Fatoração

Professor: Fernando Tosini

Objetivos:

- Compreender o processo e a aplicação dos principais casos de fatoração;

UNO+plus | UNOCHAPECÓ

O que é fatoração?

- Fatorar significa escrever uma expressão em forma de produto.

Onde é aplicada?

- É aplicada com muita frequência na simplificações de expressões, cálculo de raízes de algumas equações e no cálculo de limites.

Principais casos de Fatoração

1- Fator Comum em Evidência

2- Agrupamento

3- Diferença de Dois Quadrados

4- Trinômio Quadrado Perfeito

5- Trinômio do Segundo Grau

6- Diferença de Dois Cubos

7- Soma de Dois Cubos

I- Fator comum em evidência

$$a.x + a.y = a.(x + y)$$

$$\underbrace{a.x + a.y}_{\text{“forma parcelada”}} = \underbrace{a.(x + y)}_{\text{“forma fatorada”}}$$

Exemplos:

Fatore as seguintes expressões:

1) $4x^3 - 6x^2y = 2x^2.(2x - 3y)$

2) $6a^3b^5 + 15a^2b^7c^3 = 3a^2b^5.(2a + 5b^2c^3)$

3) $25a^5y^4 - 75a^4y^5 + 100a^3y^6 = 25a^3y^4 \cdot (a^2 - 3ay + 4y^2)$

UNO plus | UNOCHAPECÓ

II- Agrupamento

$\underbrace{a.x + a.y} + \underbrace{b.x + b.y}$ *"forma parcelada"*

$\underbrace{a.(x + y) + b.(x + y)}$

$(x + y).(a + b)$ *"forma fatorada"*

UNO+plus | UNOCHAPECÓ

Exemplos:

Fatore as seguintes expressões:

1) $\underbrace{2xy - 12x} + \underbrace{3by - 18b}$

$= 2x(y - 6) + 3b(y - 6)$

$= (y - 6)(2x + 3b)$

2) $\underbrace{6x^2b + 42x^2} - \underbrace{y^2b - 7y^2}$

$= 6x^2(b + 7) - y^2(b + 7)$

$= (b + 7)(6x^2 - y^2)$

3) $\underbrace{a^3b + a^2} + \underbrace{5ab^3 + 5b^2}$

$= a^2(ab + 1) + 5b^2(ab + 1)$

$= (ab + 1)(a^2 + 5b^2)$

4) $\underbrace{2xy - 4x} + \underbrace{3xy - 6x} + \underbrace{4xy - 8x}$

$= 2x(y - 2) + 3x(y - 2) + 4x(y - 2)$

$= (y - 2)(2x + 3x + 4x)$

$= (y - 2)\,9x$

1) Encontre todas as raízes da equação

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Solução: Agrupando os termos.

$$\underbrace{x^5 - 3x^4}\ \underbrace{-5x^3 + 15x^2}\ \underbrace{+4x - 12} = 0$$

$$x^4(x-3) - 5x^2(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)\cdot\left(x^4 - 5x^2 + 4\right) = 0$$

Pela propriedade do produto nulo, temos:

$x - 3 = 0$ *ou* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x_1 = 3$ *fazendo* $x^2 = t$

$$\underbrace{1}_{a}t^2 \underbrace{-5}_{b}t + \underbrace{4}_{c} = 0$$

Aplicando bhaskara, temos:

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{matrix} t_2 = 4 \\ t_3 = 1 \end{matrix}$$

Como $x^2 = t$, *então:*

- *Para* $t_2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 2$
- *Para* $t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{4,5} = \pm 1$

Logo, $S = \{\pm 1, \pm 2, 3\}$

III- Diferença de dois quadrados

$$(a + b).(a - b) = a^2 \cancel{- a.b} \cancel{+ b.a} - b^2$$

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{"forma parcelada"}} = \underbrace{(a + b).(a - b)}_{\text{"forma fatorada"}}$$

UNO plus | UNOCHAPECÓ

Exemplos: Fatore as seguintes expressões:

1) $x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$

2) $4x^6 - 1 = (2x^3 + 1).(2x^3 - 1)$

3) $a^{10} - b^4 = (a^5 + b^2).(a^5 - b^2)$

4) $x^4 - 3 = (x^2 + \sqrt{3}).(x^2 - \sqrt{3}) = (x^2 + \sqrt{3})(x + \sqrt[4]{3}).(x - \sqrt[4]{3})$

UNO plus | UNOCHAPECÓ

IV- Trinômio quadrado perfeito

$$\underbrace{a^2 + 2.a.b + b^2}_{\text{“forma parcelada”}} = \underbrace{(a+b)^2}_{\text{“forma fatorada”}}$$

$$\underbrace{a^2 - 2.a.b + b^2}_{\text{“forma parcelada”}} = \underbrace{(a-b)^2}_{\text{“forma fatorada”}}$$

Exemplos: Fatore as seguintes expressões:

1) $x^2 \quad - \quad 6x \quad + \quad 9$

$\sqrt{x^2} \qquad \sqrt{9}$

$x \qquad 3$

$2 . \quad .$

$6x$

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{“forma parcelada”}} = \underbrace{(x - 3)^2}_{\text{“forma fatorada”}}$$

Exemplos:

Fatore as seguintes expressões:

a) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a+3b)^2$

b) $16x^2 + 8x + 1 = (4x+1)^2$

c) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - y^2)^2$

UNO+plus | UNOCHAPECÓ

V- Trinômio do segundo grau

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{"forma parcelada"}} = \underbrace{\boxed{a} . (\boxed{x} - \boxed{x_1}) . (\boxed{x} - \boxed{x_2})}_{\text{"forma fatorada"}}$$

Exemplos: Fatore as seguintes expressões:

1) $5x^2 - 17.x + 6 = \boxed{5} . (\boxed{x} - \boxed{3}) . (\boxed{x} - \boxed{2/5})$

raízes: {3 , 2/5}

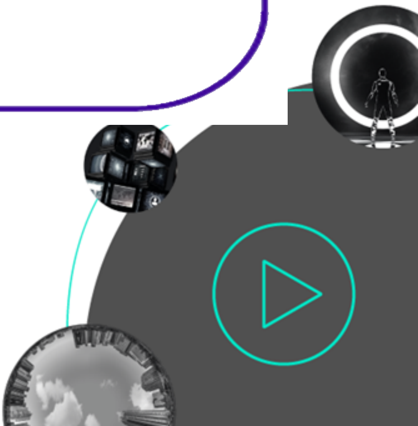
UNO+plus | UNOCHAPECÓ

2) $x^2 + 9x + 14 = \boxed{1} \cdot (\boxed{x} - \boxed{2}) \cdot (\boxed{x} - \boxed{7})$

raízes: $\{2 \ , \ 7\}$

3) $x^2 - 10x + 25 = \boxed{1} \cdot (\boxed{x} - \boxed{5}) \cdot (\boxed{x} - \boxed{5}) = (\boxed{x} - \boxed{5})^2$

raízes: $\{5 \ , \ 5\}$



VI- Diferença de dois cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b).(a^2 + a.b + b^2)$$

VII- Soma de dois cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b).(a^2 - a.b + b^2)$$

Exemplos: Fatore as seguintes expressões:

a) $x^3 - y^3 = (x - y)\cdot(x^2 + xy + y^2)$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\sqrt[3]{x^3}$ $\quad$ $\sqrt[3]{y^3}$

x $\quad$ y

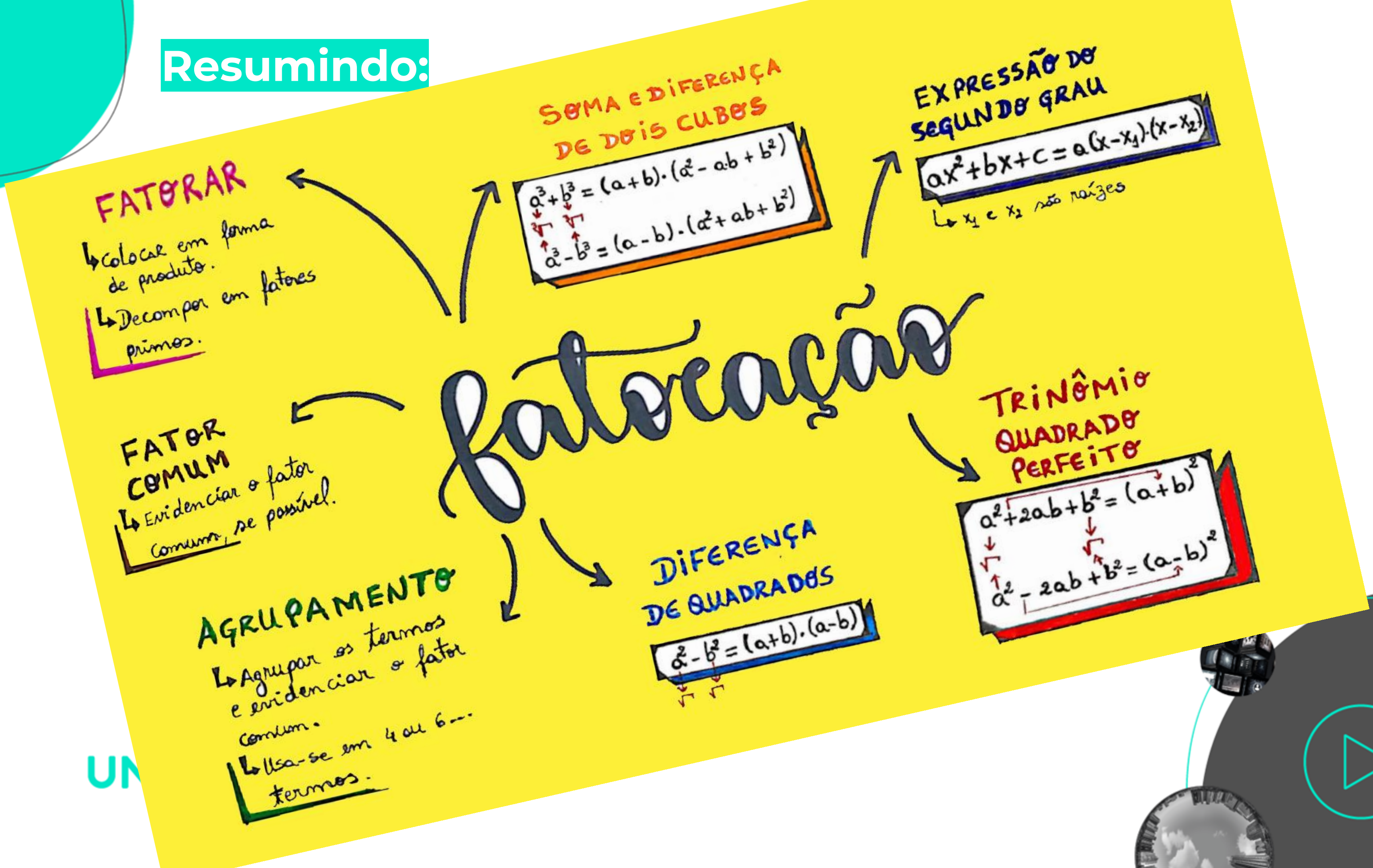
b) $x^6 + 64 = (x^2 + 4)\cdot(x^4 - 4x^2 + 16)$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\sqrt[3]{x^6}$ $\quad$ $\sqrt[3]{64}$

x^2 $\quad$ 4

Resumindo:



fatoração
FATORAR
Colocar em forma de produto.
Decompor em fatores primos.
SOMA E DIFERENÇA DE DOIS CUBOS
$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$
EXPRESSÃO DO SEGUNDO GRAU
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
x_1 e x_2 são raízes
FATOR COMUM
Evidenciar o fator comum, se possível.
AGRUPAMENTO
Agrupar os termos e evidenciar o fator comum.
Usa-se em 4 ou 6... termos.
DIFERENÇA DE QUADRADOS
$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$
TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Exercícios resolvidos

1) Simplifique as expressões:

a) $$\frac{ax+ay}{ax+bx+ay+by}$$

Fatorando, temos:

- $ax + ay = a(x+y)$
- $\underbrace{ax+bx}+\underbrace{ay+by}$
  $= x\cdot(a+b) + y(a+b)$
  $= (a+b)\cdot(x+y)$

$$\frac{ax+ay}{ax+bx+ay+by} = \frac{a\cdot\cancel{(x+y)}}{(a+b)\cdot\cancel{(x+y)}} = \frac{a}{a+b}$$

b) $$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$$

Fatorando, temos:

- $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)\cdot(x^2 - y^2)$
  $= (x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

- $\underbrace{x^3 - x^2y}\ + \underbrace{xy^2 - y^3}$
  $= x^2\cdot(x - y) + y^2(x - y)$
  $= (x - y)\cdot(x^2 + y^2)$

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \frac{\cancel{(x^2+y^2)}\cdot(x+y)\cdot\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x-y)}\cdot\cancel{(x^2+y^2)}} = (x+y)$$

2) Se $p^3 + m^3 = 72$ e $p + m = 6$, Calcule o valor de pm?

Solução: Como $\underbrace{p^3+m^3}_{\text{FATORANDO}} = 72$ e $p + m = 6$

$(p+m)^2 = 6^2$

$p^2 + 2pm + m^2 = 36$

$p^2 + m^2 = 36 - 2pm$ //

$(p+m)\cdot(p^2 - pm + m^2) = 72$

$(p+m)\cdot(p^2+m^2 - pm) = 72$

$6 \cdot (36 - 2pm - pm) = 72$

$36 - 3pm = 72/6$

$36 - 3pm = 12$

$3pm = 36 - 12 \rightarrow 3pm = 24$

$pm = 8$

UNO plus | UNOCHAPECÓ

Exercícios

1) Fatore:

(a) $2x+2$ (b) x^2-1 (c) ax^3+bx^2+ax+b (d) $3a+6ab$ (e) $xyz+7z$

(f) $xyz+abc$ (g) $3a+9$ (h) x^2-25 (i) $2x^3+3x^2+4x+6$

(j) x^2+6x+9 (k) x^4-1 (l) $4x^2-4x+1$ (m) $7x+14x^2$

(n) $2x^2-5x^2$ (o) $3x^2ay+2ax+3xyb+2b$ (p) a^2+ab-a

(q) x^2-16 (r) x^2-2x+1 (s) $a^3-3a^2-4a+12$

(t) $12xyz+14xyde+6yz$ (u) $9x^2+12x+4$ (v) a^2+ab

(w) x^2-6x+9 (x) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ (y) $a^2b^2-6ab^2+9b^2$

(z) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ α) x^3-y^3 β) x^6+729

Respostas:

(a) $2 \cdot (x+1)$

(b) $(x+1) \cdot (x-1)$

(c) $(ax+b) \cdot (x^2+1)$

(d) $3a \cdot (1+6b)$

(e) $z \cdot (xy+7)$

(f) Não há como fatorar

(g) $3 \cdot (a+3)$

(h) $(x+5) \cdot (x-5)$

(i) $(2x+3) \cdot (x^2+2)$

(j) $(x+3)^2$

(k) $(x^2+1) \cdot (x^2-1)$

(l) $(2x-1)^2$

(m) $7x \cdot (1+2x)$

(n) $-3x^2$

(o) $(ax+b) \cdot (3xy+2)$

(p) Não há como fatorar

(q) $(x+4) \cdot (x-4)$

(r) $(x-1)^2$

(s) $(a^2-4) \cdot (a-3)$

(t) $2y \cdot (6xz+7xde+3z)$

(u) $(3x+2)^2$

(v) $a \cdot (a+b)$

(w) $(x-3)^2$

(x) $(x+y)^2$

(y) $(ab-3b)^2$

(z) $(x+y)^3$

$\alpha)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$\beta)(x^2+9)(x^4-9x^2+81)$

UNO plus | UNOCHAPECÓ

2) Simplifique as expressões:

		Respostas
a)	$\dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$	$\dfrac{x - 4}{x + 4}$
b)	$\dfrac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^3 - a^2 - a + 1}$	$\dfrac{a+1}{a-1}$
c)	$\dfrac{x^3 - 8}{x^2 + 2x + 4}$	$x - 2$
d)	$\dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$	$\dfrac{x}{x - 1}$

3) Fatore as equações e determine suas raízes no universo dos reais.

Respostas

a) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$ $S = \{0, -1, -3\}$

b) $x^5 + 9x^3 - x^2 - 9 = 0$ $S = \{1\}$

c) $(3x^2 - 11) \cdot (2x - 1) - (2x - 1) = 0$ $S = \{1/2, \pm 2\}$

UNO+plus | UNOCHAPECÓ

4) Fatore as equações e determine suas raízes no universo dos complexos

Respostas

a) $x^3 + 64 = 0$ $\qquad S = \{-4,\ 2 \pm 2\sqrt{3}\}$

b) $x^4 - 16 = 0$ $\qquad S = \{\pm 2,\ \pm 2i\}$

c) $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 32 = 0$ $\qquad S = \{-4,\ 2,\ -1 \pm i\}$