Universidade Federal do Paraná **2° semestre 2015.**
Algebra Linear, CM 005 Olivier Brahic

Lista de exercícios 8
Bases e Dimensão.

Exercício 1: No exercício 1 da Folha 7, indique se os vetores formam uma base para $\mathbb{R}^2$.

Exercício 2: No exercício 2 da Folha 7, indique se os vetores formam uma base para $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3: Considere os vetores: $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$,

a) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

b) Por que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ devem ser linearmente independentes ?

c) Qual é a dimensão de $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$?

Exercício 4: Dados os vetores $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$. Qual é a dimensão de $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3)$?

Exercício 5: Sejam $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ são linearmente dependentes.

b) Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são linearmente independentes.

c) Qual é a dimensão de $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$?

d) Dê uma interpretação geométrica de $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.

Exercício 6: No exercício 2 da folha 7, alguns dos conjuntos de vetores formavam subespaços de $\mathbb{R}^3$. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

Exercício 7: Para cada uma das seguintes matrizes, encontre uma base e deduza a dimensão do kernel $N(A) = \ker A$. Em cada caso, deduza a dimensão da imagem de A.
Dica: pode se ajudar dos resultados da Folha 2: veja no Exercício 3, os itens a) b) c) e) e no Exercício 2, os itens d) e e).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 8: Encontre uma base para o subespaço S de $\mathbb{R}^4$ consistindo em todos os vetores da forma $(a+b, a-b+2c, b, c)^\intercal$, nos quais a, b, c são números reais. Qual é a dimensão de S ?

Exercício 9: Seja S o subespaço de todos os polinômios da forma $ax^2 + bx + 2a + 3b$. Encontre uma base para S.

Exercício 10: No exercício 4 da Folha 7, alguns dos conjuntos de vetores formavam subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Em cada um desses casos, encontre uma base para o subespaço e determine sua dimensão.

Exercício 11: Em cada um dos seguintes itens, ache a dimensão do subespaço de P_3 coberto pelos vetores dados:

a) $x,\ x-1,\ x^2+1$ b) $x, x-1, x^2+1, x^2-1$ c) $x^2, x^2-x-1, x+1$ d) $2x,\ x-2$

Exercício 12: Seja S um subespaço de P_3 consistindo em todos os polinômios tais que $p(0) = 0$ e seja T o subespaço de todos os polinômios $q(x)$ tais que $q(1) = 0$. Encontre bases para:

a) S b) T c) $S \cap T$

Soluções

Resolução do Exercício 1:

a) Segundo o Exercício 1, item *a)* da Folha 7, os vetores $\mathbf{v}_1 = \big(2,1\big)$ e $\mathbf{v}_2 = \big(3,2\big)$ são linearmente independentes, no espaço $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão 2, portanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é é uma base do $\mathbb{R}^2$.

b) Segundo o Exercício 1, item *b)* da Folha 7, os vetores $\mathbf{v}_1 := \big(2,3\big)$ e $\mathbf{v}_2 := \big(4,6\big)$ não são linearmente independentes logo não formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

c) Os vetores $\mathbf{v}_1 := \big(-2,1\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(1,3\big)$ e $\mathbf{v}_3 := \big(2,4\big)$ não podem formar uma base do $\mathbb{R}^2$, pois são três vetores e $\mathbb{R}^2$ tem dimensão 2 só.

d) Segundo o Exercício 1, item *d)* da Folha 7, os vetores $\big(-2,1\big)$, $\big(1,-2\big)$ e $\big(2,-4\big)$ não são linearmente independentes, logo não formam uma base do $\mathbb{R}^2$,

e) Segundo o Exercício 1, item *e)* da Folha 7, os vetores $\big(1,2\big)$ e $\big(-1,1\big)$ são linearmente independentes, no espaço $\mathbb{R}^2$ que tem dimensão 2, portanto formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

Resolução do Exercício 2:

a) Os vetores dados por $\mathbf{v}_1 := \big(1,0,0\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(0,1,1\big)$ e $\mathbf{v}_3 := \big(1,0,1\big)$ são linearmente independentes, no espaço $\mathbb{R}^3$ que tem dimensão 3, portanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.

b) Os vetores em $\mathbb{R}^3$ dados por $\mathbf{v}_1 := \big(1,0,0\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(0,1,1\big)$, $\mathbf{v}_3 := \big(1,0,1\big)$ e $\mathbf{v}_4 := \big(1,2,3\big)$, não são linearmente independentes logo não formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   Observação. *Tambem pode-se argumentar que uma base do $\mathbb{R}^3$ tem exatamente 3 vetores.*

c) Os vetores $\big(2,1,-2\big)$, $\big(3,2,-2\big)$, $\big(2,2,0\big)$ sendo linearmente independentes, no espaço de dimensão três $\mathbb{R}^3$, portanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

d) Os vetores $\mathbf{v}_1 := \big(2,1,-2\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(-2,-1,2\big)$ e $\mathbf{v}_3 := \big(4,2,-4\big)$ não são linearmente independentes logo não formam um base do $\mathbb{R}^3$.

e) Os vetores $\big(1,1,3\big)$ e $\big(0,2,1\big)$ são linearmente independentes, porem não formam uma base do $\mathbb{R}^3$ pois $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3.

Resolução do Exercício 3:

a) A matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ tendo determinante diferente de 0, os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente independentes. O espaço $\mathbb{R}^2$ tendo dimensão 2, segue que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

b) Três vetores num espaço de dimensão 2 não podem ser linearmente independentes.

c) O espaço $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ tem dimensão 2. Pode ser justificado de maneira rigorosa assim: temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \subset \mathbb{R}^2 \quad &\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \leq 2, \\ \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \text{ contem dois vetores L.I.} \quad &\Rightarrow \quad \dim \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \geq 2. \end{aligned}$$

Portanto $\dim \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = 2$.

Resolução do Exercício 4: Preimeiro apresentamos uma maneira ingénua de resolver. Os vetores $\mathbf{x}_1 := \big(3, -2, 4\big)$ e $\mathbf{x}_2 := \big(-3, 2, -4\big)$ não são linearmente independentes pois satisfazem a relação não trivial $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Segue que:

$$\mathrm{Cob}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \mathrm{Cob}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}.$$

É fácil ver que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_3 := \big(-6, 4, -8\big)$ são linearmente independentes pois não são colineares, logo $\dim \mathrm{Cob}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \dim \mathrm{Cob}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = 2$.

Observação. *A dimensão de um espaço E gerado por k vetores não pode superar k ($\dim E \leq k$). Se ele contem k vetores linearmente independentes, então ele tem dimensão k ($\dim E = k$).*

Resolução alternativa do exercício 4: Pode-se argumentar de maneira mais conceptual assim. Notemos A a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lembremos que por definição:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\ A = \mathrm{Cob}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \\ &\ker A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad A \cdot \mathbf{y} = 0_{\mathbb{R}^3}\}. \end{aligned}$$

Resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1 - 3y_2 - 6y_3 = 0 \\ -2y_1 + 2y_2 - 4y_3 = 0 \\ 4y_1 - 4y_2 - 8y_3 = 0. \end{cases}$$

obtemos facilmente que:

$$\begin{aligned} \ker A &= \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1, y_2, y_3) = \alpha(1, -1, 0) \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}\}. \\ &= \mathrm{Cob}\{(1, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

Em particular, segue que $\dim \ker A = 1$. Aplicando o Teorema do posto, que diz que:

$$\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im} A) = \dim \mathbb{R}^3,$$

obtemos que $\dim(\mathrm{Im} A) = 2$.

Resolução do Exercício 5: Sejam $\mathbf{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) A matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ tendo determinante igual a 0, os vetores $\mathbf{x}_1 := \big(2,1,3\big)$, $\mathbf{x}_2 := \big(3,-1,4\big)$ e $\mathbf{x}_3 := \big(2,6,4\big)$ são linearmente dependentes.

b) Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ escalares tais que $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Então, temos:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda_1 + \ \lambda_2 = \ 0 \\ 3\lambda_1 - \ \lambda_2 = \ 0 \\ 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = \ 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

logo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são linearmente independentes.

c) Os vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sendo linearmente dependentes, temos $\dim \mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) < 3$, este espaço contendo dois vetores linearmente independentes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, ele tem necessariamente dimensão 2.

d) O espaço $\mathrm{Cob}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ é o plano gerado por $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ (ou seja o plano que passa pelos três pontos $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ e $0_{\mathbb{R}^3}$ em $\mathbb{R}^3$).

Resolução do Exercício 6:

a) Os vetores em $\mathbb{R}^3$ dados por $\mathbf{v}_1 := \big(1,0,0\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(0,1,1\big)$ e $\mathbf{v}_3 := \big(1,0,1\big)$ sendo linearmente independentes no espaço de dimensão três $\mathbb{R}^3$, eles formam uma base dele.

b) Os vetores em $\mathbb{R}^3$ dados por $\mathbf{v}_1 := \big(1,0,0\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(0,1,1\big)$, $\mathbf{v}_3 := \big(1,0,1\big)$ e $\mathbf{v}_4 := \big(1,2,3\big)$ não são linearmente independentes, mais qualquer um dos seguintes subconjuntos de três vetores são linearmente independentes, logo formam uma base de $\mathbb{R}^3$:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}, \quad \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}, \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}.$$

c) Os vetores $\big(2,1,-2\big)$, $\big(3,2,-2\big)$ e $\big(2,2,0\big)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$ pois são 3 vetores linearmente independentes.

d) Os vetores $\mathbf{v}_1 := \big(2,1,-2\big)$, $\mathbf{v}_2 := \big(-2,-1,2\big)$ e $\mathbf{v}_3 := \big(4,2,-4\big)$ não são linearmente independentes. mais qualquer um dos seguintes subconjuntos de dois vetores são linearmente independentes, logo formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\} \quad \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}.$$

O subespaço $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem dimensão 2.

e) Os vetores $\big(1,1,3\big)$ e $\big(0,2,1\big)$ são linearmente independentes logo formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, que tem dimensão 2.

Resolução do Exercício 7:

Observação. *Primeiro, lembremos o seguinte resultado. Consideremos* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *e* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ *fixados. Notemos* (1) *o sistema de equações lineares correspondente e* (2) *o sistema homogêneo associado:*

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$
$$A \cdot \boldsymbol{x} = 0_{\mathbb{R}^m} \tag{2}$$

Notemos também $\mathcal{S}$ *e* $\mathcal{S}_0$ *os conjuntos solução respetivos. Observa que por definição:* $\mathcal{S}_0 = N(A)$. *Vimos que se o sistema* (1) *é consistente* ($\mathcal{S} \neq \emptyset$) *então o conjunto solução é sempre da forma:*

$$\mathcal{S} = \boldsymbol{x}_{part} + \mathcal{S}_0$$

onde $\boldsymbol{x}_{part} \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ *denota uma solução particular qualquer de* (1).
Muitas vezes, este resultado se usa para calcular $\mathcal{S}$*: encontrando primeiro uma solução particular, e depois calculando* $\mathcal{S}_0$. *Porem, pode ser usado para encontrar* $\mathcal{S}_0$ *jà que* $\mathcal{S}$ *é conhecido (caso não é vazio) sem ter que resolver* (2).

a) Vimos no exercício 3-*a*) da Folha 2 que o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 9. \end{cases}$$

tem uma solução única: $\mathcal{S} = \{(5,1)\} \subset \mathbb{R}^2$, logo $N(A) = \mathcal{S}_0 = \{0\}$. É o subespaço trivial, ele tem dimensão zero e não admite nenhuma base.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim \mathbb{R}^2$, conclua-se que o subespaço imagem $\mathrm{Im}A \subset \mathbb{R}^2$ tem dimensão 2. Segue que $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^2$

b) Vimos no exercício 3-*b*) da Folha 2 que o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ -4x_1 + 6x_2 = 8. \end{cases}$$

é inconsistente, logo não podemos deduzir $\mathcal{S}_0$, e temos que resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Obtemos o seguinte resultado:

$$\mathcal{S}_0 = N(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1, x_2) = (3\alpha, 2\alpha) \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

De maneira equivalente, tem-se que $N(A) = \mathrm{Cob}\{(3,2)\}$. Logo $N(A)$ admite $\{(3,2)\}$ como base, e tem dimensão 1.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim \ker A + \dim \mathrm{Imim}A = \dim \mathbb{R}^2$, conclua-se que o subespaço imagem $\mathrm{Im}A \subset \mathbb{R}^2$ tem dimensão 1. Segue que Segue que $\mathrm{Im}A = \mathrm{Cob}\{(2,-4)\}$

c) Vimos no exercício 3-c) da Folha 2 que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

tem uma solução única $\mathcal{S}_0 = \{(0,0)\}$. Logo $N(A)$ tem dimensão zero e não admite nenhuma base.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim \mathbb{R}^2$, conclua-se que o subespaço imagem de A im$A \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 2. Segue que Im$A = \mathbb{R}^2$

d) Vimos no exercício 3-e) da Folha 2 que o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

tem conjunto solução uma reta em $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (8 - 2\alpha/7\,,\ -5 + \alpha\,,\ \alpha) \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R} \ \right\}.$$

Aqui, $\mathbf{x}_{part} = (8, -5, 0)$ é solução particular e o sistema homogêneo tem conjunto solução:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left\{ \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2, x_3) = (-2\alpha/7\,,\ \alpha\,,\ \alpha) \text{ onde } \alpha \in \mathbb{R} \ \right\}. \\ &= \mathrm{Cob}\,\{(-2/7, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Logo $N(A)$ tem base $\{(-2/7, 1, 1)\}$ (ou $\{(-2, 7, 7)\}$ também...) e tem dimensão 1.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim \mathbb{R}^3$, conclua-se que o subespaço imagem Im$A \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 2. Os vetores $(2, 1, 3)$ e $(3, 1, 4)$ sendo claramente linearmente independente, eles formam uma base de Im A, e Im $A = \mathrm{Cob}\,\{(2, 1, 3), (3, 1, 4)\}$.

e) Vimos no exercício 2-d) da Folha 2 que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad + \ \ x_4 = 5 \\ \qquad\qquad x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$$

tem conjunto solução:

$$\mathcal{S} = \left\{ \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 2\alpha - \beta\,,\ \alpha\,,\ 4 - 3\beta\,,\ \beta) \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \right\}.$$

Aqui, $\mathbf{x}_{part} = (5, 0, 4, 0)$ é solução particular e o sistema homogêneo tem conjunto solução:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left\{ \ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2\alpha - \beta\,,\ \alpha\,,\ -3\beta\,,\ \beta) \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \right\} \\ &= \mathrm{Cob}\{(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -3, 1)\} \end{aligned}$$

Os vetores $(-2, 1, 0, 0)$ e $(-1, 0, -3, 1)$ sendo linearmente independentes, $N(A)$ admite o conjunto $\{(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -3, 1)\}$ como base, e tem dimensão 2.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim \mathbb{R}^4$, conclua-se que o subespaço imagem Im$A \subset \mathbb{R}^2$ tem dimensão 2. Segue que Im $A = \mathbb{R}^2$. Os vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 1, 0, 0)$ sendo linearmente independentes, eles formam um base de ImA.

f) Vimos no exercício 2-e) da Folha 2 que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_4 = 6. \end{cases}$$

tem conjunto solução:

$$\mathcal{S} = \left\{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - 5\alpha + 2\beta\ ,\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ 6) \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \right\}.$$

Aqui, $\mathbf{x}_{part} = (3, 0, 0, 6)$ é solução particular e o sistema homogêneo tem conjunto solução:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= \left\{\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5\alpha + 2\beta\ ,\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ 0) \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \right\} \\ &= \mathrm{Cob}\{(-5, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Os vetores $(-5, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, 1, 0)$ sendo linearmente independentes, conclua-se que $N(A)$ admite o conjunto $\{(-5, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}$ como base e tem dimensão 2.

Aplicando o Teorema do posto: $\dim(\ker A) + \dim(\mathrm{Im}A) = \dim \mathbb{R}^4$, conclua-se que o subespaço imagem $\mathrm{Im}A \subset \mathbb{R}^4$ tem dimensão 2.

Resolução do Exercício 8: Notemos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ os seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \big(1, 1, 0, 0\big)\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \big(1, -1, 1, 0\big)\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \big(0, 0, 0, 1\big)\,. \end{aligned}$$

Observe que pelas definições, temos:

$$\begin{aligned} S &= \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2, y_3, y_4) = (a + b, a - b + 2c, b, c) \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \quad \mid \quad \mathbf{y} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3, \quad \text{onde } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \ \mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}. \end{aligned}$$

Falta mostrar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são linearmente independentes. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ escalares tais que $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b \qquad = 0 \\ a - b + 2c = 0 \\ \quad\ b \qquad = 0 \\ \qquad\quad\ c = 0. \end{cases}$$

obtemos facilmente que $a = b = c = 0$. Segue que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são linearmente independentes, portanto eles formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Resolução do Exercício 9: Notemos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ os seguintes vetores em P_3:

$$\mathbf{v}_1 := x^2 + 2, \quad \mathbf{v}_2 := x + 3,$$

Observe que pelas definições, temos:

$$\begin{aligned} S &= \{p \in P_3 \mid p(x) = ax^2 + bx + 2a + 3b \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{p \in P_3 \mid p = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \ \mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}. \end{aligned}$$

Falta mostrar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente independentes: sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ escalares tais que $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = 0_{P_3}$, então calculemos que temos:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = 0_{P_3} \quad \Longleftrightarrow \quad ax^2 + bx + 2a + 3b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \quad\quad = 0 \\ \quad\quad b = 0 \\ 2a + 3b = 0. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \ = 0 \\ \ b = 0. \end{cases}$$

Segue que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, portanto eles formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Resolução do Exercício 10:

a) Vimos que os vetores $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, logo eles formam um base do subespaço $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Segue que ele tem dimensão 2.

b) Os vetores $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, logo formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, que tem dimensão 3.

c) Os vetores $\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ não são linearmente independentes porem, é fácil ver que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ o são. Eles formam uma base de $\mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathrm{Cob}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ que tem dimensão 2.

Resolução do Exercício 11:

a) É fácil ver que os vetores $x,\ x-1,\ x^2+1$ são linearmente independentes logo $\mathrm{Cob}\{x,\ x-1,\ x^2+1\} = P_3$, de dimensão 3.

b) Os vetores $x,\ x-1,\ x^2+1,\ x^2-1$ não podem ser linearmente independentes pois P_3 tem dimensão 3, é fácil ver que eles geram P_3, pois este espaço tem dimensão 3.

c) Os vetores $x^2,\ x^2 - x - 1$ e $x + 1$ não são linearmente independentes pois satisfazem a relação não trivial: $x^2 - (x^2 - x - 1) - (x + 1) = 0_{P_3}$. Os vetores $x^2,\ x^2 - x - 1$ são linearmente independentes logo $x^2,\ x^2 - x - 1$ e $x + 1$ geram um subespaço de dimensão 2 em P_3.

d) Os vetores $2x,\ x-2$ são claramente linearmente independentes, logo eles geram um subespaço de dimensão 2 em P_3.

Resolução do Exercício 12:

a) Um polinomio em P_3 pertence em S se e somente se ele admite 0 por raiz. Portanto:

$$\begin{aligned} S &= \{p \in P_3 \mid p(x) = x(ax+b) \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &= \{p \in P_3 \mid p(x) = ax^2 + bx \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &= \mathrm{Cob}\{x, x^2\} \end{aligned}$$

Os polinomios x e x^2 sendo linearmente independentes, eles formam um base de S, em particular S tem dimensão 2.

b) Um polinomio em P_3 pertence em T se e somente se ele admite 0 por raiz. Portanto:

$$\begin{aligned} T &= \{p \in P_3 \mid p(x) = (x-1)(ax+b) \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &= \{p \in P_3 \mid p(x) = ax^2 + (b-a)x - b \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &= \{p \in P_3 \mid p(x) = a(x^2-1) + b(x-1) \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}, \\ &= \mathrm{Cob}\{x^2-1, x-1\} \end{aligned}$$

Os polinomios x^2-1 e $x-1$ sendo linearmente independentes, eles formam um base de T, em particular T tem dimensão 2.

c) Um polinomio em P_3 pertence em $Ts \cap T$ se e somente se ele admite 0 e 1 por raiz. Portanto:

$$\begin{aligned} S \cap T &= \{p \in P_3 \mid p(x) = ax(x-1) \text{ onde } a \in \mathbb{R}\}, \\ &= \mathrm{Cob}\{x(x-1)\} \end{aligned}$$

Portanto $\{x(x-1)\}$ forma um base de $S \cap T$, em particular $S \cap T$ tem dimensão 1.

Referências

[1] Steven J. Leon, *Álgebra Linear com aplicações*, 8^a edição, LTC 2011.