Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.1

$\boxed{2}$ $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, k, k, $\frac{k}{n}$, $\frac{k}{n}$

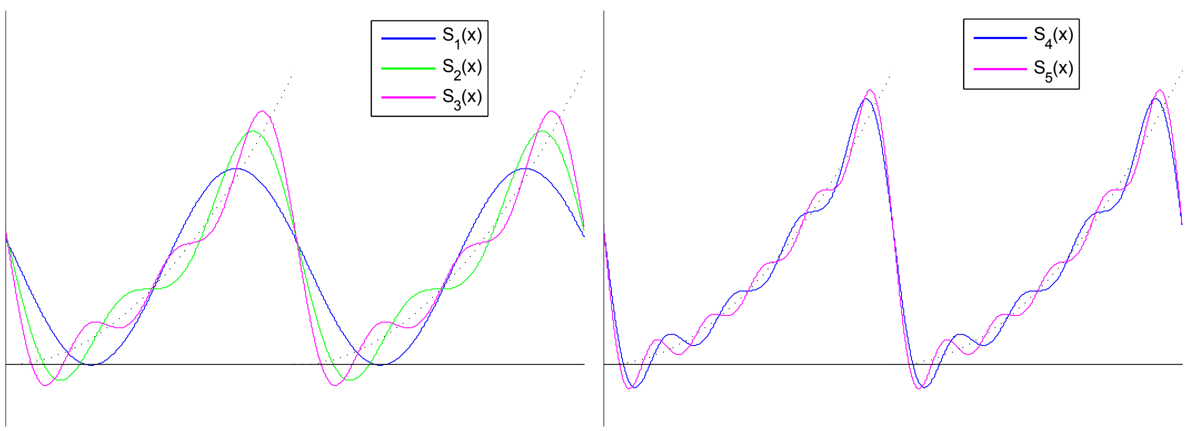
$\boxed{15}$ Her kan vi begynne med å transformere funksjonen slik at definisjonsintervallet ligger symmetrisk om origo. Grafen forskyves altså π enheter til venstre. Vi bruker igjen symmetriegenskaper for å spare oss for integraler som blir null. Da oppnås følgende koeffisienter (ved å bruke delvis integrasjon):

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{x^3}{3}+\pi x^2+\pi^2 x\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{3}\pi^2 \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\cos nx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+2\pi x+\pi^2)\cos nx \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx \ \mathrm{d}x = \Big[\frac{n^2x^2\sin nx - 2\sin nx + 2nx\cos nx}{\pi n^3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 4\frac{(-1)^n}{n^2}, \ n\geq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\sin nx \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+2\pi x+\pi^2)\sin nx \ \mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx \ \mathrm{d}x = 4\Big[\frac{\sin nx - nx\cos nx}{n^2}\Big]_{0}^{\pi} = 4\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ n\geq 1
\end{aligned}
$$

Nå kan vi transformere tilbake og oppnå rekken for $f(x)$:

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\cos n(x-\pi) + 4\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin n(x-\pi)$$



Ved å skrive ut sinus- og cosinusleddene kan svaret også uttrykkes som:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nx) - \frac{4\pi}{n}\sin(nx) \\ &= \frac{4}{3}\pi^2 + 4\left(\cos x + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + ...\right) - 4\pi\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + ...\right) \end{aligned}$$

Vi ser fra grafen over at jo flere ledd som tas med, jo nærmere kommer man den opprinnelige funksjonen.

17 Vi begynner med å skrive opp uttrykket for funksjonen $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Nå regner vi ut koeffisientene på vanlig måte og bruker at $f(x)$ er like:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\pi = \frac{\pi}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (\pi + x)\cos nx\ \mathrm{d}x = \left[\frac{n\pi\sin nx + nx\sin nx + \cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} \\ &= \frac{2(1-\cos\pi n)}{\pi n^2} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2},\ n \ge 1 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x \overset{\text{sin odde}}{=} 0,\ n \ge 1$$

Rekken blir dermed

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x.$$

21 Vi begynner med å skrive opp uttrykket for funksjonen $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Nå regner vi ut koeffisientene på vanlig måte og bruker at $f(x)$ er like:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \qquad \text{(opplagt ut frå teikninga.)} \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} (-x-\pi)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} (-x+\pi)\cos nx dx\right) \end{aligned}$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x-\pi)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\sin nx dx\right) \end{aligned}$$

sub: $y = -x$ i det første integralet gir

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x+\pi)\sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\Big|_0^{\pi}\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx + \pi\int_0^{\pi}\sin nx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{1}{n^2}\Big|_0^{\pi}\sin nx - \frac{\pi}{n}\Big|_0^{\pi}\cos nx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0 - \frac{\pi}{n}(\cos n\pi - 1)\right) \\ &= \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Ein kan også integrere frå 0 til 2π og bruke $-x+\pi$, slik at ein slepp å jobbe med to integral. Uansett får ein Fourierrekka

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.2

$\boxed{1}$ Vi kan observere følgende: Hvis f er både odde og jevn, så er $f(x) = 0$ for alle x. Bevis: La $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$f(x) = f(-x) = -f(x)$$

der den første likheten følger av at f er jevn og den andre likheten følger av at f er odde. Dermed er $2f(x) = 0$. a) $f(x) = e^x$ er hverken odde eller jevn fordi f.eks.

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \\ &\neq \begin{cases} -e & = -f(1) \\ e & = f(1). \end{cases} \end{aligned}$$

b) $f(x) = e^{-|x|}$ jevn fordi

$$f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x).$$

f er ikke odde fordi f ikke er konstant lik 0 . c) $f(x) = x^3\cos nx$ er odde fordi

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3\cos(-nx) \\ &= -x^3\cos nx \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

f er ikke jevn fordi f ikke er konstant lik 0 . d) $f(x) = x^2 \tan \pi x$ er odde fordi $\tan x$ er odde og

$$f(-x) = (-x)^2 \tan(-\pi x) = -x^2 \tan \pi x = -f(x).$$

e) $f(x) = \sinh x - \cosh x$ er hverken odde eller jevn fordi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x - \cosh x \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$\boxed{10}$ Av figuren s.491 er det åpenbart at g er odde. Et bevis er som følger

$$g(x) = \begin{cases} -4 - x, & -4 < x < 0 \\ 4 - x, & 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$g(-x) = \begin{cases} -4 - (-x), & -4 < -x < 0 \\ 4 - (-x), & 0 < -x < 4 \end{cases} = \begin{cases} 4 + x, & -4 < x < 0 \\ -4 + x, & 0 < x < 4 \end{cases} = -g(x)$$

I oppgave 11.1:21 fant vi at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi, & -\pi < x < 0, \\ -x + \pi, & 0 < x < \pi, \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

hadde Fourier-rekke

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}x\right) &= \begin{cases} -\frac{\pi}{4}x - \pi, & -\pi < \frac{\pi}{4}x < 0 \\ -\frac{\pi}{4}x + \pi, & 0 < \frac{\pi}{4}x < \pi \end{cases} \\ &= \frac{\pi}{4} \begin{cases} -x - 4, & -4 < x < 0 \\ -x + 4, & 0 < x < 4 \end{cases} \\ &= \frac{\pi}{4} g(x) \end{aligned}$$

Dermed er $g(x) = \frac{4}{\pi} f\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ med Fourier-rekke

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)}{n}$$

$\boxed{17}$ Funksjonen er like og har periode $P = 2L = 2$. Dermed er $b_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, ...$
Siden $f(x) = 1 - |x|$ for $x \in [-1, 1]$, er

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) dx \overset{\text{like}}{=} \int_{0}^{1} f(x) dx = \int_{0}^{1} (1 - x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx \\
&\overset{\text{like}}{=} 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\int_0^1 (1-x)\cos n\pi x dx \\
&= 2\left[(1-x)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1 - 2\int_0^1 (-1)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx \\
&= 0 + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{(n\pi)^2}(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

Dvs

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^2}\cos 5\pi x + ...\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{24}$ Løsning: a) Vi utvider f til en jevn periodisk funksjon på $\mathbb{R}$ med periode $2L = 8$. Cosinus-Fourierrekken til f er da

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

der

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}2 = 1/2
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_2^4 \cos\frac{n\pi}{4}x\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{4}{n\pi}\Big|_2^4 \sin\frac{n\pi}{4}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0, & n \mod 2 = 0, \\ -\frac{2}{n\pi}, & n \mod 4 = 1, \\ \frac{2}{n\pi}, & n \mod 4 = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \\ &= 1/2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)\pi} \cos\left(\frac{(4n-3)\pi}{4} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-1)\pi} \cos\left(\frac{(4n-1)\pi}{4} x\right) \end{aligned}$$

Løsning: b) Vi utvider f til en odde periodisk funksjon pÃ¥ $\mathbb{R}$ med periode $2L = 8$. Sinus-Fourier-rekken til f er da

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

der

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \sin \frac{n\pi}{4} x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2} \frac{4}{n\pi} \bigg|_2^4 \cos \frac{n\pi}{4} x \\ &= -\frac{2}{n\pi} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 0, & n \bmod 4 = 0 \\ \frac{2}{n\pi}, & n \bmod 2 = 1, \\ -\frac{4}{n\pi}, & n \bmod 4 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dermed er

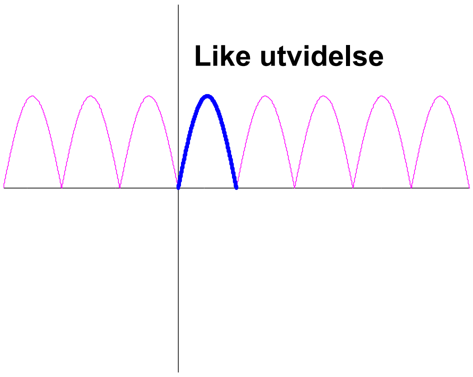
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{4} x\right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-2)\pi} \sin\left(\frac{(4n-2)\pi}{4} x\right) \end{aligned}$$

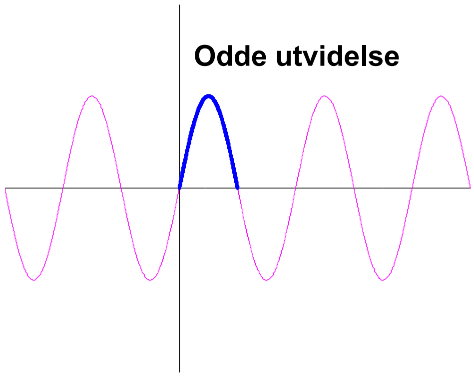
29

$$f(x) = \sin x, \qquad 0 < x < \pi$$

a)

Cosinusrekken til $f(x)$ finner vi ved å regne ut Fourier-rekken til den like utvidelsen av $f(x)$, som vil si at $f(-x) = f(x)$, se figuren til venstre ovenfor.





Regner ut gjennomsnittet a_0 til funksjonen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Finner a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Dette integralet kan løses med for eksempel delvis integrasjon:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\sin(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= (0-0) - \frac{1}{n}\left(\left[\cos(x)\frac{(-1)}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{n^2}((-1)\cos(n\pi)-1) + \frac{1}{n^2}I_n \end{aligned}$$

Løser for I_n:

$$\begin{aligned} I_n(1-\frac{1}{n^2}) &= \frac{-1}{n^2}(1+\cos(n\pi)) \\ I_n &= \frac{-1}{n^2-1}(1+(-1)^n), \qquad n = 2,3,4,... \end{aligned}$$

Merk at vi her må anta $n \neq 1$ for ikke å dele på null. Regner ut integralet for $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Som betyr at $a_1 = 0$. Resten av koeffisientene blir:

$$a_n = \frac{2}{\pi} I_n = \frac{-2}{\pi(n^2-1)}(1 + (-1)^n)$$

Cosinusrekken for $f(x)$ blir dermed:

$$\begin{aligned} f_c(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{\pi(n^2-1)}(1 + (-1)^n)\cos(nx) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2x) + \frac{1}{15}\cos(4x) + \frac{1}{35}\cos(6x) + ...\right) \end{aligned}$$

NB: Fasiten i Kreyszig er litt feil på denne oppgaven.

b)

Her skal vi finne Fourier-rekken til den odde utvidelsen av $f(x)$. Det er selvsagt mulig å finne den ved å regne ut b_n, men hvis man har litt oversikt over hva half-range expansions går ut på ser man kanskje at løsningen rett og slett må være:

$$f_s(x) = \sin x, \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 11.3

15 Vi finn først Fourierrekka til $r(t)$. r er odde, så $a_n = 0$ for alle n.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t\pi^2 - t^3)\sin ntdt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}(t\pi^2 - t^3)\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}(\pi^2 - 3t^2)\cos ntdt\right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n\pi}3t^2\right)\cos ntdt \\ &= \left[\frac{\pi}{n^2}\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{3}{n\pi}\left(\left[\frac{1}{n}t^2\sin nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{3}{n\pi}\left(0 + \frac{2}{n^2}\left[t\cos nt\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt\right) \\ &= -\frac{3}{n\pi}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\pi\cos n\pi + 0\right) \\ &= \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3} \end{aligned}$$

Med andre ord, $r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nt$. Så ser vi etter ei løysing $y_n = A_n \cos nt + B_n \sin nt$ av

$$y'' + cy' + y = \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nt$$

for $n \geq 1$. Vi får

$$\begin{aligned}
-n^2 A_n + cnB_n + A_n &= 0 \\
&\Rightarrow A_n = -\frac{cn}{1-n^2} B_n \\
-n^2 B_n - cnA_n + B_n &= \frac{12(-1)^{n+1}}{n^3} \\
&\Rightarrow A_n = \frac{1-n^2}{cn} B_n + \frac{12(-1)^n}{cn^4}
\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}
B_n &= \left(\frac{cn}{1-n^2} + \frac{1-n^2}{cn} \right)^{-1} \frac{12(-1)^{n+1}}{cn^4} \\
&= \left(\frac{c^2n^2 + 1 - 2n^2 + n^4}{cn(1-n^2)} \right)^{-1} \frac{12(-1)^{n+1}}{cn^4} \\
&= \frac{12(1-n^2)(-1)^{n+1}}{(n^4 + (c^2-2)n^2 + 1)n^3}
\end{aligned}$$

og

$$A_n = \frac{12c(-1)^n}{(n^4 + (c^2-2)n^2 + 1)n^2}.$$

Løysinga er dermed

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

der A_n og B_n er gitt over.