DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

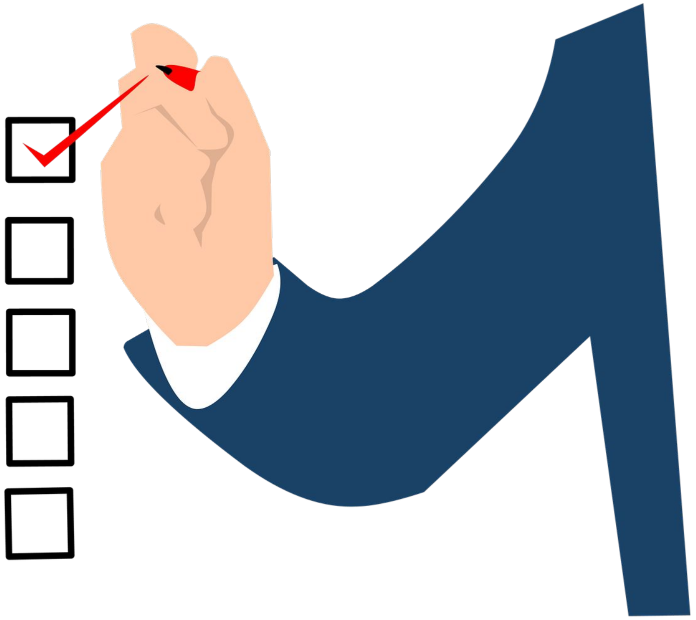
Professor:

Dr. Lucas Marques da Cunha

lucas.marques@unir.br

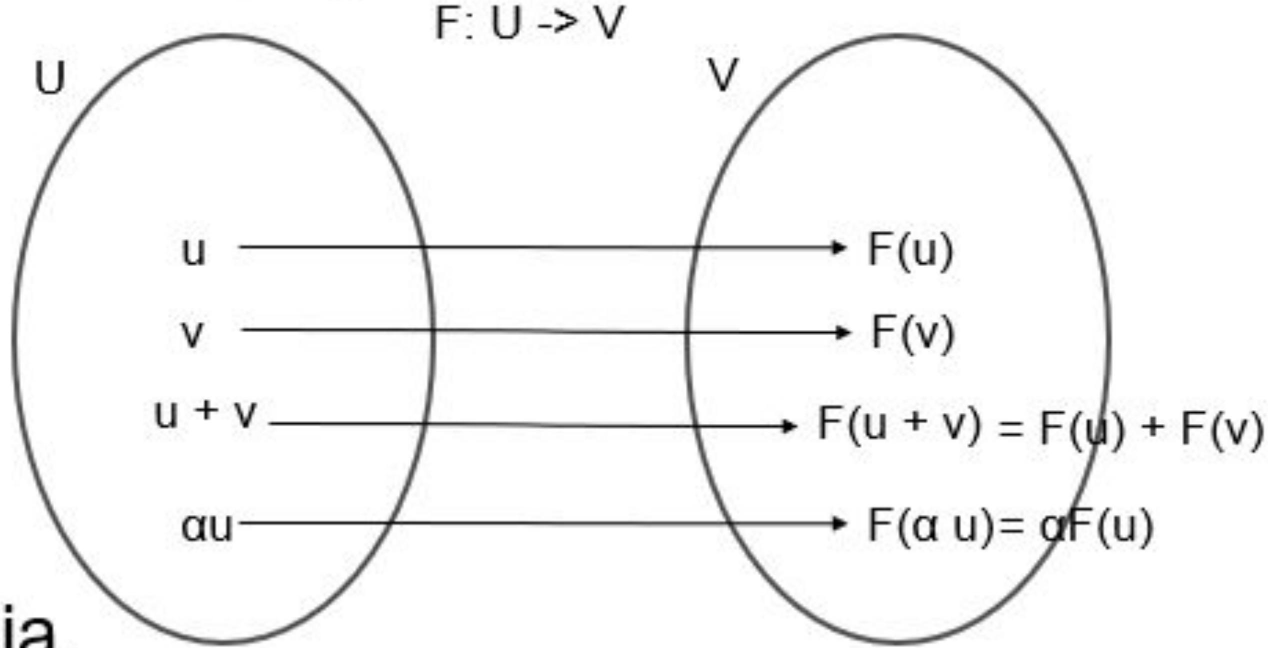
Roteiro

1. Transformações Lineares
2. Transformações no plano
3. Conceitos e Teoremas
    a. Núcleo
    b. Imagem
    c. Funções injetoras
    d. Funções Sobrejetoras
4. Exercícios práticos



Transformações Lineares

- Vamos supor que tenhamos dois conjuntos U e V que são espaços vetoriais



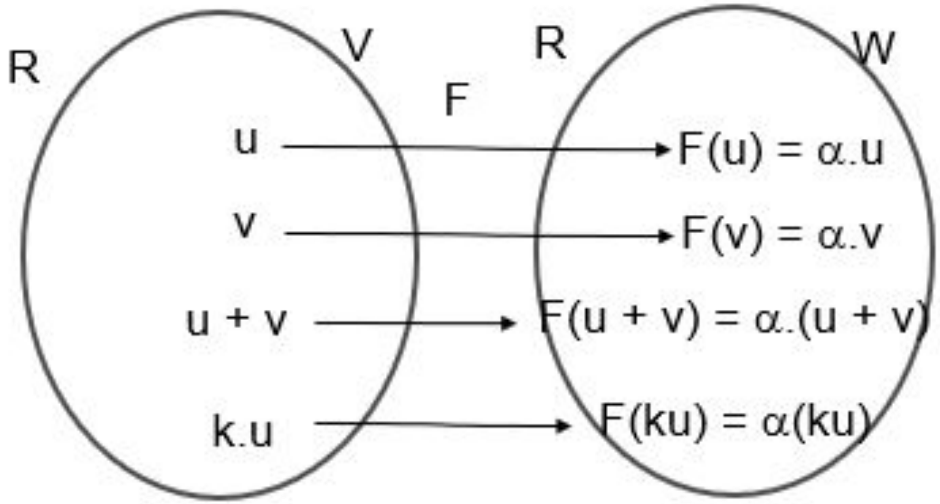
- Ou seja,
  - $F(u + v) = F(u) + F(v)$
  - $F(\alpha u) = \alpha F(u)$

Transformações Lineares

- Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis
- Muitos problemas podem ser representados por tais funções
- **Definição:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma função de V em W, $F: V \to W$ que satisfaz as condições:
  - i) Quaisquer que sejam **u** e **v** em V: $F(\mathbf{u}+\mathbf{v})=F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v})$
  - ii) Quaisquer que sejam $k \in R$ e $\mathbf{v} \in V$: $F(k.\mathbf{v}) = k.F(\mathbf{v})$
    - Princípio da Superposição

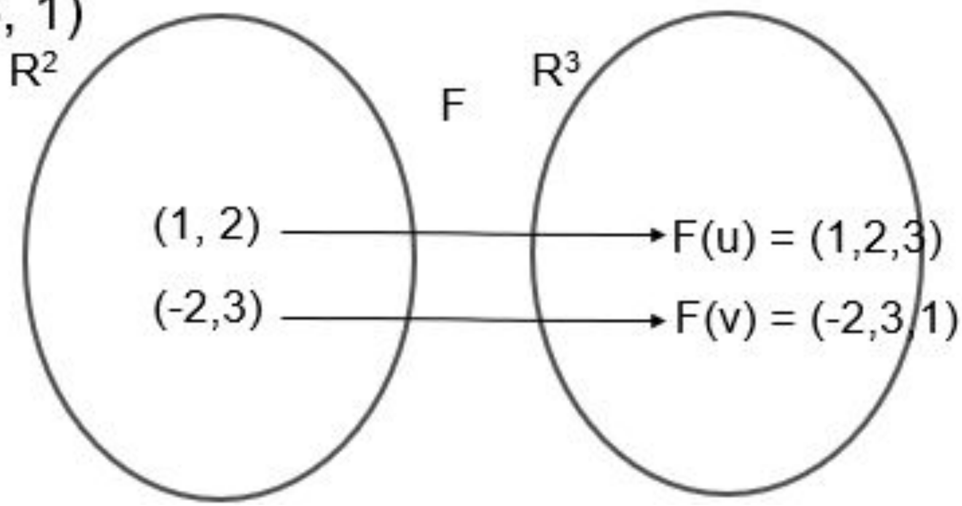
Guardem esse nome!!

- **Exemplo 1:**
- $V = R$ e $W = R$
- F: R $\rightarrow$ R definida por $\mathbf{u} \rightarrow \alpha.\mathbf{u}$ ou $F(\mathbf{u}) = \alpha.\mathbf{u}$
- Solução:
  - $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.\mathbf{u} + \alpha.\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
  - $F(k.\mathbf{u}) = \alpha.k.\mathbf{u} = k.\alpha.\mathbf{u} = k.F(\mathbf{u})$
  - Logo, F é linear!



- **Exemplo 2:**
- F: $R^2 \rightarrow R^3$
- $(x,y) \rightarrow (x, y, x + y)$ ou $F(x, y) = (x, y, x + y)$

- Solução:
  - Dados u e v $\in R^2$, sejam u = (1,2) e v = (-2,3),
  - F(u) = F(1, 2) = (1, 2, 3)
  - F(v) = F(-2,3) = (-2,3, 1)



Transformações Lineares

- **Exemplo 2 (cont.):**
- Solução: Lembrando $(x,y) \rightarrow (x, y, x + y)$ ou $F(x, y) = (x, y, x + y)$
  - $F(u) = F(1, 2) = (1, 2, 3)$
  - $F(v) = F(-2,3) = (-2,3, 1)$
  - Verificando se $F(u+v) = F(u) + F(v)$
  - $u+v = (1,2)+(-2,3) = (-1,5) \rightarrow F(u+v) = F(-1,5) = (-1,5,4)$
  - $F(u) + F(v) = F(1,2) + F(-2,3) = (1, 2, 3) + (-2, 3, 1) = (-1, 5, 4)$
  - Então, $F(u+v) = F(u) + F(v) \rightarrow (-1,5,4) = (1, 2, 3) + (-2,3, 1)$
  - Verificando se $F(k.u) = k.F(u)$
  - Se $k = -3$, então
  - $F(ku) = F(-3.(1,2)) = F(-3,-6) = (-3,-6,-9)$
  - $kF(u) = -3F(1,2) = -3.(1,2,3) = (-3,-6,-9)$
  - Então, $F(k.u) = k.F(u) \rightarrow (-3,-6,9) = -3.(1,2,3)$

Logo, F é Linear

Transformações Lineares

- **Exemplo 3:**
- F: R $\rightarrow$ R definida por $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^2$ ou $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$

- Solução:
  - $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + 2.\mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{v}^2 \neq \mathbf{u}^2+\mathbf{v}^2 = F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v})$

  - Logo, F não é linear!

Transformações Lineares

- **Exemplo 4:**
- F: $R^2 \to R^3$
- $(x,y) \to (2x, 0, x + y)$ ou $F(x, y) = (2x, 0, x + y)$
- Solução:
  - Dados u e v $\in R^2$, sejam $\mathbf{u}=(x_1,y_1)$ e $\mathbf{v}=(x_2,y_2)$, $x_i,y_i \in R$
  - Verificando $F(u+v) = F(u) + F(v)$
  - $F(u+v)=F((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$

  $= (2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$
  - $F(u) + F(v) = F(x_1,y_1) + F(x_2,y_2)$

  $= (2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2)$

  $= (2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$
  - Verificando $F(k.u) = k.F(u)$
  - $F(k.\mathbf{u})=F(k.(x_1, y_1))=F(k.x_1, k.y_1) = (2k.x_1, 0, k.x_1+k.y_1) =$

  $= k(2x_1, 0, x_1 + y_1) = k.F(\mathbf{u})$ Logo, F é linear!

Transformações Lineares

- **OBS 1:** Da definição de transformação linear, temos que a transformação do vetor nulo leva ao mesmo vetor nulo: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- Isso ajuda a detectar transformações não lineares: se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, implica uma transformação não linear
- No entanto, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ não é condição suficiente para que T seja linear (ex.: $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$)

Transformações Lineares

- **OBS 2:** Uma transformação para ser linear não implica que ela é derivada de uma função linear
- Por exemplo: $(x, y) \rightarrow (x + 5, y)$ não é transf. Linear, embora o mapeamento seja linear

Verifique que essa transf. não é linear!!

Transformações Lineares

- **Exemplo:** $V = R^n$ e $W = R^m$
- Seja A uma matriz mxn. Definimos:
- $L_A: R^n \rightarrow R^m$ por $\mathbf{v} \rightarrow A.\mathbf{v}$
- onde **v** é tomado como vetor coluna: $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$
- $L_A(\mathbf{v}) = A_{mxn}.\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$

Transformação do R^n para o R^m

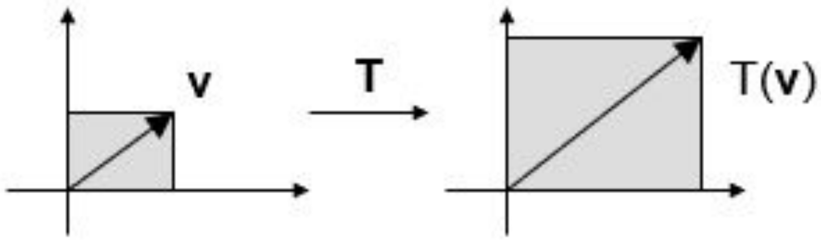
- **Exemplo:**
- Das propriedades de operações de matrizes:
  - $L_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.\mathbf{u} + A.\mathbf{v} = L_A(\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v})$
  - $L_A(k.\mathbf{u}) = A.(k.\mathbf{u}) = k.(A.\mathbf{u}) = k.L_A(\mathbf{u})$
  - Logo, L_A é linear

Transformações Lineares

- **Exemplo:**
- Suponha A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $L_A: R^2 \rightarrow R^3$
- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$
- Então, $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$ – Exemplo 4

Transformações do Plano no Plano

- 1) Expansão (ou contração) uniforme:
  - ➢ T: $R^2 \to R^2$, $\alpha \in R$, $\mathbf{v} \to \alpha.\mathbf{v}$
  - ➢ Por exemplo, T: $R^2 \to R^2$, $\alpha = 2$, $\mathbf{v} \to 2.\mathbf{v}$
  - ➢ $T(x, y) = 2(x, y)$



  - ➢ Na forma matricial:

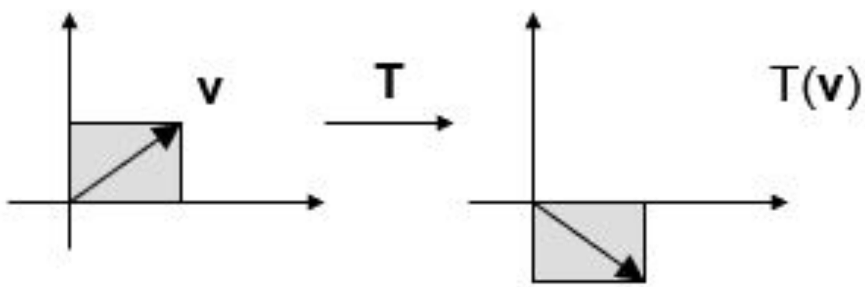
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  - ➢ Nesse caso, temos uma expansão.
    - Se $0 < \alpha < 1$, teríamos uma contração

Transformações do Plano no Plano

- 2) Reflexão em Torno do Eixo X:
  - T: $R^2 \rightarrow R^2$, $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
  - Na forma matricial:

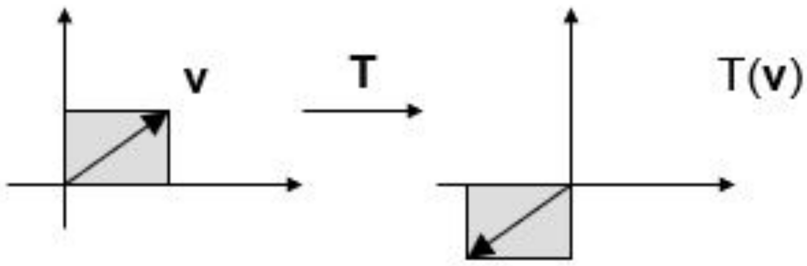
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

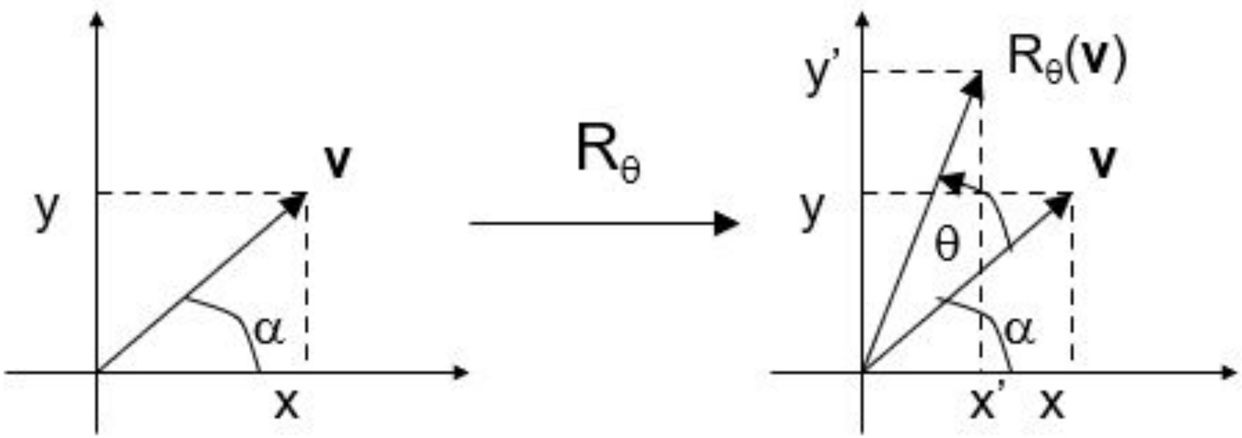
- 3) Reflexão na Origem:
  - $T: R^2 \rightarrow R^2$, $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ou $T(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
  - Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)



$x' = r.\cos(\alpha + \theta) = r.\cos\alpha.\cos\theta - r.\text{sen}\alpha.\text{sen}\theta$, onde $r = |\mathbf{v}|$

Mas, $r.\cos\alpha = x$ e $r.\text{sen}\alpha = y$

$\Rightarrow x' = x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta$

Analogamente: $y' = y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta$

Assim: $R_\theta(x,y) = (x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta,\ y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta)$

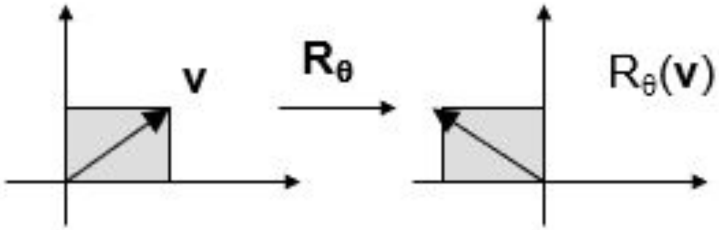
Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x.\cos\theta - y.\mathrm{sen}\theta \\ y.\cos\theta + x.\mathrm{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Caso $\theta = \pi/2$ ($\cos\theta = 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = 1$), temos:

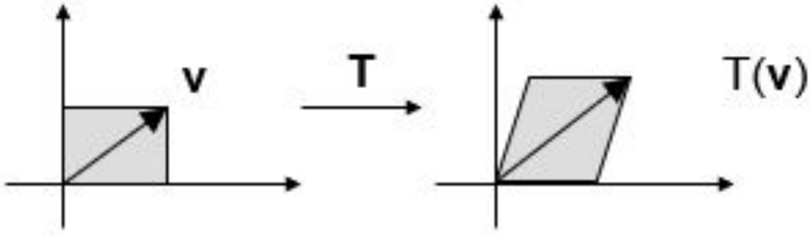
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 5) Cisalhamento Horizontal:
  - $T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \in R$
  - Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 6) Translação:
  - $T(x, y) = (x + a, y + b)$, $a, b \in R$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Observe que, a menos que $a = b = 0$, essa transformação não é linear.

Lembre-se que se $T(\mathbf{0}) \neq 0$, T não é linear

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Dados dois espaços vetoriais *V* e *W* e uma base *V*, $\{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$, sejam $\mathbf{w_1}, ..., \mathbf{w_n}$ elementos arbitrários de *W*. Então existe uma única transformação linear $T{:}V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v_1})=\mathbf{w_1}, ..., T(\mathbf{v_n})=\mathbf{w_n}$. Esta transformação é dada por:
  - Se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + ... + a_n\mathbf{v_n}$
  - $T(\mathbf{v}) = T(a_1\mathbf{v_1}) + ... + T(a_n\mathbf{v_n})$
  - $T(\mathbf{v}) = a_1T(\mathbf{v_1}) + ... + a_nT(\mathbf{v_n}) = a_1\mathbf{w_1} + ... + a_n\mathbf{w_n}$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?
- Solução:
  - $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{e_2} = (0, 1)$
  - $\mathbf{w_1} = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w_2} = (0, 0, 1)$
  - $\mathbf{v} = (x, y)$
  - $\mathbf{v} = (x, y) = a.(1, 0) + b.(0, 1) \rightarrow x = a$ e $y = b$
  - $\mathbf{v} = (x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1)$
  - $T(\mathbf{v}) = T(x.(1, 0)) + T(y.(0, 1))$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e_1}) + y.T(\mathbf{e_2}) = x.(2, -1, 0) + y.(0, 0, 1)$
  - $T(\mathbf{v}) = (2x, -x, y)$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
- Solução 1:
  - $T(1, 1) = (3, 2, 1)$
  - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

  Não formam base canônica!!

  - Mas:
  - $T(0,-2)=(0,1,0) \Rightarrow -2.T(0,1)=(0,1,0) \Rightarrow T(0,1)=(0,-½,0)$
  - $T(1,1)=T(1,0) + T(0,1) = (3,2,1)$
  - $\Rightarrow T(1,0) + (0,-½,0) = (3, 2,1) \Rightarrow T(1,0) = (3,5/2,1)$
  - Logo: $T(1,0) = (3, 5/2, 1)$ e $T(0,1) = (0, -½, 0)$
    - Agora formam uma base canônica!

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:**
- Solução 1:
  - $\mathbf{v} = (x, y)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e}_1) + y.T(\mathbf{e}_2) = x.(3, 5/2, 1) + y.(0, -½, 0)$
  - $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - ½y, x)$
  - OBS: Verifique... para $T(1,1)$ e $T(0,-2)$
    - $T(1,1) = (3, 5/2 - ½, 1) = (3, 2, 1)$
    - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

OK!!!

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
- Solução 2:
  - $T(1, 1) = (3, 2, 1)$
  - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

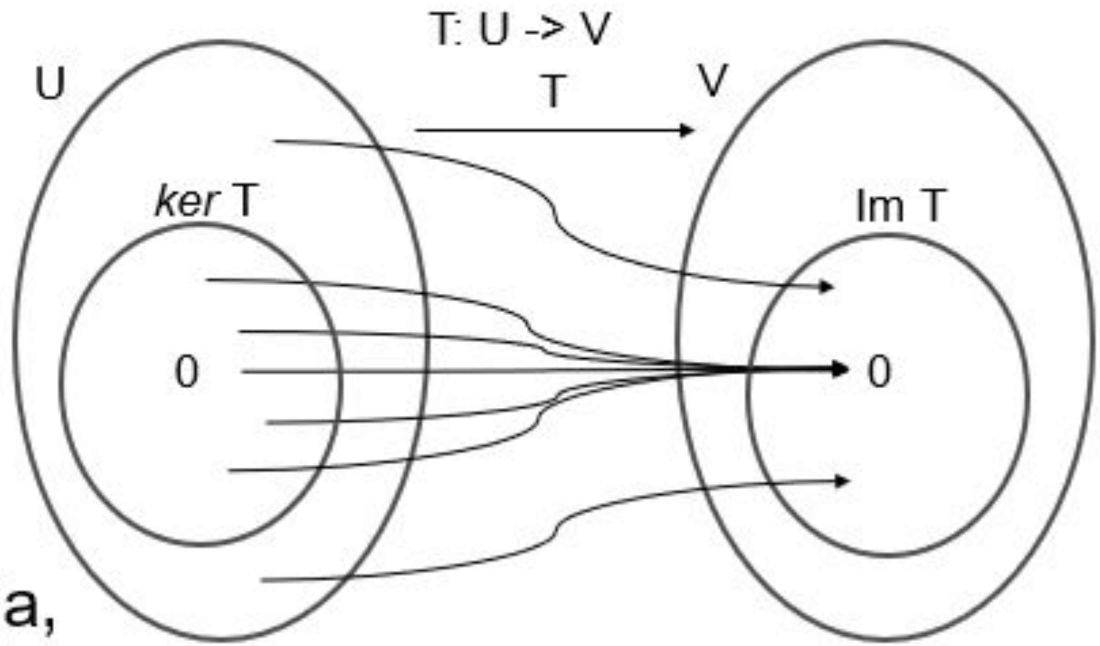
    Não formam base canônica!!
  - $\mathbf{v} = (x, y) = a.(1, 1) + b.(0, -2)$
  - Logo: $x = a$ e $y = a - 2b \Rightarrow b = (x - y)/2$
  - Assim: $\mathbf{v} = x.(1, 1) + [(x - y)/2].(0, -2)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.T(1,1) + [(x - y)/2].T(0, -2)$
  - $T(\mathbf{v}) = x.(3, 2, 1) + [(x - y)/2].(0, 1, 0)$
  - $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - ½y, x)$ (como antes)

Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Seja T:$V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ tal que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz T($\mathbf{v}$)=$\mathbf{w}$. Ou seja:
  - $\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W \,;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$
- **Definição:** Seja T:$V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que T($\mathbf{v}$)=$\mathbf{0}$ é chamado de núcleo de T, sendo denotado por *ker* T (*ker* = *kernel*). Isto é:
  - $\ker T = \{\mathbf{v} \in V \,;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$

Conceitos e Teoremas

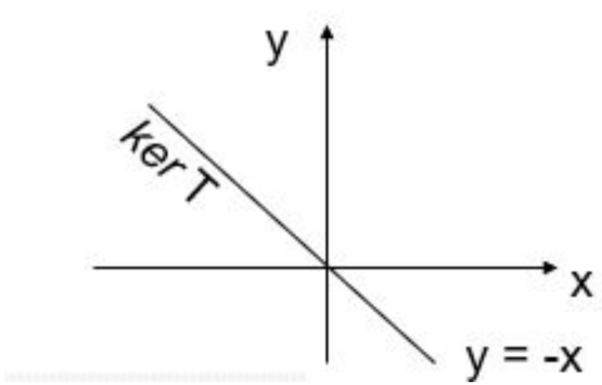
- Vamos supor que tenhamos dois conjuntos U e V que são espaços vetoriais

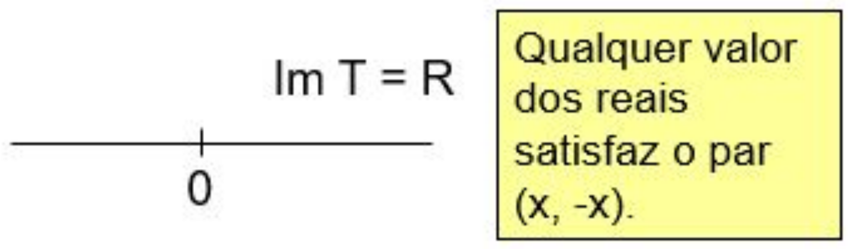


- Ou seja,
  - ➢ *ker* T é um subespaço vetorial de U
    - *ker* T ≠ Ø, pois vetor nulo de U E *ker* T, já que T(0) = 0
    - Im T ≠ Ø, pois vetor nulo de V E Im T, já que o vetor nulo de V é a imagem do vetor nulo de U

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:** $T:R^2 \rightarrow R$, $(x, y) \rightarrow x + y$
- Neste caso $(T(x,y)=0)$, *ker* T = $\{(x,y) \in R^2;\ x + y = 0\}$
- Isto é, *ker* T é a reta $y = -x$
- Podemos dizer ainda que *ker* T = $\{(x, -x);\ x \in R\} = \{x.(1,-1);\ x \in R\} = [(1,-1)]$ (conj. gerado pelo vetor (1,-1))
- Im T = R, pois dado $\mathbf{w} \in R$, $\mathbf{w} = T(\mathbf{w}, 0)$





Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 2:** Seja $T:R^3 \rightarrow R^3$, dada por
  - $T(x, y,z) = (x, 2y, 0)$
- Então a imagem de T:
  - $Im(T) = \{(x, 2y, 0): x, y \in R\}$

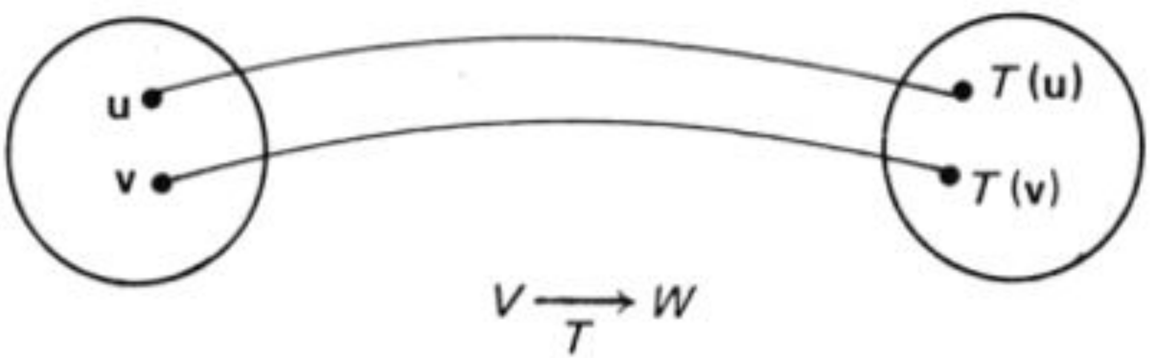
  $= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0), x,y \in R\}$

  $= <(1, 0, 0), (0, 2, 0)>$
  - $\dim Im(T) = 2$
- O núcleo de T é dado por:
  - $\ker T = \{(x,y,z): T(x,y,z) = (0,0,0)\} \Rightarrow (x, 2y, 0)=(0, 0, 0)$

  $\{(0, 0, z): z \in R\} = \{z(0,0,1): z \in R\} \Rightarrow [(0, 0, 1)]$
  - $\dim \ker T = 1$

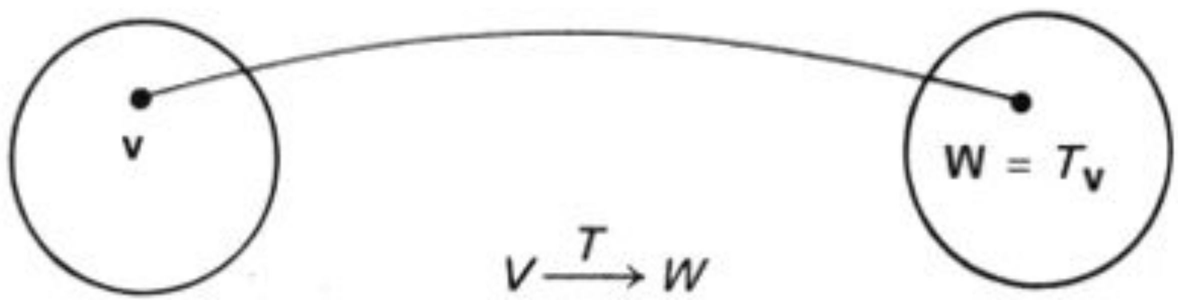
Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. T:$V \to W$, dizemos que T é **injetora** se, dados $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in V$ com T(**u**) = T(**v**), tivermos **u** = **v** ou, de forma equivalente, T é injetora se dados $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$
- Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas



Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. T:$V \rightarrow W$, dizemos que T é **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W, ou seja T(V) = W
- Em outras palavras, T é sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{w}$
  - Para todo **w** deve existir um **v**, tal que T(**v**) = **w**

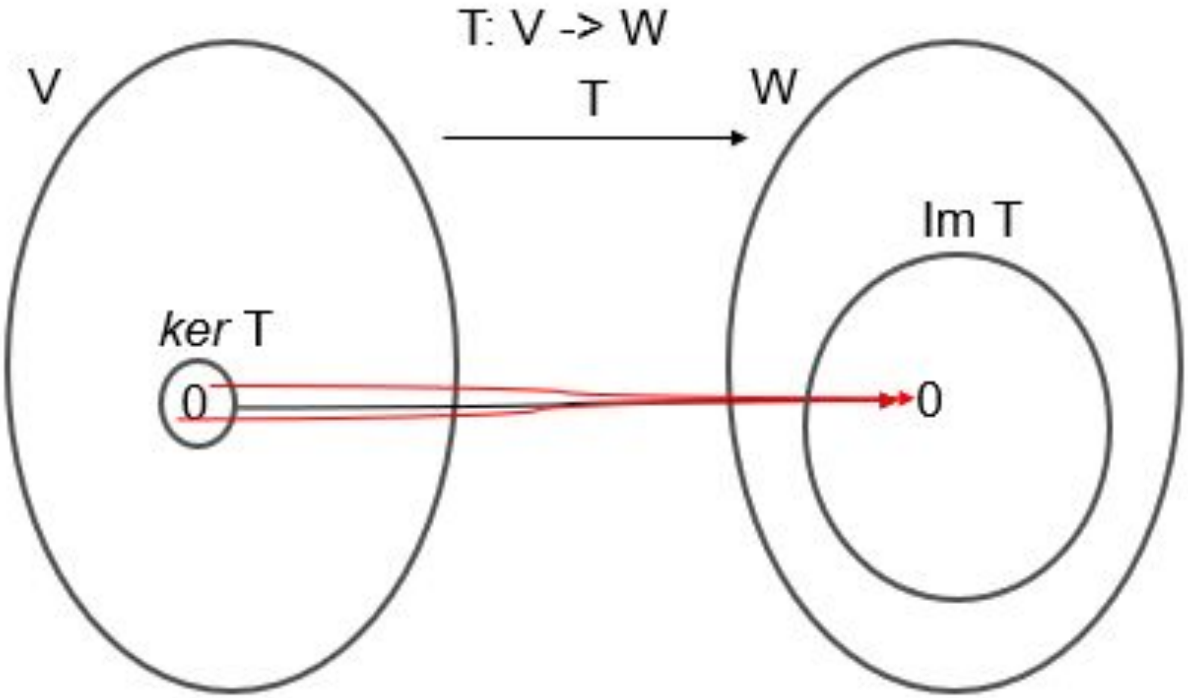


- **Exemplo:** $T: R \to R^2$, $x \to (x, 0)$
- Dados $x, y \in R$, suponhamos que $T(x)=T(y)$
- Então $(x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y$
- T é injetora? T é sobrejetora?
- T é injetora.
- Mas T não é sobrejetora uma vez que $Im(T) \neq R^2$

Aplicações Lineares e Matrizes

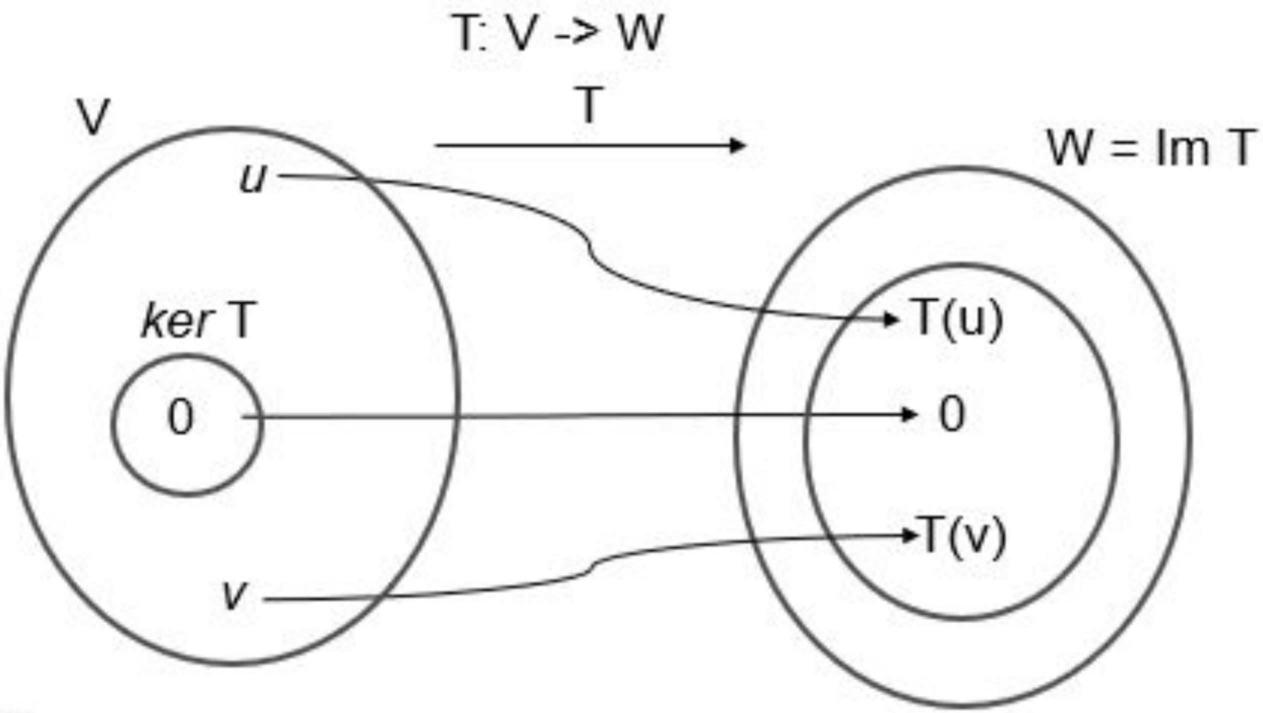
- **Teorema:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então *ker* T={**0**}, se e somente se, T é injetora
- **Teorema:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear, então: dim *ker* T + dim Im T = dim V
- **Corolário 1:** Se dim V = dim W, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora
- **Corolário 2:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base
  - Base de V em base de W

- **Teorema:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então *ker* T={**0**}, se e somente se, T é injetora



Aplicações Lineares e Matrizes

- **Corolário 1:** Se dim V = dim W, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora
- **Corolário 2:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base
  - Base de V em base de W



Aplicações Lineares e Matrizes

- Quando uma transformação linear $T:V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dá-se o nome de **isomorfismo**
  - Tais espaços vetoriais são ditos Isomorfos

Aplicações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 1:** Seja $T:R^3 \to R^3$ dada por:
  - $T(x,y,z) = (x - 2y, z, x + y)$
- Vamos mostrar que T é um isomorfismo e calcular sua inversa T^{-1}:
- Solução:
  - Se pudermos mostrar que T é injetora, teremos que T é um isomorfismo pelo corolário 1 anterior
  - Isso equivale a mostrar que *ker* T = {(0, 0, 0)}
  - Mas *ker* T ={(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)} e T(x,y,z) = (0,0,0), se e somente se: (x – 2y, z, x + y) = (0,0,0):

- **Exemplo 1:**
  - $(x - 2y, z, x + y) = (0,0,0)$
  - Isso implica:

$$\left.\begin{array}{ll} x - 2y = 0 & x = 2y \\ z = 0 & z = 0 \\ x + y = 0 & x = -y \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z = 0 \ (\ker T = \{0\})$$

  - Portanto, T é isomorfismo
  - Tomando a base canônica de R^3, sua imagem pela transformação é:
    - $\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\} = \{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$
    - que ainda é uma base de R^3
  - Calculemos a transformação inversa de T

- **Exemplo 1:**
  - Como:

    Inversa

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ T(1,0,0) = (1,0,1) & \Rightarrow T^{-1}(1,0,1)=(1,0,0) \\ \bullet\ T(0,1,0) = (-2,0,1) & \Rightarrow T^{-1}(-2,0,1)=(0,1,0) \\ \bullet\ T(0,0,1) = (0,1,0) & \Rightarrow T^{-1}(0,1,0)=(0,0,1) \end{array}\right\} T^{-1}(x,y,z)=?$$

  - Vamos escrever (x,y,z) em relação à base {(1,0,1), (-2, 0,1), (0,1,0)}
    - $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(-2, 0, 1) + c(0, 1, 0)$

$\Rightarrow x = a - 2b, \qquad y = c, \qquad z = a + b$

$\Rightarrow a = (x + 2z)/3, \qquad b = (z - x)/3, \qquad c = y$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{x + 2z}{3}\right)(1, 0, 1) + \left(\frac{z - x}{3}\right)(-2,0,1) + y(0,1,0)$$

- **Exemplo 1:**
  - Então:
    - $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z)T^{-1}(1, 0, 1) + (z - x)T^{-1}(-2,0,1) + yT^{-1}(0,1,0)$
    - $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z)(1,0,0) + (z - x)(0,1,0) + y(0,0,1)$
    - $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z, z - x, y)$

- **Exemplo 2:**
  - $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
  - $\beta=\{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta'=\{(1,0,0),(0,1,0), (0,0,1)\}$
  - $T_A: R^3 \rightarrow R^2$
  - Encontremos essa transformação linear.
  - Solução: Seja $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow A.x = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  - Então $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z)(1,0) + (2x + 4y - z)(0,1)$
  - $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)$

- **Exemplo 3:**
  - Seja $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$
  - Sejam $\beta=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $\beta'=\{(1,3),(1,4)\}$
  - Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$
  - Calculando T nos elementos da base β temos:
    - $T(1, 1, 1) = (2, 5) = a_{11}.(1, 3)+a_{21}.(1, 4) = 3.(1, 3) -1.(1, 4)$
    - $T(1, 1, 0) = (3, 1) = a_{12}.(1, 3)+a_{22}.(1, 4) = 11.(1, 3) -8.(1, 4)$
    - $T(1, 0, 0) = (2, 3) = a_{13}.(1, 3)+ a_{23}.(1, 4) = 5.(1, 3) -3.(1, 4)$
  - Então: $[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

- **Exemplo 4:**
  - Seja T a transformação anterior (T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)
  - Sejam $\beta=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta'=\{(1,0),(0,1)\}$
  - Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta'}$
  - Calculando T nos elementos da base β temos:
    - $T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2.(1, 0) + 3.(0, 1)$
    - $T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1.(1, 0) - 2.(0, 1)$
    - $T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1.(1, 0) + 4.(0, 1)$
  - Então: $$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Exemplo 5:**
  - Dadas as bases
    - $\beta=\{(1, 1),(0, 1)\}$ de R^2
    - $\beta'=\{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de R^3
  - Encontremos a transformação linear $T:R^2 \rightarrow R^3$ cuja matriz é

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  - Interpretando a matriz temos:
    - Ex: $T(1,1) = a_{11}.(0, 3, 0) + a_{21}.(-1, 0, 0) + a_{31}.(0, 1, 1)$
    - $T(1, 1) = 0.(0, 3, 0) -1.(-1, 0, 0) – 1.(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$
    - $T(0, 1) = 2.(0, 3, 0) + 0.(-1, 0, 0) + 3.(0, 1, 1) = (0, 9, 3)$

- Exemplo 5:
  - Devemos encontrar $T(x, y)$.
  - Para isso escrevemos (x, y) em relação à base β:
    - $(x, y) = a.(1, 1) + b.(0, 1)$
    - $(x, y) = x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)$
  - Aplicando T e usando a linearidade:
    - $T(x, y) = T\{x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)\}$
    - $T(x, y) = x.T(1, 1) + (y - x).T(0, 1)$
    - $T(x, y) = x.(1, -1, -1) + (y - x).(0, 9, 3)$
    - $T(x, y) = (x, 9y - 10x, 3y - 4x)$

Exercícios

1. Seja T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação linear tal que $T(x, y) = x + 2y$.
    a. Encontre T(-6, 3).
    b. Determine o Ker(T).
2. Dada a transformação linear T, encontre Ker(T) e Im(T), T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x+y, y, x)$
3. Dada a transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = x + 2y$.
    a. Verifique se T(x, y) é injetora.
4. Verifique se a transformação T é injetora T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x+y, y, 2x)$
    a. Verifique se T(x, y) é injetora.
    b. Verifique se T(x, y) é sobrejetora.

Dúvidas, sugestões?