# Universidade Federal do Acre (UFAC)

Rio Branco, 28 de Setembro de 2021.

Prof. Dr. Willian Isao Tokura  Disciplina: Geometria diferencial.

**Teorema 1.** (Teorema fundamental da teoria local das curvas) *Dadas as funções diferenciáveis* $k(s) > 0$*,* $\tau(s)$*,* $s \in I$*, existe uma curva parametrizada pelo comprimento de arco* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\alpha$ *tem curvatura* $k(s)$ *e torção* $\tau(s)$*. Além disso, se* $\tilde{\alpha}$ *for outra curva nessas mesmas condições, então existe um movimento rígido* $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\tilde{\alpha} = M \circ \alpha$*.*

**Esboço da demonstração:** Existência: Para provarmos a existência de $\alpha$ é suficiente provarmos a existência de um referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ satisfazendo as fórmulas de Frenet, pois nesse caso basta definir:

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} t(u)du,$$

e teremos $\alpha'(s) = t(s)$, $\alpha''(s) = t'(s) = k(s)n(s)$. Assim, $|\alpha'(s)| = 1$, $\forall t \in I$ e pelas fórmulas de Frenet, a curvatura $k_\alpha(s)$ e a torção $\tau_\alpha(s)$ de $\alpha(s)$ são dadas por:

$$k_\alpha(s) = |\alpha''(s)| = k(s),$$

$$\tau_\alpha(s) = \frac{\alpha'(s) \times \alpha''(s).\alpha'''(s)}{|\alpha'(s) \times \alpha''(s)|^2} = \frac{t(s) \times t'(s).t''(s)}{|t(s) \times t'(s)|^2} = \tau(s).$$

Portanto $\alpha$ será a curva procurada.

Assim sendo, considere

$$t(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s)), \quad n(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)), \quad b(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s)).$$

Então estamos a procura de função $t_i(s)$, $n_i(s)$, $b_i(s)$, $i = 1, 2, 3$ satisfazendo as fórmulas de Frenet

$$\begin{pmatrix} t_1'(s) \\ t_2'(s) \\ t_3'(s) \\ n_1'(s) \\ n_2'(s) \\ n_3'(s) \\ b_1'(s) \\ b_2'(s) \\ b_3'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k(s) & 0 & 0 & 0 \\ -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 & 0 \\ 0 & -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & -k(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau(s) \\ 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(s) \\ t_2(s) \\ t_3(s) \\ n_1(s) \\ n_2(s) \\ n_3(s) \\ b_1(s) \\ b_2(s) \\ b_3(s) \end{pmatrix}$$

Na sequência, vamos fazer uso do teorema de existência e unicidades de EDOS de 1 ordem:

**Teorema 2.** *Seja* $A : I \subset \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *uma aplicação contínua de um intervalo* $I$ *no espaço das matrizes de ordem* $n$*. Então o* (PVI)

$$\begin{cases} x'(s) = A(s)x(s) \\ x(s_0) = x_0, \end{cases}$$

*admite uma única solução em* $I$*.*

Considerando as condições iniciais $t(s_0) = (1,0,0)$, $n(s_0) = (0,1,0)$ e $b(s_0) = (0,0,1)$, temos que a EDO acima pode ser escrita como

$$\begin{cases} x'(s) = A(s)x(s) \\ x(s_0) = (1,0,0,0,1,0,0,0,1). \end{cases}$$

Logo existem funções $t(s)$, $n(s)$ e $b(s)$ que satisfazem as fórmulas de Frenet.

Agora vamos mostrar que $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é ortonormal. Pelas fórmulas de Frenet, deduzimos que $\langle t(s), t(s)\rangle$, $\langle n(s), n(s)\rangle$, $\langle b(s), b(s)\rangle$, $\langle t(s), n(s)\rangle$, $\langle t(s), b(s)\rangle$ e $\langle n(s), b(s)\rangle$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} < t(s), t(s) >' \\ < n(s), n(s) >' \\ < b(s), b(s) >' \\ < t(s), n(s) >' \\ < t(s), b(s) >' \\ < n(s), b(s) >' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2k(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k(s) & 0 & -2\tau(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau(s) \\ -k(s) & k(s) & 0 & 0 & -\tau(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau(s) & 0 & k(s) \\ 0 & \tau(s) & -\tau(s) & 0 & -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < t(s), t(s) > \\ < n(s), n(s) > \\ < b(s), b(s) > \\ < t(s), n(s) > \\ < t(s), b(s) > \\ < n(s), b(s) > \end{pmatrix}$$

com condições iniciais

$$\langle t(s_0), t(s_0)\rangle = 1, \langle n(s_0), n(s_0)\rangle = 1, \langle b(s_0), b(s_0)\rangle = 1$$

$$\langle t(s_0), n(s_0)\rangle = 0, \langle t(s_0), b(s_0)\rangle, \langle n(s_0), b(s_0)\rangle = 0.$$

Por outro lado as funções constantes 1, 1, 1 e 0, 0 e 0 tbm satisfazem o sistema acima. Portanto

$$\langle t(s), t(s)\rangle = 1, \langle n(s), n(s)\rangle = 1, \langle b(s), b(s)\rangle = 1, \langle t(s), n(s)\rangle = 0, \langle t(s), b(s)\rangle, \langle n(s), b(s)\rangle = 0,$$

ou seja, $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é ortonormal.

Para unicidade, considere $\alpha$ e $\tilde{\alpha}$ duas curvas com mesma curvatura e torção e seja $R$ uma rotação de $\mathbb{R}^3$ que leva $\{t(s_0), n(s_0), b(s_0)\}$ em $\{\tilde{t}(s_0), \tilde{n}(s_0), \tilde{b}(s_0)\}$ e $T$ uma translação de $\mathbb{R}^3$ que leva $\alpha(s_0)$ em $\tilde{\alpha}(s_0)$. Então $T \circ R \circ \alpha(s)$ será uma curva em $\mathbb{R}^3$ cujo triedro de Frenet é igual a de $\tilde{\alpha}$ em $s_0$. Pela unicidade do teorema de existência e unicidade com condições iniciais, temos que $\tilde{\alpha} = T \circ R \circ \alpha(s)$.

## Lista de exercícios

**Exercício 1.**

Descreva todas as curvas em $\mathbb{R}^3$ que tem curvatura constante $k > 0$ e torção constante $\tau > 0$.

**Exercício 2.**

Descreva todas as curvas em $\mathbb{R}^3$ que tem curvatura constante $k > 0$ e torção constante $\tau < 0$.

**Exercício 3.**

Descreva todas as curvas em $\mathbb{R}^3$ que tem curvatura constante $k = 0$ e torção constante $\tau = 0$.

**Exercício 4.**

Descreva todas as curvas em $\mathbb{R}^3$ que tem curvatura constante $k = 1$ e torção constante $\tau = 0$.

**Exercício 5.**

Existe outra curva que tenha a peculiaridade igual da hélice circular, na qual a curvatura e a torção são constantes?