ÁLGEBRA ELEMENTAR

AULA 1

PROF. DR. WILLIAN ISAO TOKURA

EMENTA

- Proposições.
- Cálculo proposicional.
- Implicação e equivalência lógicas.
- Quantificadores. Técnicas de demonstração.
- Teoria elementar dos conjuntos: conceitos iniciais, propriedades, construção de conjuntos, álgebra de conjuntos, produto cartesiano.
- Relações binárias, aplicações e operações.

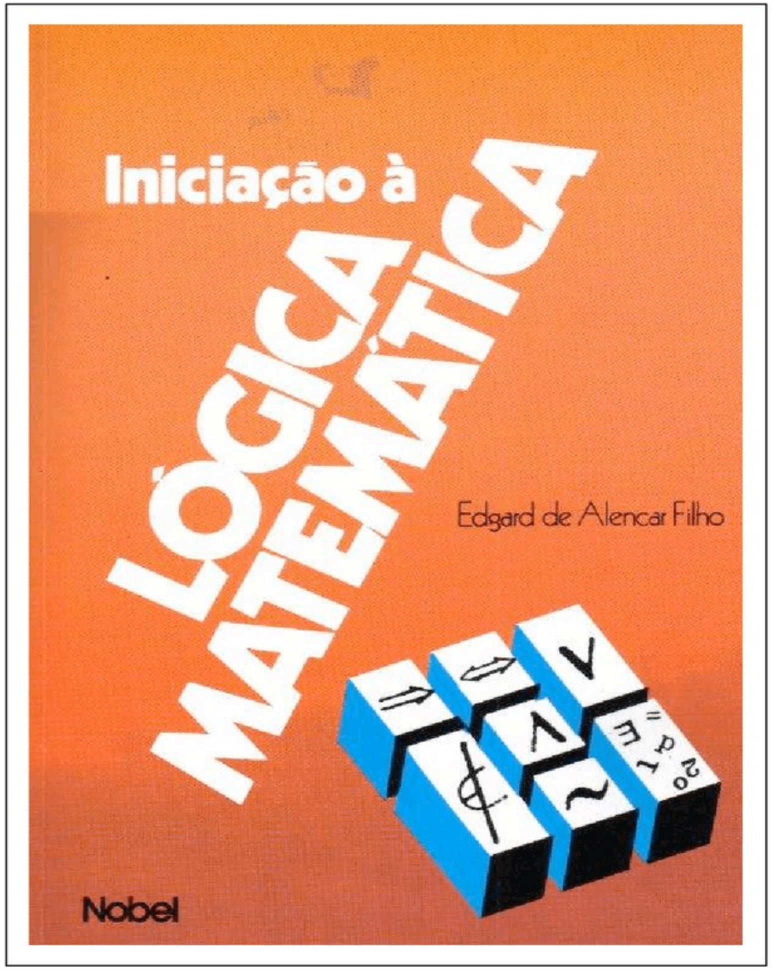
OBJETIVO

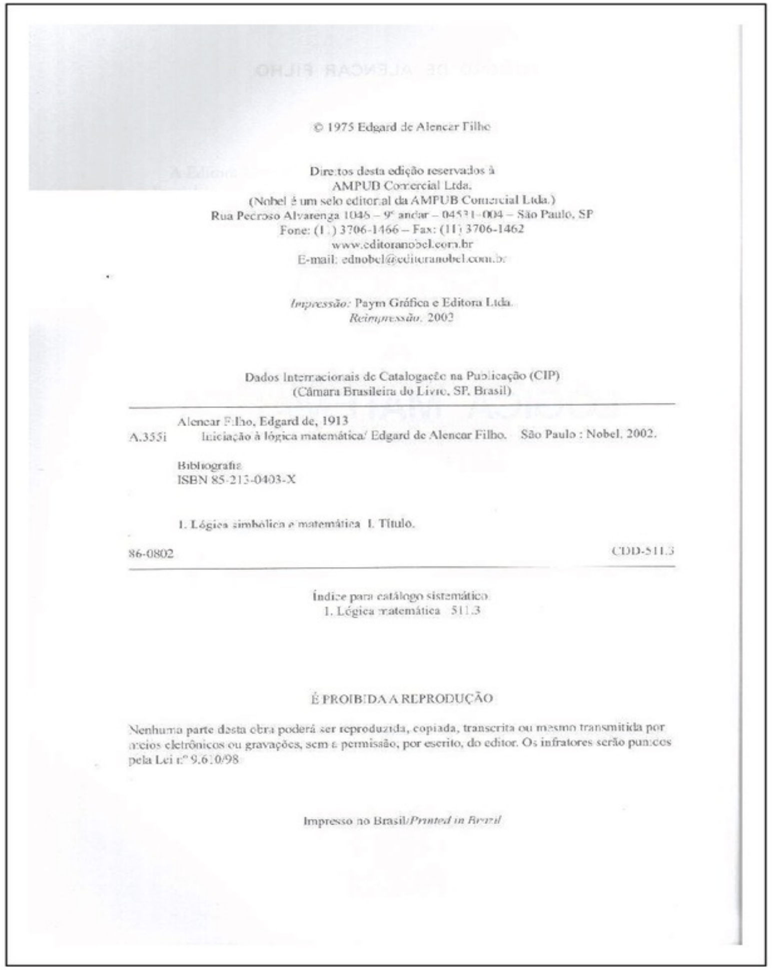
Relacionar os conteúdos da lógica com suas aplicações na área de matemática, mais especificamente à teoria de conjuntos, além de desenvolver o senso crítico, e o uso correto da lógica matemática. Compreender o significado da validade de um argumento e relacionar com a validade de demonstração.

DIAS DE AULA

- 09/03
- 16/03
- 23/03
- 30/03
- 06/04
- 13/04
- 20/04
- 27/04
- 8 encontros!

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA





© 1975 Edgard de Alencar Filho

Direitos desta edição reservados à
AMPUB Comercial Ltda.
(Nobel é um selo editorial da AMPUB Comercial Ltda.)
Rua Pedroso Alvarenga 1046 – 9º andar – 04531-004 – São Paulo, SP
Fone: (11) 3706-1466 – Fax: (11) 3706-1462
www.editoranobel.com.br
E-mail: ednobel@editoranobel.com.br

Impressão: Paym Gráfica e Editora Ltda.
Reimpressão: 2002

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Alencar Filho, Edgard de, 1913
A.355i Iniciação à lógica matemática/ Edgard de Alencar Filho. São Paulo : Nobel, 2002.

Bibliografia
ISBN 85-213-0403-X

1. Lógica simbólica e matemática I. Título.

86-0802 CDD-511.3

Índice para catálogo sistemático:
1. Lógica matemática 511.3

Impresso no Brasil/*Printed in Brazil*

Página pessoal: github.com/williantokura/Algebra_elementar

O QUE É LÓGICA?

- É a ciência que estuda as leis do raciocínio e as condições de verdade em vários domínios de conhecimento.
- Aristóteles foi o pioneiro da chamada lógica formal.
- Matemáticos e filósofos eles aprimoraram o estudo da lógica e criaram a lógica simbólica.

POR QUE ESTUDAR LÓGICA?

- É a base da matemática
- Adquirir uma maior capacidade de organizar e apresentar suas ideias.

❑ Exemplo1: O argumento que segue é válido?

Se eu ganhar na Loteria, serei rico.

Eu ganhei na Loteria.

Logo, sou rico

❑ Exemplo 2: O argumento que segue é válido?

Se eu ganhar na Loteria, serei rico

Eu não ganhei na Loteria

Logo, não sou rico

EXISTEM DIFERENTES LÓGICAS

- Existem diversos tipos de lógica, cada uma delas apresentando suas aplicações teóricas e práticas.

1. Lógica proposicional
2. Lógica de primeira ordem
3. Lógica de segunda ordem
4. Lógica modal
5. Lógica descritiva
6. Etc

LÓGICA PROPOSICIONAL

- A lógica proposicional estende a lógica de Aristóteles, adicionando uma linguagem simbólica.
- Esta linguagem possui símbolos para representar:

1. As proposições
2. Os conectivos
3. Os possíveis valores lógicos

PROPOSIÇÕES

Definição: Uma proposição é um conjunto de palavras que exprimem um pensamento dentro de certo contexto, podendo ser VERDADEIRO ou FALSO.

Por exemplo:

- A lua é um satélite da Terra
- $\pi > \sqrt{5}$
- $\cos 0 = 1$
- A UFGD é uma escola de ensino médio
- A UFGD é uma faculdade de ensino superior

PROPOSIÇÕES

Não são proposições:

- Interjeições

1. Nossa, que prova difícil!
2. Ei!

- Questões

1. Você vai almoçar na cantina hoje?
2. O que?

- Frases Imperativas

1. Leia o livro que indiquei!
2. Guarde o celular!

PROPOSIÇÕES

A lógica matemática adota os dois seguintes princípios ou axiomas:

- PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser VERDADEIRA e FALSA ao mesmo tempo.
- PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda proposição ou é VERDADEIRA ou é FALSA, isto é, verifica-se sempre um desses casos e nunca um terceiro.

Em virtude desse princípio a logica matemática é uma lógica bivalente.

CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

➢ As proposições podem ser de dois tipos:

- Simples (ou atômicas)
- Compostas (ou molecular)

➢ As proposições SIMPLES são aquelas que não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma

➢ Normalmente são representadas por letras latinas minúsculas (p, q, r, s...), chamadas letras proposicionais.

❑ p: O céu é azul.

❑ q: Pedro é estudante.

CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES

- Já as proposições compostas são aquelas formadas pela combinação de duas ou mais proposições
- Normalmente representadas pelas letras latinas maiúsculas (P, Q, R, S...).
- P: João é médico **e** Pedro é estudante.
- Q: Carlos é estudioso **ou** José é bagunceiro
- R: **Se** Carlos é estudioso, **então** é bom aluno.
- Podemos representar que uma proposição composta P é formada por algumas proposições simples (p, q e r). Assim:
- P(p, q, r)

CONECTIVOS

- São palavras ou símbolos que são utilizados para formar novas proposições a partir de outras.
- P: O número 6 é par e o número 9 é ímpar.
- Q: O triângulo ABC é retângulo ou isósceles.
- r: Não está chovendo.
- R: Se Jorge sabe análise matemática, então ele sabe cálculo.
- T: Um triângulo é equilátero se e somente se todos os seus lados tem o mesmo comprimento.
- Os conectivos podem ser:
- "e", "ou", "não", "se... então", "... se e somente se... "

CONECTIVOS

❑Não	Negação	(~)
❑E	Conjunção	(^)
❑Ou	Disjunção	(v)
❑Se... Então	Condicional	(→)
❑Se e somente se	Bicondicional	(↔)

CONECTIVOS

Ligando as proposições “p: Luiz é Professor” e “q: Luiz cursou a faculdade de matemática”.

- $\sim p$ (lê-se “não p”) Luiz não é Professor.
- $p \wedge q$ (lê-se “p e q”) Luiz é Professor e cursou a faculdade de matemática.
- $p \vee q$ (lê-se “p ou q”) Luiz é Professor ou cursou a faculdade de matemática.
- $p \rightarrow q$ (lê-se “se p, então q”) Se Luiz é Professor, então Luiz cursou a faculdade de matemática.
- $p \leftrightarrow q$ (lê-se “p se, e somente se q”) Luiz é Professor se, e somente se, Luiz cursou a faculdade de matemática.

NOTAÇÃO

- O valor lógico de uma proposição simples pode ser indicado por V(p).
- Se a proposição p for **verdadeira**:
  - V(p) = V
- Se a proposição p for **falsa**:
  - V(p) = F

TABELA - VERDADE

- Levando em consideração o princípio do terceiro excluído, toda proposição simples p só pode possuir o valor lógico Verdadeiro (V) ou Falso (F).

- Utilizaremos um dispositivo que representa todos os possíveis valores lógicos de uma proposição composta correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes.

- Este dispositivo é conhecido como Tabela-Verdade.

TABELA - VERDADE

Vamos imaginar que possuímos uma única proposição simples: p

p
V
F

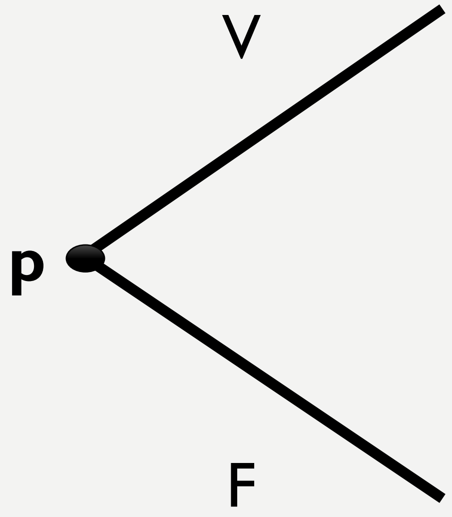


TABELA VERDADE

Vamos imaginar que possuímos 2 proposições simples: p e q.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

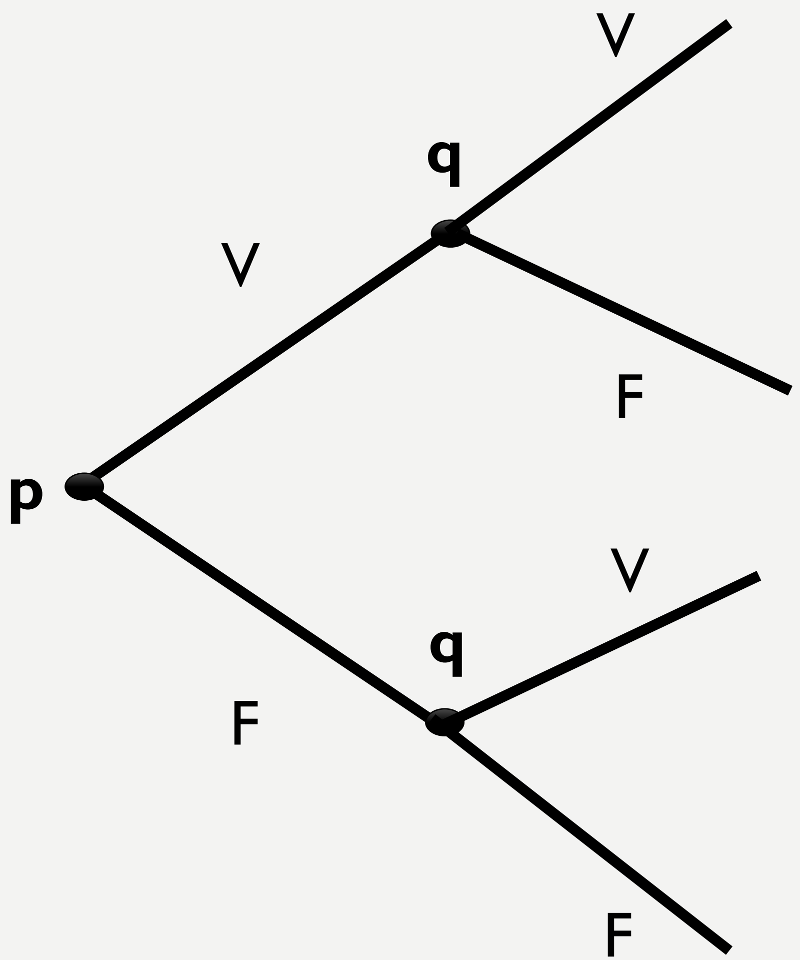


TABELA VERDADE

Vamos imaginar que possuímos 3 proposições simples: p, q e r.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

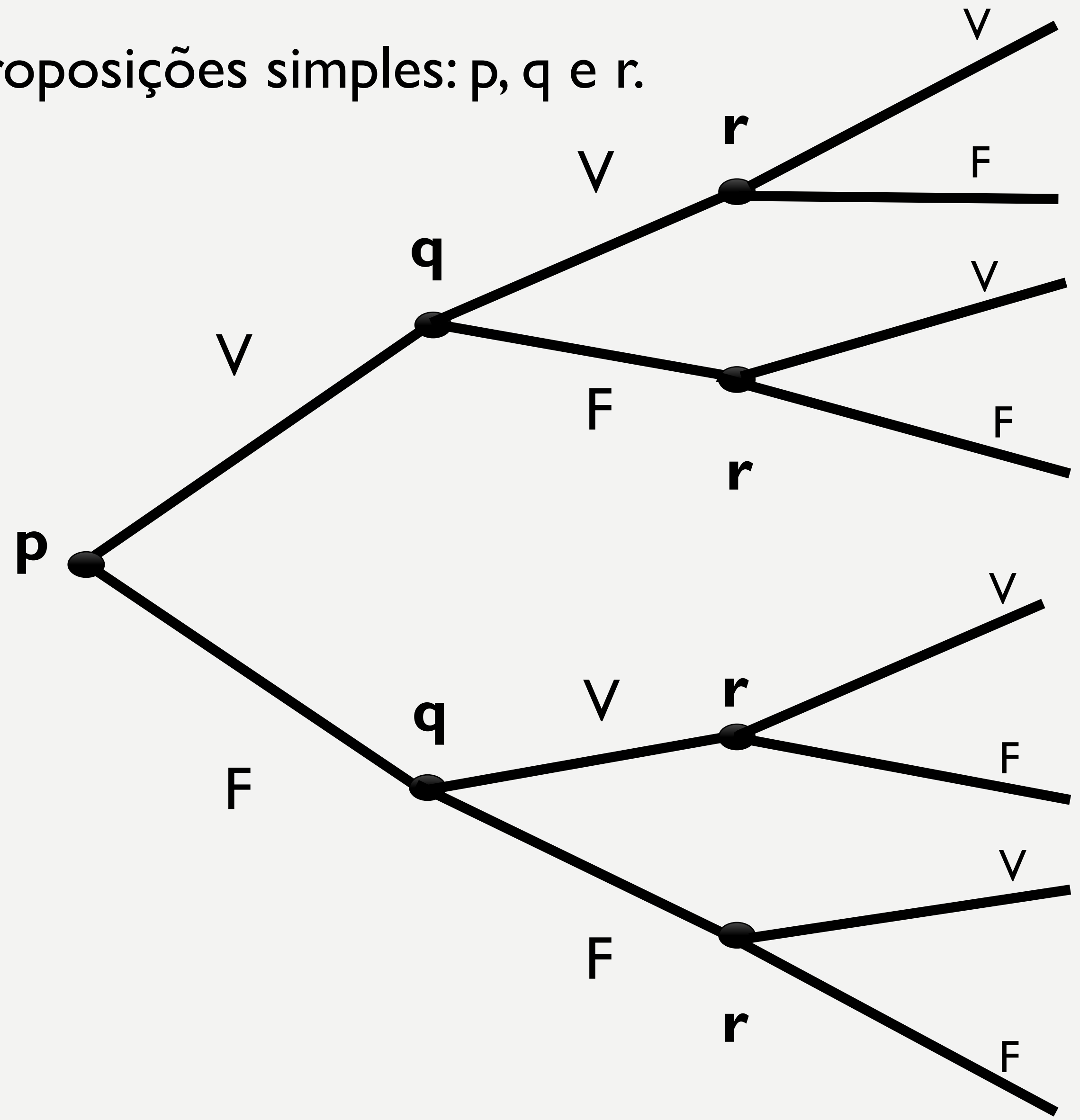


TABELA – VERDADE DA NEGAÇÃO (~)

Podemos representar o valor lógico de p e ~p pela tabela-verdade a seguir:

p	**~ p**
V	F
F	V

- ~V = F
- ~F = V
- V(~p)= ~V(p)

TABELA – VERDADE DA NEGAÇÃO (~)

Exemplos:

a) $p : 7 \neq 6$ (V) $\sim p : 7 = 6$ (F)

$V(\sim p) = \sim V(p) = \sim V = F$

b) $q : 6 < 4$ (F) $\sim q : 6 \geq 4$ (V)

$V(\sim q) = \sim V(q) = \sim F = V$

TABELA – VERDADE DA CONJUNÇÃO (^)

Definição: Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e falso (F) nos demais casos.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela:

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

TABELA – VERDADE DA CONJUNÇÃO (^)

Ou seja, temos

- $V \wedge V = V$
- $V \wedge F = F$
- $F \wedge V = F$
- $F \wedge F = F$

$$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q)$$

EXEMPLOS

- $$\begin{cases} p : A\ neve\ \text{é}\ branca\ (V) \\ q : 2 < 5 \qquad\qquad\quad (V) \end{cases}$$
  $$\overline{\phantom{p : A\ neve\ \text{é}\ branca\ (V)}}$$
  $$p \wedge q : A\ neve\ \text{é}\ branca\ e\ 2 < 5\ (V)$$
  $$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge V = V$$

- $$\begin{cases} p : CANTOR\ \ nasceu\ na\ R\text{ú}ssia\ (V) \\ q : FERMAT\ era\ m\text{é}dico \qquad (F) \end{cases}$$
  $$\overline{\phantom{p : CANTOR\ nasceu\ na\ R\text{ú}ssia}}$$
  $$p \wedge q : CANTOR\ nasceu\ na\ R\text{ú}ssia\ e\ FERMAT\ era\ m\text{é}dico\ (F)$$
  $$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = V \wedge F = F$$

- $$\begin{cases} p : \ \pi > 4 \qquad\qquad\qquad (F) \\ q : sen(0) = 1 \qquad\ (V) \end{cases}$$
  $$\overline{}$$
  $$p \wedge q : \pi > 4\ e\ sen(0) = 1 (F)$$
  $$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge F = F$$

TABELA – VERDADE DA DISJUNÇÃO (∨)

Definição: Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p ou q”, cujo valor lógico é verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e falso (F) quando p e q são ambas falsas.

p	**q**	**p ∨ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

TABELA – VERDADE DA DISJUNÇÃO (∨)

Ou seja, temos

- V ∨ V =V
- V ∨ F = V
- F ∨ V = V
- F ∨ F = F

$$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$$

EXEMPLOS

- $\begin{cases} p: Paris \text{ é } a\ capital\ da\ França\ (V) \\ q: 9 - 4 = 5 \qquad\qquad\qquad (V) \end{cases}$

  $p \vee q : Paris \text{ é } a\ capital\ da\ França\ ou\ 9 - 4 = 5\ (V)$

  $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee V = V$

- $\begin{cases} p: CAMÕES\ escreveu\ os\ Lusíadas\ (V) \\ q: \ \pi = 3 \qquad\qquad\qquad (F) \end{cases}$

  $p \vee q : CAMÕES\ escreveu\ os\ Lusíadas\ ou\ \pi = 3\ \ (V)$

  $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = V \vee F = V$

- $\begin{cases} p: \ \pi > 4 \qquad\qquad (F) \\ q: \sqrt{-1} = 1 \qquad (F) \end{cases}$

  $p \vee q : \pi > 4\ ou\ \sqrt{-1} = 1\ (F)$

  $V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$

TABELA – VERDADE DA CONDICIONAL ($\rightarrow$)

Definição: Chama-se condicional uma proposição representada por "se p, então q", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeiro e q é falso, e é verdadeira (V) nos demais casos.

p	**q**	**p → q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nota: p → q também se lê "p é condição suficiente para q", ou "q é condição necessária para p".

TABELA – VERDADE DA CONDICIONAL (→)

Ou seja, temos

- V→ V =V
- V → F = F
- F → V = V
- F → F = V

$$V(p \to q) = V(p) \to V(q)$$

EXEMPLOS

- $\begin{cases} p : GALOIS\ nasceu\ na\ França. & (V) \\ q : GALOIS\ tem\ mais\ de\ 5\ m\ de\ altura & (F) \end{cases}$

  $p \rightarrow q : Se\ GALOIS\ nasceu\ na\ França, então\ GALOIS\ tem\ mais\ de\ 5\ m\ de\ altura (F)$

  $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

- $\begin{cases} p: \text{ Toda aranha tem seis pernas } e \text{ todo ser de seis pernas tem asas } (F) \\ q : \text{ Toda aranha tem asas } (F) \end{cases}$

  $p \rightarrow q$: Se toda aranha tem seis pernas e todo ser de seis pernas tem asas, então toda aranha tem asas (F)

  $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$

- $\begin{cases} p : \ \pi < 4 & (V) \\ q : \sqrt{-1} = i & (V) \end{cases}$

  $p \rightarrow q : se\ \pi < 4, então\ \sqrt{-1} = i\ (V)$

  $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$

TABELA – VERDADE DA BICONDICIONAL (↔)

Definição: Chama-se bicondicional uma proposição representada por “p se e soemente se q”, cujo valor lógico é verdadeiro (V) quando p e q são ambos verdadeiras ou ambas falsas, e é falsidade (F) nos demais casos.

p	**q**	**p↔q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: p↔q também se lê “p é condição necessária e suficiente para q”, ou “q é condição necessária e suficiente para p”.

TABELA – VERDADE DA CONDICIONAL (→)

Ou seja, temos

- V ↔ V =V
- V ↔ F = F
- F↔V = F
- F↔F =V

$$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$$

EXEMPLOS

- $\begin{cases} p : Roma\ fica\ na\ Europa\ (V) \\ q : A\ neve\ \text{é}\ branca \quad (V) \end{cases}$

$$\overline{}$$

$p \leftrightarrow q : Roma\ fica\ na\ Europa\ se\ e\ somente\ se\ a\ neve\ \text{é}\ branca\ (V)$

$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$

- $\begin{cases} p : Lisboa\ \text{é}\ capital\ de\ portugal\ (V) \\ q : \pi = 4 \quad (F) \end{cases}$

$p \leftrightarrow q : Lisboa\ \text{é}\ capital\ de\ portugal\ se\ e\ somente\ se\ \pi = 4\ (F)$

$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$

- $\begin{cases} p : \pi > 9 \quad (F) \\ q : \sqrt{-1} = -1 \quad (F) \end{cases}$

$p \leftrightarrow q : \pi > 9\ se\ e\ somente\ se\ \sqrt{-1} = -1\ (V)$

$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$

EXERCÍCIOS

1. Determine o valor lógico de cada uma das proposições:

a) O número 17 é primo
b) Fortaleza é a capital do Maranhão
c) $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$
d) Todo número divisível por 5 termina em 5.
e) O produto de dois números impares é um número impar.
f) O produto de dois números pares é uma número par.

EXERCÍCIOS

2. Sejam as proposições p: Está frio e q: Está chovendo. Traduzir para a linguagem corrente as proposições:

a) $\sim\sim p$

b) $p \wedge q$

c) $p \vee q$

d) $p \leftrightarrow q$

e) $p \rightarrow \sim q$

f) $p \vee \sim q$

g) $\sim p \wedge \sim q$

h) $p \leftrightarrow \sim q$

i) $p \wedge \sim q \rightarrow \sim q$

EXERCÍCIOS

3. Sejam as proposições p: Jorge é rico e q: Jorge é feliz. Traduzir para a linguagem simbólica as proposições:

a) Jorge é pobre, mas infeliz
b) Jorge é rico e infeliz
c) Jorge é rico ou infeliz
d) Jorge é pobre ou rico, mas infeliz

EXERCÍCIOS

4. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $3 + 2 = 7$ e $5 + 5 = 10$

b) $0 > 2 \wedge \sqrt{3}$ é irracional

c) $2 > 0 \wedge \ 2 + 2 = 4$

d) $2 > 0 \leftrightarrow 2 + 2 = 4$

e) $0 > 1 \rightarrow -1 > 2$

f) $|-1| = 1 \vee -5 = |5|$

g) $\pi > 4 \wedge \pi < 3$

h) $\sqrt{-1} = 1$ se e somente se $2 + 2 = 4$

i) $\pi > 4$ se e somente se $\pi < 3$

EXERCÍCIOS

5. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) Não é verdade que 12 é um número impar.

b) Não é verdade que Belém é a capital do Pará.

c) $\sim(2 > 0 \vee 2 + 2 = 4)$

d) $\sim(0 > 1 \rightarrow -1 > 2)$

e) $\sim(|-1| = 1 \vee -5 = |5|)$

EXERCÍCIOS

6. Sabendo que o valor lógico das proposições p e q são respectivamente V e F, determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $p \land \sim q$

b) $\sim p \land \sim q$

c) $p \lor \sim q$

d) $\sim p \lor \sim q$

e) $p \land (\sim q \lor \sim q)$