7. april 2022

MAT 1110

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 28. april 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer. Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt.

Prøveordning på denne obligatoriske oppgaven: Det er åpent for at inntil 3 studenter kan samarbeide om en felles besvarelse. Alle 3 skal levere inn hver sin besvarelse i Canvas og det skal framgå tydelig hvem man har samarbeidet med om bevarelsen. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye og for å få godkjent trengs ca. 50 % av maks-skår, dvs. rundt 50 poeng. Poengene på hvert delspørsmål gis skjønnsmessig etter følgende algoritme:

Rett besvarelse, eventuelt med mindre, uvesentlige feil: **8-10 poeng**
Et forsøk på løse oppgaven som av en eller annen grunn ikke førte fram: **2-7 poeng**
Helt blank oppgave: **-2 poeng**

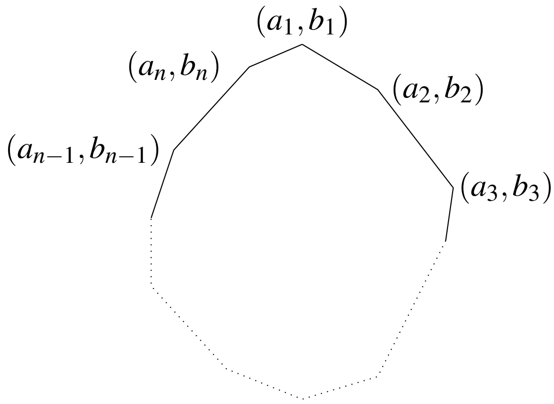
Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi regne ut arealet av en n-kant C med hjørner

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)$$

Vi kaller linjestykket mellom (a_k,b_k) og (a_{k+1},b_{k+1}) for C_k, dvs. at vi har

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots \cup C_n$$

hvor C_n er det siste linjestykket fra (a_n,b_n) til (a_1,b_1).



(a) La $\mathbf{F}(x,y) = -\frac{y}{2}\mathbf{i} + \frac{x}{2}\mathbf{j}$ og la $\mathbf{r}$ beskrive en parametrisering av C med klokka. Bruk Greens teorem til å forklare hvorfor

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

beregner arealet av n-kanten.

(b) Vis at

$$\mathbf{r}_k(t) = (a_k + t(a_{k+1}-a_k))\,\mathbf{i} + (b_k + t(b_{k+1}-b_k))\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$

gir en parametrisering av C_k. For det siste linjestykket C_n skriver vi for enkelthets skyld at $(a_1,b_1) = (a_{n+1},b_{n+1})$.

(c) Regn ut

$$\int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

og bruk dette til å regne ut arealet av n-kanten.

(d) La C være trekanten med hjørner $(0,0)$, (a,h) og $(g,0)$. Bruk formelen i (c) til å vise at arealet av denne trekanten er $\frac{gh}{2}$.

Bruk samme metode til å vise at arealet av rektangelet gitt ved hjørner $(0,0)$, $(g,0)$, (g,h) og $(0,h)$ er gh.

Oppgave 2. (a) La A være den ortogonale 3×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

og la (x,y,z) være et punkt på enhetskula, dvs. $x^2+y^2+z^2=1$. Vis at

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

også er et punkt på enhetskula.

(b) La B være 3×3-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

og la $\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vis at $\mathbf{F}$ har et fikspunkt.

(c) Finn fikspunktet til $\mathbf{F}$.

Oppgave 3. En kvadratisk $n \times n$-matrise A kalles **ortogonal** dersom

$$A^T \cdot A = I$$

hvor A^T betegner den transponerte matrisen til A, og I er identitetsmatrisen. Siden determinanten er multiplikativ og $\det(A^T) = \det(A)$, følger det at for en ortogonal matrise A, så er $\det(A) = \pm 1$.

En affin avbildning $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ kalles en **isometri** eller en **stiv bevegelse** dersom A er en ortogonal matrise.

(a) La f være en isometri i planet. Vis at f bevarer avstander, dvs.

$$|\mathbf{v}-\mathbf{w}| = |f(\mathbf{v})-f(\mathbf{w})|$$

for alle $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$. (Det kan være nyttig å bruke matrise-formen for skalarproduktet, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{v}^T\mathbf{w}$).

La A være en ortogonal matrise med $\det(A)=-1$. Da vet vi at det finnes en egenvektor $\mathbf{w}$ for A med egenverdi 1, dvs. $A\mathbf{w}=\mathbf{w}$ eller ekvivalent $(A-I)\mathbf{w}=0$. Årsaken er at vi har

$$\det(A-I)=\det(A-AA^T)=\det(A)\det(I-A^T)=(-1)\cdot\det(I-A)$$

og det følger at $\det(A-I)=0$.

(b) La $f(\mathbf{v})=A\mathbf{v}+\mathbf{b}$ være en isometri med $\det(A)=-1$. Siden A er ortogonal vet vi at $A^2=I$. La $\mathbf{w}$ være en egenvektor for A med egenverdi 1. Vis at $A\mathbf{b}+\mathbf{b}$ er en egenvektor for A med egenverdi 1, for alle valg av $\mathbf{b}$. Det følger av dette at $A\mathbf{b}+\mathbf{b}=s\mathbf{w}$ for en $s\in\mathbb{R}$.

(c) Vis at f avbilder linja gitt ved $\frac{1}{2}\mathbf{b}+t\mathbf{w}$ for $t\in\mathbb{R}$ på seg selv.