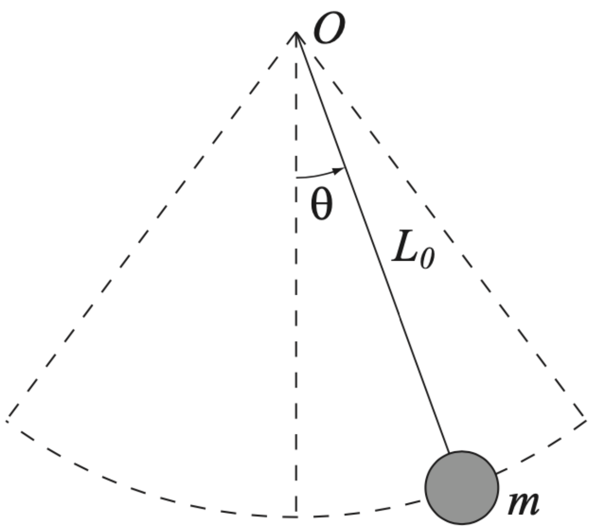
# OBLIG 2
# FYS-MEK 1110 VÅR 2022

Versjon 10.02.2022, ACL

*Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. Fem av seks oblig-poeng må være oppnådd for å gå opp til avsluttende eksamen.*

## Ball som henger i en fjær

I dette prosjektet skal vi studere en modell av en pendel. Pendelen består av en ball med masse $m$ som henger i et masseløst tau med lengde $L_0$. Vi kan se bort ifra luftmotstand. Vi beskriver posisjonen til ballen med posisjonsvektoren $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. Vi vil introdusere en mer avansert modell for pendelen ved å anta at *tauet kan beskrives som en fjær* med fjærkonstant $k$ og likevektslengde $L_0$ (se Figure 1).




Figur 1: Illustrasjon av en pendel som består en ball med masse $m$ festet til et tau med lengde $L_0$. Den andre enden av tauet er festet ved punkt $O$.

**(a)** Identifiser alle krefter og tegn et frilegemediagram av ballen.

**(b)** Vis at netto kraft $\vec{F}_{\text{net}}$ som virker på ballen kan skrives som:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F} = -mg\hat{j} - k(r - L_0)\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

hvor $r = |\vec{r}|$ er lengden av tauet, og origo til koordinatsystemet er valgt til å være festepunktet $O$ til tauet.

**(c)** Skriv om uttrykket for netto kraft $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ på komponentform ved å skrive kraftkomponentene, $F_x$ og $F_y$, som funksjoner av $x$- og $y$-komponentene til posisjonsvektoren, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$. (Husk at $r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$.)

I dette prosjektet vil vi *ikke* anta at ballen følger en spesifikk bane, som for eksempel en sirkel. Vi vil i stedet bruke Newtons andre lov for å bestemme bevegelsen til ballen utfra kreftene som virker på den. Ved å bruke modellen vår kan vi bestemme spenningen i tauet og beregne bevegelsen til ballen.

**(d)** For en pendel er det vanlig å beskrive posisjonen til pendelen med vinkelen $\theta$ relativt til vertikalen, se Figure 1. Gir vinkelen $\theta$ en tilstrekkelig beskrivelse av posisjonen til ballen i dette tilfellet? Begrunn svaret ditt.

**(e)** Hvis ballen er i ro ved $\theta = 0$ ($\vec{v} = \vec{0}$) og det er ingen akselerasjon ($\vec{a} = \vec{0}$), hva er posisjonen til ballen? Hva skjer hvis du øker fjærkonstanten $k$ til tauet?

Nå skal vi studere en spesifikk pendel som består av en ball med masse 0.1 kg, og et tau med likevektslengde $L_0 = 1$ m og en fjærkonstant $k = 200$ N/m, noe som tilsvarer et ganske elastisk tau. I begynnelsen kan du anta at ballen starter med null hastighet ved en vinkel $\theta = 30^\circ$ i en avstand $L_0$ fra origo. Vi vil undersøke bevegelsen til ballen ved å integrere bevegelseslikningene numerisk.

**(f)** Finn et uttrykk for akselerasjonen, $\vec{a}(t)$, til ballen. Vi ber deg om å skrive det både på vektorform, hvor akselerasjonsvektoren er en funksjon av posisjonsvektoren $\vec{r}(t)$ og dens lengde $r(t)$, og på komponentform, hvor komponentene $a_x(t)$ og $a_y(t)$ er funksjoner av $x(t)$- og $y(t)$-komponentene til posisjonsvektoren.

**(g)** Sett opp differensiallikningen for akselerasjonen $\vec{a}(t)$ og angi initialverdiene du trenger for å løse differensiallikningen.

**(h)** Skriv et program hvor du implementerer Euler-Cromer-metoden angitt i forrige deloppgave for å finne bevegelsen til ballen. Programmet bør plotte posisjonen til ballen i $xy$-planet for de første 10 sekundene til bevegelsen.

Hint 1: Du kan skrive de matematiske uttrykkene nesten direkte inn i programmet ditt hvis du bruker vektornotasjon og vektoroperasjoner i koden.

Hint 2: Husk at $r = r(t) = |\vec{r}(t)|$ varierer med tiden!

Hint 3: *Ikke* bruk $\theta(t)$ til å beskrive posisjonen til ballen (husk svaret ditt i deloppgave **d**). Beskriv bevegelsen med $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ og bruk resultatene for akselerasjonen fra over.

**(i)** Bruk programmet til å finne hvordan ballen oppfører seg med de gitte initialverdiene og med tidsteg $\Delta t = 0.001$s. Plott den resulterende bevegelsen. Beskriv det du ser.

***DE SISTE TRE OPPGAVENE ER FRIVILLIGE, OG IKKE NØDVENDIGE FOR Å FÅ GODKJENT OBLIGEN.***

**(j)** Hva skjer hvis du øker $\Delta t$ til $\Delta t = 0.01$s og $\Delta t = 0.1$s? Forklar hva du ser. (Du kan også teste hva som skjer hvis du bruker Eulers metode med $\Delta t = 0.001$s i stedet for Euler-Cromers metode.)

**(k)** Kjør modellen igjen med $k = 20$ N/m og $k = 2000$ N/m. Beskriv bevegelsen i begge tilfeller og sammenlign med når $k = 200$ N/m. Er resultatene fornuftige? Basert på dette, kan du foreslå hvordan man kan bruke denne metoden til å modellere en pendel i et stivt tau? Hva tror du vil være begrensningene til denne tilnærmelsen? (Test hva som skjer hvis du bruker $k = 2 \cdot 10^6$ N/m i koden.)

**(l)** Skriv om programmet slik at du er sikker på at tauspenningen er null hvis fjæren er komprimert. Bruk dette programmet til å bestemme bevegelsen med initialverdiene $\vec{v_0} = 6.0\hat{i}$ m/s og $\vec{r_0} = -L_0\hat{j}$. Hva skjer? Utforsk forskjellige initialverdier og forklar hva du observerer.

---

Oblig 2 slutt.