Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD)

Dourados, 22 de Outubro de 2022.

Prof. Dr. Willian Isao Tokura Disciplina: Análise.

Definições apresentadas na última aula

Definição 1: Limite

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in U$ um ponto de acumulação de U. Dizemos que L é o limite de f quando x tende para a, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in U \ \text{ e } \ 0 < ||x - a|| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2: Continuidade

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in U$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$x \in U \ \text{ e } \ ||x - a|| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definição 3: Derivadas parciais

Seja $f : U \underset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto $a \in U$ é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

caso esse limite exista.

Definição 4: Diferenciabilidade

Uma função $f : U \underset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in U$ se

a) Existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

b) Para todo $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $a + v \in U$, tem-se

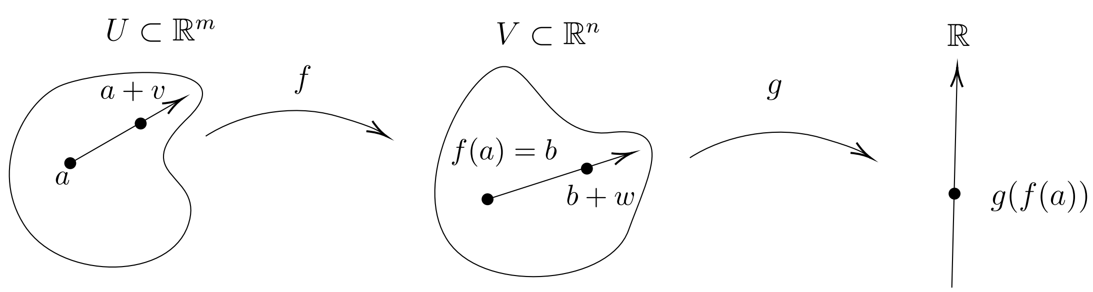
$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i + r(v), \quad \text{onde} \quad \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0.$$

REGRA DA CADEIA

Teorema 1: Regra da cadeia

Seja $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \underset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação tal que cada função coordenada $f_k : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$. Seja ainda $g : V \underset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Se $f(U) \subset V$, então a composta $g \circ f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e suas derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$



Esboço da demonstração: Segue da diferenciabilidade de f_k em a, que para todo $v = (v_1, \ldots, v_m)$ com $a + v \in U$, nós temos

$$f_k(a+v) - f_k(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) v_i + r(v), \quad \text{onde} \quad \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{||v||} = 0.$$

Agora, pondo $w = f(a+v) - f(a) = (w_1, \ldots, w_n)$, temos pela diferenciabilidade de g em $b = f(a)$ que

$$g(b+w) - g(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) w_k + s(w), \quad \text{onde} \quad \lim_{w \to 0} \frac{s(w)}{||w||} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(f(a+v)) - g(f(b)) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) v_i + r(v) \right] + s(w), \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \right) v_i + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) r(v) + s(w)}_{R(v)}. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{R(v)}{||v||} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)\frac{r(v)}{||v||} + \frac{s(w)}{||v||} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)\frac{r(v)}{||v||} + \frac{s(w)}{||w||}\frac{||w||}{||v||}. \tag{1}$$

Munindo $\mathbb{R}^n$ com a norma da soma, temos que

$$\frac{||w||}{||v||} = \frac{|w_1| + \cdots + |w_n|}{||v||} \leq \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a)\frac{v_i}{||v||} \right| + \left| \frac{r(v)}{||v||} \right| + \cdots + \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)\frac{v_i}{||v||} \right| + \left| \frac{r(v)}{||v||} \right|.$$

Como as derivadas parciais de f existem, $\frac{v_k}{||v||}$ é limitado e $\frac{r(v)}{||v||} \to 0$, temos que $\frac{||w||}{||v||}$ é limitado.

Temos então pela expressão (1) que $\frac{R(v)}{||v||} \to 0$. Portanto f é diferenciável em a e as derivadas parciais de $g \circ f$ em a são dadas por:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a),$$

o que finaliza a demonstração. $\square$

LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1.

Considere as funções:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Estude o limite, a continuidade, as derivadas parciais e a diferenciabilidade de f.

Exercício 2.

Considere a função:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Estude o limite, a continuidade, as derivadas parciais e a diferenciabilidade de f.

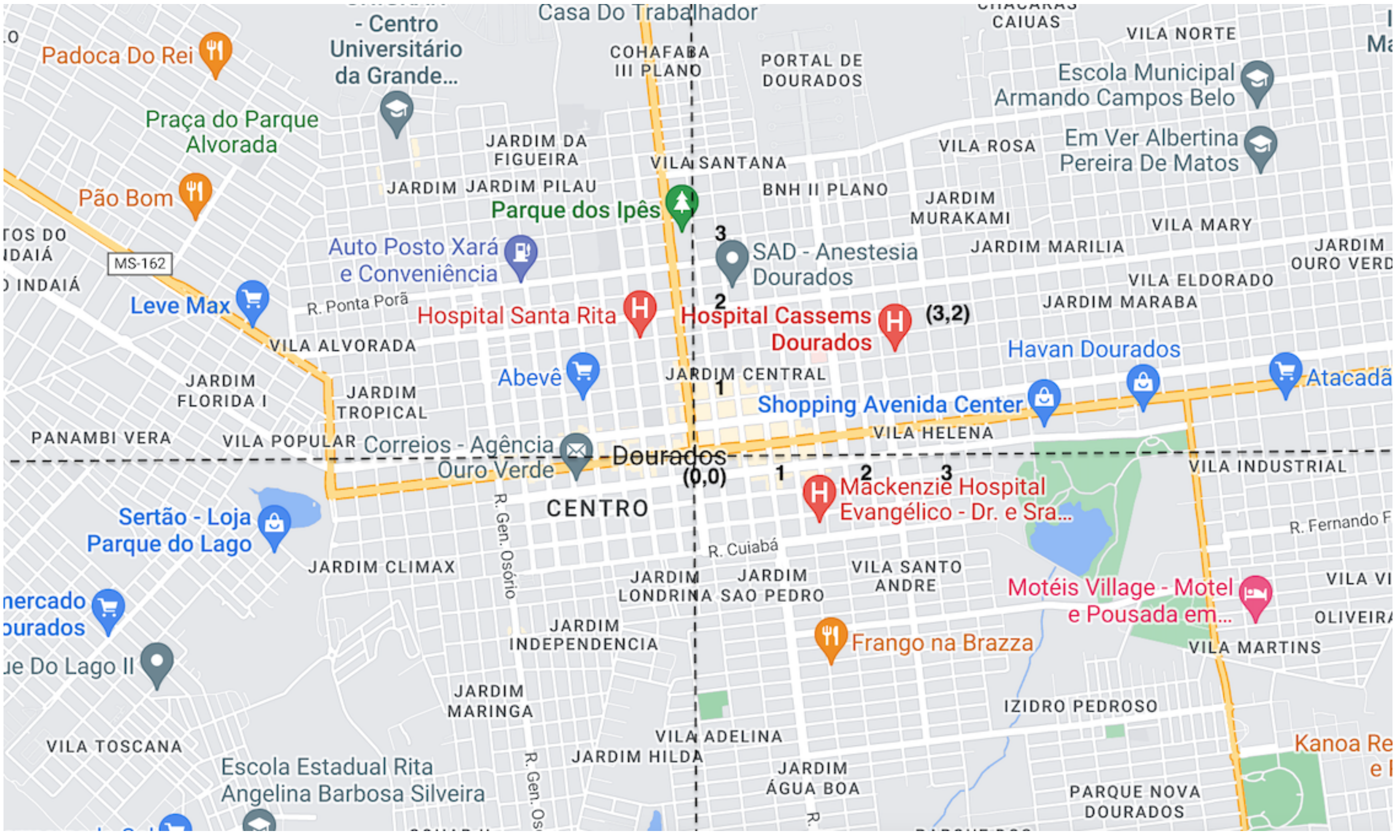
Exercício 3.

Considere a função:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} & \text{se} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Determine os pontos onde f é diferenciável e, por meio da regra da cadeia, calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Exercício 4.



Suponha que a distribuição de temperatura em um ponto (x, y) na cidade de Dourados seja modelado por $T(x, y) = 40 - x^2 - y^2$. Admita que x e y sejam dados em Hectômetros (100m), a temperatura em $°C$ e a coordenada $(0, 0)$ seja no cruzamento da Av. Marcelino Pires com a Av. Presidente Vargas, conforme a figura acima. Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre da mesma temperatura do ponto $(3, 2)$.

b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?