Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.1

14d **1:** Skal vise at

$$u_{xy} = 0 \qquad \text{når} \qquad u = v(x) + w(y)$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= v_x + 0 \\ &= v_x, \end{aligned}$$

fordi $w(y)$ ikke er en funksjon av x.

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ &= 0, \end{aligned}$$

fordi v_x ikke er en funksjon av y.

2: Skal vise at

$$uu_{xy} = u_x u_y \qquad \text{når} \qquad u = v(x)w(y)$$

$$\begin{aligned} u_x &= v_x w \\ u_y &= v w_y \\ u_{xy} &= v_x w_y \end{aligned}$$

Som gir at

$$uu_{xy} = vwv_x w_y, \qquad u_x u_y = v_x w v w_y$$

$$\Longrightarrow \qquad uu_{xy} = u_x u_y$$

3: Skal vise at

$$u_{tt} = 4u_{xx} \qquad \text{når} \qquad u = v(x+2t) + w(x-2t)$$

Innfører to nye variabler

$$Z_1 = x + 2t \quad \text{og} \quad Z_2 = x - 2t$$

Regner ut u_{tt} ved å bruke kjerneregelen

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial t} \\ &= \frac{\partial v}{\partial Z_1} \cdot 2 + \frac{\partial w}{\partial Z_2} \cdot (-2) \end{aligned}$$

Gjentar prosessen for neste partielle derivasjon:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial Z_1}\right) - 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial Z_2}\right) \\ &= 2\frac{\partial}{\partial Z_1}\left(\frac{\partial v}{\partial Z_1}\right)\frac{\partial Z_1}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial Z_2}\left(\frac{\partial w}{\partial Z_2}\right)\frac{\partial Z_2}{\partial t} \\ &= 2\frac{\partial^2 v}{\partial Z_1^2} \cdot 2 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial Z_2^2} \cdot (-2) \\ &= 4\left(\frac{\partial^2 v}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Z_2^2}\right) \end{aligned}$$

Helt tilsvarende utregning for u_{xx} gir

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 v}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Z_2^2}$$

(har brukt at $\frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{\partial Z_2}{\partial x} = 1$).
Ser dermed at

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

15 Vi har at $u(x, y) = a\ln(x^2 + y^2) + b$.

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x + 0\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y + 0\right) \\ &= 2a\left(\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) \\ &= 2a\left(\frac{2x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Altså løser $u(x, y)$ Laplace-ligningen. For $x^2 + y^2 = 1$ har vi

$$\begin{aligned} a\ln 1 + b &= 110 \\ \implies b &= 110 \end{aligned}$$

For $x^2 + y^2 = 100$ får vi da

$$\begin{aligned} a\ln 100 + 110 &= 0 \\ \implies a &= \frac{-110}{\ln 100} \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$u(x, t) = 110 - \frac{110}{\ln 100}\ln(x^2 + y^2)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.3

$\boxed{5}$ Vi må PDE'en

$$u_{tt} = u_{xx}$$

for $t \geq 0$ og $x \in [0,1]$. Grense- og initsialbetingelsene er henholdsvis

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0.$$

Separasjon av variabler: Anta at vi kan skrive $u(x,t) = F(x)G(t)$. Da er

$$F''(x)G(t) = u_{xx} = u_{tt} = F(x)G''(t).$$

Dvs $F''/F = G''/G =: -\mu^2 < 0$ konstant. (Man kan vise at positiv konstant bare vil gi trivielle løsninger). Dette gir ODE'ene

$$F''(x) = -\mu^2 F(x), \quad G''(t) = -\mu^2 G(t)$$

Med generell løsing for F

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

Nå er

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t), \quad 0 = u(1,t) = F(1)G(t)$$

som medfører at $F(0) = F(1) = 0$ dersom løsningen er ikke-triviell. Altså er $0 = F(0) = A$ og

$$0 = F(1) = B\sin\mu,$$

så $\mu = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ og alle multipler av funksjonene

$$F_n(x) := \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}$$

er løsninger av ODE'en for F med de gitte grensebetingelsene. Generelle løsninger for G er nå

$$G_n(t) := B_n\cos n\pi t + B_n^*\sin n\pi t$$

og løsningene som tilfredsstiller PDE'en og grensebetingelsene er på formen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = (B_n\cos n\pi t + B_n^*\sin n\pi t)\sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vi forsøker nå å finne løsningen som tilfredsstiller initsialbetingelsene. I dette tilfellet er dette enkelt pga. formen på den gitte funksjonen f :

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x,0) \\ k\sin 3\pi x &= u_n(x,0) \\ &= B_n\sin n\pi x. \end{aligned}$$

Vi kan altså velge løsningen når $n = 3$ og $B_3 = k$. Videre er

$$\frac{\partial}{\partial t}u_3(x,t) = (-3\pi B_3\sin 3\pi t + 3\pi B_3^*\cos 3\pi t)\sin 3\pi x$$

så $B_3^* = 0$ ettersom vi trenger at $\frac{\partial}{\partial t}u_3(x,0) = 0$. Løsningen på oppgaven er nå gitt ved

$$u(x,t) = k\cos 3\pi t\sin 3\pi x.$$

7 Vi skal finne $u(x,t)$ for en streng av lengde $L=1$ med $c^2=1$ når initiell hastighet er null og initielt utslag med liten k (si, 0.01) er $kx(1-x)$.

Løsningen er gitt ved ligning (12) i Kreyszig avsnitt 12.3 (Merk at selv om oppgaven løses ved referering til ligning i boka, er metoden for å komme frem til ligningen, separasjon av variable, viktig å kunne, så pass på at du behersker den metoden). Siden initiell hastighet er null, så er $B_n^*=0$. Integralet for B_n løser vi ved hjelp av Rottmanns formelsamling/delvis integrasjon.

$$\begin{aligned}
B_n &= 2\int_0^1 kx(1-x)\sin n\pi x\,dx \\
&= 2k\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x - \frac{x}{n\pi}\cos n\pi x - \frac{2x}{n^2\pi^2}\sin n\pi x - \frac{2-n^2\pi^2x^2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x\right]_0^1 \\
&= 2k\left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \frac{2-n^2\pi^2}{n^3\pi^3}\cos n\pi + \frac{2}{n^3\pi^3}\right) \\
&= \frac{4k}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \text{ like} \\ \frac{8k}{n^3\pi^3} & \text{for } n \text{ odde} \end{cases}
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\pi t)\sin(n\pi x) \\
&= \frac{8k}{\pi^3}\left(\cos\pi t\sin\pi x + \frac{1}{27}\cos 3\pi t\sin 3\pi x + \frac{1}{125}\cos 5\pi t\sin 5\pi x + ...\right)
\end{aligned}$$

14 Vi skal finne utsvinget på en streng med lengde $L=\pi$ og $c^2=1$ gitt initialbetingelser:

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= 0 \\
u_t(x,0) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x}{100}, & 0\le x\le \pi/2 \\ \frac{\pi-x}{100}, & \pi/2\le x\le\pi \end{array} \right\} \equiv f(x).
\end{aligned}$$

En streng oppfyller den éndimensjonale bølgeligningen:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Randvilkårene er at strengen er festet i begge ender, det vil si

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t$$

Vi følger den vanlige smørbrødlisten for løsing av partielle diff.ligninger og antar separabel løsning, dvs.

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

De deriverte blir

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= FG_{tt} \\
u_{xx} &= F_{xx}G
\end{aligned}$$

Innsatt i bølgeligningen med $c^2=1$ gir oss

$$\frac{G_{tt}}{G} = \frac{F_{xx}}{F} = k,$$

der k er en konstant. Argumentet for dette er som vanlig at om en funksjon kun av x er identisk med en funksjon kun av t, må begge funksjonene være en (og samme) konstant k. Vi får to dekoblede ligninger:

$$G_{tt} - kG = 0$$
$$F_{xx} - kF = 0$$

Vi ser først på ligningen for F. La oss anta at $k = -p^2$ med $p \in \mathbb{R}$ (det er ikke uten grunn at vi prøver denne muligheten først; litt fysisk intuisjon sier oss kanskje at svingninger på en streng er bølger som beskrives av funksjonene cosinus og sinus. Litt oversikt kan med andre ord spare oss endel regning):

$$F_{xx} = -p^2 F$$

med generell løsning

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Konstantene må bestemmes ved rand- og initialbetingelser. Ser først hva vi får ved å kreve at strengen er festet i begge ender. $u(0,t) = 0\,\forall t$, dvs. $F(0) = 0$. Eneste ikketrivielle løsning er at $A = 0$. Videre krever vi at $u(\pi, t) = 0\,\forall t$, dvs. $F(\pi) = 0$:

$$F(\pi) = B\sin p\pi = 0.$$

Eneste ikketrivielle løsning får vi dersom $p = n$ og $n \in \mathbb{N}$. Vi har altså til nå $F(x) = F_n(x)$, med $F_n(x) = B_n \sin nx$.

Videre ser vi på ligningen for G:

$$G_{tt} = -n^2 G,$$

med generell løsning:

$$G(t) = C\cos nt + D\sin nt.$$

Initialbetingelsen $u(x,0) = 0$, dvs. $G(0) = 0$ gir oss at $C = 0$. Vi samler konstanter ved $B_n D_n = E_n$ og skriver opp den generelle løsningen på hele problemet der vi summerer over alle n (som hver og én jo representerer en løsning av ligningen med tre av våre ialt fire randvilkår):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin nx \sin nt,$$

altså en fouriersinusrekke i både x og t. Vi anvender nå den siste initialbetingelsen for å bestemme konstantene E_n. Den tidsderiverte blir

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n n \sin nx \cos nt,$$

som skal oppfylle

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n n \sin nx \equiv \sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \sin nx = f(x).$$

Fourierkoeffisientene E_n^* er gitt ved

$$\begin{aligned}
E_n^* &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \\
&= \frac{1}{50\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx dx + \frac{1}{50\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin x dx \\
&= \frac{1}{50\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx - \frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{50\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nx - \frac{1}{n^2}\sin nx + \frac{x}{n}\cos nx\right]_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{1}{50\pi}\frac{2}{n^2}\sin(\frac{n\pi}{2}) = \frac{1}{25\pi n^2}\cdot\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right\} \qquad \text{for } n = \left\{\begin{array}{c} 4m \\ 4m+1 \\ 4m+2 \\ 4m+3 \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Vi har her brukt at f^* er den odde periodiske forlengelsen av f. Endelig løsning blir omsider (med $E_n = E_n^*/n$):

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{25\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(4m+1)^3}\sin(4m+1)x\sin(4m+1)t - \frac{1}{(4m+3)^3}\sin(4m+3)x\sin(4m+3)t\right] \\
&= \frac{1}{25\pi}\sin x\sin t - \frac{1}{25\pi 3^3}\sin 3x\sin 3t + \frac{1}{25\pi 5^3}\sin 5x\sin 5t - ...
\end{aligned}$$

$\boxed{15}$

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= -c^2 u_{xxxx} \\
&\Downarrow u(x,t) = F(x)G(t) \\
FG'' &= -c^2 F^{(4)} G \\
&\Downarrow F\cdot G \neq 0 \\
\frac{F^{(4)}(x)}{F(x)} &= -c^2\frac{G''(t)}{G(t)}
\end{aligned}$$

Siden høyresiden er en funksjon kun av x og venstresiden er en funksjon kun av t, må de være konstant, si β^4.

$$(1) \qquad F^{(4)}(x) = \beta^4 F(x) \tag{1}$$

$$(2) \qquad G''(t) = -c^2\beta^4 G(t) \tag{2}$$

Løsning av (2):
Det karakteristiske polynomet er

$$r^2 = -c^2\beta^4 \implies r = \pm ic\beta^2$$

Komplekse røtter gir trigonometrisk løsning

$$G(t) = A\cos(c\beta^2 t) + B\sin(c\beta^2 t)$$

Løsning av (1):
a) Sjekk at den oppgite funksjonen er en løsning eller
b) Løs (1) ved å anta $F = e^{irx}$:

$$\begin{aligned}
F^{(4)} = \beta^4 F &\iff (ir)^4 F = \beta^4 F \\
&\stackrel{F\neq 0}{\implies} r^4 = \beta^4 \\
&\iff r^2 = \pm\beta^2 \\
&\iff r = \pm i\beta, \quad r = \pm\beta
\end{aligned}$$

Dermed er

$$e^{i\beta x}, \qquad e^{-i\beta x}, \qquad e^{\beta x}, \qquad e^{-\beta x}$$

fire uavhengige løsninger. Siden

$$\begin{aligned} e^{\pm i\beta x} &= \cos\beta x \pm i\sin\beta x \\ \sinh\beta x &= \frac{1}{2}(e^{\beta x} - e^{-\beta x}) \\ \cosh\beta x &= \frac{1}{2}(e^{\beta x} + e^{-\beta x}) \end{aligned}$$

og ligningen er lineær, er også

$$\sin\beta x, \qquad \cos\beta x, \qquad \sinh\beta x, \qquad \cosh\beta x$$

4 uavhengige løsninger. Den generelle løsningen er

$$F(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x + E\,cosh\beta x + F\sinh\beta x$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.4

$\boxed{19}$ Vi har $u_{tt} = c^2 u_{xx}, u(0,t) = 0$ og $u_x(L,t) = 0$. Vi bruker separasjon av variabler: $u(x,t) = F(x)G(t), F(0) = 0, F'(L) = 0$. Dette gir oss ligningene

$$\begin{aligned} F'' - kF &= 0 \\ \ddot{G} - c^2 kG &= 0. \end{aligned}$$

Vi begynner med ligningen for F. Betingelsene $F(0) = 0, F'(L) = 0$ er kun oppfyllt hvis $F_n(x) = C\sin p_n x, p_n = \frac{\pi(1+2n)}{2L}, n = 0, 1, 2, ...$ og $k_n = -(\frac{\pi(1+2n)}{2L})^2$. Ligningen for G gir

$$G_n(t) = A_n\cos cp_n t + B_n\sin cp_n t$$

og superposisjon gir løsning

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sin p_n x\,(A_n\cos cp_n t + B_n\sin cp_n t)$$

Initialbetingelsen $u_t(x,0) = 0$ medfører $\sum_{n=0}^{\infty} B_n cp_n\sin p_n x = 0$ som gir $B_n = 0$. Til slutt benytter vi a $u(x,0) = f(x)$. Dette gir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin p_n x = \sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi(1+2n)}{2L}x, \quad 0 < x < L \tag{*}$$

Summen av denne rekken er en odde funksjon ($S(-x) = -S(x)$) som har periode 4L ($S(x+4L) = S(x)$) og oppfyller

$$\begin{aligned} S(2L - x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\left(\pi(2n+1) - \frac{\pi(1+2n)}{2L}x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi(1+2n)}{2L}x = S(x) \end{aligned}$$

For å finne koeffisientene A_n definererer vi $f(2L-x) = f(x), L < x < 2L$ og ser at (*) gir sinus-rekken til f på $0 < x < 2L$. Vi har

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \mathrm{d}x + \int_L^{2L} f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

Vi bruker at $f(2L-x) = f(x)$ og bytter variabel $y = 2L - x$ i det andre integralet.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \mathrm{d}x + \int_0^L f(y) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} (2L-y) \mathrm{d}y \right) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2L} x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 12.Rev

$\boxed{18}$ Betrakt y som en parameter og skriv $v(x) := u_x$. Da er $v' = -v$ som gir $v(x) = C(y)e^{-x}$. Dvs.

$$u_x(x,y) = v(x) = C(y)e^{-x}.$$

Den siste grensebetingelsen gir

$$g(y) = u_x(0,y) = C(y).$$

Videre er

$$u(x,y) = \int v(x)\mathrm{d}x = g(y) \int e^{-x} \, \mathrm{d}x = g(y) \left(-e^{-x} + C(y) \right)$$

og den første grensebetingelsen gir

$$f(y) = u(0,y) = g(y)(-1 + C(y)).$$

Dvs. $C = f/g + 1$ og løsningen er

$$\begin{aligned} u(x,y) &= g(y) \left(-e^{-x} + f(y)/g(y) + 1 \right) \\ &= g(y) \left(1 - e^{-x} \right) + f(y) \end{aligned}$$