STK1100 - Oblig 1

William Dugan

5. mars 2022

1 Oppgave 1

a.

Vi får

$$P(5 \text{ forskjellige etasjer}) = \frac{\text{gunstige utfall}}{\text{mulige utfall}} = \frac{11 * 10 * 9 * 8 * 7}{11^5} \approx 0.344.$$

b.

Vi bruker $P(A') = 1 - P(A)$.

$$\begin{aligned} P(\text{minst 2 i samme etasje}) &= 1 - P(\text{ingen i samme etasje}) \\ &= 1 - 0.344 \\ &= 0.656. \end{aligned}$$

c.

Antall mulige ulike grupper på 3 som kan velges fra 5 personer kan skrives som

$$\binom{5}{3} = 10.$$

d.

Dersom systemet skal fungere, må enten 1 eller 2 fungere, eller (3 eller 4) og 5. Vi kaller undersystemet med komponent 1 og 2 for A og undersystemet med 3, 4, og 5 for B.

$$\begin{aligned} P(1 \cup 2) &= P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) \\ &= 0.9 + 0.9 - 0.9^2 \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

Videre har vi $P(1 \cup 2) = P(3 \cup 4)$. Siden (3 og 4) og 5 er disjunkte hendelser får vi

$$\begin{aligned} P((3 \cup 4) \cap 5) &= P(3 \cup 4) * P(5) \\ &= 0.99 * 0.9 \\ &= 0.891 \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} P(\text{Systemet funker}) = P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap b) \\ &= 0.99 + 0.891 - 0.99 * 0.891 \\ &= \underline{\underline{0.9989}}. \end{aligned}$$

2 Oppgave 2

a.

For å løse denne oppgaven kan vi bruke Bayes' setning:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)} \tag{1}$$

Dersom vi kaller hendingen A' for at Sara har glemt og mate fisken, og hendingen B for at gullfisken er død, får vi følgende uttrykk:

$$P(A'|B) = \frac{P(B|A')P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')}$$

hvor vi har brukt at utfallsrommet S = {A, A'}. Vi er gitt følgende sansynligheter:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{4} \\ P(A') &= \frac{1}{4} \\ P(B|A) &= \frac{9}{10} \\ P(B|A') &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i uttrykket vårt får vi at sannsynligheten for at Sara har glemt å mate fisken gitt at den er død etter ferien er $\underline{\underline{0.469}}$.

3 Oppgave 3

a.

Fra definisjonen $P(A') = 1 - P(A)$ har vi

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= 1 - P(X > x) \end{aligned}$$

Videre må vi finne $P(X > x)$. Sannsynligheten for at en mann dør når han er n år gammel er q_n. Siden vi måler X som levetid i hele år minus 35, får vi at sannsynligheten for at en mann skal dø når han er X år er q_{35+X}. Dersom mannen skal leve til han er $n+1$ år, må han overleve det n-te året. Derfor får vi sannsynligheten for at han *overlever* det n-te året lik $1 - q_{35+n}$. Vi bruker at hendingen at mannen dør i år $n+1$ er disjunkt fra hendingen at han dør i år n. Dermed får vi produktet

$$\prod_{n=0}^{x} (1 - q_{35+n})$$

som er lik $P(X > x)$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - \prod_{n=0}^{x} (1 - q_{35+n}) \end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

b.

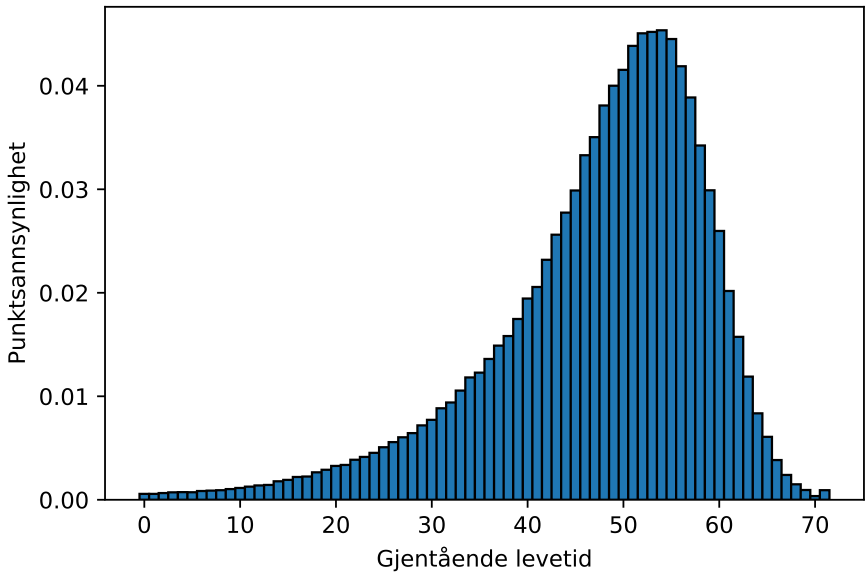
Punktsannsynligheten i et punkt er gitt som hoppet i den kumulative fordelingsfunksjonen F. Dersom vi skal ha punktsannsynligheten i punkt x, må vi derfor trekke sannsynligheten i det foregående punktet fra sannsynligheten til x. Dermed får vi

$$p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1).$$

siden vi måler X i gjenstående levetid fra alder 35 er x bare definert på intervallet $[0, 71]$.

c.

Se Python-kode for fullt program brukt.



Figur 1: Punktsannsynlighet p_x for $x \in [0, 71]$.

d.

Siden mannen ikke er pensjonist før han fyller 67 år, og X er gjenstående levetid, vil $h(X) = 0$ dersom $X \leq (66 - 35) = 31$. Hvis han blir 67 år eller eldre vil han få utbetalt 100 000 hvert år han lever etter fylte 67. Vi er gitt uttrykket for nåverdien til B som betales om k år er $B/1.03^k$. Dermed får vi for $X \geq 32$:

$$h(X) = \sum_{k=32}^{X} \frac{10^5}{1.03^k}$$

Vi kan trekke konstanten ut og skrive det resterende som summen av en geometrisk rekke, og får

$$\begin{aligned} h(X) &= \frac{10^5}{1.03^{32}} * \sum_{k=32}^{X} \frac{1}{1.03^k} \\ &= \frac{10^5}{1.03^{32}} * \sum_{k=1}^{X-31} \frac{1}{1.03^k} \\ &= \frac{10^5}{1.03^{32}} * \frac{1 - (1/1.03)^{X-31}}{1 - (1/1.03)} \end{aligned}$$

e.

Fra formelheftet har vi forventningen for en reell funksjon $g(X)$ av en diskret stokastisk variabel X er

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j)p(x_j) \tag{2}$$

hvor j er domenet funksjonene er definert på. I vårt tilfelle er dette $n = 0, 1, \ldots, 71$. Vi har også $g(X) = h(X)$ som gir oss

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x)$$

hvor p(x) er punktsannsynligheten vi fant i oppg. b. Dette gir en forventet nåverdi av pensjons-utbetalinger på $\underline{\underline{\text{501 512 kr}}}$.

f.

Vi bruker samme tankegang som vi gjorde i oppg. d. Nåverdien av premieinnbetalingene er $K*B$, og $g(X)$ er summen av premieinnbetalingene. Den årlige premien K er konstant, og vi trekker denne ut av summen. Videre må vi velge grensene til summen: Han starter betalingene når han fyller 35 år (X=0) og slutter enten når han fyller 66 (X=31), eller ved X=x hvis han dør tidligere. Vi velger derfor min(X, 31). Dermed får vi

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\min(X,31)} \frac{1}{1.03^k} = \frac{1 - (1/1.03)^{X-31}}{1 - (1/1.03)}$$

g.

Forventet nåverdi av mannens samlede premieinnbetalinger er $K * E[g(X)]$. Resultatet følger fra oppg. f ved å bruke samme logikk som oppg. e. Dette gir $E[g(X)] = \underline{\underline{20.60}}$.

h.

Siden

$$K * E[g(X)] = E[h(X)]$$

får vi

$$K = \frac{E[h(X)]}{E[g(X)]} = \underline{\underline{24341}}kr.$$

4 Python-kode

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.arange(72)
qx = (np.loadtxt(
        'https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK1100/v20/dodssannsynlighet-felles.txt',
        skiprows=1,
        delimiter='\t',
        unpack=False)
    )[35:,-1] / 1000

Fx = 1 - np.cumprod(1-qx)

temp = np.zeros(len(Fx))
temp[1:] = Fx[:-1]
px = Fx - temp

Ex_h = np.sum(np.where(
            x > 31,
            (1e5/1.03**32)*((1-(1/1.03)**(x-31))/(1-(1/1.03))),
            0) * px
        )

Ex_g = np.sum(np.where(
            x < 31,
            (1-(1/1.03)**(x+1))/(1-(1/1.03)),
            (1-(1/1.03)**(32))/(1-(1/1.03))
            ) * px
        )

K = Ex_h / Ex_g

plt.bar(x, px, width=1, edgecolor='black')
plt.xlabel('Gjent ende levetid')
plt.ylabel('Punktsannsynlighet')
plt.savefig('punktsannsynlighet.pdf')

print(f'Forventet n verdi av pensjonsutbetalinger E[h(X)]: {Ex_h:.0f} kr.')
print(f'E[g(X)]: {Ex_g:.2f}.')
print(f' rlig  premie K: {K:.0f} kr.')
```