FYS-MEK1110 Mekanikk, vår 2022

Oppsummering av pensum

Ann-Cecilie Larsen

19. mai 2022

1 Bevegelse i én dimensjon (AMS kap. 4)

I en dimensjon dropper vi ofte vektorsymboler, men vi minner om at hastighet er en vektor og fart (absoluttverdien, størrelsen til hastigheten) er en skalar.
Begreper og størrelser:

- Bevegelse er karakterisert ved posisjon, hastighet, og akselerasjon: bevegelsesdiagrammer
- Forflytning:
$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$
- Gjennomsnitts(middel-)hastighet:
$$\bar{v}(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
- Momentanhastighet:
$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$
- Gjennomsnitts(middel-)akselerasjon:
$$\bar{a}(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$
- Momentanakselerasjon:
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$
- Bevegelsesligninger: ved å integrere akselerasjonen får vi hastigheten, og ved å integrere hastigheten får vi posisjonen:
$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')dt'$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left[\int_0^{t''} a(t')dt' \right] dt''$$
- Euler-Cromer-metoden (numerisk løsning av bevegelsesligningene):
$$v(t_i + \Delta t) = v(t_i) + a(x(t_i), v(t_i), t_i) \cdot \Delta t$$
$$x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + v(t_i + \Delta t) \cdot \Delta t$$

2 Newtons lover i én dimensjon (AMS kap. 5)

Begreper og størrelser:

- Inertialsystem: et koordinatsystem som er i ro eller har konstant hastighet. Newtons lover gjelder kun i inertialsystemer.
- Identifikasjon av krefter
- Frilegemediagram
- Kraftmodeller (fortegn gitt av hvilket koordinatsystem man velger, men pass ekstra på fortegn for luftmotstand og fjærkraft):
  - Gravitasjon ved jordoverflaten:
  $$F_G = mg$$
  - Oppdrift ("buoyancy"):
  $$F_B = V\rho_V g$$
  - Viskøse krefter: for lave hastigheter (ikke turbulens):
  $$F_D = -k_v v$$
  For høye hastigheter (turbulens):
  $$F_D = -Dv^2$$
  - Fjærkraft (Hookes lov):
  $$F_k = \pm k\Delta x$$
  - Normalkraft: ingen gitt modell, bestemt av betingelsene i den spesifikke situasjonen.
- Newtons 1. lov:
$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = \vec{0},$$
dvs. ingen krefter virker eller summen av alle krefter er null (ingen akselerasjon).
- Newtons 2. lov:
$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = m\vec{a}$$
- Newtons 3. lov:
$$\vec{F}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\vec{F}_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}$$
- **"Oppskrift" for å løse oppgaver**: (1) *Identifiser*: objekt, omgivelser, definer koordinatsystem og finn initialbetingelsene. (2) *Modeller*: Finn kreftene, bruk Newtons 2. lov for å finne akselerasjonen. (3) *Løs*: løs bevegelsesligningene analytisk eller numerisk. (4) *Analyser*: Er resultatene fornuftige? Tolk resultatene og svar på spørsmålet i oppgaven.

3 Bevegelse i to og tre dimensjoner (AMS kap. 6)

Begreper og størrelser:

- Vektor (størrelse og retning)
- Skalar (kun størrelse)
- Posisjonsvektor:
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$$
Størrelse:
$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Hastighetsvektor:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

  Størrelse:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- Akselerasjonsvektor:

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

  Størrelse:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Bevegelsesligninger i 3D: helt analogt med 1D, men vi må bruke vektorer for akselerasjonen, hastigheten og posisjonen. Vi løser nå

$$\vec{a}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

  hvor vi igjen må vite initialbetingelsene $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ og $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$.

- Referansesystemer og relativbevegelse i intertialsystemer (Galileo-transformasjoner): system i ro, S, og system som beveger seg i forhold til S med konstant hastighet $\vec{u}$, S'.
  Posisjon:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t).$$

  Hastighet:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \vec{u} + \vec{v}'.$$

  Akselerasjon:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \vec{a}',$$

  siden $\vec{u}$ er konstant.

4 Newtons lover i to og tre dimensjoner (AMS kap. 7)

Begreper og størrelser:

- Kraftmodeller i to og tre dimensjoner:
  - Luftmotstand (med turbulens):
$$\vec{F}_D = -D\vec{v}|\vec{v}|$$
  - Fjærkraft:
$$\vec{F}_k = \pm k\Delta\vec{r}$$
  - Newtons gravitasjonslov:
$$\vec{F}_G = -\gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$
    med enhetsvektor i radiell retning:
$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

- Euler-Cromer-metoden i to og tre dimensjoner: husk å bruke vektorer (f.eks. numpy arrays i Python), eller regn ut komponentvis. Se eksempler i Canvas under Moduler → Andre ressurser → Python- og Matlab-eksempler.

- Unnslipningshastighet: den hastigheten som skal til for å unnslippe Jordas gravitasjonsfelt.

5 Betinget bevegelse (AMS kap. 8)

Begreper og størrelser:

- Fri bevegelse: bevegelsen bestemmes av kreftene og initialbetingelsene.
- Betinget bevegelse: banen er gitt, kreftene og initialbetingelsene bestemmer *hvordan* objektet beveger seg på denne gitte banen.
- Lineær, betinget bevegelse, parameterisering av banen: strekning $s(t)$ langs banen, posisjonen $\vec{r}(s(t))$. Fart:
$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$
- Buet, betinget bevegelse: Posisjonsvektor $\vec{r}(t)$, strekning langs banen $s(t)$, banen parameteriseres med $\vec{r}(s(t))$. Hastigheten er alltid tangentiell til banen:
$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{\mathbf{u}}_T(s(t))$$
hvor enhetsvektor i tangentiell retning er gitt ved (for små tidsintervaller, $\Delta t \to dt$)):
$$\hat{\mathbf{u}}_T(s(t)) = \frac{d\vec{r}}{ds}$$
- Akselerasjon i en buet, betinget bevegelse:
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{u}}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{u}}_N = a_T\hat{\mathbf{u}}_T + a_N\hat{\mathbf{u}}_N,$$
hvor ρ er den *lokale* krumningsradien, og med lokalt koordinatsystem gitt av tangentiell enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}}_T$ og normal enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}}_N$.
- Tangentialakselerasjon: forandring av farten langs banen,
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$
- Sentripetalakselerasjon: forandring av bevegelsesretningen, holder legemet på den buede banen
$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$
- Spesialtilfelle: konstant fart på en sirkelbane med radius R og omløpstid T:
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi R}{T}$$
- Buelengde:
$$s(t) = R\phi(t)$$
- Vinkelfart og tangentialfart:
$$\omega(t) = \frac{d\phi}{dt},\ v(t) = R\omega(t)$$
For konstant vinkelfart i en sirkelbevegelse:
$$a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

6 Betinget bevegelse og friksjon (AMS kap. 9)

Begreper og størrelser:

- Lineær, betinget bevegelse (eksempel, legeme på et skråplan, ingen bevegelse normalt på planet)
- Betinget bevegelse i en sirkel (eksempel, kjeglependel): det kreves en sentripetalakselerasjon for å holde legemet på sirkelbanen. Sentripetalakselerasjonen peker inn mot sirkelens sentrum.
- Statisk friksjon:
$$f_s \leq f_{s,max} = \mu_s N.$$
Dette er en empirisk lov, hvor μ_s er den statiske friksjonskoeffisienten og N er størrelsen på normalkraften. Retningen er betinget av situasjonen. Gjelder kun for legemer i ro.
- Dynamisk friksjon:
$$\vec{f}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{v}.$$
Igjen en empirisk lov (Amontons' lov), den dynamiske friksjonskraften virker mot (den relative) bevegelsesretningen. Den dynamiske friksjonskoeffisienten μ_d er mindre enn den statiske: $\mu_d < \mu_s$.

7 Arbeid og energi (AMS kap. 10 og 11)

Begreper og størrelser:

- Arbeid-energi-teoremet i én dimensjon: arbeidet utført av en nettokraft $F_{net}(x, v, t)$ mellom en tid t_0 og t_1 er gitt ved:
$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_{net}(x, v, t) \cdot v dt = K_1 - K_0,$$
med kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$. Arbeid er tilført mekanisk energi.
- Spesialtilfelle når kraften kun er posisjonsavhengig, $F_{net}(x(t))$:
$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_{net}(x) dx = K_1 - K_0$$
- Arbeid-energi-teoremet i 2D og 3D:
$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot \vec{v} dt = K_1 - K_0.$$
Igjen er $K = \frac{1}{2}mv^2$ men nå må vi huske at $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Prikkprodukt av kraften og hastigheten:
$$\vec{F}_{net} \cdot \vec{v} = (F_T \hat{\mathbf{u}}_T + F_N \hat{\mathbf{u}}_N) \cdot v \hat{\mathbf{u}}_T = F_T v,$$
dvs. kun den tangentielle komponenten til kraften, F_T, bidrar til arbeidet. Normalkomponenten gjør ikke noe arbeid.
- Arbeid-energi-teoremet i 2D og 3D kan også skrives som:
$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \vec{v} dt \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{net} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_C \vec{F}_{net} \cdot d\vec{r}.$$
Generelt avhenger arbeidet av veien, dvs. kurveintegralet langs en kurve C.
- Effekt:
$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}_{net} \cdot \vec{v}.$$

- Konservative krefter: arbeidet er *uavhengig* av veien, og total, mekanisk energi er bevart: $E = U + K =$ konstant. Eksempler: gravitasjon, fjærkraft. I én dimensjon er det en tilstrekkelig betingelse at kraften kun er posisjonsavhengig. Da kan vi alltid finne et potensial slik at

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}.$$

I flere dimensjoner har vi at

$$\vec{F} = -\nabla U$$

hvis og bare hvis

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0},$$

som igjen impliserer at integralet av alle lukkede kurver er null. Her er

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

- Ikke-konservative krefter (hastighetsavhengige): luftmotstand, friksjon.
- Eksempler, potensiell energi og tilhørende kraft (1D):
  - Gravitasjon på Jorda:

$$U(x) = mgx,$$

$$F_G(x) = -\frac{dU}{dx} = -mg.$$

  - Fjærkraft:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x-b)^2,$$

$$F_k(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-b)$$

  hvor b er likevektslengden til fjæren.

- Likevekt: likevektspunkter dersom

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0$$

.

- Stabilt likevektspunkt: minimum i potensiell energi,

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0$$

- Ustabilt likevektspunkt: maksimum i potensiell energi,

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0$$

- Arbeid gjort av ikke-konservative krefter er lik forandring i mekanisk energi:

$$\Delta E = W_{\text{ikke-kons}}$$

(energiprinsippet).

- Totalenergien er alltid bevart (bevaringslov), men mekanisk energi kan gå over til f.eks. termisk energi dersom ikke-konservative krefter virker.

8 Kollisjoner og bevegelsesmengde (AMS kap. 12)

Begreper og størrelser:

- Bevegelsesmengde:
$$\vec{p} = m\vec{v}.$$
- Newtons 2. lov på sin mest generelle form:
$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
- Endring i bevegelsesmengde, impuls:
$$\vec{J} = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{ext} dt.$$
- Midlere kraft som virker over et gitt tidsrom fra t_0 til t_1:
$$\vec{F}_{net}^{\text{average}} = \left\langle \vec{F}_{ext}(t) \right\rangle = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_{ext}(t) dt.$$
- Bevaring av bevegelsesmengde: dersom
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0},$$
er også
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$
og bevegelsesmengden er bevart.
- Definisjon på en kollisjon: en prosess mellom to eller flere legemer hvor (1) indre krefter er mye større enn ytre krefter fra omgivelsene, og (2) som varer en kort tid i forhold til tidsintervallet for hele bevegelsen.
- Elastisk kollisjon: både bevegelsesmengde og mekanisk energi er bevart. Restitusjonskoeffisienten $r = 1$.
- Uelastisk kollisjon: bevegelsesmengde er fortsatt bevart, men ikke mekanisk energi. Restitusjonskoeffisient $0 < r < 1$.
- Fullstendig uelastisk kollisjon: bevegelsesmengde er fortsatt bevart, men ikke mekanisk energi. Restitusjonskoeffisient $r = 0$.
- Rakettligningen:
$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\vec{a}.$$
Pass på fortegn både for $\vec{v}_{rel}$ og $\frac{dm}{dt}$.

9 Flerpartikkelsystemer (AMS kap. 13)

Begreper og størrelser:

- Newtons 2.lov for flerpartikkelsystemer:
$$\sum \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$
hvor
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m\vec{v}_i.$$

- Den totale massen: $M = \sum_i m_i$.
- Massesenterets posisjon:
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i.$$
NB! Legg merke til at $\vec{R} \neq \sum_i \vec{r}_i$!
- Massesenterets hastighet:
$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i.$$
NB! Legg merke til at $\vec{V} \neq \sum_i \vec{v}_i$!
- Massesenterets bevegelsesmengde:
$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{V}.$$
- Massesenterets akselerasjon:
$$\vec{A} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{R} = \frac{d}{dt}\vec{V} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i.$$
- Massesentersystem: koordinatsystem som beveger seg med massesenteret. I massesentersystemet er den totale bevegelsesmengden null per definisjon.
- Kinetisk energi til et flerpartikkelsystem:
$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{i,cm}^2 = K_{cm} + K_{\Delta cm}.$$
Her er V farten til massesenteret, og $v_{i,cm}$ farten til et massepunkt i relativt til massesenteret.
- Potensiell energi til et flerpartikkelsystem (antatt konservative ytre og indre krefter):
$$U_{tot} = \sum_i U_i(\vec{r}_i) + \sum_{i<j} U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ext} + U_{int}.$$
- Total, mekanisk energi:
$$E_{tot} = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{ext} + U_{int}.$$

10 Rotasjonsbevegelse (AMS kap. 14)

Begreper og størrelser:

- For et utstrakt legeme, separerer vi bevegelsen i to deler: (i) bevegelsen til massesenteret; (ii) bevegelsen relativt til massesenteret.
- Rotasjonsbevegelse karakteriseres ved:
  - rotasjonsaksen
  - rotasjonsvinkelen
- Høyrehåndsregelen: Bøy fingrene på høyre hånd med rotasjonsbevegelsen. Tommelen gir retning på rotasjonsaksen.
- Gjennomsnittlig (midlere) vinkelfart:
$$\bar{\omega} = \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Momentan vinkelfart:
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$
- Momentan vinkelakselerasjon:
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$
- Bevegelsesligninger for rotasjonsbevegelse: ved å integrere vinkelakselerasjonen får vi vinkelfarten, og ved å integrere vinkelfarten får vi vinkelen:
$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t')dt'$$
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \int_0^t \left[\int_0^{t''} \alpha(t')dt'\right] dt''$$
Vi må kjenne initialbetingelsene θ_0 og ω_0 for å karakterisere bevegelsen.
- Euler-Cromer-metoden for rotasjonsbevegelse: helt analogt med tilfellet for lineærbevegelse:
$$\omega(t_i + \Delta t) = \omega(t_i) + \alpha(t_i) \cdot \Delta t$$
$$\theta(t_i + \Delta t) = \theta(t_i) + \omega(t_i + \Delta t) \cdot \Delta t$$
- Sammenheng, tangentialfart til et punkt på legemet som roterer med vinkelfart:
$$v = \omega R$$
hvor R er avstanden fra rotasjonsaksen. Tilsvarende for tangentialakselerasjon og vinkelakselerasjon:
$$a_T = \alpha R.$$
- Rotasjon i tre dimensjoner: et punkt på et utstrakt legeme i posisjon $\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ fra rotasjonsaksen beveger seg på en sirkelbane med fart $v = \omega\rho$ ($\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ er radien i sirkelbanen). Med z-aksen som rotasjonsakse, definerer vi vinkelhastigheten som
$$\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}.$$
Hastigheten er i tangentiell retning:
$$\vec{v} \perp \vec{r},\ \vec{v} \perp \hat{\mathbf{k}}$$
Vi har at
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},\ |\vec{v}| = \omega\rho = \omega r \sin\phi,$$
hvor ϕ er vinkelen mellom z-aksen og posisjonsvektor $\vec{r}$. Akselerasjonen:
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$
Dersom vinkelhastigheten er konstant:
$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),\ |\vec{a}| = \omega^2\rho = \frac{v^2}{\rho},$$
som er sentripetalakselerasjonen.

11 Rotasjon av stive legemer (AMS kap. 15)

Begreper og størrelser:

- Stivt legeme: et legeme hvor avstanden mellom to gitte punkter i legemet ikke forandrer seg (ingen deformasjon, ingen vibrasjon).
- Treghetsmoment: legemets motstand mot å få vinkelhastigheten sin endret.
- Treghetsmoment for et utstrakt legeme om z-aksen:

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2,$$

  hvor ρ_i er avstanden fra z-aksen til massepunktet m_i.
- Treghetsmoment for et stivt legeme med kontinuerlig utstrekning:

$$I_z = \int_M \rho^2 dm = \int_V \rho^2 \rho_m(\vec{r}) dV,$$

  hvor M er massen til legemet, dm er et infinitesimalt masse-element, V er volumet til legemet, $\rho_m(\vec{r})$ er tettheten til legemet i en gitt posisjon $\vec{r}$, og volumelementet henger sammen med masse-elementet slik: $dm = \rho_m(\vec{r})dV$.
- Treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret for noen typiske geometriske former med masse M (se figur 15.5 i boka):
  - Tynn stav med lengde d:
  $$I = \frac{1}{12}Md^2$$
  - Full sylinder med radius R:
  $$I = \frac{1}{2}MR^2$$
  - Hul sylinder (ytre radius R_1, indre radius R_2):
  $$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$
  - Sylinderskall med radius R:
  $$I = MR^2$$
  - Tynn plate med lengder a og b:
  $$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$
  - Kule med radius R:
  $$I = \frac{2}{5}MR^2$$
- Kinetisk rotasjonsenergi:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_z\omega^2.$$

- Total kinetisk energi til et stivt legeme som både roterer om en akse gjennom sitt massesenter og hvor massesenteret har en lineærhastighet:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

- Parallellakseteoremet (Steiners sats): dersom treghetsmomentet om en akse gjennom massesenteret, I_{cm}, er kjent, kan vi enkelt beregne treghetsmomentet om en akse A som går parallelt med denne aksen:

$$I_A = I_{cm} + Ms^2,$$

  hvor M er massen til legemet og s er avstanden fra aksen gjennom massesenteret til den parallelle aksen A.

- Superposisjonsprinsippet: vi finner treghetsmomentet til et legeme satt sammen av flere deler, ved å legge sammen treghetsmomentene (om den gitte rotasjonsaksen gjennom punkt O) for hver del:
$$I_{O,AB} = I_{O,A} + I_{O,B}.$$
- Bevaring av total mekanisk energi E for stive legemer:
$$E = K + U = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + U_{ext}.$$
Siden det er et stivt legeme, er det kun potensiell energi pga. ytre krefter (for eksempel gravitasjon). Potensiell energi for gravitasjonskraften ved jordoverflaten:
$$U = MgY,$$
hvor M er massen til det stive legemet og Y er posisjonen til massesenteret.
- Rullebetingelsen: dersom et legeme ruller uten å skli, er massesenterets fart V gitt ved
$$V = \omega R,$$
hvor R er avstanden fra massesenteret og til kontaktpunktet med overflaten hvor legemet ruller (radien til legemet som ruller).

12 Stive legemers dynamikk (AMS kap. 16)

Begreper og størrelser:

- Kraftmoment om et punkt O:
$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F},$$
hvor $\vec{r}$ er posisjonsvektoren fra punkt O til det punktet hvor kraften $\vec{F}$ angriper ("kraftarm"). Størrelsen på kraftmomentet er
$$|\vec{\tau}_O| = \tau_O = rF\sin\phi,$$
hvor ϕ er vinkelen mellom $\vec{r}$ og $\vec{F}$.
- Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse: for et stivt legeme som roterer om en fast akse (her valgt z-aksen):
$$\sum_i \tau_{z,i} = \tau_z^{net} = I_z\alpha_z,$$
hvor I_z er treghetsmomentet om z-aksen og α_z er vinkelakselerasjonen.
- Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelse om en fast akse gjennom massesenteret til et stivt legeme:
$$\sum_i \tau_{cm,i} = \tau_{cm}^{net} = I_{cm}\alpha_{cm},$$
hvor I_{cm} er treghetsmomentet om en akse gjennom massesenteret.
- Spinn (angulærmoment) for en punktpartikkel i forhold til et punkt O:
$$\vec{l}_O = \vec{r} \times \vec{p},$$
hvor $\vec{r}$ er avstanden fra punktet O til punktpartikkelen og $\vec{p}$ er bevegelsesmengden.
- Spinnsatsen:
$$\vec{\tau}_O^{net} = \frac{d\vec{l}_O}{dt},$$
dvs. det kreves et netto kraftmoment for å endre spinnet om et punkt O.

- Spinn for et flerpartikkelsystem om et punkt O:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{l}_{O,i} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_{cm},$$

hvor $\vec{R}$ er posisjonsvektor til massesenteret relativt til punktet O, og $\vec{P} = M\vec{V}$ er bevegelsesmengden.

- Spinnsatsen for et flerpartikkelsystem om et punkt O:

$$\vec{\tau}_O^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt},$$

kun ytre krefter bidrar til å endre spinnet (de indre kreftene kansellerer hverandre dersom de er sentralkrefter).

- Spinnbevaring: dersom det ikke er noe netto kraftmoment, er spinnet bevart.

- Spinnsatsen for et flerpartikkelsystem om massesenteret:

$$\vec{\tau}_{cm}^{ext} = \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt},$$

hvor $\vec{r}_{cm,i}$ er posisjonsvektoren til en gitt masse m_i relativt til massesenteret.

- Spinnet til er stivt legeme som roterer om en fast akse (her valgt z-aksen):

$$\vec{L}_O = I_z\vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i,$$

hvor $\vec{\rho}_i$ er avstanden fra rotasjonsaksen z og ut til massepunktet m_i. Generelt er $\vec{L}_O$ og $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathbf{k}}$ *ikke* parallelle, men for z-komponenten kan vi alltid bruke at

$$L_{O,z} = I_z\omega$$

- Spesialtilfelle: for rotasjonssymmetriske legemer som roterer om symmetriaksen, er spinnet parallelt med rotasjonsaksen.

- Spinnet til er stivt legeme som roterer om en akse som går gjennom massesenteret:

$$L_{cm} = I_{cm}\omega$$

- Arbeid, stivt legeme som roterer:

$$W_{0,1} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_z d\theta = \frac{1}{2}I_z\omega_1 - \frac{1}{2}I_z\omega_0$$

13 Fiktive krefter (Komp. kap. 17)

Begreper og størrelser:

- For å kunne bruke Newtons lover i akselererte systemer (ikke-inertial-systemer), må vi introdusere *fiktive krefter*.

- Akselerasjonen kan være lineærakselerasjon og/eller rotasjon (sirkelbevegelse).

- System S: inertialsystem. System S': akselerert referansesystem med lineærakselerasjon $\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{R}^2}{dt^2}$ relativt til S, og som roterer om en vilkårlig akse med vinkelakselerasjon $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Hastigheten i det akselererte systemet er gitt ved

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} - \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

hvor $\vec{v}$ er hastigheten i inertialsystemet S og $\vec{V}$ er hastigheten til origo i S' relativt til origo i S. Da har vi at akselerasjonen beskrevet i det akselererte referansesystemet S' er gitt ved:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{A} - (\vec{\alpha} \times \vec{r}\,') - 2(\vec{\omega} \times \vec{v}\,') - (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')).$$

Her er leddet $-2(\vec{\omega} \times \vec{v}\,')$ Coriolis-akselerasjonen og leddet $(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'))$ er sentrifugalakselerasjonen.

- For et jevnt roterende koordinatsystem hvor $\vec{A} = \vec{0}$ og $\vec{\alpha} = \vec{0}$, får vi (ganger med massen m):

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}\,') - m(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_C + \vec{F}_S,$$

  hvor $\vec{F}_C$ er Corioliskraft og $\vec{F}_S$ er sentrifugalkraft.

- Corioliskraft: hastighetsavhengig, virker på en masse som beveger seg i et roterende referansesystem. Siden $\vec{F}_C \perp \vec{\omega}$ og $\vec{F}_C \perp \vec{v}\,'$, er $\vec{F}_C = \vec{0}$ dersom $\vec{v}\,' \parallel \vec{\omega}$.
- Sentrifugalkraft: posisjonsavhengig, avhenger av avstanden $\vec{r}\,'$ fra rotasjonsaksen.

14 Ekvivalensprinsippet, Keplers lover(YF 13.7, 13.3-13.5)

Begreper og størrelser:

- Ekvivalensprinsippet: vi kan definere masse enten gjennom Newtons gravitasjonslov, eller gjennom Newtons 2. lov. Ekvivalensprinsippet tilsier at det er *den samme massen*, som impliserer at alle legemer har den samme akselerasjonen g i Jordas tyngdefelt (i vakuum).
- Ekvivalensprinsippet gir også at det ikke er noe forskjell mellom et uniformt gravitasjonsfelt (som strengt tatt ikke finnes) og en uniform akselerasjon i fravær av gravitasjon.
- Keplers tre lover for planetbevegelse:
  1. Planetene beveger seg i ellipsebaner; solen er i et av fokuspunktene.
  2. En linje mellom solen og planeten tegner like arealer over like tidsintervaller.
  3. Perioden T og den største halvaksen a i ellipsen har følgende sammenheng:

$$T^2 \propto a^3.$$

15 Statikk og likevekt (YF 12.1-12.2)

Begreper og størrelser:

- Legemer i likevekt er i ro
- Massesentersats:

$$\sum_i \vec{F}_{i,ext} = M\vec{A} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

- Spinnsats om massesenteret:

$$\vec{\tau}_{cm} = \sum_i \vec{r}_{i,cm} \times \vec{F}_{i,ext} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$$

- Likevekt impliserer: $\vec{P} = \vec{0}$, $\vec{L}_{cm} = \vec{0}$. For at dette skal være oppfylt, må vi ha at

$$\sum_i \vec{F}_{i,ext} = \vec{0},\ \vec{\tau}_{cm} = \vec{0}.$$

- For legemer i likevekt gjelder:

$$\vec{\tau}_O = \vec{0}$$

  for *alle* punkter O. Det er lurt å velge et hensiktsmessig punkt O.

16 Elastisitet (YF 12.3-12.4)

Begreper og størrelser:

- Tøyning ("strain"):
$$\epsilon = \frac{\Delta x}{l}$$
hvor Δx er en liten endring i lengden til et objekt med lengde l.

- Spenning ("stress"):
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{k}{l}\epsilon,$$
for en kraft F på en snittflate med areal A, og k er fjærkonstanten.

- Elastisitetsmodul (Youngs modul):
$$E = \frac{k}{l}$$

- Alternativ formulering av Hookes lov:
$$\sigma = E\epsilon.$$

17 Spesiell relativitetsteori (Komp. 18)

Begreper og størrelser:

- Einsteins to postulater:
    1. Fysikkens lover er de samme i alle inertialsystemer.
    2. Lyshastigheten er den samme i alle inertialsystemer, og er uavhengig av observatøres bevegelse.

- Hendelse: en *hendelse* er en begivenhet som kan lokaliseres i tid og rom, altså gis koordinater (x, y, z, t).

- Samtidighet: to hendelser er *samtidige* dersom de inntreffer ved samme tid t i ett og samme system S.

- Egentid: Et tidsintervall Δt_0 som er målt mellom to hendelser i et referansesystem der posisjonen er identisk for begge hendelser.

- Tidsdilatasjon:
$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}}.$$

- Egenlengde (også kalt hvilelengde): en avstand l_0 som måles i et referansesystem hvor startpunkt og sluttpunkt (endepunktene på lengden) er i ro.

- Lengdekontraksjon:
$$l = \frac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1 - (\frac{u}{c})^2}$$

- Lorentztransformasjon: system S i ro, koordinater (x, y, z, t), og system S' beveger seg relativt til system S med hastighet $\vec{u} = u\hat{\mathbf{i}}$. Lorentztransformasjon fra system S til S':
$$x' = \gamma(x - ut)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - \frac{u}{c^2}x)$$

Transformasjon fra S' til S:

$$x = \gamma(x' + ut')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma(t' + \frac{u}{c^2}x')$$

- Lorentztransformasjon for hastighet i x-retning:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}.$$

Hvis noe beveger seg på tvers av bevegelsesretningen til S' med fart v'_y:

$$v'_y = \gamma v_y.$$

- Minkowski-diagrammer: representasjon av tidrommet
- Hvilemasse: massen til et legeme i ro, m_0.
- Relativistisk bevegelsesmengde:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v},$$

med en relativistisk masse

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

- Relativistisk kinetisk energi:

$$K = m_0 c^2(\gamma - 1).$$

- Total energi:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + K.$$

Uten kinetisk energi har en partikkel hvilemasse m_0 og energi $m_0 c^2$-