10. februar 2022

STK1100

Obligatorisk oppgavesett 1 av 2.

Innleveringsfrist

Torsdag 24. februar 2022, klokka 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. **Vær oppmerksom på at det ikke er mulighet for å levere en revidert besvarelse dersom den første besvarelsen ikke blir godkjent**. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i STK1100, må man bestå begge de obligatoriske oppgavesettene i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

Spesielt om det obligatoriske oppgavesettet i STK1100

Det anbefales på det sterkeste at du bruker Python til å gjøre beregningene i oppgave 3. Hvis du bruker et annet programmeringsspråk, kan vi ikke hjelpe deg hvis du får problemer. Uansett hvilket programmeringsspråk du bruker, må du angi hvilke kommandoer du har brukt for å komme fram til svarene dine. Hvis du trenger hjelp til å løse oppgavene, kan du få det på en av de åpne gruppene i STK1100.

LYKKE TIL!

Oppgave 1. Matematikkbygningen (Niels Henrik Abels hus) har 12 etasjer (vi ser bort fra underetasje og kjeller). Fem personer går inn i heisen i 1. etasje, og forlater heisen i de enkelte etasjene uavhengig av hverandre. Videre antar vi at sannsynlighetene for at en bestemt person skal gå av i hhv. 2., 3., ... , 12. etasje er like store.

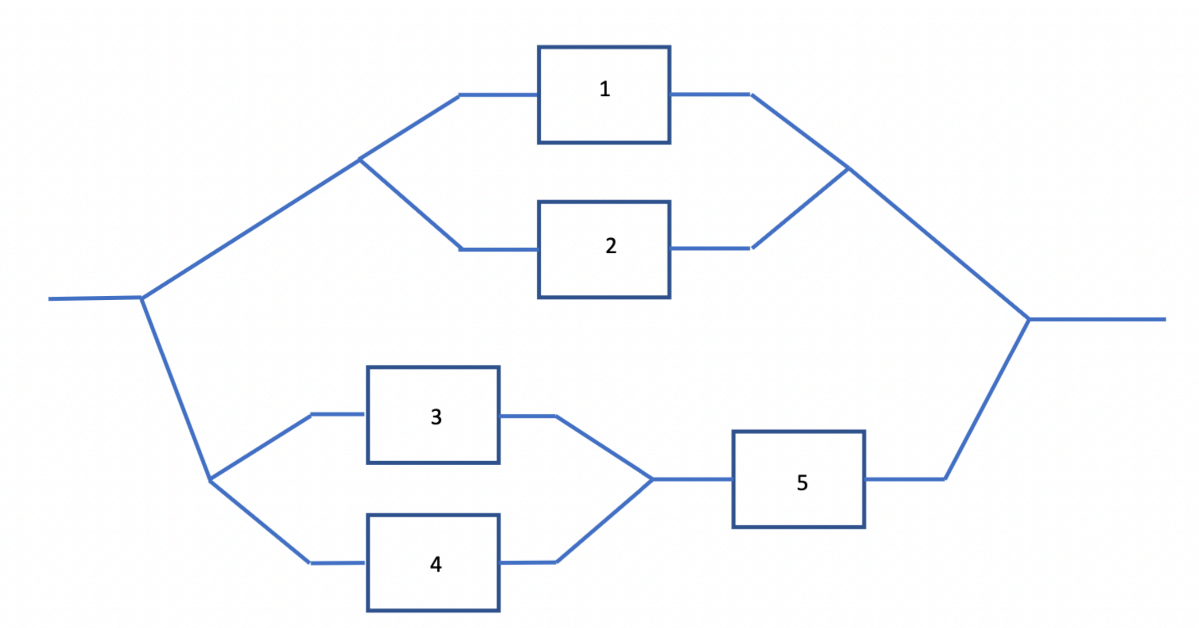
a) Hva er sannsynligheten for at de 5 personene går av i hver sin etasje?

b) Hva er sannsynligheten for at minst 2 av de 5 går av i samme etasje?

c) Anta nå at akkurat 3 av de 5 går av i 8. etasje, der statistikk-seksjonen holder til. Hvor mange mulige ulike grupper på 3 kan dette være?

Heisen har et alarmsystem som består av 5 elementer koblet sammen som vist på figuren nedenfor. Komponent 1 og 2 er koblet i parallell, slik at denne delen av alarmen virker dersom enten 1 eller 2 virker. Komponent 3 og 4 er koblet i parallell, og deretter i serie med komponent 5. Denne delen av alarmen virker dersom enten 3 eller 4 virker, og samtidig 5 virker. De to delene (1,2) og (3,4,5) er til slutt koblet i parallell.

d) Gitt at alle komponenter virker uavhengig av hverandre, og at sannsynligheten for at hver komponent virker er 0.9, finn sannsynligheten for at alarmen i heisen virker.



Oppgave 2. Sara har fått beskjed om å mate gullfisken mens foreldrene er på ferie. På forhånd vurderer moren til Sara at sannsynligheten for at datteren glemmer å mate fisken er 25%. Hvis datteren husker å mate fisken, er sjansen for at den overlever ferien lik 90%, men hvis hun glemmer å mate den, er sannsynligheten bare 50%.

Da foreldrene kom hjem fra ferie, var gullfisken død. Hva er da sannsynligheten for at Sara har glemt å mate den? (Alle sannsynligheter som moren her baserer seg på, er av subjektiv natur. Du skal gå ut fra at disse sannsynlighetene er riktige.)

Oppgave 3. Vi skal i denne oppgaven se hvordan vi kan bestemme premien (= prisen) til en privat pensjonsforsikring. Framstillingen er en forenkling av det som gjøres i et forsikringsselskap. Men oppgaven illustrerer likevel prinsippet for beregning av pensjonsforsikringspremier. Forenklingene består blant annet i at vi:

- regner med fast rente
- ser bort fra indeksjustering av pensjonen
- ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste
- benytter dødelighetsopplysninger fra Statistisk sentralbyrå over dødeligheten i den norske befolkningen (i perioden 2014-2018) i stedet for dødeligheten blant forsikrede
- regner som om inn- og utbetalingene bare gjøres én gang hvert år, nemlig på en persons fødselsdag

For å være konkrete vil vi anta at en 35 år gammel mann tegner en pensjonsforsikring som vil gi han en årlig pensjon på 100 000 kroner fra han fyller 67 år og så lenge han lever[1]. Hvis han dør før han fyller 67 år utbetales ingen ting. For denne pensjonsforsikringen må mannen hvert år fra og med sin 35 årsdag og til og med sin 66 årsdag betale en viss premie (så sant han er i live).

De innbetalingene mannen gjør til forsikringsselskapet og de utbetalingene han får fra selskapet er stokastiske størrelser. For hvor mye mannen betaler inn i premie og hvor mye han vil få utbetalt i pensjon vil avhenge av hvor gammel han blir. Premien bestemmes slik at forventningsverdien til nåverdien av premieinnbetalingene er lik forventningsverdien til nåverdien av pensjonsutbetalingene. Det gir en "rettferdig premie" (når vi ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste). For hvis selskapet tegner mange pensjonsforsikringer av den typen vi har beskrevet, vil gjennomsnittlig inn- og utbetaling pr. polise bli like store.

Vi lar den stokastiske variabelen X angi mannens *gjenstående levetid* i hele år, dvs. levetiden i hele år fratrukket 35 år. Vi vil først bestemme punktsannsynligheten $p(x) = P(X = x)$ for denne stokastiske variabelen. Til det vil vi bruke den tabellen over ett-årige dødssannsynligheter som er gitt i filen `dodssannsynlighet-felles.txt` på kurssiden. I denne filen er `ald` alder og `dod` er dødssannsynlighetene i promille.

a) La q_x være sannsynligheten for at en x år gammel mann skal dø i løpet av ett år. Forklar at da er den kumulative fordelingsfunksjonen til X gitt ved

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35+y}) \,.$$

b) Vis at punktsannsynligheten til X er gitt ved

$$p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1) \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots, 71$$

når vi regner 106 år som den høyest mulige levealder.

[1] Pensjonsforsikringer koster i dag det samme for kvinner og menn. En tar altså ikke hensyn til at dødeligheten er forskjellig for de to kjønn. Prisen på pensjonsforsikringen vil derfor bli den samme om det er en 35 år gammel kvinne som tegner pensjonsforsikringen.

c) Bruk dødelighetstabellen gitt på kurssiden og resultatene i a) og b) til å bestemme punktsannsynligheten $p(x)$ for $x = 0, 1, 2, \ldots, 71$ og lag et plott av punktsannsynligheten. Tips om hvordan du kan gjøre beregningene i Matlab eller Python er gitt i kolonnen for "Ressurser/pensum" til forelesningen onsdag 5. februar[2].

Mannen betaler inn premier til forsikringsselskapet hvert år fra han er 35 år, mens eventuelle pensjonssutbetalinger først kommer senere. For å ta hensyn til denne forskjellen i tid mellom inn- og utbetalinger benyttes nåverdiene av dem. Nåverdien av et beløp på B kroner som betales om k år, er det beløpet en må sette i banken i dag for å ha B kroner om k år når det beregnes renter og renters rente. Vi vil i denne oppgaven regner med at forsikringsselskapet benytter en rentefot på 3% pro anno. Da er nåverdien av B kroner som betales om k år lik $B/1.03^k$.

Vi vil så se nærmere på nåverdiene av inn- og utbetalingene og deres forventningsverdier. Vi ser først på pensjonsutbetalingene. Hvis mannen dør før han blir 67 år, dvs. hvis $X \leq 31$, får han ikke utbetalt noe i pensjon. Hvis han blir minst 67 år, får han utbetalt 100 000 kroner hvert år fra og med sin 67 årsdag og så lenge han lever. Vi får nåverdien av alle pensjonsutbetalingene ved å summere nåverdiene av hver av dem.

d) Forklar at nåverdien av mannens samlede pensjonsutbetalinger blir $h(X) = 0$ hvis $X \leq 31$ og

$$h(X) = \sum_{k=32}^{X} \frac{100\,000}{1.03^k} = \frac{100\,000}{1.03^{32}} \cdot \frac{1 - (1/1.03)^{X-31}}{1 - 1/1.03}$$

hvis $X \geq 32$.

e) Forklar at forventet nåverdi av pensjonsutbetalingene kan gis som

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x)$$

og bruk denne formelen og punktsannsynligheten du fant i punkt c) til å beregne forventet nåverdi av pensjonsutbetalingene.

Vi ser så på premieinnbetalingene. Vi antar at mannen betaler en årlig premie på K kroner pr. år fra og med sin 35 årsdag og til og med sin 66 årsdag (men selvfølgelig bare hvis han er i live).

f) Forklar at nåverdien av mannens samlede premieinnbetalinger blir $K \cdot g(X)$, der

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\min(X,31)} \frac{1}{1.03^k} = \frac{1 - (1/1.03)^{\min(X,31)+1}}{1 - 1/1.03}$$

g) Forklar at forventet nåverdi av mannens samlede premieinnbetalinger er $K \cdot E[g(X)]$, der

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x)$$

og bruk denne formelen og punktsannsynligheten du fant i punkt c) til å beregne $E[g(X)]$.

Den årlige premien K bestemmes slik at forventet nåverdi av premieinnbetalingene blir lik forventet nåverdi av pensjonssutbetalingene, dvs. slik at $K \cdot E[g(X)] = E[h(X)]$.

h) Bestem den årlige premien K.

[2]Merk at disse kommandoene er gitt for notatet om livsforsikring for en 30 år gammel kvinne, ikke for pensjonsforsikringen i denne oppgaven.