D S T Q Q S S

Nome: William Cordeiro Barbosa

1- Determine se os seguintes vetores são linearmente independentes em R^2

a) $(2,1)^T, (3,2)^T$

$a_1(2,1) + a_2(3,2) = 0$

$(2a_1, a_1) + (3a_2, 2a_2) = 0$

$(2a_1 + 3a_2, a_1 + 2a_2) = 0$

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = 0 \Rightarrow 2(-2a_2) + 3a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow -4a_2 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$\left.\begin{array}{l} \\ \Rightarrow a_1 = -2 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} LI$

b) $(2,3)^T + (4,6)^T$

$x(2,3) + y(4,5) = 0$

$(2x, 3x) + (4y, 5y) = 0$

$(2x + 4y, 3x + 5y) = 0$

$$\begin{matrix} 2x + 4y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

A\B nos retorna $(0,0)^T$, são LI

c) $(-2,1)^T, (1,3)^T, (2,4)^T$

$x(-2,1) + y(1,3) + z(2,4) = 0$

$(-2x, x) + (y, 3y) + (2z, 4z) = 0$

$$\begin{matrix} -2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{matrix} \quad \overset{A}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

A\B nos retorna $(0,0,0)^T$, são LI

d) $(-1,2)^T, (1,-2)^T, (2,-4)^T$

$x(-1,2) + y(1,-2) + z(2,-4) = 0$

$(-x, 2x) + (y, -2y) + (2z, -4z) = 0$

$$\begin{matrix} -x + y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

A\B nos retorna $(0,0,0)$, são LI

kajoma

e) $(1,2)^T, (-1,1)^T$

$x(1,2) + y(-1,1) = 0$

$(x, 2x) + (-y, y) = 0$ A   0

$(x-y, 2x+y) = 0$

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A\B no Octave é $(0,0)$, são LI

2- Mostre que $\{(1,2,3)^T, (-2,1,0)^T, (1,0,1)^T\}$ é base para o R^3

I) $x(1,2,3) + y(-2,1,0) + z(1,0,1) = (0,0,0)$

$(x, 2x, 3x) + (-2y, y, 0) + (z, 0, z) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 3x + z &= 0 \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

A\B, no Octave, gera $(0,0,0)$, são LI

II)

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,2,3) + b(-2,1,0) + c(1,0,1) \\ &= (a, 2a, 3a) + (-2b, b, 0) + (c, 0, c) \\ &= (a - 2b + c, 2a + b, 3a + c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a - 2b \\ y &= 2a + b \\ z &= 3a + c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= x - 2b \\ b &= y - 2a \\ c &= z - 3a \end{aligned}$$

- Qualquer vetor v pode ser representado por uma combinação linear de v_1, v_2, v_3

kajoma

3- Considere os vetores $x_1=(2,1)^t$, $x_2=(4,3)^t$, $x_3=(7,3)^t$

a) mostre que x_1 e x_2 formam uma base para o R^2

I) $(0,0) = x(2,1) + y(4,3)$

$= (2x, x) + (4y, 3y)$

$= (2x+4y, x+3y)$

$= 2x + 4y = 0$ $\quad$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= x + 3y = 0$

Na matriz A|B são $(0,0)^t$, logo LI

II) $(x,y) = a(2,1) + b(4,3)$

$(x,y) = (2a, a) + (4b, 3b)$

$x = 2a + 4b \Rightarrow b = (x-2a)/4$

$y = a + 3b \Rightarrow a = y - 3b$

$b = \dfrac{(x-2a)}{4}$, $a = y - 3b$

Logo vetor genérico do espaço R^2

b) por que x_1, x_2, x_3 devem ser linearmente dependentes

Para que todos possam ser base de R^2

D S T Q Q S S

4- Sejam $u_1 = (3,2)^T$, $u_2 = (1,1)^T$ e $x = (7,4)^T$. Encontre as coordenadas de X em relação a u_1 e u_2

$(7,4) = a_1(3,2) + a_2(1,1)$

$(7,4) = (3a_1, 2a_1) + (a_2, a_2)$

$7 = 3a_1 + a_2$ $\quad 4 = 2a_1 + 7 - 3a_1$

$4 = 2a_1 + a_2$ $\quad -7+4 = -1a_1$ $\quad 4.3 + a_2 = 4$

$a_2 = 7 - 3a_1$ $\quad -3 = a_1$ $\quad -12+4 = a_2$

$a_1 = 3$ $\quad a_2 = -8$

5- Sejam $b_1 = (1,-1)^T$ e $b_2 = (-2,3)^T$. Encontre a matriz de transição de $\{e_1, e_2\}$ para $\{b_1, b_2\}$ e as coordenadas de $x = (1,2)^T$ em relação à $\{b_1, b_2\}$

$V = \{(1,-1), (-2,3)\}$ $\quad P = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$

$(1,-1) = 1(x_1, x_2) + -1(y_1, y_2)$ $\quad (-2,3) = -2(x_1, x_2) + 3(y_1, y_2)$

$1 = x_1 - y_1$ $\quad -2 = -2x_1 + 3y_1$

$-1 = x_2 - y_2$ $\quad 3 = -2x_2 + 3y_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 - y_1 & -2x_1 + 3y_1 \\ x_2 - y_2 & -2x_2 + 3y_2 \end{bmatrix}$$

- Coordenadas de X

$(1,2) = x(1,-1) + y(-2,3)$

$(1,2) = (x, -x) + (-2y, 3y)$

$(1,2) = (x_1 - 2y_1, -x + 3y)$

$1 = x_1 - 2y_1 \Rightarrow x = 1 + 2y_1$

$2 = -x + 3y \Rightarrow (-1) \Rightarrow -2 = 1 + 2y_1 - 3y_1$

$-2-1 = -1y_1$

$2 - 3.1 = -x$ $\quad y_1 = 1$

$2 - 6 = -x$

$-4 = -x$

$x = 4$ $\quad (4,1)$

kajoma

D S T Q Q S S

6 - Ache a dimensão do subespaço de R^4 coberto por $X_1 = (1,2,-1,0)^T$, $x_2 = (2,5,-3,2)^T$, $x_3 = (2,4,-2,0)^T$, $x^4 = (3,8,-5,4)^T$

dim col $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Im A = Colunas do $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Ker A = $\{y \in R^4 \; A \cdot y = 0 R^4\}$

$$\left.\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 0 \\ -1x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Ker } A = (0,0,0,0)$$

dim A = 1

7 - Mostre que a transformação $L: R^3 \to R^2$ é linear, em que L é definido por: $L(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$

$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$

• Verificar

I) $F(u+v) = F(u) + F(v)$

II) $F(a u) = a F(u)$

$u = (x_1, y_1, z_1)$ $v = (x_2, y_2, z_2)$

• $F(a + u)$

$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\Rightarrow (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2 + z_1 + z_2)$

• $F(u) + F(v)$

$(x_1 + y_1, y_1 + z_1) + (x_2 + y_2, y_2 + z_2) \Rightarrow (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, y_1 + z_1 + y_2 + z_2)$

kajoma

D S T Q Q S S

II) $F(k \cdot u) = k F(u)$ $\quad u = (x_1, y_1, z_1)$

$(kx_1 + ky_1, ky_1 + kz_1) = k(x_1 + y_1, y_1 + z_1)$

$= (kx_1 + ky_1, ky_1 + kz_1)$

8- Seja $b_1 = (1,1,0)^T$, $b_2 = (1,0,1)^T$ e $b_3 = (0,1,1)^T$ e seja L uma transformação linear representando $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ definida por $L(x) = x_1 b_1 + x_2 b_2 + (x_1 + x_2) b_3$. Encontre a matriz A representando L em relação as bases $\{e_1, e_2\}$ e $\{b_1, b_2, b_3\}$

9- Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(1,2) = (2,3,-1)^T$ e $T(3,1) = (1,4,2)^T$?

$e_1 = (1,2)$ $\qquad e_2 = (3,1)$

$W_1 = (2,3,-1)$ $\qquad W_2 = (1,4,2)$

$V = (x,y)$

$T(V) = xT(e_1) + yT(e_2) = x(2,3,-1) + y(1,4,2)$

$(2x + y, 3x + 4y, -x + 2y)$

kajoma