TMA4120 Matematikk 4K
høsten 2022

Løsningsforslag - Øving 9

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 13.7

22 Vi har at

$$\begin{aligned} \text{Ln}2i &= \text{Ln}2e^{i\pi/2} \\ &= \ln 2 + i\pi/2 \end{aligned}$$

så prinsipalverdien til $(2i)^{2i}$ er

$$\begin{aligned} e^{2i\text{Ln}2i} &= e^{2i(\ln 2 + i\pi/2)} \\ &= e^{-\pi + 2i\ln 2} \end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.1

3 Finn, og tegn kurven

$$z(t) = t + 4t^2 i, \quad 0 \le t \le 1.$$

Vi har at $z(t) = x(t) + iy(t)$ der $x(t) = t$ og $y(t) = 4t^2$. Vi ser at $y = 4x^2$, så kurven er delen av denne parabelen fra $x = 0$ til $x = 1$.

11

$$z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = 1 + 4i$$

Segment fra z_1 til z_2:

$$C: \quad (1-t)z_1 + tz_2, \quad t \in [0,1]$$

eller, ekvivalent

$$C: \quad z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0,1]$$

Med tall

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) = (-1+2t) + i(2+2t), \quad t \in [0,1]$$

20 Uttrykket kan skrives som

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Dette er likningen til en ellipse med sentrum i $(2, -1)$ og buen til ellipsen kan parametriseres som $x - 2 = \sqrt{5}\cos t$ og $y + 1 = 2\sin t$.

En parametrisering til uttrykket blir dermed

$$z(t) = 2 + \sqrt{5}\cos t + i(-1 + 2\sin t),$$

for $0 \le t \le 2\pi$.

22 $\mathrm{Re}(z)$ er ikke en analytisk funksjon, så må bruke metode 2.

Parametrisering av kurven C:

$$z(t) = t + \left(1 + \frac{1}{2}(t-1)^2\right) i, \qquad 1 \leq t \leq 3$$

$$=> \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t, \qquad \mathrm{d}z = (1 + (t-1)i)\mathrm{d}t$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_1^3 t \cdot (1 + (t-1)i)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^3 t\,\mathrm{d}t + i\int_1^3 (t^2 - t)\,\mathrm{d}t \\ &= 4 + i\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_1^3 \\ &= 4 + \frac{14}{3}i\end{aligned}$$

26 Integranden er ikke analytisk fordi $1/z$ ikke er analytisk i 0. Men av linearitet og av eksempel 5 får vi at

$$\begin{aligned}\int_C z + \frac{1}{z}\ \mathrm{d}z &= \int_C z\ \mathrm{d}z + \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= 0 + 2\pi i\end{aligned}$$

Det første leddet er 0 fordi z er analytisk og C er en lukket kurve.

29

$$\int_C \mathrm{Im}\left(z^2\right)\ \mathrm{d}z$$

Siden

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(z^2\right) &= \mathrm{Im}\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) \\ &= 2xy,\end{aligned}$$

er funksjonen 0 langs både x-aksen og y-aksen. Trenger derfor bare å regne ut integralet fra $z = 1$ til $z = i$.

Parametriserer:

$$z(t) = (1-t) + it, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$=> \quad \mathrm{Im}\left(z(t)^2\right) = 2(1-t)t, \qquad \mathrm{d}z = (-1+i)\,\mathrm{d}t$$

og integralet blir

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Im}\left(z^2\right)\, \mathrm{d}z &= \int_0^1 2(1-t)t(-1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= 2(-1+i)\int_0^1 (t-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= 2(-1+i)\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}(-1+i)\end{aligned}$$

Fra Kreyszig (10th), avsnitt 14.2

$\boxed{4}$ Hvis integralet av en funksjon over enhetssirkelen er lik 2 og over sirkelen med radius 3 er lik 6 , kan da funksjonen være analytisk i annulusen $1/2 < |z| < 7/2$?

Løsning: Nei. Ved Cauchys integralteorem for multiply connected domains, må de to integralene være like hvis funksjonen er analytisk.

$\boxed{13}$

$$z^4 = 1.2 \implies |z^4| = |z|^4 = 1.2 \implies |z| = \sqrt[4]{1.2} > 1$$

Dvs.

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 1.2}$$

er deriverbar og analytisk i $D : |z| < \sqrt[4]{1.2}$. Siden D er enkeltsammenhengende og $C : |z| = 1$ er en enkel lukka kurve i D, gir Cauchys integralteorem at

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

$\boxed{22}$ $\mathrm{Re}(z)$ er ikke en analytisk funksjon, så Cauchys teorem kan ikke brukes her.

Deler kurven opp i to deler, C_1: langs x-aksen og C_2: halvsirkelen

$$\begin{aligned} &C_1 : z(t) = t, \quad -1 \le t \le 1, \\ &\qquad => \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = t \\ &C_2 : z(t) = \cos t + i \sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \\ &\qquad => \quad \mathrm{d}z = (-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(z(t)) = \cos t \end{aligned}$$

Setter inn i integralet:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \cos t(-\sin t + i\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int_0^{\pi} \cos t \sin t\,\mathrm{d}t + i\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos(2t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{i}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2} i
\end{aligned}$$

23 Partial fraction decomposition gives:

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

The integrand is not analytic at $z = 0$ and $z = 1$, which lie inside C. Hence Cauchy's integral theorem does not apply. We use (3), p. 656, with $m = -1$ and $z_0 = 0$ in the first integral, $z_0 = 1$ in the second. We obtain

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i + 2\pi i \\
&= 4\pi i
\end{aligned}$$

28 Let

$$f(z) = \frac{\tan\frac{1}{2}z}{16z^4-81} = \frac{\sin\frac{1}{2}z}{\cos\frac{1}{2}z}\frac{1}{16z^4-81}$$

We consider $\cos\frac{1}{2}z = 0$ and $16z^4 - 81 = 0$ to check the location of the points at which the integrand $f(z)$ is not analytic.

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{1}{2}z = \cos\frac{1}{2}x\cosh\frac{1}{2}y - i\sin\frac{1}{2}x\sinh\frac{1}{2}y = 0 \\
&\Rightarrow \cos\frac{1}{2}x = 0 \,\wedge\, \sinh\frac{1}{2}y = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} \pm n\pi\,, n = 0,1,2,\dots \,\wedge\, y = 0 \\
&\Rightarrow x = \pi \pm 2n\pi\,, n = 0,1,2,\dots \,\wedge\, y = 0
\end{aligned}$$

i.e. $\cos\frac{1}{2}z = 0$ for $z = \pi \pm 2n\pi\,, n = 0,1,2,\dots$ We notice that the zeros of $\cos\frac{1}{2}z$ are those of the real cosine $\cos\frac{1}{2}x$ and all lie on the real axis outside C.

Now

$$16z^4 = 81 \implies z^4 = \frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \implies |z^4| = |z|^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \implies |z| = \frac{3}{2} > 1$$

i.e. the four roots of $z = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ all lie on the circle with center 0 and radius $r = \frac{3}{2} > 1$, so they are outside the given C .

As a result, $f(z)$ is analytic on and inside C, hence Cauchy's integral theorem applies and gives us

$$\oint_C f(z)dz = 0$$