OBLIG 1
FYS-MEK 1110 VÅR 2022

Versjon 26.01.2022, ACL

Du finner frister for innlevering av obliger på Canvas. For å få obligen godkjent, må du vise at du har gjort et ordentlig forsøk på alle oppgavene. Fem av seks oblig-poeng må være oppnådd for å gå opp til avsluttende eksamen.

Modellering av et 100-metersløp

Figur 1: Bilde fra dn.no

I denne obligatoriske innleveringen skal vi utvikle en modell for bevegelsen av en sprinter under et 100-metersløp. Vi vil bygge opp modellen steg for steg, og gjøre modellen mer og mer realistisk.

(a) Sprinteren akselererer på løpebanen. Tegn et frilegemediagram av sprinteren med kreftene som virker. Forsøk så godt du kan å la lengden på vektorene gjenspeile de relative størrelsene til kreftene.

Vi antar nå at sprinteren blir akselerert med en konstant, horisontal drivkraft fra frasparket mot bakken, $F = 400$ N, hele veien fra starten til målstreken ved 100 m. Massen til sprinteren er $m = 80$ kg.

(b) Finn posisjonen til sprinteren som funksjon av tiden, $x(t)$.

(c) Vis at sprinteren bruker tiden $t = 6.3$ s på å nå målstreken ved 100 m.

Denne tiden, 6.3 s, er mye raskere enn verdensrekorden til Usain Bolt som er på 9.58 s (satt i Berlin i 2009). I den virkelige verden vil sprintere bli begrenset av *luftmotstand*. La oss nå introdusere en kraftmodell for luftmotstanden, hvor vi antar at at luftmotstandskraften D kan beskrives beskrives som et annengradspolynom:

$$D = \frac{1}{2}\rho C_D A_0 (v-w)^2. \tag{1}$$

Her er ρ tettheten til luft, C_D er motstandskoeffisienten, A_0 er tverrsnittet ("overflaten") av sprinteren, v er hastigheten til sprinteren, og w er hastigheten til lufta (vind). Ved havnivå er $\rho = 1.293$ kg/m^3, for sprinterens tverrsnitt antar vi $A_0 = 0.45$ m^2, $C_D = 1.2$, og at det ikke er noe vind: $w = 0$ m/s. Vi antar nå at sprinteren kun er påvirket av den konstante drivkraften F og luftmotstandskraften D i horisontal retning.

(d) Finn et uttrykk for akselerasjonen a til sprinteren.

(e) Bruk Euler-Cromer-metoden for å finne hastigheten som funksjon av tiden, $v(t)$, og posisjonen som funksjon av tiden, $x(t)$ for sprinteren. Sprinteren starter i ro ved tiden $t = t_0 = 0$s. Plott posisjonen, hastigheten, og akselerasjonen til sprinteren som funksjon av tiden. Hvordan bestemte du størrelsen på tidssteget Δt? Inkluder koden du har brukt for å løse problemet og plottene.

(f) Bruk resultatene i forrige deloppgave til å bestemme løpstiden til sprinteren.

(g) Vis at den (teoretiske) maksimale hastigheten til sprinteren er gitt ved:

$$v_T = \sqrt{\frac{2F}{\rho C_D A_0}}. \tag{2}$$

Denne hastigheten, v_T, kalles *terminalhastigheten*, dvs. at hastigheten øker til fram til denne hastigheten er nådd. Akselerasjonen blir null når v_T oppnås. For å nå denne hastigheten, må sprinteren kanskje løpe lengre enn 100 m.

(h) Finn den numeriske verdien for terminalhastigheten v_T. Synes du verdien er realistisk?

Så langt inkluderer modellen vår kun en konstant drivkraft og luftmotstanden. Dette er helt klart en overforenklet modell, og ikke særlig realistisk. Vi vil nå ta flere hensyn for å gjøre modellen bedre.

Først og fremst er det en fysiologisk begrensning for hvor fort en person kan løpe. Drivkraften fra sprinteren bør derfor avta med hastigheten, slik at det er en maksimum hastighet hvor akselerasjonen blir null selv uten luftmotstand. Vi setter opp en forenklet kraftmodell som tar hensyn til dette. Vi introduserer en drivkraft F_D som har to bidrag: en konstant kraft F og et bidrag som minker med økende hastighet, $F_v = -f_v v$. Den totale drivkraften blir da:

$$F_D = F - f_v v. \tag{3}$$

Fornuftige verdier for parameterne er $F = 400$ N og $f_v = 25.8$ Ns/m.

(i) Hvis vi antar at sprinteren kun er påvirket av F_D, hva er den maksimale hastigheten (terminalhastigheten) nå? Vi ser bort fra luftmotstanden i denne deloppgaven).

Vi fortsetter å forbedre modellen vår. I starten av løpet er sprinteren sammenkrøpet (ut fra startblokka) og akselererer raskt. I denne delen av løpet er tverrsnittet til sprinteren mindre og drivkraften større enn seinere i løpet. Vi antar at denne fasen varer til en tid t_c, og vi forventer at drivkraften vil avta gradvis når sprinteren går fra en sammenkrøpet til en mer oppreist stilling.

Vi tar hensyn til dette ved å anta at drivkraften har en *tidsavhengig* komponent som kan beskrives med en eksponentialfunksjon som avhenger av tiden t og den karakteristiske tiden t_c:

$$F_C = f_c \exp\left[-(t/t_c)^2\right]. \tag{4}$$

Ved tiden $t = 0$s, er $F_C = f_c$, men når tiden øker, vil F_C minke raskt. Ved tiden $t = t_c$ er denne kraftkomponenten redusert til $1/e \approx 0.37$ av verdien ved $t = 0$s, og etter en tid $t = 4t_c$ har dette bidraget til drivkraften blitt redusert til < 2% av initialverdien. Vi får nå at den *totale* drivkraften er gitt ved

$$F_D = F + F_C + F_V = F + f_c \exp\left[-(t/t_c)^2\right] - f_v v \tag{5}$$

med parametere $f_c = 488$ N og $t_c = 0.67$ s. Videre må vi modifisere luftmotstanden siden sprinteren er sammenkrøpet i starten av løpet. I stedet for et konstant tverrsnitt A_0 bruker vi nå et tidsavhengig tverrsnitt, $A(t)$, i uttrykket for luftmotstanden D. Funksjonen for $A(t)$ skal ha følgende egenskaper:

(*i*) Ved tiden $t = 0$s, er tverrsnittet redusert med 25% i forhold til når sprinteren er fullt oppreist.

(*ii*) Etter en tid mye større enn t_c er sprinteren oppreist og tverrsnittet skal være det opprinnelige tverrsnittet $A_0 = 0.45$ m^2.

Vi får da følgende uttrykk for $A(t)$:

$$A(t) = A_0 \left(1 - 0.25 \exp\left[-(t/t_c)^2\right]\right) \tag{6}$$

Luftmotstanden blir da:

$$D = \frac{1}{2}\rho C_D A(t)(v-w)^2 = \frac{1}{2}\rho C_D A_0 \left(1 - 0.25 \exp\left[-(t/t_c)^2\right]\right)(v-w)^2. \tag{7}$$

Den totale kraften på sprinteren i horisontal retning blir da:

$$F_{\text{net}} = F + F_C + F_V - D = F + f_c \exp\left[-(t/t_c)^2\right] - f_v v - D, \tag{8}$$

hvor $F = 400$ N som før, og de andre leddene er beskrevet over.

(j) Modifiser koden din til å inkludere disse nye kreftene. Lag plott av akselerasjonen $a(t)$, hastigheten $v(t)$, og posisjonen $x(t)$. Hvor fort løper sprinteren 100m nå?

DE SISTE TO OPPGAVENE ER FRIVILLIGE, OG IKKE NØDVENDIGE FOR Å FÅ GODKJENT OBLIGEN.

(k) Sammenlign størrelsene på de forskjellige kreftene som virker på sprinteren i horisontal retning ved å plotte F (konstant), F_C, F_V og D som funksjon av tid for 100-metersløpet. Diskuter hvor viktige de forskjellige effektene er.

(l) Bruk modellen til å teste hvordan tiden på 100-metersløpet ville forandre seg hvis sprinteren har en motvind på $w = 1.0$ m/s. Hva blir tiden om sprinteren har en medvind på $w = 1.0$ m/s?

Oblig 1 slutt.