



Árvores-B (Parte IIIa)

SCC-203 – Algoritmos e Estruturas de Dados II

Graça Nunes



Propriedades das árvores-B

- Relembrando...

- Para uma árvore-B de ordem **m**

1. cada página tem, no máximo, **m** descendentes
2. cada página, exceto a raiz e as folhas, tem no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil$ descendentes
3. a raiz tem, no mínimo, dois descendentes - a menos que seja uma folha
4. todas as folhas estão no mesmo nível
5. uma página não folha que possui **k** descendentes contém **k-1** chaves
6. uma página folha contém, no mínimo $\lceil \mathbf{m/2} \rceil - 1$ e, no máximo, **m-1** chaves



Eliminação, Redistribuição e Concatenação

- O *split* garante a *manutenção das propriedades da árvore-B* durante a inserção
- Essas **propriedades precisam ser mantidas**, também, **durante a eliminação** de chaves
- Há vários casos para se analisar (árvore de ordem **m**)



Eliminação: Caso 1

- **Caso 1:** eliminação de uma chave em uma página folha, sendo que o número mínimo de chaves na página é respeitado: $\lceil m/2 \rceil - 1$
- **Solução:** chave é retirada e os registros internos à página são reorganizados

Eliminação: Caso 1

$$m = 6$$

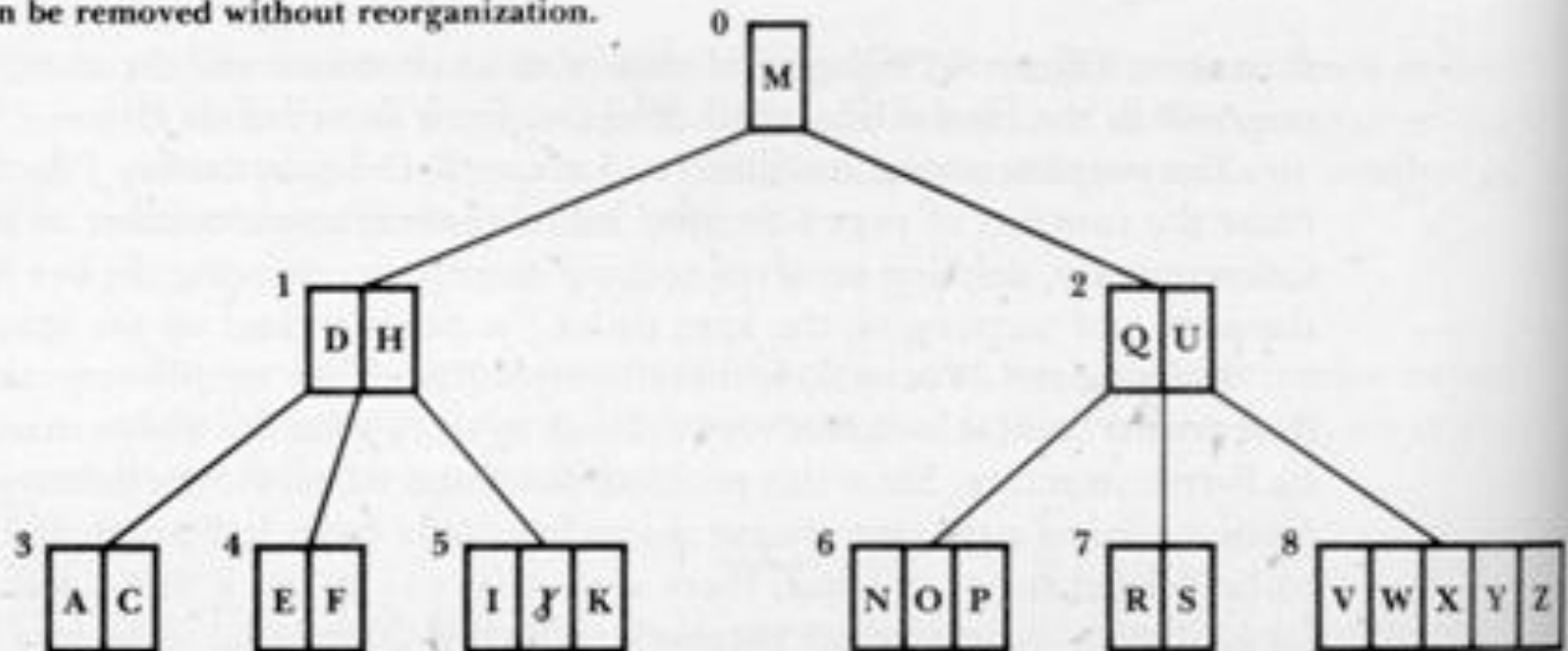
$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 1: No action.

Delete *J* from page 5. Since page 5 has more than the minimum number of keys, *J* can be removed without reorganization.





Eliminação: Caso 2

- **Caso 2:** eliminação de uma **chave que não está em uma folha**
- **Solução:** **sempre eliminamos de páginas folha***
 - Se uma chave deve ser eliminada de uma página que não é folha, trocamos a chave com sua sucessora imediata (ou com a predecessora imediata) que está numa folha
 - A seguir, eliminamos a chave da folha

* Análogo a AVL

Eliminação: Caso 2

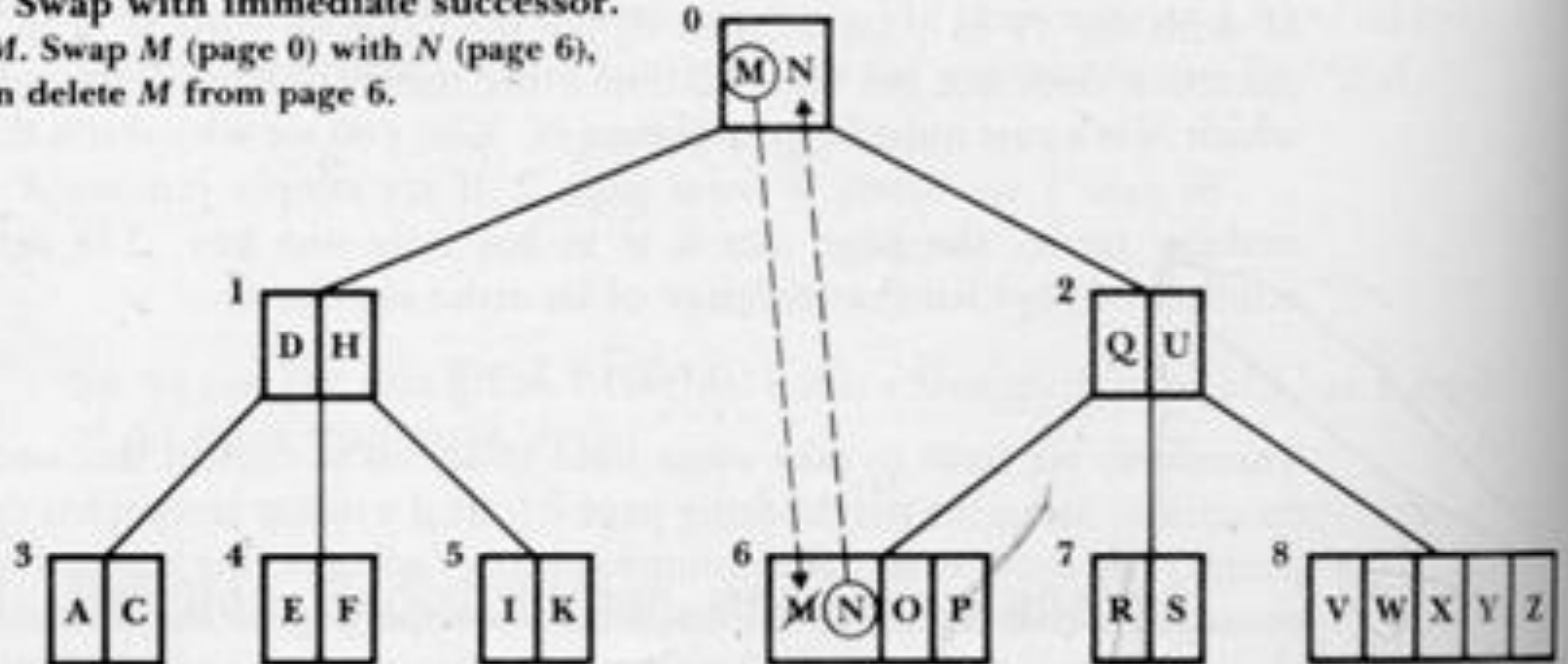
$$m = 6$$

$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 2: Swap with immediate successor.
Delete *M*. Swap *M* (page 0) with *N* (page 6),
and then delete *M* from page 6.





Eliminação: Caso 3

- **Caso 3:** eliminação causa *underflow* na página (folha)
- **Solução:** redistribuição
 - Procura-se uma página irmã (mesmo pai) que contenha mais chaves do que o mínimo: se existir, redistribuem-se as chaves entre essas páginas
 - A redistribuição pode provocar uma alteração na chave separadora que está no nó pai

Eliminação: Caso 3

$$m = 6$$

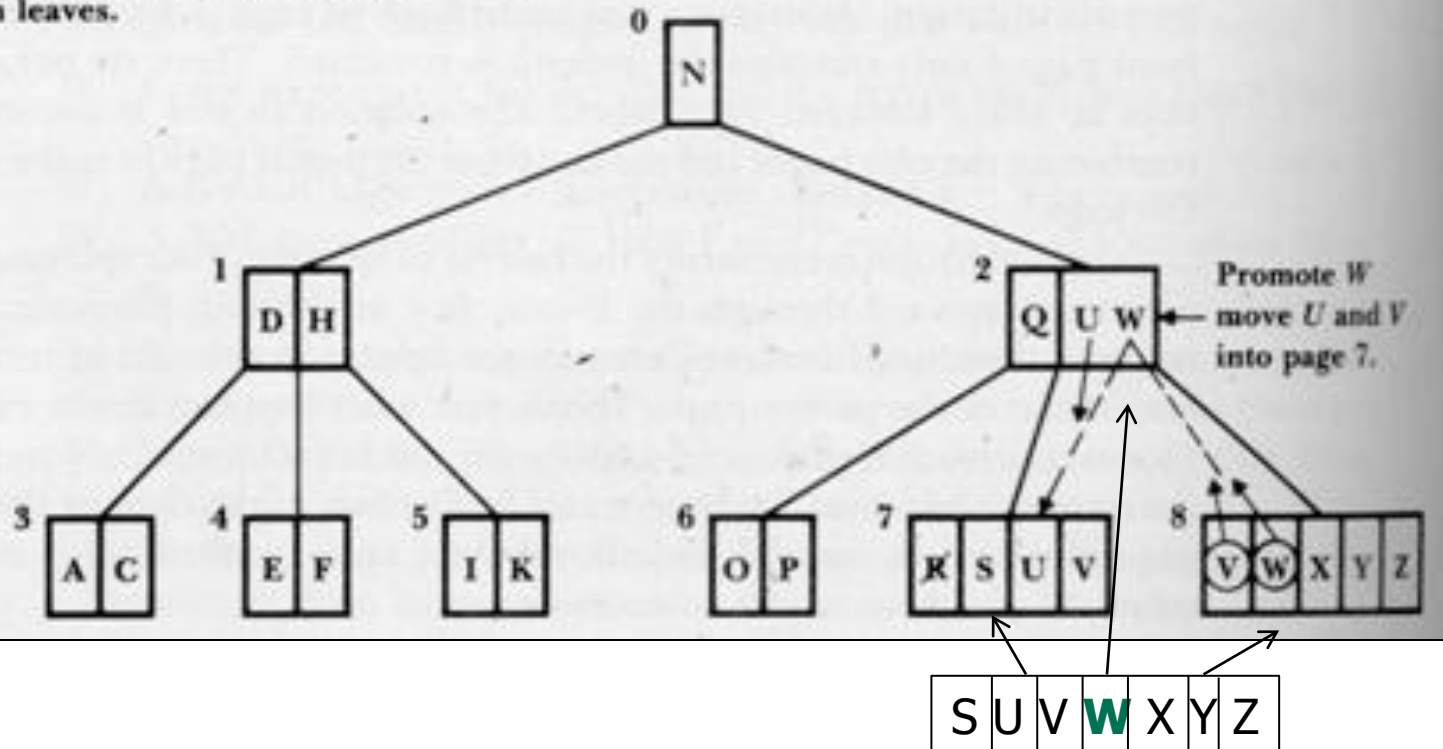
$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 3: Redistribution.

Delete *R*. Underflow occurs. Redistribute keys among pages 2, 7, and 8 to restore balance between leaves.





Eliminação: Caso 4

- **Caso 4:** ocorre *underflow* e a redistribuição não pode ser aplicada
 - Não existem chaves suficientes para dividir entre as duas páginas irmãs. A que sofreu underflow tem $m/2-2$ chaves, e a outra, $m/2-1$ chaves
- **Solução:** concatenação
 - Combina-se o conteúdo das duas páginas ($m-3$) mais a chave separadora da página pai para formar uma única página com $m-2$ chaves
 - A concatenação é o inverso do processo de particionamento
 - Como consequência, a eliminação na página pai tb pode causar *underflow*
 - Uma página é liberada (registro eliminado do arquivo de dados)

Eliminação: Caso 4

$$m = 6$$

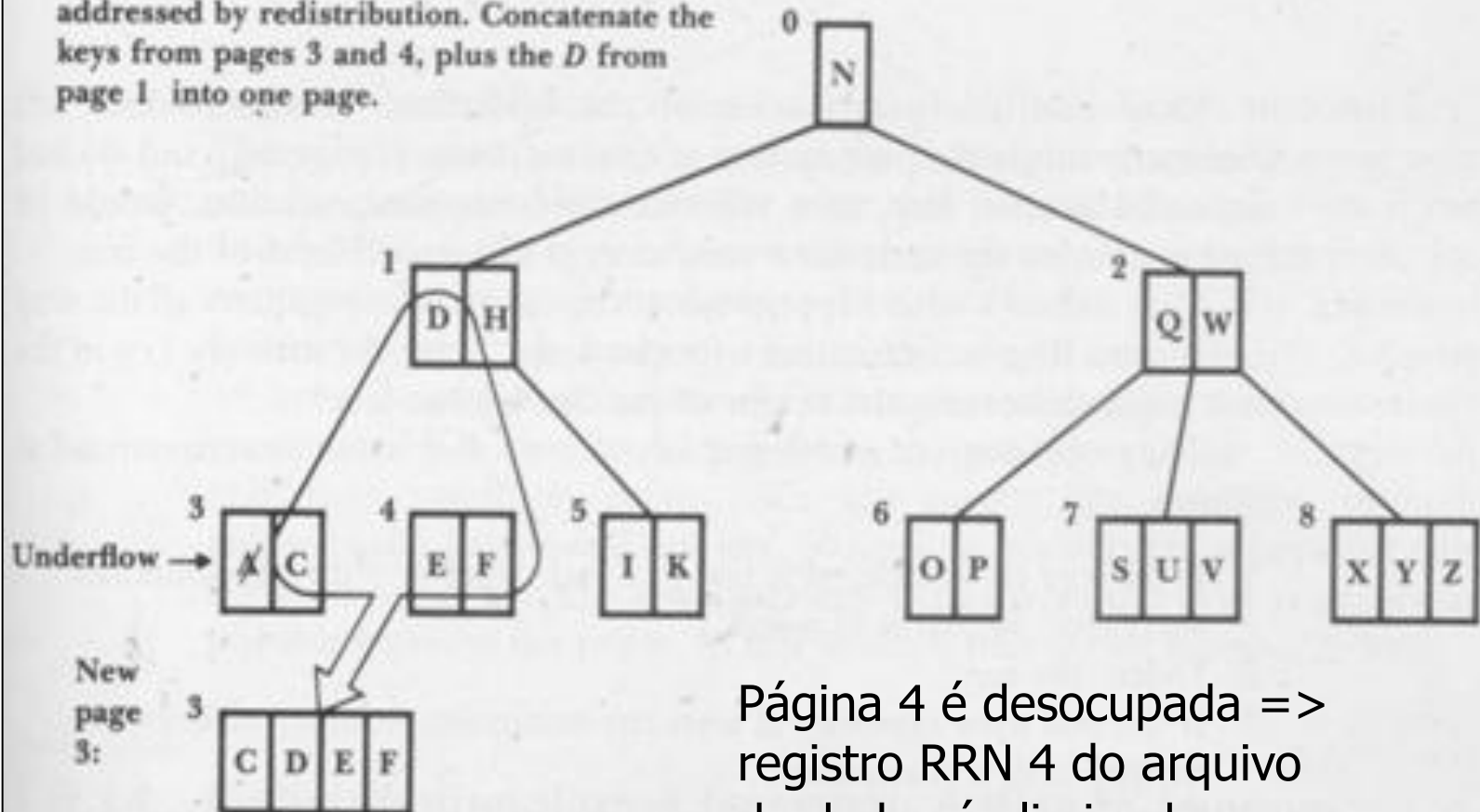
$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 4: Concatenation.

Delete A. Underflow occurs, but it cannot be addressed by redistribution. Concatenate the keys from pages 3 and 4, plus the D from page 1 into one page.





Eliminação: Caso 5

- **Caso 5:** *underflow* da página pai, como consequência da concatenação
- **Solução:** utiliza-se redistribuição ou concatenação novamente

Eliminação: Caso 5

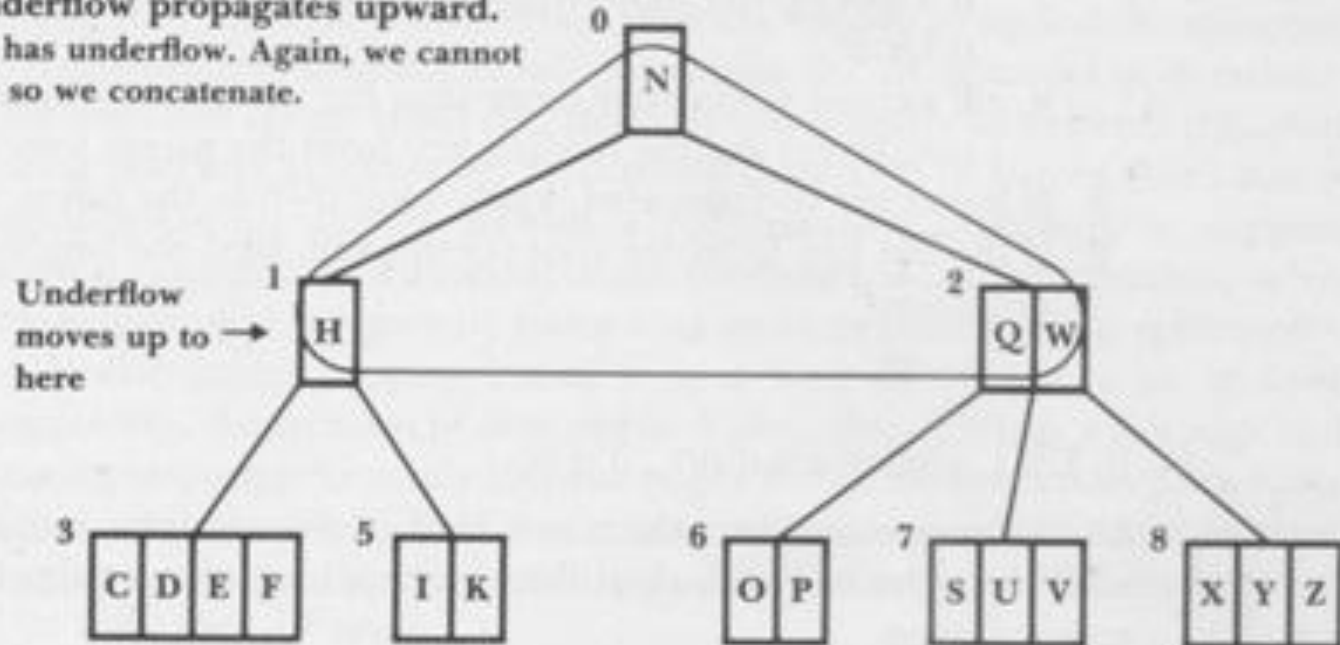
$$m = 6$$

$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 5: Underflow propagates upward.
Now page 1 has underflow. Again, we cannot redistribute, so we concatenate.





Eliminação: Caso 6

- **Caso 6:** diminuição da altura da árvore
 - Ocorre quando o nó raiz tem uma única chave
- **Solução:** concatenação nos seus nós filhos

Eliminação: Caso 6

$$m = 6$$

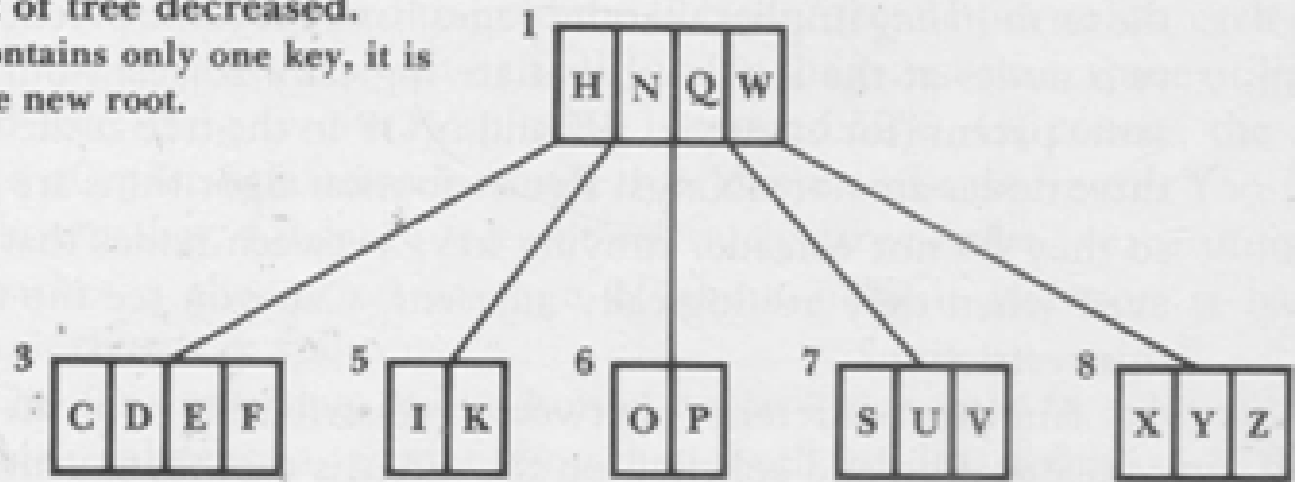
$$m-1=5 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

Case 6: Height of tree decreased.

Since the root contains only one key, it is absorbed into the new root.



Registros RRN 0 e 2 são eliminados do arquivo de dados



Algoritmo para eliminação de chaves em árvores-B

1. Se a chave não estiver numa folha, troque-a com sua sucessora*
2. Elimine a chave da folha
3. Se a página continuar com o número mínimo de chaves, fim
4. Se a página tem uma chave a menos que o mínimo, verifique as páginas irmãs a esquerda e a direita
 - 4.1. se uma delas tiver mais do que o número mínimo de chaves, aplique redistribuição
 - 4.2. senão concatene a página com uma das irmãs e a chave separadora do pai
5. Se ocorreu concatenação, aplique os passos de 3 a 6 para a página pai
6. Se a última chave da raiz for removida, a altura da árvore diminui

*primeira chave da página mais à esquerda da filha à direita; ou última da página mais à direita da filha à esquerda

Exercício

$$m = 5$$

$$m-1=4 \text{ (max)}$$

$$m/2 = 3 \text{ (min)}$$

$$m/2 - 1 = 2 \text{ (min)}$$

- Usando o algoritmo anterior, remova as chaves A, B, Q, R e M da árvore-B de ordem 5 abaixo

