Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.4

$\boxed{2}$

$$f(x+iy) = i\left(x^2+y^2\right) = u(x,y) + iv(x,y)$$

der $u \equiv 0$ og $v = x^2 + y^2$. Dermed er f ikke analytisk ved teorem 1 s.625 fordi

$$u_x = 0 \neq 2y = v_y.$$

$\boxed{10}$

$$f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$$

Her virker det enklest å bruke ligning (7), med $z = re^{i\theta}$:

$$f(z) = \ln r + i\theta$$

$$=> \quad u(r,\theta) = \ln r, \qquad v(x,y) = \theta$$

Som gir

$$u_r = \frac{1}{r}, \quad u_\theta = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 1$$

og Cauchy-Riemann-ligningene

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

er dermed oppfylt.
For at funksjonen skal være analytisk må den også være kontinuerlig. Ser at funksjonen $f(z) = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ er definert for alle z i det åpne området (domenet) gitt ved $z \neq 0$, men er ikke kontinuerlig her (og derfor heller ikke analytisk), pga. diskontinuiteten langs negativ x-akse. Men den er analytisk i det åpne området (domenet) hvor negativ x-akse og origo er fjernet.

$\boxed{18}$

$$u = x^3 - 3xy^2$$
$$u_{xx} = 6x$$
$$u_{yy} = -6x$$

Så u er harmonisk. For å finne en harmonisk konjugert funksjon setter vi opp Cauchy-Riemann ligningene:

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2$$
$$v_x = -u_y = 6xy$$

Integrerer den første med hensyn på y, og deriverer resultatet med hensyn på x, og får:

$$v = 3x^2y - y^3 + h(x)$$
$$v_x = 6xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

Og vi ser at dette samsvarer med Cauchy-Riemann-ligningene om $\mathrm{dh}/\mathrm{dx} = 0$, altså $h = c$ for en reell konstant c.

De korresponderende analytiske funksjonene til $u = x^3 - 3xy^2$ er altså

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\ &= x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 + ic \\ (&= (x+iy)^3 + ic = z^3 + ic) \end{aligned}$$

for c en reell konstant.

30bc $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytisk.

b)

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = \text{konst.} \\ \Longrightarrow\ & v_x = 0, v_y = 0 \\ \Longrightarrow\ & u_x = v_y = 0, u_y = -v_x = 0 \qquad \text{(Cauchy-Riemann)} \\ \Longrightarrow\ & u = \text{konst.} \\ \Longrightarrow\ & f = \text{konst.} \end{aligned}$$

c)

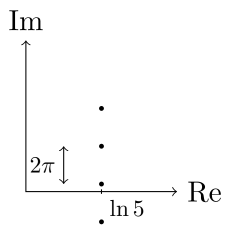
$$\begin{aligned} &0 = f'(z) = u_x + iv_x \\ \Longrightarrow\ & u_x = 0 = v_x \\ \Longrightarrow\ & u_y = -v_x = 0, v_y = u_x = 0 \qquad \text{(Cauchy-Riemann)} \end{aligned}$$

Dvs. u og v konst og dermed $f = \text{konst}$.

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.5

20

$$\begin{aligned} 4 + 3i = 5e^{i\phi}, &\quad \phi = \arctan\frac{3}{4} \approx 0.64 \\ e^z = e^x e^{iy} = 5e^{i\phi} = 5e^{i(\phi+n2\pi)}, &\quad n \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow\ e^x = 5, \quad y = \phi + n2\pi, &\quad n \in \mathbb{Z} \\ \Longrightarrow\ z = \ln 5 + i(\phi + n2\pi), &\quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.6

10 Vi bruker definisjonen $\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$:

$$\begin{aligned}
\sinh(3+4i) &= \frac{1}{2}\left(e^{3+4i} - e^{-3-4i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{3}(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos(-4) + i\sin(-4))\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{3}(\cos 4 + i\sin 4) - e^{-3}(\cos 4 - i\sin 4)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 4\left(e^{3} - e^{-3}\right) + i\sin 4\left(e^{3} + e^{-3}\right)\right) \\
&= \cos 4\sinh 3 + i\sin 4\cosh 3.
\end{aligned}$$

16 La $z = x + iy$. Formel (6b) i boken gir

$$\begin{aligned}
100 &= \sin z \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.
\end{aligned}$$

Altså må

i) $\sin x\cosh y = 100$

ii) $\cos x\sinh y = 0$

Vi ser at $y = 0$ ikke er en mulighet i ii) ettersom $\cosh 0 = 1$ og $\sin x = 100$ har ingen løsninger. Dermed må $\cos x = 0$, men det er bare x på formen $x = \pi/2 + 2k\pi$ som også vil gi løsninger i i), ($\cosh y$ er positiv). Ligningen er nå redusert til

$$\begin{aligned}
100 &= \cosh y \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right) \\
0 &= e^{y} - 200 + e^{-y} \\
&\iff \\
0 &= e^{2y} - 200e^{y} + 1 \\
&= u^{2} - 200u + 1, \quad u := e^{y}.
\end{aligned}$$

Denne andregradsligningen gir $u = 100 \pm \sqrt{9999}$, så løsningene på ligningen er de to horisontale stripene

$$\begin{aligned}
x &= \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\
y &= \ln(100 \pm \sqrt{9999}) = \pm\ln(100 + \sqrt{9999}).
\end{aligned}$$

(Bruk konjugatsetningen for å vise den siste likheten for y).

19 La $z = x + iy$. Formelen utledet i oppgave 13.6:1 gir

$$\begin{aligned}
0 &= \sinh z \\
&= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y \\
&\iff
\end{aligned}$$

$$\sin y = 0 \quad \text{og} \quad \sinh x = 0$$

Altså, $x = 0$ og $y = k\pi$:

$$z = ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.7

$\boxed{15}$

$$
\begin{aligned}
\ln(\mathrm{e}^i) &= \mathrm{Ln}(\mathrm{e}^i) + 2n\pi i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \\
&= \ln\left|(\mathrm{e}^i)\right| + i \cdot \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi i \\
&= 0 + i \cdot \mathrm{Arg}(\cos(1) + i\sin(1)) + 2n\pi i \\
&= i \cdot 1 + 2n\pi i \\
&= (1 + 2n\pi)i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}
$$

$\boxed{17}$

$$
\begin{aligned}
\ln(i^2) = \ln(-1) &= \ln|-1| + \pi i + 2\pi n i \\
&= \pi(1 + 2n)i, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\ln(i) &= 2\left(\ln|i| + \frac{\pi}{2}i + 2\pi m i\right) \\
&= \pi(1 + 4m)i, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...
\end{aligned}
$$

$\boxed{30a}$ $w = \arccos z$ betyr at

$$
z = \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})
$$

Multipliser med $2e^{iw}$

$$
\begin{aligned}
&(e^{iw})^2 - 2ze^{iw} + 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow &(e^{iw} - z)^2 + 1 - z^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow &e^{iw} - z = \sqrt{z^2 - 1} \\
\Longleftrightarrow &iw = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) \\
&w = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})
\end{aligned}
$$

Obs: $\sqrt{z^2 - 1}$ har 2 distinkte verdier og ln har ∞ mange distinkte verdier.