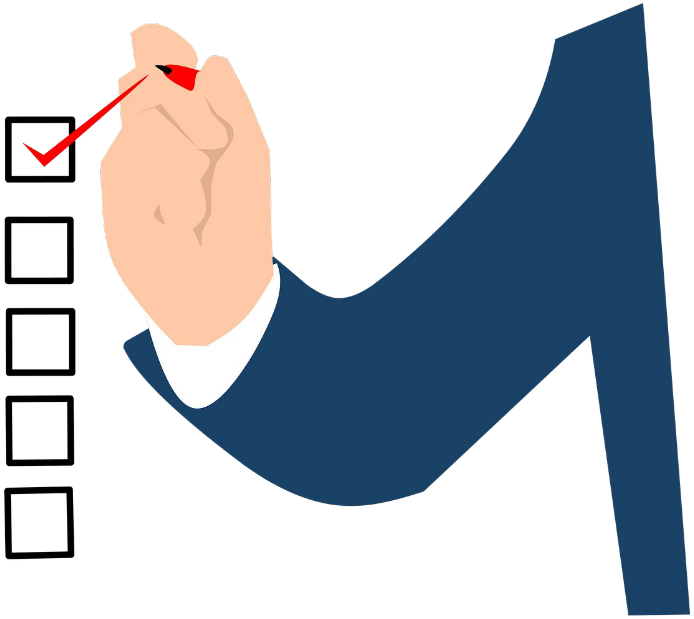
DACC Departamento Acadêmico de Ciência da Computação
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

Álgebra Linear

Professor:
Dr. Lucas Marques da Cunha
lucas.marques@unir.br

Roteiro

1. Dependência e Independência Linear
2. Base e Dimensão
3. Mudança de base
4. Exercícios práticos



Dependência e Independência Linear

- **Definição:** Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n} \in V$. Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ é ***linearmente independente*** (LI), ou que o vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ são LI se a equação:
  - $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$

  implica que $\mathbf{a_1 = a_2 = ... = a_n = 0}$
  - $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos outros.
- Se algum $a_i \neq 0$, dizemos que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ é ***linearmente dependente*** (LD) ou que os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ são LD

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 1:** $V = R^2$, $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{e_2} = (0, 1)$
- $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$ são LI, pois
  - $a_1.\mathbf{e_1} + a_2.\mathbf{e_2} = \mathbf{0}$
  - $a_1.(1, 0) + a_2.(0, 1) = \mathbf{0}$
  - $(a_1, a_2) = (0, 0)$
  - $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$
- **Exemplo 2:** De modo análogo, para $V = R^3$, $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e_3} = (0, 0, 1)$ são LI
- **Exemplo 3:** $V = R^2$
  - $\{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ é LD pois:
  - $\frac{1}{2}.(1, -1) - 1.(1, 0) + \frac{1}{2}.(1, 1) = (0, 0)$

Dependência e Independência Linear

- Exercício: $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (-4, -6)$ são LD?

- **Solução**

$av_1 + bv_2 = 0$

$a(2, 3) + b(-4, -6) = 0$

$(2a, 3a) + (-4b, -6b) = (0, 0)$

$(2a-4b, 3a - 6b) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2a - 4b = 0 \ .(3) & \Rightarrow \ 6a - 12b = 0 \\ 3a - 6b = 0 \ .(-2) & \Rightarrow -6a + 12b = 0 \end{cases}$$

$0 = 0 \Rightarrow 2a - 4b = 0 \Rightarrow 2a = 4b$, LD ou LI?

Resposta: LD... Por que?

Dependência e Independência Linear

- Exercício: $v_1 = (6, 2, 3)$ e $v_2 = (0, 5, 3)$ são LD ou LI?

- **Solução**

$av_1 + bv_2 = 0$

$a(6, 2, 3) + b(0, 5, 3) = (0, 0, 0)$

$(6a, 2a, 3a) + (0, 5b, 3b) = (0, 0, 0)$

$(6a, 2a + 5b, 3a + 3b) = (0, 0, 0)$

$6a = 0 \quad \Rightarrow a = 0$

$2a + 5b = 0 \Rightarrow b = 0$

$3a + 3b = 0 \Rightarrow b = 0$

Como, $a = b = 0 \Rightarrow$ LD ou LI?

Resposta: LI

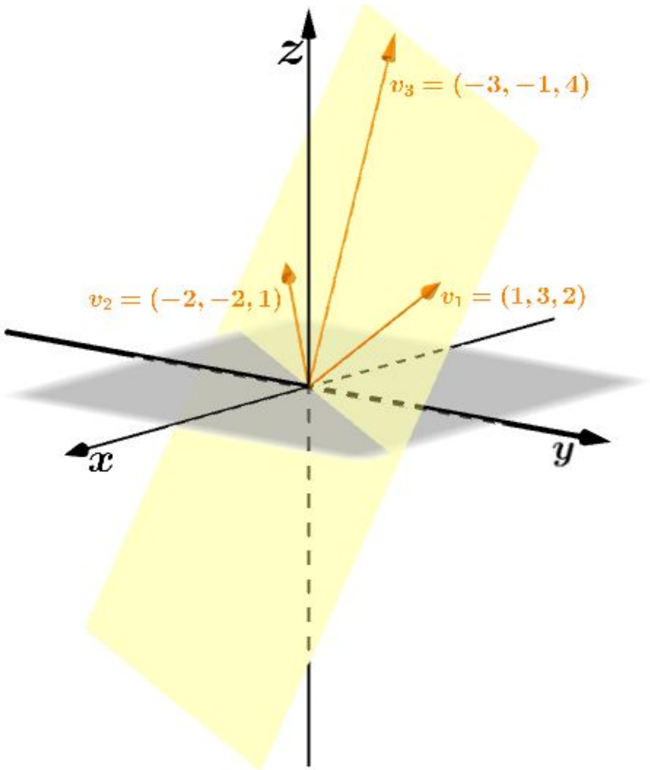
Exercícios

1. Prove que s elementos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (3, 6)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ são **Linearmente Dependentes**. Encontre os valores para α_1 e α_2.
2. Prove que s elementos $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (4, 3)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ são **Linearmente Independentes**. Quais são os valores para α_1 e α_2?
3. Os elementos $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (-2, -2, 1)$ e $v_3 = (-3, -1, 4)$ de $\mathbb{R}^3$ são LI ou LD?

Dependência e Independência Linear

Fique Ligado

- Geometricamente, se três vetores em $\mathbb{R}^3$ são **Linearmente Dependentes**, eles **estão no mesmo plano**, quando colocados na mesma origem.
- Caso contrário, ou seja, se forem **Linearmente Independentes**, os vetores **não estão no mesmo plano**, quando colocados na mesma origem.



Base de um espaço vetorial

- **Definição:** Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de vetores de V será uma ***base*** de V se:
  - i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI
    - $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, + \ldots + n\mathbf{v}_n = 0$, onde $a = b = n = 0$
  - ii) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ é V
    - $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, + \ldots + n\mathbf{v}_n$ = vetor genérico do espaço, Ex: $R^2 = (x,y)$

  Esse conjunto gera todos os vetores de V.

Base de um espaço vetorial

- Em outras palavras:
- **Base** é um conjunto de vetores que gera o subespaço com menor número de vetores.
    - Não pode ter vetores irrelevantes;
    - Nenhum pode ser combinação linear dos outros.
    - Esses vetores dão origem ao conjunto de vetores que compõem o subespaço vetorial.

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 1:** $V = R^2$, $\mathbf{e_1}=(1,0)$ e $\mathbf{e_2}=(0,1)$
- $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ é base de V, conhecida como base canônica de R^2
- O conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de $V = R^2$
  - De fato, se $(0,0) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a + b)$, então $a = b = 0$
    - Assim, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é LI
  - Ainda $[(1, 1), (0, 1)] = V$ pois dado $\mathbf{v} = (x, y) \in V$, temos: $(x, y) = x(1, 1) + (y – x)(0, 1)$
  - Ou seja, todo vetor de R^2 é uma combinação linear dos vetores $(1,1)$ e $(0,1)$

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 2:** {(0,1), (0,2)} não é base de R^2, pois é um conjunto LD
  - Se (0,0) = a(0,1) + b(0,2), então a = -2b e *a* e *b* não são zero necessariamente
- **Exemplo 3:** {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} é uma base de R^3?
  - Base canônica de R^3
  - i) $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ é LI
  - ii) $(x, y, z) = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2} + z.\mathbf{e_3}$
- **Exemplo 4:** {(1,0,0), (0,1,0)} não é base de R^3. Por que?
  - É LI mas não gera todo R^3

Base de um espaço vetorial

- **Teorema:** Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial *V*. Então dentre esses vetores podemos extrair uma base de *V*.
  - Isso independe de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ serem LD ou LI

- **Teorema:** Seja um espaço vetorial *V* gerado por um conjunto finito de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.
- Então, qualquer conjunto com mais de *n* vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo *n* vetores)

Base de um espaço vetorial

- **Corolário:** Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, e denotado por *dim V*
- **Exemplo 1:** $V = R^2$: dim $V = 2$
  - $\{(1,0), (0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de V
- **Exemplo 2:** $V = R^3$: dim $V = 3$
- **Exemplo 3:** $V = M(2, 2)$: dim $V = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É uma base de V

Base de um espaço vetorial

- **Teorema:** Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V
- **Corolário:** Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V
- **Teorema:** Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$. Além disso:
  - $dim(U + W) = dim\ U + dim\ W - dim(U \cap W)$

Base de um espaço vetorial

- **Teorema:** Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, \dots,\mathbf{v_n}\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira **única** como combinação linear de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots,\mathbf{v_n}$.
- **Definição:** Sejam $\beta = \{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, \dots,\mathbf{v_n}\}$ base de V e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \dots + a_n\mathbf{v_n}$. Chamamos esses números a_i de coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base β e denotamos por:

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 1:** $V = \mathbb{R}^2$
- $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $(4, 3) = 4.(1, 0) + 3.(0, 1)$
- Logo:

$$[(4, 3)]_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observe que os coeficientes são representados como elementos de uma matriz coluna.

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 2:** $V = R^2$
- $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$
- $(4, 3) = x.(1, 1) + y.(0, 1) \Rightarrow x=4$ e $y=-1$
- Logo:

$$[(4, 3)]_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Base de um espaço vetorial

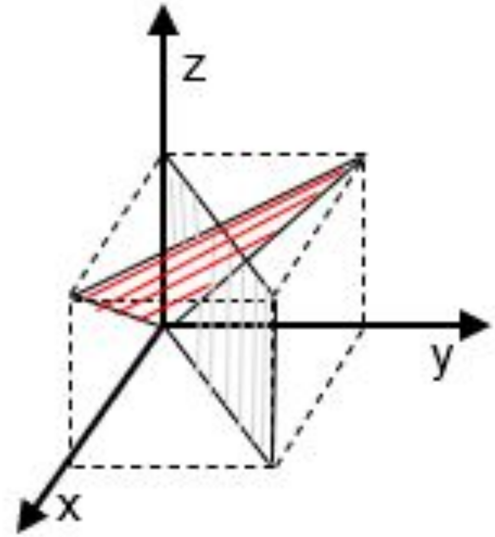
- **Exemplo 3:** Observe que a ordem dos elementos de uma base influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação à esta base
- $V = R^2$
- $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}$

$$[(4, 3)]_{\beta 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [(4, 3)]_{\beta 2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- **Exemplo 4:** Considere:
  - $V = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$
  - $W = \{(x, y, z): x = y\}$
  - Determine $V + W$
  - V: $x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$
    - Base: $(x, y, z)=(x, y, x + y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$
    - Logo: Base = $[(1, 0 , 1),(0, 1, 1)]$
  - W: $x = y$
    - Base: $(x, y, z) = (y, y, z) = y.(1, 1, 0) + z.(0, 0, 1)$
    - Logo: Base = $[(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

cont…

Base de um espaço vetorial



- **Exemplo 4:** (cont..)
  - Como:
  - $V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$
  - $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$
  - Então $V + W = [(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (0,0,1)]$
  - Mas espera-se que o resultado esteja no R^3, logo essa base deve ter algum elemento LD

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
  - Vamos escalonar....

$$
\begin{array}{c}
v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Elemento LD (v3)

cont...

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
  - ➢Logo $V + W = [(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)]$
  - ➢Assim, $V + W = R^3$
  - ➢$\dim R^3 = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$
  - ➢$V \cap W = ??$

Base de um espaço vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
  - ➢ $V \cap W = \{(x,y,z);\ x + y - z = 0 \text{ e } x = y\}$

    = Resolva o sistema...

    $= \{(x,y,z);\ x = y = z/2\}$

    $= [(1, 1, 2)]$
  - ➢ $\dim (V \cap W) = 1$
  - ➢ $\dim R^3 = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$
  - ➢ $\dim R^3 = 2 + 2 - 1 = 3$
    - Como esperado....

Exercícios

1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e as bases β= {(1, 0), (0, 1)} e γ={(1, 1), (0, 1)} para $\mathbb{R}^2$. Determine as Coordenadas do elemento v = (2, -3) $\in \mathbb{R}^2$ com relação às bases β e γ, respectivamente.

Exercícios

2. Determine se os vetores $(4, 2, 3)^T$, $(2, 3,1)^T$ e $(2, -5, 3)^T$ são linearmente dependentes.

3. Seja

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Determine se os vetores são linearmente independentes.

Exercícios

4. Mostre que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para $\mathbf{R}^3$.

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Problema: imagine um veículo de direção autônoma para percorrer um caminho:

Grama verde

Caminho cinza

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Problema: imagine agora um caminho com sombra...

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Imagem no sistema RGB (R = Red, G = Green, B = Blue) que é o sistema computacional de cores comum do computador
    - Mas um “vermelho” tem valores de cada componente

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Como detectar a sombra pelo RGB? Problema complicado...
  - Mas existem outros sistemas de cores....

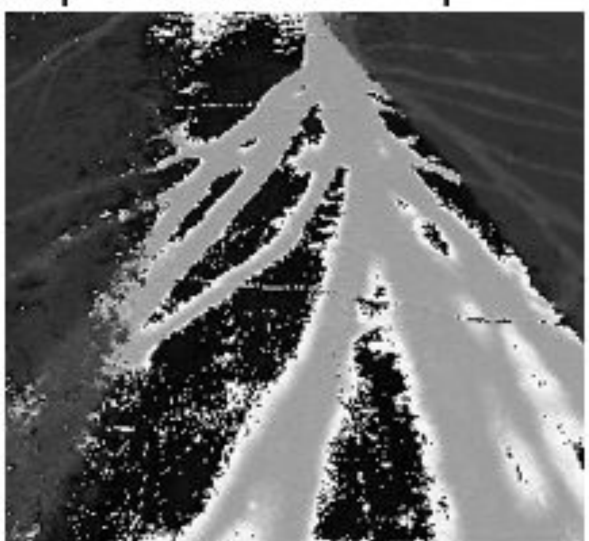
Base de um espaço vetorial

Mudança de base - exemplo

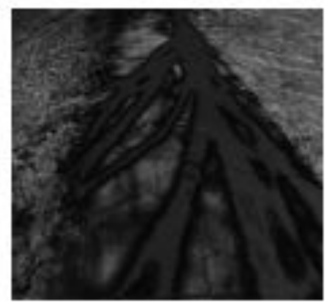
- Visão Computacional
  - Sistema HSL (H = Hue/Matiz, S = Saturação, L = Lightness/Brilho)
  - RGB -> HSL
    - Mudança de base, feita através de uma matriz transformação de uma base para outra

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Mesma imagem anterior no HSL (cada componente em separado)



Matiz

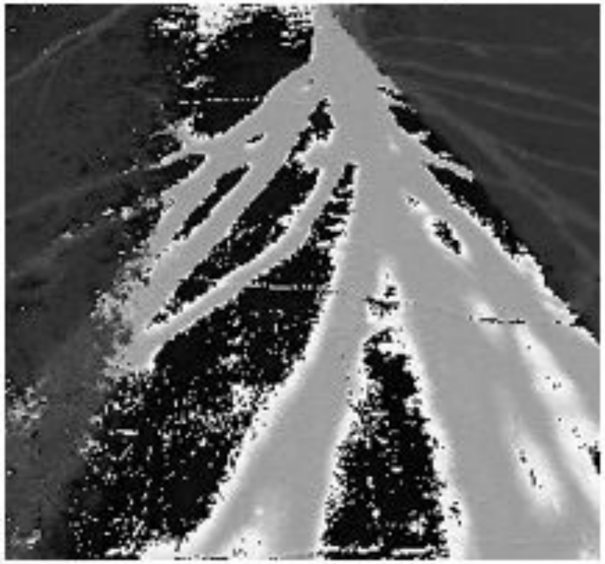


Saturação

Brilho

Mudança de base - exemplo

- Visão Computacional
  - Mesma imagem anterior no HSL (cada componente em separado)



Sombra bem destacada!!!

Matiz

Mudança de Base - Exemplo

- $Sejam\ as\ bases\ \beta = \{(2,-1),(3,4)\}\ e\ \beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ de um espaço V
- Dado o vetor (x, y) de V como ele seria descrito em função das bases β e β'?
- Em relação à base $\beta \Rightarrow (x,y) = z(2,-1) + w(3,4)$
- Em relação à base $\beta' \Rightarrow (x,y) = x(1{,}0) + y(0,1)$
- E se quisermos descrever a base β' em função da base β? Como ficaria?
- $\beta' \Rightarrow (x,y) = x(1{,}0) + y(0,1)$

  (a) (b)

(a) (1,0) = a(2,-1) + b(3,4) => Quem é a e b?

- a = 4/11 e b = 1/11 => (1,0) = 4/11(2,-1) + 1/11(3,4)

(b) (0,1) = c(2,-1) + d(3,4) => Quem é c e d?

- c = -3/11 e d = 2/11 => (0,1) = -3/11(2,-1) + 2/11(3,4)
- Note que (x,y) relação à base $\beta \Rightarrow (x,y) = z(2,-1) + w(3,4)$
- Então, $z(2,-1) + w(3,4)$ = x(4/11(2,-1) + 1/11(3,4))+y(-3/11(2,-1) + 2/11(3,4))

Base de um espaço vetorial

- Continuando...
- $z(2,-1) + w(3,4)$ = x($\frac{4}{11}$ (2,-1) + $\frac{1}{11}$ (3,4))+y($\frac{-3}{11}$(2,-1) + $\frac{2}{11}$ (3,4))
- Da equação acima temos que...
- $z = \frac{4x}{11} - \frac{3y}{11}$
- $w = \frac{1x}{11} + \frac{2y}{11}$

- Na notação de matriz temos...
- $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Base de um espaço vetorial

- Sejam $\beta=\{\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w_1},\ldots,\mathbf{w_n}\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V
- Dado o vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:
  - $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}$
  - $\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + \ldots + y_n\mathbf{w_n}$

(1)

Mudança de Base

- Como podemos relacionar as coordenadas de **v** em relação à base β

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- com as coordenadas do mesmo vetor **v** em relação à base β'

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Base de um espaço vetorial

- Já que $\{\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ é base (β) de *V*, podemos escrever os vetores **v** e **w** como combinação linear dos u_j, isto é: (Lembrando que $\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + \ldots + y_n\mathbf{w_n}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{n1}\mathbf{u_n} \\
\mathbf{w}_2 &= a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{n2}\mathbf{u_n} \qquad (2) \\
&\ldots\ldots \\
\mathbf{w}_n &= a_{1n}\mathbf{u_1} + a_{2n}\mathbf{u_2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{u_n}
\end{aligned}$$

- Substituindo (2) em (1):

$$\mathbf{v}=y_1\mathbf{w_1}+\ldots+y_n\mathbf{w_n}=y_1(a_{11}\mathbf{u_1}+\ldots+a_{n1}\mathbf{u_n})+\ldots+y_n(a_{1n}\mathbf{u_1}+\ldots+a_{nn}\mathbf{u_n})$$

$$= \mathbf{u_1}(a_{11}y_1+\ldots+a_{n1}y_n)+\ldots+\mathbf{u_n}(a_{1n}y_1+\ldots+a_{nn}y_n)$$

Base de um espaço vetorial

Mudança de Base

- Mas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + \dots + x_n\mathbf{u_n}$, e como as coordenadas em relação a uma base (β) são únicas temos:

$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + \dots + x_n\mathbf{u_n} = \mathbf{u_1}(a_{11}y_1+\dots+a_{n1}y_n)+\dots+\mathbf{u_n}(a_{1n}y_1+\dots+a_{nn}y_n)$

$x_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{n1}y_n$

.....

$x_n = a_{1n}y_1 + \dots + a_{nn}y_n$

Observe que as linhas viraram colunas!

- Ou, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Mudança de Base

- Isso é denotado por:

$$[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Temos:

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [\,I\,]_{\beta}^{\beta'}[\mathbf{v}]_{\beta'}$$

$[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} \Rightarrow$ Matriz de mudança da base β' para a base β

Mudança de Base

- Observe que, encontrando $[\ I\ ]_{\beta}^{\beta'}$, podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor **v** em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de **v** na base β'

Mudança de Base

- Exemplo: Sejam $\beta=\{(2,-1), (3,4)\}$ e $\beta'=\{(1,0),(0,1)\}$ bases de R^2:

$$[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} = ?$$

$w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11}+ 3a_{21}, -a_{11}+ 4a_{21})$

$\Rightarrow 2a_{11}+3a_{21} = 1$ e $-a_{11}+4a_{21} = 0$

$\Rightarrow a_{11} = 4a_{21} \Rightarrow a_{21} = 1/11$ e $a_{11} = 4/11$

$w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4) = (2a_{12}+ 3a_{22}, -a_{12}+ 4a_{22})$

$\Rightarrow 2a_{12}+3a_{22} = 0$ e $-a_{12}+4a_{22} = 1$

$\Rightarrow a_{22} = 2/11$ e $a_{12} = -3/11$

Mudança de Base

- Exemplo: (cont.)
  - Assim:
    - $w_1 = (1,0) = (4/11)(2,-1) + (1/11)(3,4)$
    - $w_2 = (0,1) = (-3/11)(2,-1) + (2/11)(3,4)$

$$[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$$

Linhas tornam-se colunas!!!

Base de um espaço vetorial

- Exemplo: (cont.) Podemos usar essa matriz para encontrar, por exemplo, $[\mathbf{v}]_\beta$ para $\mathbf{v} = (5, -8)$

  - $[(5, -8)]_\beta = [\,I\,]^{\beta'}_{\beta}\,[(5, -8)]_{\beta'}$

$$= \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Isto é: $(5, -8) = 4.(2, -1) + (-1).(3, 4)$

A Inversa da Matriz Mudança de Base

- Temos $[\mathbf{v}]_{\beta} = [\,I\,]_{\beta}^{\beta'}[v]_{\beta'}$

- Um fato importante é que $[\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$ e $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'}$ são matrizes inversíveis:
  - $([\,I\,]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$

Base de um espaço vetorial

A Inversa da Matriz Mudança de Base

- Exemplo:
  - Do exemplo anterior, vamos calcular $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$. Note que $[\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$ é fácil de ser calculada pois β' é a base canônica:
    - $(2, -1) = 2.(1, 0) + (-1).(0, 1)$
    - $(3, 4) = 3.(1, 0) + 4.(0, 1)$
  - Assim: $[\,I\,]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
  - Então: $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$

Base de um espaço vetorial

- Exercício 18: Considere o subespaço de R^4 gerado pelos vetores v1 = (1,-1,0,0), v2=(0,0,1,1), v3=(-2,2,1,1) e v4=(1,0,0,0)
  - a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?
  - b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?
  - c) [v1,v2,v3,v4] = R^4?

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 18:
  - a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?
  - Ou seja, existem a, b, c, d, tal que:

  (2, -3, 2, 2) = a.(1,-1,0,0) + b.(0,0,1,1) + c.(-2,2,1,1) + d.(1,0,0,0)

$$\begin{cases} a - 2c + d = 2 \\ -a + 2c = -3 \\ b + c = 2 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Base de um espaço vetorial

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 18:
  - a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?

  Sistema admite infinitas soluções.

  Por exemplo: a = 3, b = 2, c = 0, d = -1

  Logo, como existe solução, o vetor pertence a [v1,v2,v3,v4]

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 18:
  - b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Com isso, descobrimos que v2 (ou v3) é combinação linear dos outros vetores. Logo, a base é formada por [v1,v2,v4] ou [v1, v3, v4].

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 18:
  - b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?
    - Base = [v1,v2,v4] $\Rightarrow$ dim = 3
  - c) [v1,v2,v3,v4] = R^4?
    - Como dim Base = 3 e dim R^4 = 4, então [v1,v2,v3,v4] $\neq R^4$

Espaço Vetorial

- Exercício 19: Considere o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(1,1,1)$.
- $[v_1,v_2,v_3]=R^3$?

- $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(1,1,1)$ é LI?

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 19: Solução 1:
  - Existem a, b, c tal que:

$(x, y, z) = a.(1,1,0) + b.(0,-1,1) + c.(1,1,1)$

$$\begin{cases} a + c = x \\ a - b = y \\ b + c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x - y - z \\ b = x - y \\ c = -x + y + z \end{cases}$$

Ou seja, há valores para a, b e c que podem gerar qualquer vetor no R^3.

Base de un espaço vetorial

Espaço Vetorial

Cont.

- Exercício 19: Solução 2:
  - Vamos tentar escalonar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que isso significa?

Significa que, com esses vetores e operações lineares, conseguimos gerar a base canônica. Logo, podemos gerar todo o R^3.

Dúvidas, sugestões?