1 Løs det initialverdiproblemet

$$2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 3\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(x,0) = f(x),$$

der funksjoner $f(x)$ og $u(x,t)$ er slik at de Fouriertransformasjonene eksisterer, og at

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0$$

Løsning:

Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}\left\{2u_x + 3u_t\right\}(w) \\ &= 2iw\hat{u}(w,t) + 3\hat{u}_t(w,t) \\ &\Rightarrow \\ \hat{u}_t &= -\frac{2iw}{3}\hat{u} \end{aligned}$$

Denne ODE'en i t har løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-\frac{2iw}{3}t}$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-\frac{2iw}{3}t}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-iw\frac{2t}{3}}\hat{u}(w,0)\right\} \\ &= u\left(x - \frac{2t}{3}, 0\right), \\ &= f\left(x - \frac{2t}{3}\right) \end{aligned}$$

2 Løs det initialverdiproblemet

$$2t\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + 3\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad \text{og} \quad u(x,0) = f(x)$$

der funksjoner $f(x)$ og $u(x,t)$ er slik at de Fouriertransformasjonene eksisterer, og at

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) = 0$$

Løsning:

Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{F}\left\{2tu_x + 3u_t\right\}(w) \\
&= 2tiw\hat{u}(w,t) + 3\hat{u}_t(w,t) \\
&\Rightarrow \\
\hat{u}_t &= -\frac{2iw}{3}t\hat{u}.
\end{aligned}$$

Dette er en separabel differensialligning i t med løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-\frac{iw}{3}t^2}.$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-\frac{iw}{3}t^2}\right\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-iw\frac{t^2}{3}}\hat{u}(w,0)\right\} \\
&= u\left(x - \frac{t^2}{3}, 0\right), \\
&= f\left(x - \frac{t^2}{3}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Løs det initialverdiproblemet

$$t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad \text{og} \quad u(x,0) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

der funksjoner $f(x)$ og $u(x,t)$ er slik at de Fouriertransformasjonene eksisterer, og at

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0.$$

Vis at svaret kan skrives på formen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-st)g(s)ds$$

der funksjonen g(s) skal bestemmes.

Løsning:

Betrakt t som en parameter, og transformér:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{F}\left\{tu_{xx} - u_t\right\}(w) \\
&= iwt\hat{u_x}(w,t) - \hat{u}_t(w,t) \\
&= -w^2t\hat{u}(w,t) - \hat{u}_t(w,t) \\
&\Rightarrow \\
\hat{u}_t &= -w^2t\hat{u}.
\end{aligned}$$

Dette er en separabel differensialligning i t med løsning

$$\hat{u}(w,t) = \hat{u}(w,0)e^{-\frac{w^2}{2}t^2}$$

Transformér tilbake og få

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)e^{-\frac{w^2}{2}t^2}\right\} \end{aligned}$$

Vi har at $\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}\right\} = te^{-\frac{w^2}{2}t^2}$ ((5) s.534 med $a = \frac{1}{2t^2}$), så

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{t}\mathcal{F}^{-1}\left\{\hat{u}(w,0)\widehat{e^{-\frac{x^2}{2t^2}}}\right\} \\ &= \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u(x,0) * e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \\ &= \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x) * e^{-\frac{x^2}{2t^2}} \\ &= \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)e^{-\frac{p^2}{2t^2}}\ \mathrm{d}p, \qquad \text{SUB: } p = st \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-st)e^{-\frac{s^2}{2}}\ \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Dvs. $g(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$.