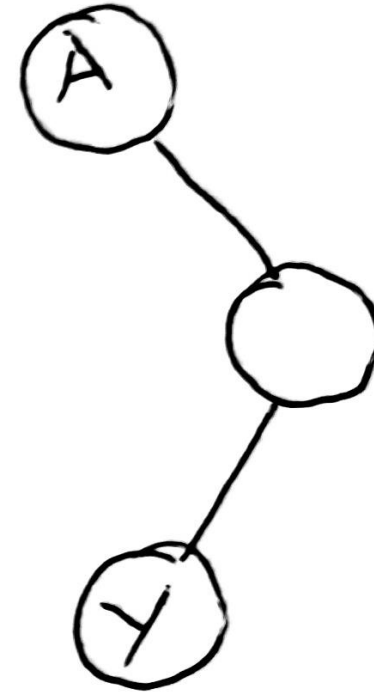
Rotação DD

O nó Y é inserido
na subárvore
direita do filho
direito de A.



Rotação DE

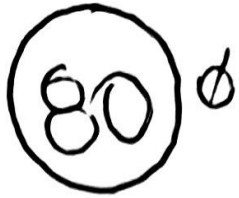
O nó Y é inserido
na subárvore
esquerda do filho
direito de A.



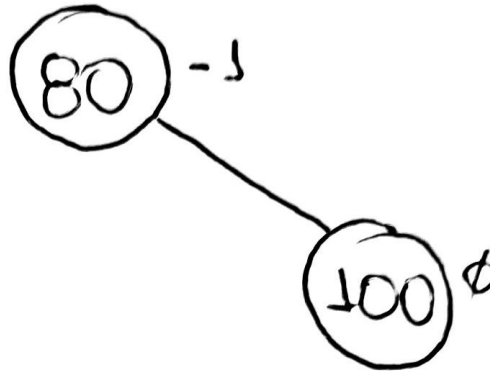
Árvore Balanceada

Para efetuar o rebalanceamento de uma árvore, é necessário localizar o nó ancestral mais próximo do novo elemento que foi inserido e que desequilibrou a árvore (fator de balanceamento igual a -2 ou +2). Assim, se na inserção de um elemento provocar o desbalanceamento em mais de um nó, deve-se considerar para o balanceamento da árvore, o nó desbalanceado mais próximo do nó inserido que provocou o desbalanceamento.

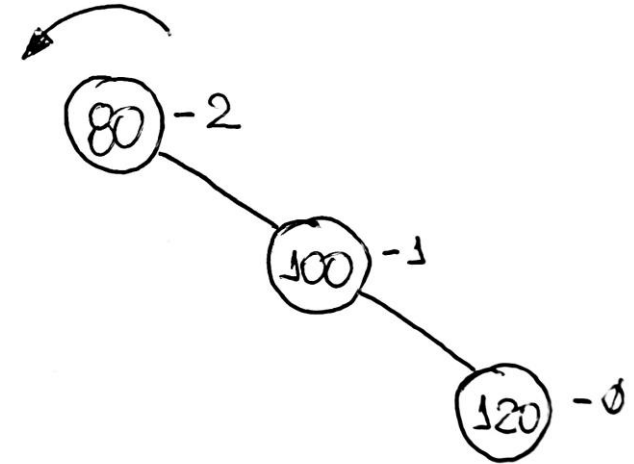
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



a. Inserir 80



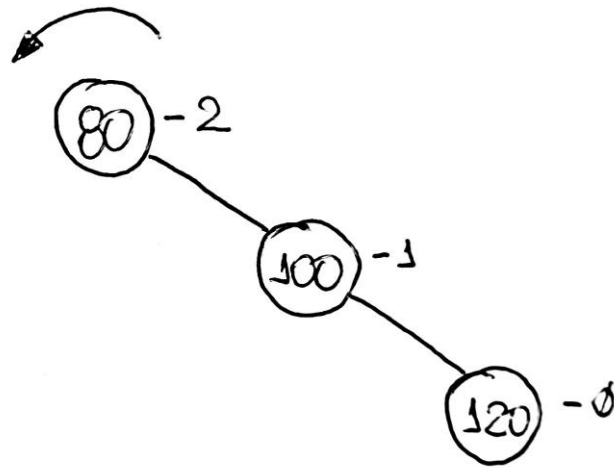
b. Inserir 100



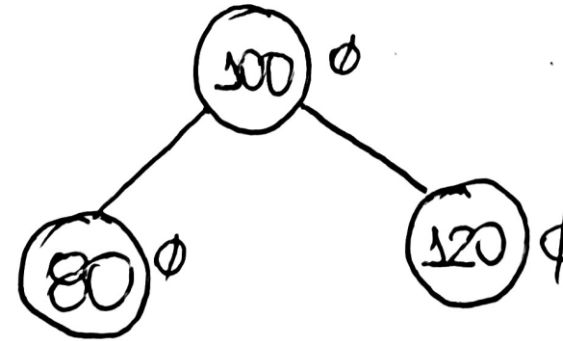
c. Inserir 120

A inserção do nó 120 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 80. O tipo de rotação encontrada nesta situação é DD. Quando o tipo de rotação é DD, deve-se realizar uma simples rotação à esquerda no ancestral mais próximo com balanceamento igual a -2

Exemplo na geração de uma árvore balanceada

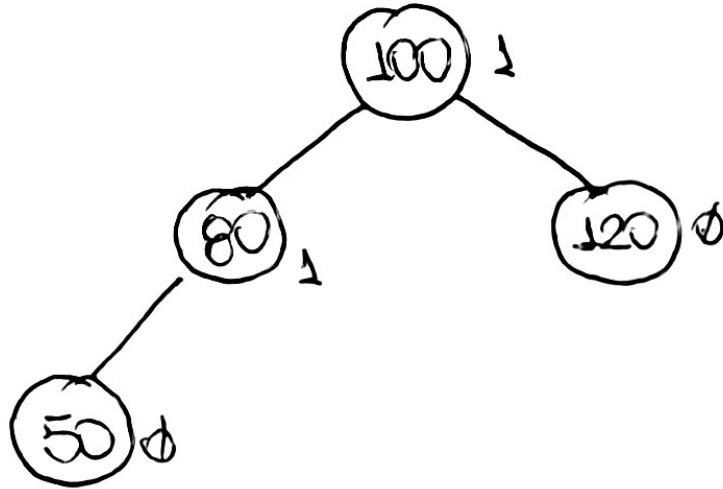


c. Inserir 120

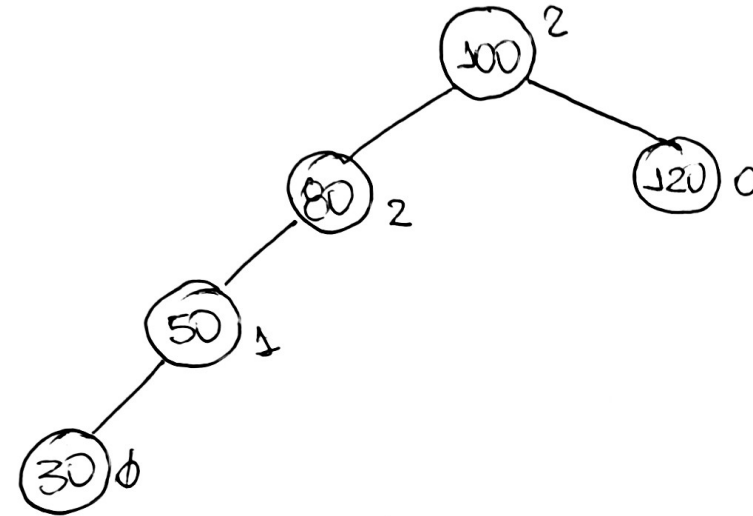


c. Inserir 120

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



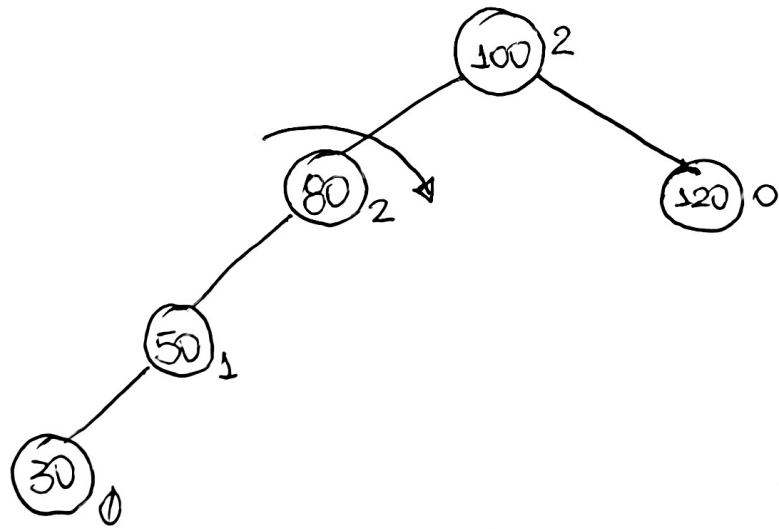
d. Inserir 50



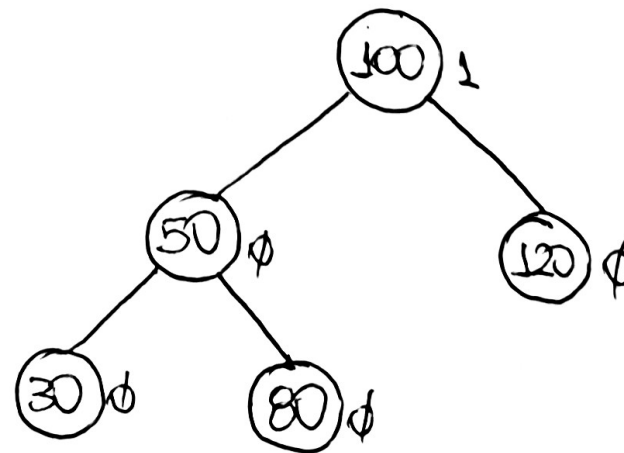
e. Inserir 30

A inserção do nó 30 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 80 (ancestral mais próximo com fator de balanceamento igual a +2). O tipo de rotação encontrada nesta situação é EE. Quando o tipo de rotação é EE, deve-se realizar uma simples rotação à direita no ancestral mais próximo com balanceamento igual a +2

Exemplo na geração de uma árvore balanceada

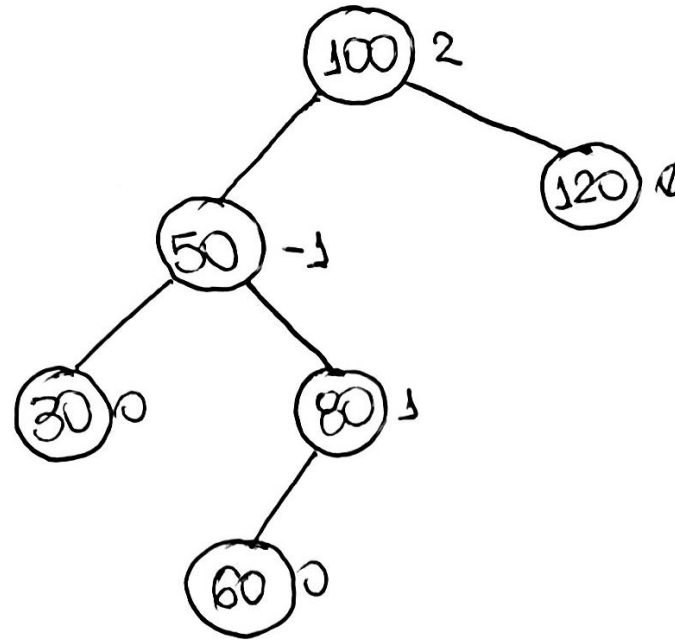


e. Inserir 30



e. Inserir 30

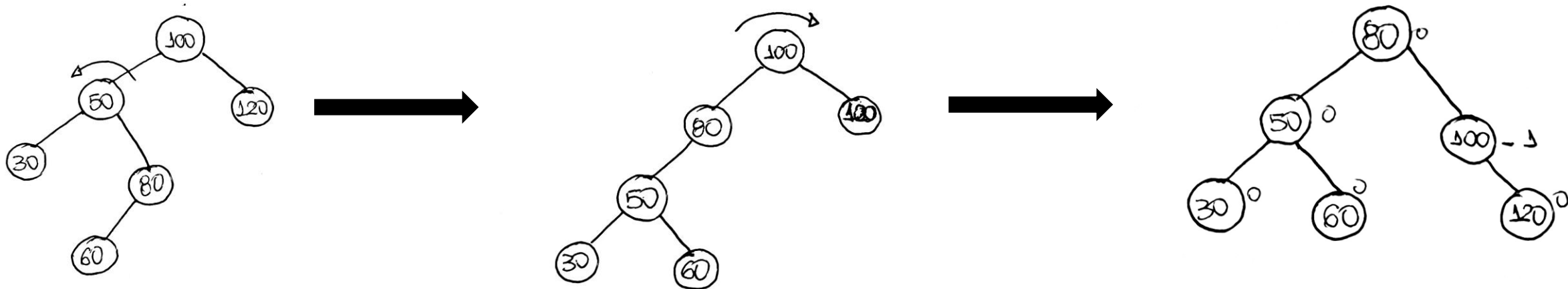
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



f. Inserir 60

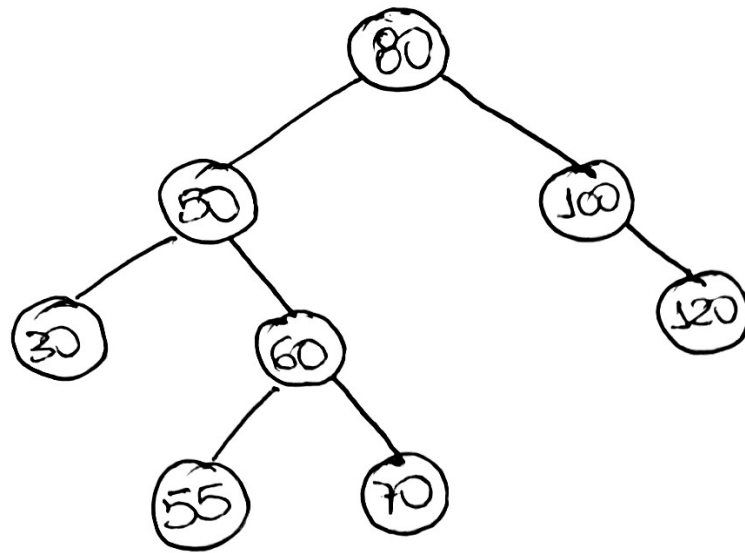
A inserção do nó 60 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 100. O tipo de rotação encontrada nesta situação é ED, pois o nó 60 foi inserido na subárvore direita do filho esquerdo de 100 (nó 50). Quando o tipo de rotação é ED, deve-se realizar uma rotação a esquerda no filho esquerdo do nó desbalanceado e depois fazer uma rotação a direita no nó desbalanceado (100).

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



f. Inserir 60

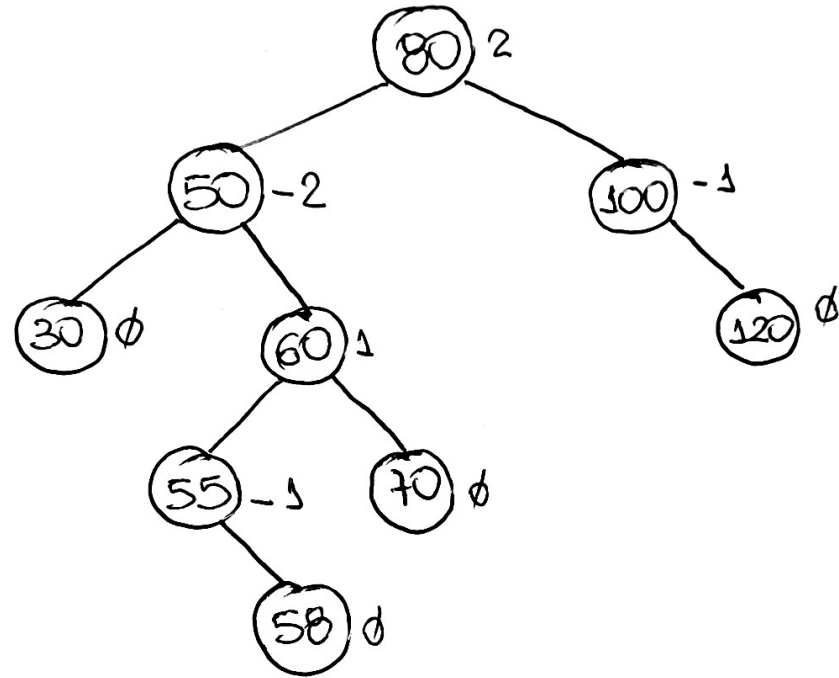
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



g. Inserir 55

h. Inserir 70

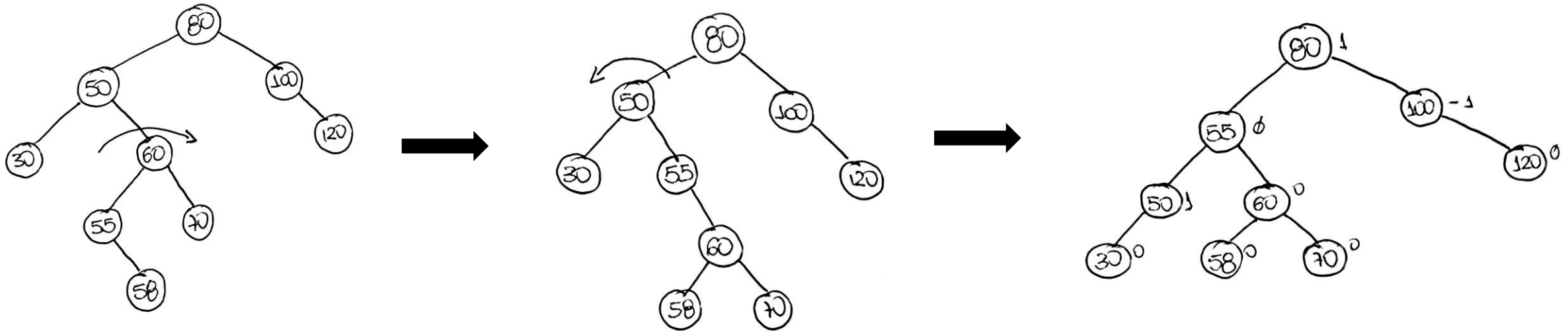
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



i. Inserir 58

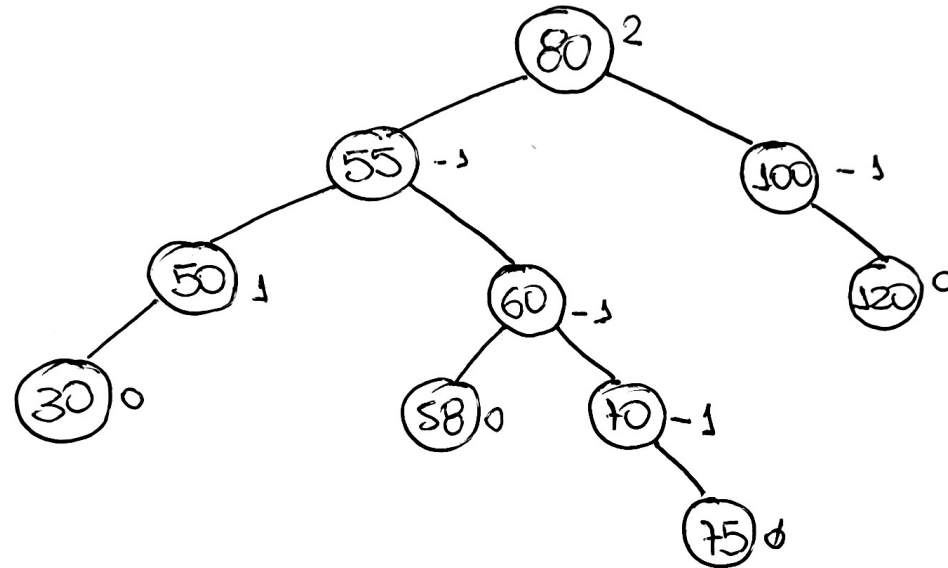
A inserção do nó 58 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 50. O tipo de rotação encontrada nesta situação é DE, pois o nó 58 foi inserido na subárvore esquerda do filho direito de 50 (nó 60). Quando o tipo de rotação é DE, deve-se realizar uma rotação a direita no filho direito do nó desbalanceado e depois fazer uma rotação a esquerda no nó desbalanceado (50).

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



i. Inserir 58

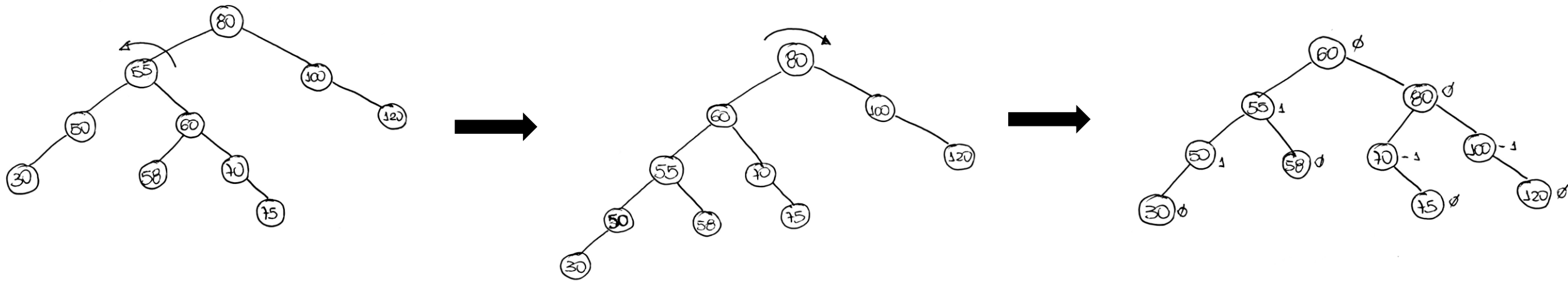
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



j. Inserir 75

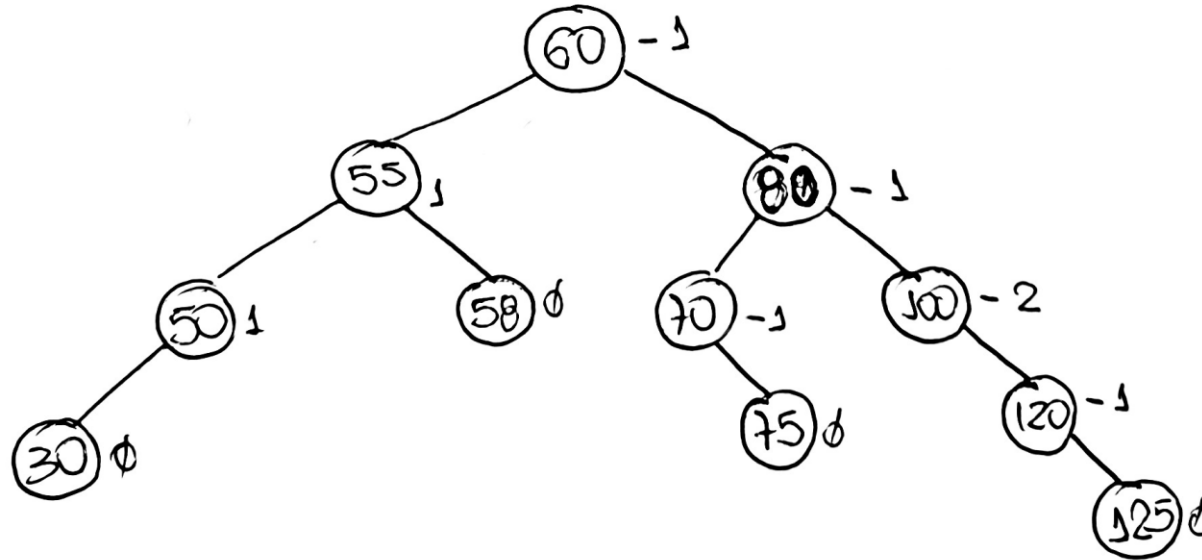
A inserção do nó 75 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 80. O tipo de rotação encontrada nesta situação é ED, pois o nó 75 foi inserido na subárvore direita do filho esquerdo de 80 (nó 55). Quando o tipo de rotação é ED, deve-se realizar uma rotação a esquerda no filho esquerdo do nó desbalanceado e depois fazer uma rotação a direita no nó desbalanceado (80).

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



j. Inserir 75

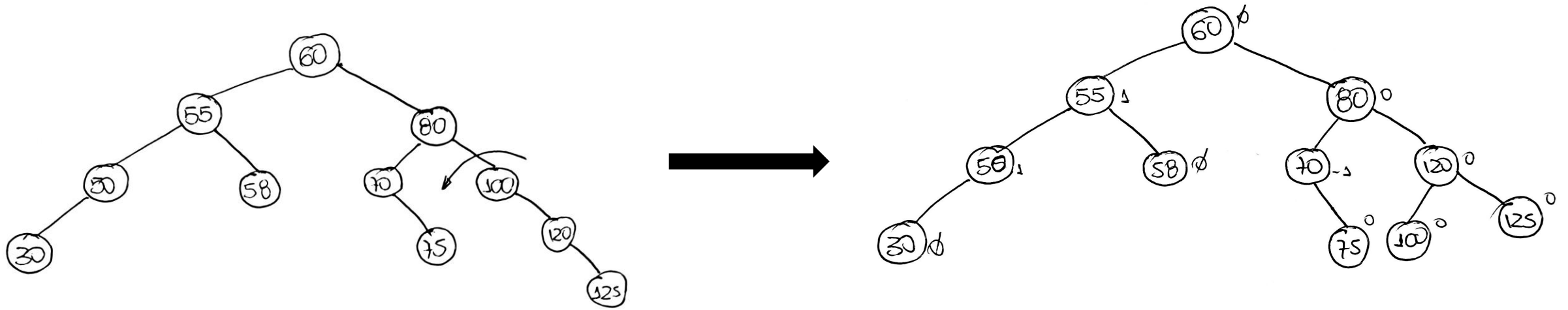
Exemplo na geração de uma árvore balanceada



k. Inserir 125

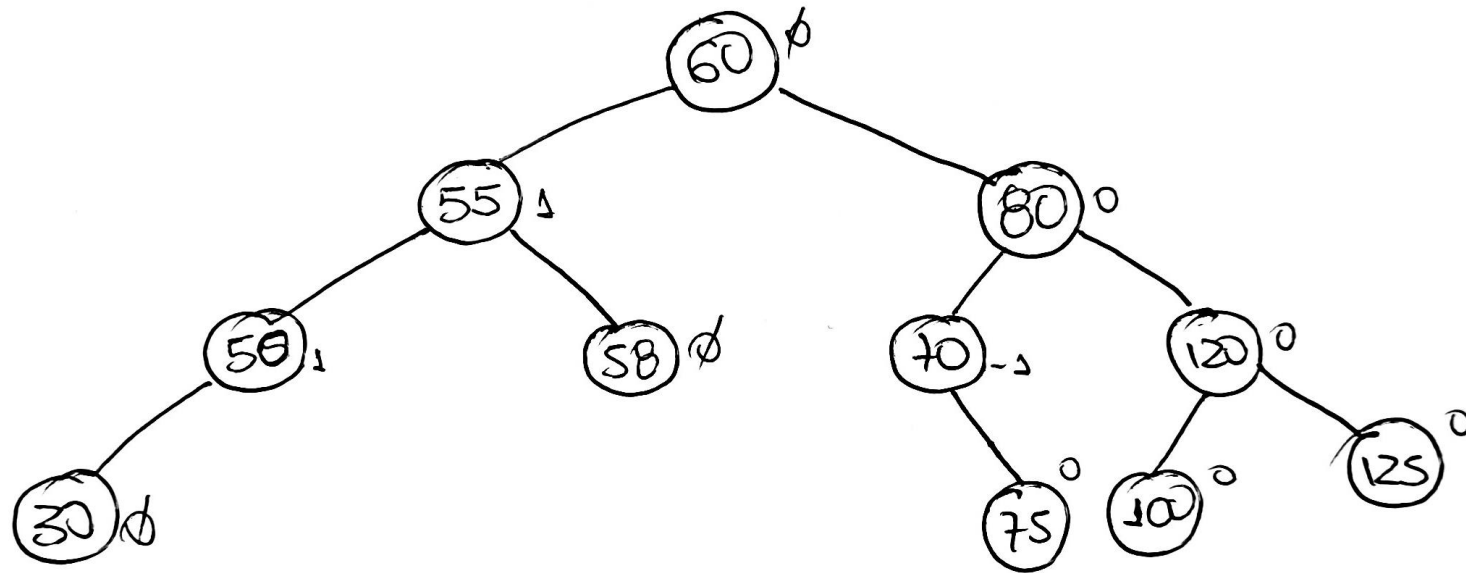
A inserção do nó 125 provocou um desequilíbrio na árvore no nó 100. O tipo de rotação encontrada nesta situação é DD. Quando o tipo de rotação é DD, deve-se realizar uma simples rotação à esquerda no ancestral mais próximo com balanceamento igual a -2

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



k. Inserir 125

Exemplo na geração de uma árvore balanceada



Árvore Balanceada