Autovalores e Autovetores

6.1 — Autovetor e Autovalor de um Operador Linear

Definição

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é dito um *autovetor* de T se existe um número real λ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

O número real λ acima é denominado *autovalor* de T associado ao autovetor v.

Exemplo 1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.
$T(5, 2) = (30, 12) = 6 \cdot (5, 2)$.
$\therefore$ 6 é um autovalor associado ao autovetor $(5, 2)$ do operador T.

Exemplo 1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$.
$T(5, 2) = (30, 12) = 6 \cdot (5, 2)$.
$\therefore$ 6 é um autovalor associado ao autovetor $(5, 2)$ do operador T.

Exemplo 2

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
$T(x, y, 0) = 1 \cdot (x, y, 0)$.
$\therefore$ qualquer vetor $(x, y, 0)$ é um autovetor de T e seu autovalor associado é 1.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

- O sistema linear homogêno acima possui solução não-nula se, e só se,

$$\det \begin{bmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com

$$T(x, y) = \lambda \cdot (x, y).$$

- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \lambda x \\ cx + dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a - \lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d - \lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

- O sistema linear homogêno acima possui solução não-nula se, e só se,

$$\det \begin{bmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

- Os autovalores de T são as soluções da equação acima, se existirem.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x,y) \neq (0,0)$ tal que $T(x,y) = \lambda \cdot (x,y)$.
- Isto é o mesmo que encontrar $(x,y) \neq (0,0)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & \lambda x \\ cx+dy & = & \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} (a-\lambda)x & + & by & = & 0 \\ cx & + & (d-\lambda)y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.
- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$

- Os autovetores de T associados a λ são as soluções não-nulas do sistema linear homogêneo acima.
  Obs.: Obrigatoriamente há tais soluções pois o λ foi calculado para que isto aconteça.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.
4. Resolva a equação $p(\lambda) = 0$. As raízes desta equação são os autovalores de T.
   Obs.: A equação $p(\lambda) = 0$ é denominada *equação característica* de T.

6.2 — Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores — Resumo

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado *polinômio característico* de T.
4. Resolva a equação $p(\lambda) = 0$. As raízes desta equação são os autovalores de T.
   Obs.: A equação $p(\lambda) = 0$ é denominada *equação característica* de T.
5. Para cada autovalor λ encontrado, resolva o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes é $A - \lambda I$.

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 2

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

Exemplo 1

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 2

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

Exemplo 3

Determine os autovetores e os autovalores de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.

6.3 — Propriedades

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : V \to V$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V \, ; \, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de V denominado *autoespaço* associado a λ.

6.3 — Propriedades

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : V \to V$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V \, ; \, T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de V denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.

6.3 — Propriedades

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : V \to V$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V\,;\; T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de V denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : V \to V$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V\,;\ T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de V denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.
- $u \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Logo, $\alpha u \in S_\lambda$.

6.3 — Propriedades

Teorema

Seja λ um autovalor do operador $T : V \to V$. O conjunto

$$S_\lambda = \{v \in V\,;\; T(v) = \lambda v\}$$

(S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados a λ e o vetor nulo) é um subespaço vetorial de V denominado *autoespaço* associado a λ.

Prova

- $T(0) = 0 = \lambda 0$. Logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$.
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$.
- $u \in S_\lambda, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Logo, $\alpha u \in S_\lambda$.
- Pelo visto acima, S_λ é um subespaço vetorial de V.

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são linearmente independentes.

6.4 — Diagonalização de Operadores

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são linearmente independentes.

Prova

- Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2 e λ_3 distintos.

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são linearmente independentes.

Prova

- Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2 e λ_3 distintos.
- Suponha $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2, 3$.

6.4 — Diagonalização de Operadores

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são linearmente independentes.

Prova

- Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2 e λ_3 distintos.
- Suponha $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2, 3$.
- Tomemos a_i tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0. \tag{1}$$

6.4 — Diagonalização de Operadores

Teorema

Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \to V$ são linearmente independentes.

Prova

- Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2 e λ_3 distintos.
- Suponha $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2, 3$.
- Tomemos a_i tais que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0. \tag{1}$$

- Aplicando T em ambos os lados da equação acima, obtemos, pela linearidade de T, e pela definição de autovetores

$$\begin{aligned} a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + a_3 T(v_3) &= 0 \\ a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + a_3 \lambda_3 v_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Prova — continuação

- Multiplicando ambos os membros da equação (1) por λ_1, obtemos

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 + a_3\lambda_1 v_3 = 0. \tag{3}$$

Prova — continuação

- Multiplicando ambos os membros da equação (1) por λ_1, obtemos

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 + a_3\lambda_1 v_3 = 0. \tag{3}$$

- Subtraindo (3) de (2):

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{4}$$

Prova — continuação

- Multiplicando ambos os membros da equação (1) por λ_1, obtemos

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 + a_3\lambda_1 v_3 = 0. \tag{3}$$

- Subtraindo (3) de (2):

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{4}$$

- Aplicando T em (4), obtemos

$$a_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{5}$$

Prova — continuação

- Multiplicando ambos os membros da equação (1) por λ_1, obtemos

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 + a_3\lambda_1 v_3 = 0. \tag{3}$$

- Subtraindo (3) de (2):

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{4}$$

- Aplicando T em (4), obtemos

$$a_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{5}$$

- Multiplicando ambos os membros de (4) por λ_2, vem:

$$a_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{6}$$

Prova — continuação

- Subtraindo (6) de (5):

$$a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{7}$$

Prova — continuação

- Subtraindo (6) de (5):

$$a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{7}$$

- Como $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, segue que

$$a_3 = 0.$$

Prova — continuação

- Subtraindo (6) de (5):

$$a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{7}$$

- Como $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, segue que

$$a_3 = 0.$$

- Substituindo $a_3 = 0$ em (4), obtemos

$$a_2 = 0.$$

Prova — continuação

- Subtraindo (6) de (5):

$$a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{7}$$

- Como $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, segue que

$$a_3 = 0.$$

- Substituindo $a_3 = 0$ em (4), obtemos

$$a_2 = 0.$$

- Substituindo $a_2 = a_3 = 0$ em (1) vem

$$a_1 = 0.$$

Prova — continuação

- Subtraindo (6) de (5):

$$a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0. \tag{7}$$

- Como $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, segue que

$$a_3 = 0.$$

- Substituindo $a_3 = 0$ em (4), obtemos

$$a_2 = 0.$$

- Substituindo $a_2 = a_3 = 0$ em (1) vem

$$a_1 = 0.$$

- Logo, v_1, v_2, v_3 são LI.

Corolário

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são autovalores distintos e $v_i \in S_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$ se, e só se, $v_i = 0$ para todo i.

Corolário

Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são autovalores distintos e $v_i \in S_{\lambda_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$ se, e só se, $v_i = 0$ para todo i.

Prova

Se fosse possível ter $v_1 + \ldots + v_n = 0$ sem que todos fossem nulos, seria uma contradição com o Teorema anterior.

Corolário

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, então, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto LI.

Corolário

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, então, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto LI.

Prova

- Faremos a demonstração para dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com bases de seus respectivos autoespaços $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w\}$.
- Tomemos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + bw = 0$.

Corolário

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, então, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto LI.

Prova

- Faremos a demonstração para dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com bases de seus respectivos autoespaços $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w\}$.
- Tomemos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + bw = 0$.
- Como cada S_{λ_i} é um subespaço, $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in S_{\lambda_1}$ e $bw \in S_{\lambda_2}$.

Corolário

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, então, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto LI.

Prova

- Faremos a demonstração para dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com bases de seus respectivos autoespaços $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w\}$.
- Tomemos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + bw = 0$.
- Como cada S_{λ_i} é um subespaço, $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in S_{\lambda_1}$ e $bw \in S_{\lambda_2}$.
- Pelo Corolário anterior $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ e $bw = 0$.

Corolário

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, então, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto LI.

Prova

- Faremos a demonstração para dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com bases de seus respectivos autoespaços $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w\}$.
- Tomemos $a_1 v_1 + a_2 v_2 + bw = 0$.
- Como cada S_{λ_i} é um subespaço, $a_1 v_1 + a_2 v_2 \in S_{\lambda_1}$ e $bw \in S_{\lambda_2}$.
- Pelo Corolário anterior $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ e $bw = 0$.
- Como cada $\mathcal{B}_i$ é LI segue, $a_1 = a_2 = 0$ e $b = 0$.

6.4 — Diagonalização de Operadores

Teorema

Seja $T : V \to V$ um operador linear, com $\dim V = n$. Se $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados ao autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de T, e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ possui n vetores, então $\mathcal{B}$ é uma base de V.

6.4 — Diagonalização de Operadores

Definição

Se $T : V \to V$ possui uma base formada por autovetores de T, dizemos que T é um operador *diagonalizável*.

6.4 — Diagonalização de Operadores

Definição

Se $T : V \to V$ possui uma base formada por autovetores de T, dizemos que T é um operador *diagonalizável*.

Definição

Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador diagonalizável e $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T. Então,

(i) $D = [T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal.

(ii) A matriz $P = [I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base canônica, satisfaz $D = P^{-1}[T]P$. Dizemos que a matrix P *diagonaliza* $[T]$.

Exemplo 1

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to R^2$ dada por $T(x, y) = (-5x + 2y, 2x - 2y)$.
a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso, afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T e determine a matriz de T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável determine a matriz diagonalizadora P de T.

Exemplo 2

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ dada por
$T(x, y) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$.
a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso, afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz de T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável determine a matriz diagonalizadora P de T.

Exemplo 3

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ dada por $T(x, y) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.
a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso, afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz de T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável determine a matriz diagonalizadora P de T.