NTNU
Institutt for matematiske fag

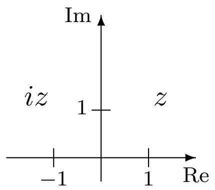
TMA4120 Matematikk 4K
høsten 2022

Løsningsforslag - Øving 7

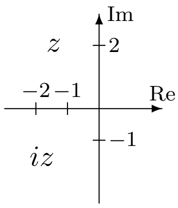
Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.1

2 Vi skisserer z og iz og regner ut skalarproduktet av vektorene for ulike verdier av z for å vise at iz tilsvarer en $\pi/2$ radianers rotasjon av z i det komplekse plan.

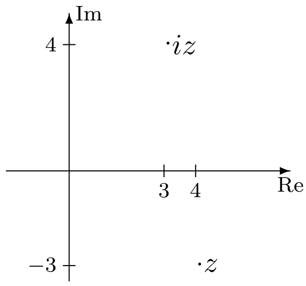
1)
$$z = 1 + i$$
$$iz = -1 + i$$
$$[1, 1] \cdot [-1, 1] = 0$$



2)
$$z = -1 + 2i$$
$$iz = -2 - i$$
$$[-1, 2] \cdot [-2, -1] = 0$$



3)
$$z = 4 - 3i$$
$$iz = 3 + 4i$$
$$[4, -3] \cdot [3, 4] = 0$$



3

$$\begin{aligned} z_1 &= z z_2 \\ &\Longleftrightarrow \\ x_1 + i y_1 &= (x + iy)(x_2 + i y_2) \\ &= x x_2 - y y_2 + i (x y_2 + y x_2) \\ &\Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Denne ligningen har en unik løsning fordi determinanten $x_2^2 + y_2^2 > 0$ pga. antagelsen $z_2 \neq 0$. Løsningen er

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

F.eks. er

$$\begin{aligned} \frac{26 - 18i}{6 - 2i} &= \frac{26 - 18i}{6 - 2i} \cdot \frac{6 + 2i}{6 + 2i} \\ &= \frac{26 \cdot 6 + 18 \cdot 2 + i(26 \cdot 2 - 18 \cdot 6)}{6^2 + 2^2 + 0} \\ &= \frac{192 - 56i}{40} \end{aligned}$$

$\boxed{14}$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{-2-5i}{3+i}\frac{3-i}{3-i} = \frac{1}{10}(-11-13i)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+5i}{3-i}\frac{3+i}{3+i} = \frac{1}{10}(-11+13i)$$
$$\Rightarrow \overline{z_1/z_2} = \frac{1}{10}(-11-13i)$$

$\boxed{16}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$
$$\implies \operatorname{Im}\frac{1}{z} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2+2ixy+i^2y^2 = (x^2-y^2)+i2xy$$
$$\frac{1}{z^2} = \frac{\overline{z^2}}{z^2(\overline{z^2})} = \frac{(x^2-y^2)-i2xy}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$
$$\implies \operatorname{Im}\frac{1}{z^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.2

$\boxed{1}$ Vi har $r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ og $\theta = \pi/4$. Dette gir

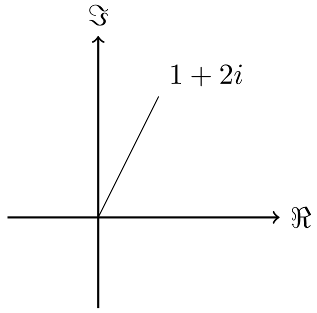
$$1+i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4).$$

$\boxed{8}$

$$\frac{7+4i}{3-2i} = \frac{7+4i}{3-2i}\frac{3+2i}{3+2i} = 1+2i$$

$r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ og $\theta = \arctan(2)$ så vi får

$$\sqrt{5}(\cos(\arctan(2)) + i\sin(\arctan(2)))$$



$\boxed{11}$ Tallet $\sqrt{3}+i$ ligger i første kvadrant, så

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+i) = \arctan 1/\sqrt{3} = \pi/6.$$

Ved symmetri er

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-i) = -\pi/6$$

21

$$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(1-i) = \arctan\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$$
$$\implies 1-i = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La $w = \sqrt[3]{1-i} = Re^{i\phi}$

$$\begin{aligned} w^3 &= 1-i \\ \iff R^3 e^{i3\phi} &= \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\right)} \\ \implies R^3 &= \sqrt{2}, \quad 3\phi = -\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi \\ \implies w &= 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{2}{3}\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dermed finnes det tre ulike røtter. F.eks med $n = 0, 1, 2$:

$$\sqrt[3]{1-i} = \{2^{\frac{1}{6}} e^{-i\frac{\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{7\pi}{12}}, \quad 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{15\pi}{12}}\}$$

25 På polarform er

$$z := i = 1\cdot(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)).$$

Hvis $w = R(\cos\phi + i\sin\pi)$ er en rot, så er

$$R^4(\cos 4\phi + i\sin 4\pi) = w^4 = z = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2).$$

Dvs. $R = 1$ og $4\phi = \pi/2 + n2\pi$. De fire distinkte verdiene er gitt ved

$$\phi_n := \left(\frac{1}{8} + \frac{n}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.3

6 Siden

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

er

$$1 > \mathrm{Re}\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

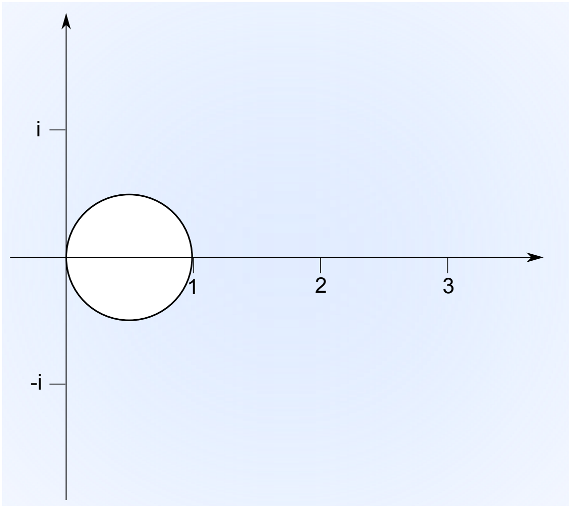
eller ekvivalent

$$x^2 + y^2 - x > 0$$

Fullfører kvadratene og får

$$(x-1/2)^2 + y^2 > (1/2)^2$$

Dvs. $\mathrm{Re}(1/z) < 1$ er komplementet til en lukket sirkeldisk med sentrum $1/2 + 0i$ og radius $1/2$. Altså alt som ligger utenfor sirkelen i bildet nedenfor.



15

$$f(z) = |z|^2 \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \quad z \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

For at $f(z)$ skal være kontinuerlig i punktet $z = 0$ må

$$\lim_{z \to 0} f(z) = f(0)$$

Skriver om $f(z)$ med $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x + yi}\right) \\ &= \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{Im}\left(\frac{x - yi}{x^2 + y^2}\right) \\ &= \left(x^2 + y^2\right) \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \\ &= -y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \lim_{z \to 0} f(z) &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} (-y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dermed er $f(z)$ kontinuerlig i punktet $z = 0$.

Alternativ metode med (r, θ):

$$z = r\mathrm{e}^{\theta i}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} f(z) &= r^2 \operatorname{Im}\left(\frac{1}{r\mathrm{e}^{\theta i}}\right) \\ &= r \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{-\theta i}\right) \\ &= r \operatorname{Im}\left(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\right) \\ &= -r \sin\theta \end{aligned}$$

Som gir

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{r\to 0}(-r\sin\theta)\\ &= 0\end{aligned}$$

16

$$f(z) = \frac{\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2} \quad z \neq 0, \qquad f(0) = 0$$

For at $f(z)$ skal være kontinuerlig i punktet $z = 0$ må

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$$

Skriver om $f(z)$ med $z = x + yi$:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\mathrm{Im}(x^2 + 2xyi + y^2)}{x^2 + y^2}\\ &= \frac{2xy}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$=> \quad \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right)$$

For at denne grensen skal eksistrere må den ha samme verdi for alle mulige kurver gjennom origo. Ser at langs kurvene $x = 0$ og $y = 0$ blir grenseverdien 0, men for eksempel langs kurven $x = y$ blir grenseverdien:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2xx}{x^2 + x^2}\right) = 1$$

Dermed eksisterer ikke grensen, og $f(z)$ er ikke kontinuerlig i $z = 0$.

Alternativ metode med (r, θ):

$$z = r\mathrm{e}^{\theta i}$$

$$\begin{aligned}=> \quad f(z) &= \frac{\mathrm{Im}(r^2\mathrm{e}^{2\theta i})}{r^2}\\ &= \frac{\mathrm{Im}(r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))}{r^2}\\ &= \sin(2\theta)\end{aligned}$$

Som gir

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{r\to 0}(\sin(2\theta))\\ &= \sin(2\theta)\end{aligned}$$

Denne grensen varierer med θ, som betyr at grenseverdien ikke eksisterer og dermed at $f(z)$ ikke er kontinuerlig i $z = 0$.

$\boxed{18}$

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

Deriverer på vanlig måte:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1\cdot(z+i)-(z-i)\cdot 1}{(z+i)^2} \\ &= \frac{2i}{(z+i)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} => \qquad f'(i) &= \frac{2i}{(2i)^2} \\ &= \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Alternativ metode: Kan bruke definisjonen av den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{(i+\Delta z-i)/(i+\Delta z+i)-0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{1}{2i+\Delta z} \\ &= \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i \end{aligned}$$