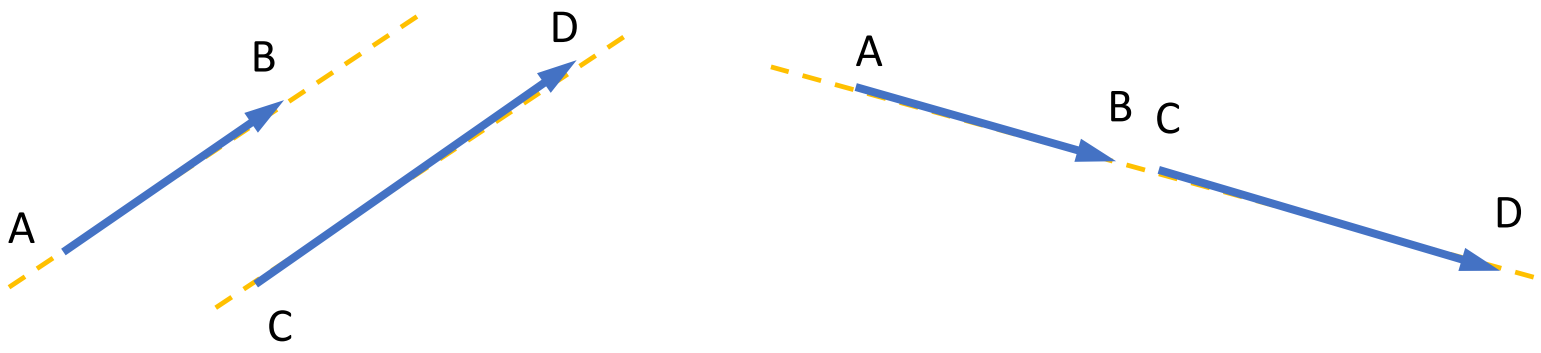
Aula 02

VETORES: DECOMPOSIÇÃO NO $\mathbb{R}^2$ FORMA ANALÍTICA

Álgebra Linear e Geometria Analítica

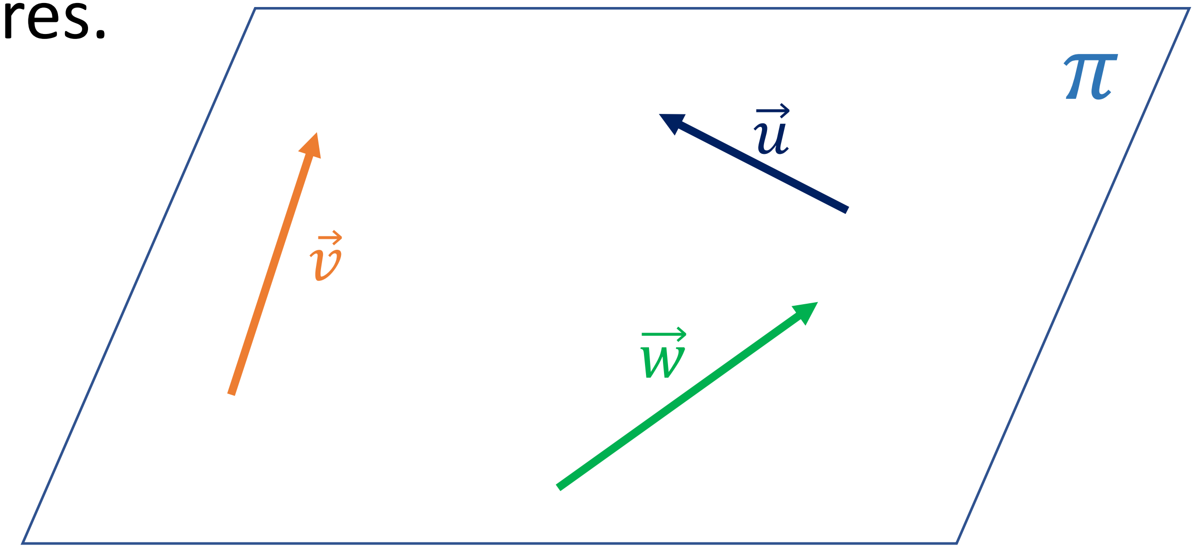
VETORES COLINEARES

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se possuírem a mesma direção. Ou seja, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ter representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou retas paralelas.



VETORES COPLANARES

Se os vetores $\vec{v}$**,** $\vec{u}$ ***e*** $\vec{w}$ (não importa o número) tiverem representantes AB, CD e EF que pertencem a um mesmo **plano π**, então os vetores são coplanares.

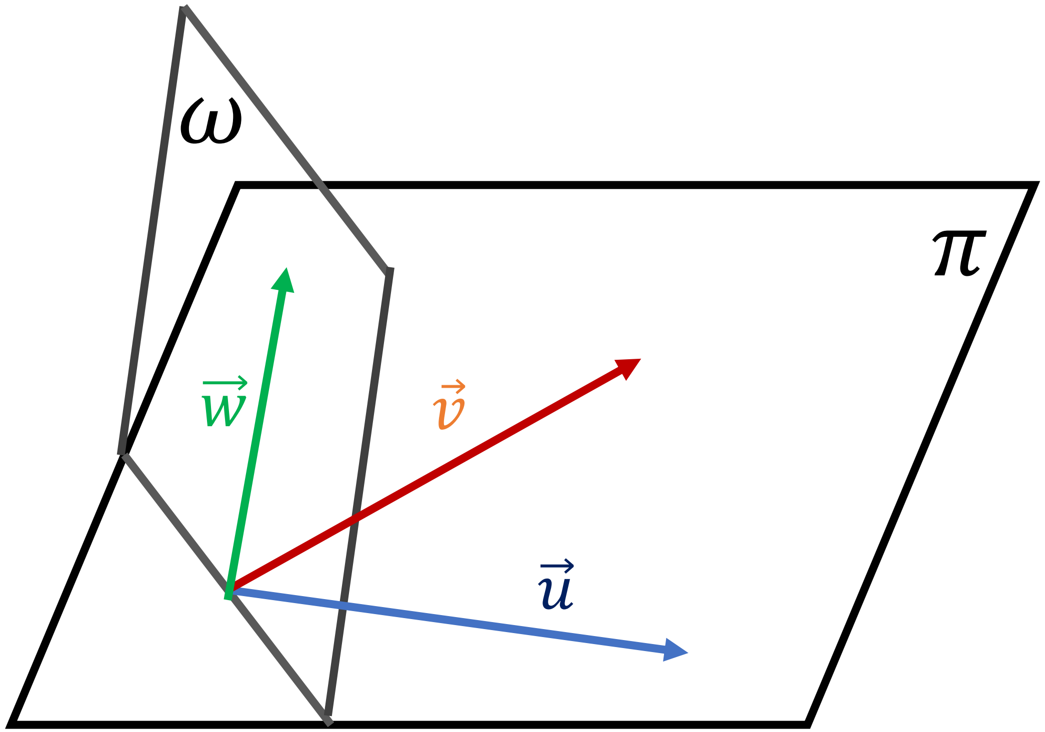


VETORES COPLANARES

Dois vetores SEMPRE são coplanares, pois tomando um ponto qualquer no espaço, sempre haverá como encontrar representantes, com origem nele, que pertencem a um mesmo plano.

Por isso, compara-se vetores quanto à coplanaridade somente a partir de 3 vetores;

Ao lado, uma imagem de três vetores não coplanares.



PLANO $\mathbb{R}^2$

- O produto cartesiano de dois conjuntos Reais é dado por:

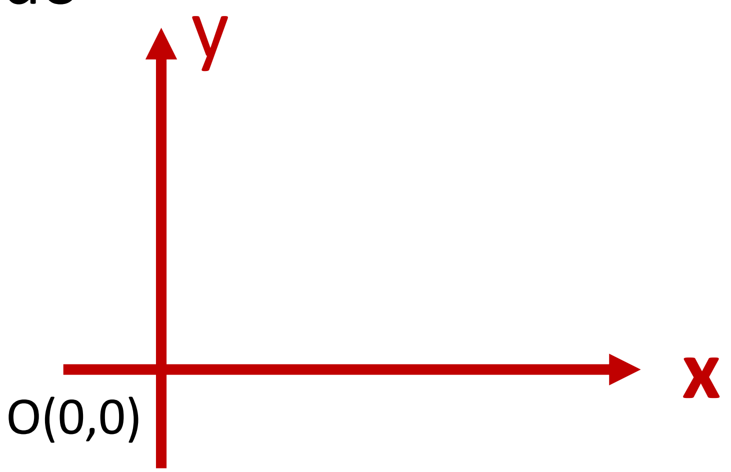
$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

- A sua representação geométrica é o plano formado pelos eixos:

➢ Eixo das abcissas, ou Ox, ou x;

➢ Eixo das ordenadas, ou Oy, ou y.

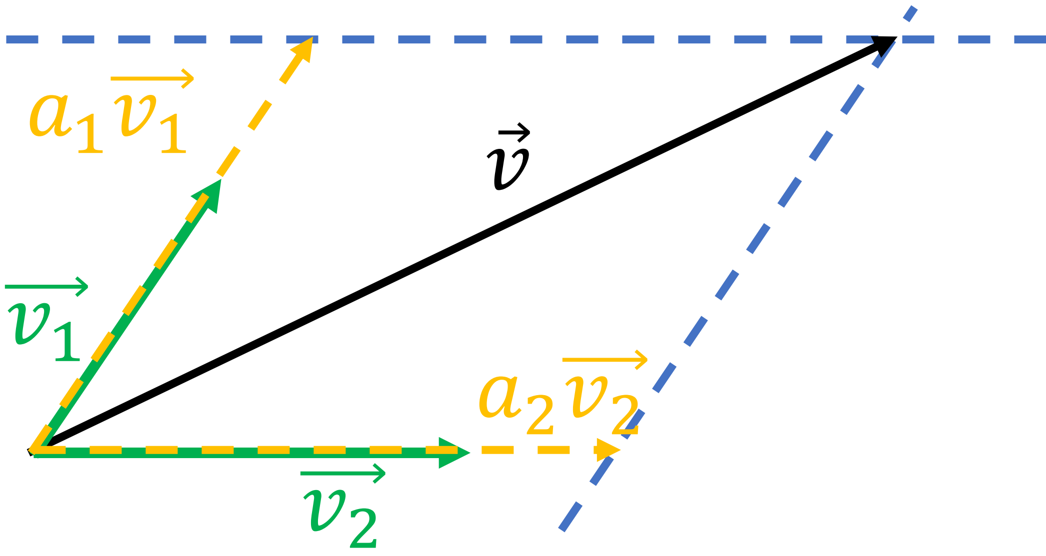
Nos quais possuem intersecção no ponto O(0,0).



DECOMPOSIÇÃO DOS VETORES EM $\mathbb{R}^2$

Dados dois vetores $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ do $\mathbb{R}^2$, **não colineares**, qualquer vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ em $\mathbb{R}^2$, pode ser decomposto segundo as direções desses vetores. Isto significa que dado qualquer vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ do $\mathbb{R}^2$, existem números reais $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$ tais que

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a_1}\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{a_2}\vec{\boldsymbol{v}}_2$$



$\vec{\boldsymbol{v}}$ é chamado de **combinação linear** dos vetores $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_2$.

DECOMPOSIÇÃO DOS VETORES EM $\mathbb{R}^2$

Assim, qualquer par de vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}$ não colineares no plano formam a <u>base</u> de decomposição $\{\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}};\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\}$.

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a_1}\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{a_2}\vec{\boldsymbol{v}}_2$$

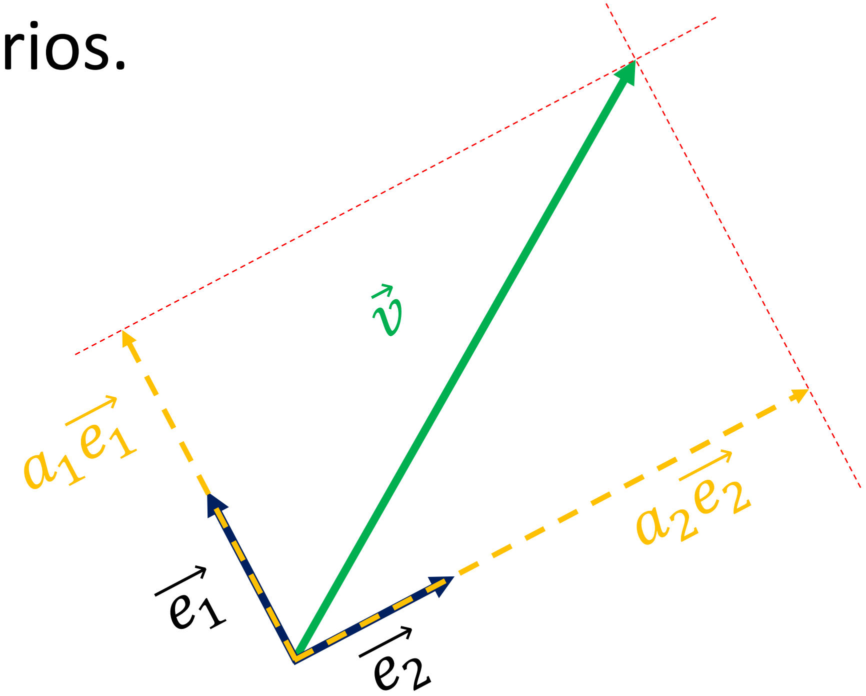
Os números $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$ são chamados de componentes ou coordenadas do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ com relação à base $\{\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}};\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}\}$.

BASE ORTONORMAL

- Normalmente são usadas, por questão de facilidade, as bases ortonormais de decomposição.
- Uma base ortonormal de decomposição $\{\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}};\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}\}$ é aquela formada por vetores ortogonais e unitários.

$$\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$$

$$|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$$



BASE CANÔNICA

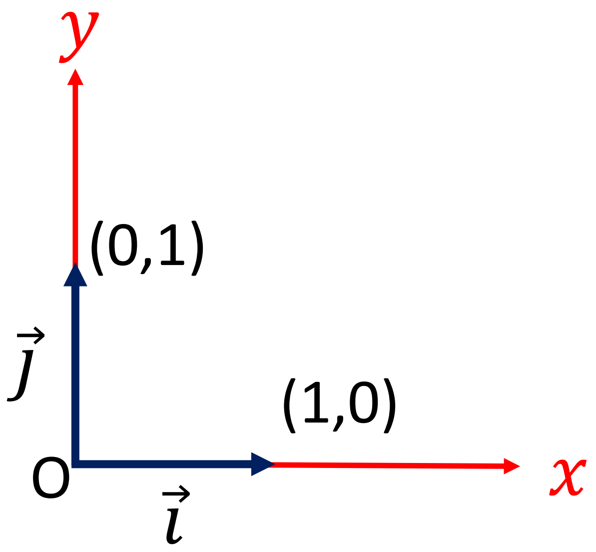
- Existem infinitas bases ortonormais no plano xOy, porém uma é particular;
- Trata-se da base formada pelos vetores com origem em O e respectivas extremidades em (1,0) e (0,1);
- Esse vetores são chamados, respectivamente, em $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, e a base

$\{\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}$ é conhecida como base canônica.

BASE CANÔNICA

Nessa base, um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ pode ser decomposto de forma:

$$\vec{v} = x\widehat{\boldsymbol{i}} + y\widehat{\boldsymbol{j}}$$



sendo que x e y são as componentes do vetor com relação a base canônica.

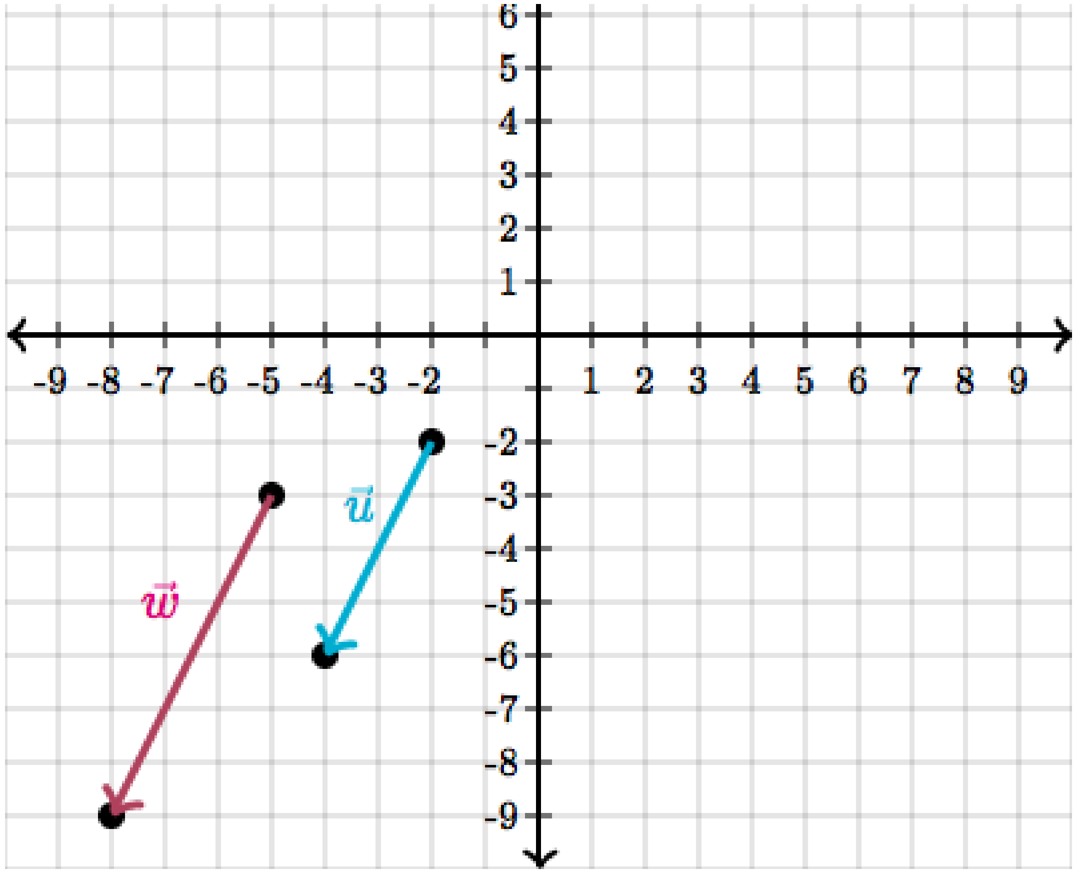
DECOMPOSIÇÃO NA BASE CANÔNICA - EXEMPLO

Analisando a imagem ao lado percebemos que o vetor $\vec{u}$ tem 2 unidades de deslocamento para esquerda e 4 para baixo. Assim, escreve-se:

$$\vec{u} = -2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$$

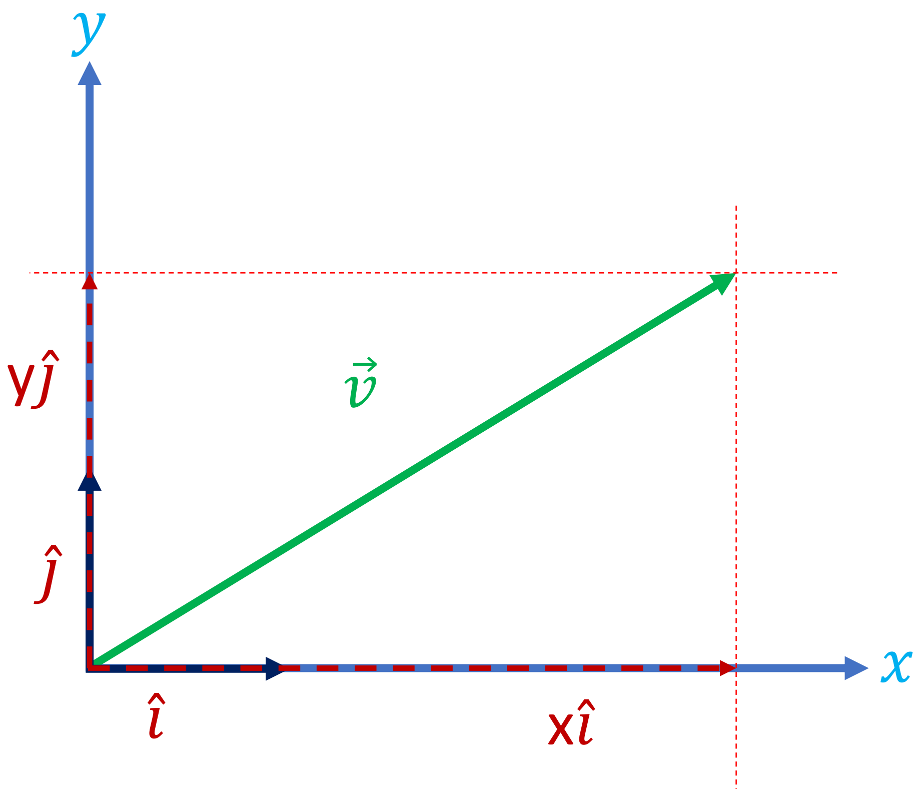
Analogamente:

$$\vec{w} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$$



Observe que $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u}$ e tal relação pode ser vista tanto na forma geométrica e na decomposta pois $\frac{3}{2}\vec{u} = \frac{3}{2}(-2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}) = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$.

BASE CANÔNICA



- O vetor $\mathbf{x}\hat{\imath}$ é a projeção ortogonal de $\vec{\boldsymbol{v}}$ sobre $\hat{\imath}$.
- O vetor $\mathbf{y}\hat{\jmath}$ é a projeção ortogonal de $\vec{\boldsymbol{v}}$ sobre $\hat{\jmath}$.

FORMA ANALÍTICA DE UM VETOR

- Com a base canônica, estabelece-se a relação entre os vetores do plano e os pares ordenados ***(x, y)*.**
- Essa relação entre pontos e vetores dá origem à expressão analítica de um vetor:

$$\vec{v} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} \Longrightarrow \underline{\vec{v} = (x, y)}$$

Expressão analítica do vetor

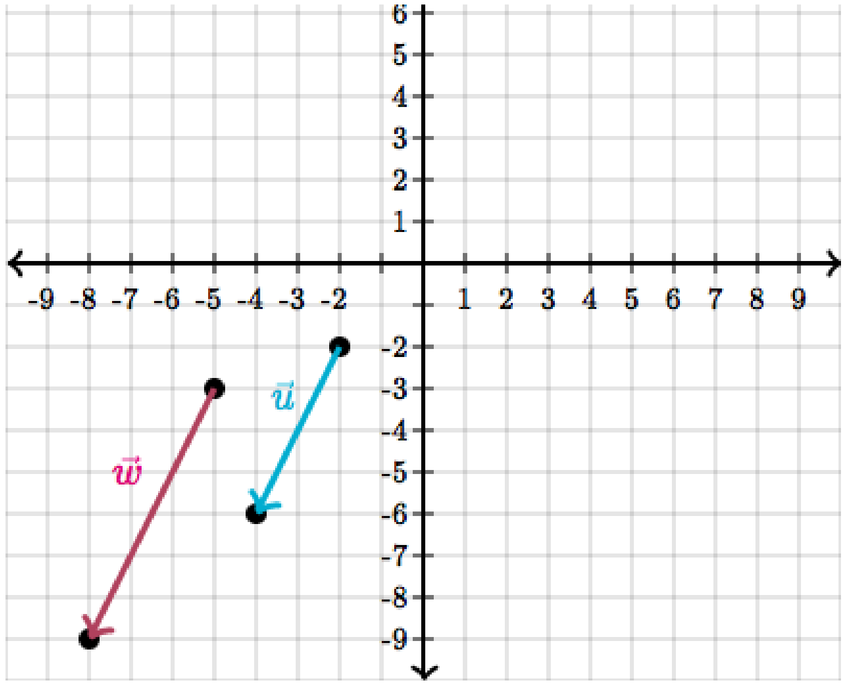
- Assim, para um vetor qualquer, pode-se associar um par ordenado ***(x, y)***.

FORMA ANALÍTICA DE UM VETOR

- Conforme a representação gráfica de um vetor qualquer, pode-se verificar melhor essa representação
- Esse par ordenado deve ter como coordenadas os

mesmos valores da componentes do vetor na base

Canônica.



$$\vec{u} = -2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{u} = (-2, -4)$$

$$\vec{w} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{w} = (-3, -6)$$

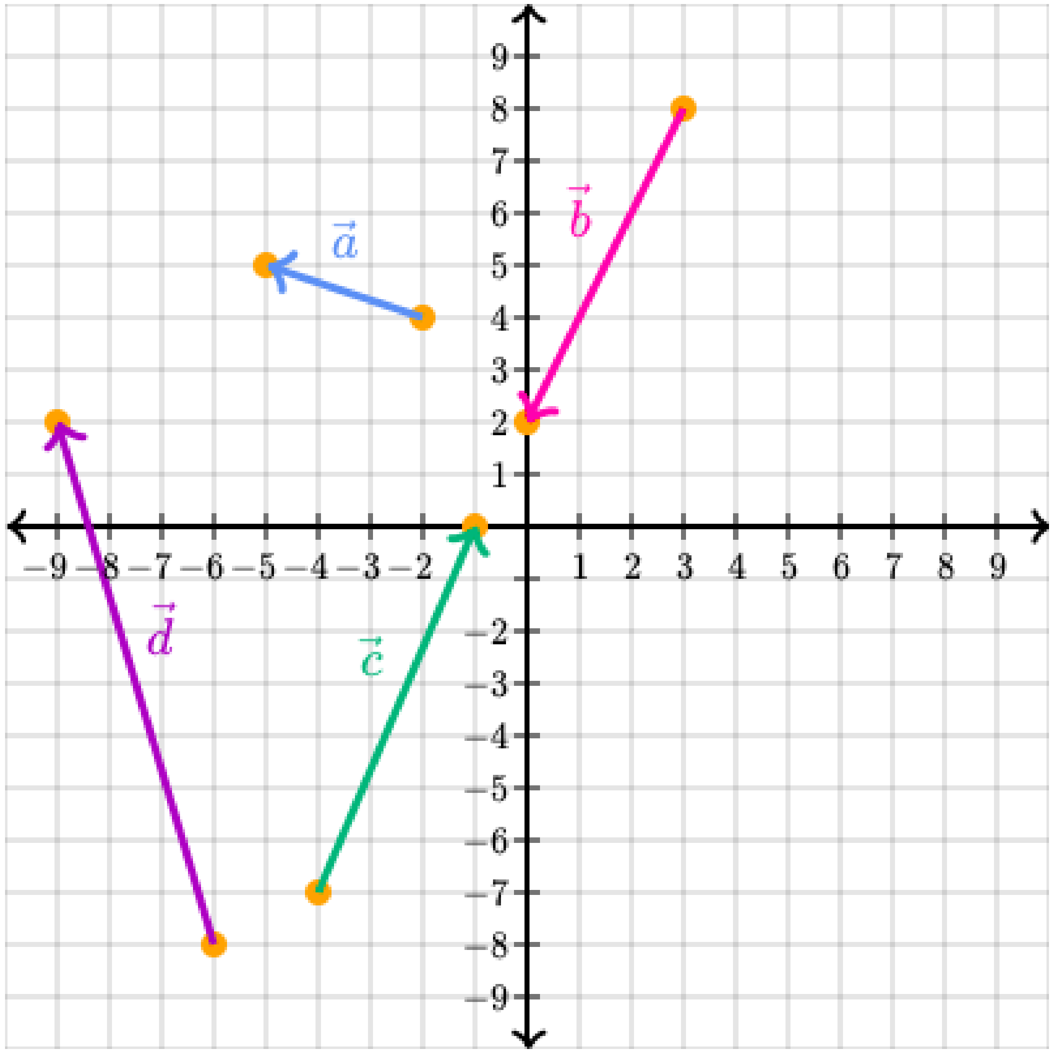
Portanto, define-se:

Vetor no plano é um par de números reais (x,y).

EXEMPLO

Escreva os vetores nas formas decomposta e analítica:

Forma decomposta	Forma analítica
$\vec{a} = -3\hat{\imath} + \hat{\jmath}$	$\vec{a} = (-3,\ 1)$
$\vec{b} = -3\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$	$\vec{b} = (-3, -6)$
$\vec{c} = 3\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$	$\vec{c} = (3,\ 7)$
$\vec{d} = -3\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$	$\vec{d} = (-3,\ 10)$



EXPRESSÃO ANALÍTICA: MAIS EXEMPLOS

$$\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} \Longrightarrow \vec{v} = (2, 3)$$

$$\vec{a} = -4\vec{i} + 5\vec{j} \Longrightarrow \vec{a} = (-4, 5)$$

$$\vec{t} = 7\vec{i} \Longrightarrow \vec{t} = (7, 0)$$

$$\vec{u} = -\frac{5}{7}\vec{j} \Longrightarrow \vec{u} = (0, -\frac{5}{7})$$

$$\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} \Longrightarrow \vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$$

$$\vec{i} = (1,0)$$

$$\vec{j} = (0,1)$$

$$\vec{0} = (0,0)$$

EXPRESSÃO ANALÍTICA DE UM VETOR

- Consequentemente, um ponto P(x,y) pode ser identificado através do vetor $\overrightarrow{OP} = \mathrm{x}\vec{i} + y\vec{j}$;

- Sendo assim, o plano $\mathbb{R}^2$, que é um conjunto de pares ordenados, pode ser considerado um conjunto de pontos ou de vetores.

- A partir das expressões analíticas do vetor, podemos definir as formas algébricas das operações com vetores;

IGUALDADE DE VETORES

- Dois vetores, $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ serão iguais se, e somente se, suas respectivas componentes forem iguais. Ou seja:

$$\boldsymbol{x_1 = x_2} \qquad \boldsymbol{e} \qquad \boldsymbol{y_1 = y_2}$$

E escreve-se:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE VETORES – FORMA ANALÍTICA

- Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, a soma desses vetores, representada por:

$$\vec{u} \pm \vec{v}$$

Resulta no vetor no qual as suas componentes são a soma das componentes de mesma direção dos vetores iniciais. Ou seja:

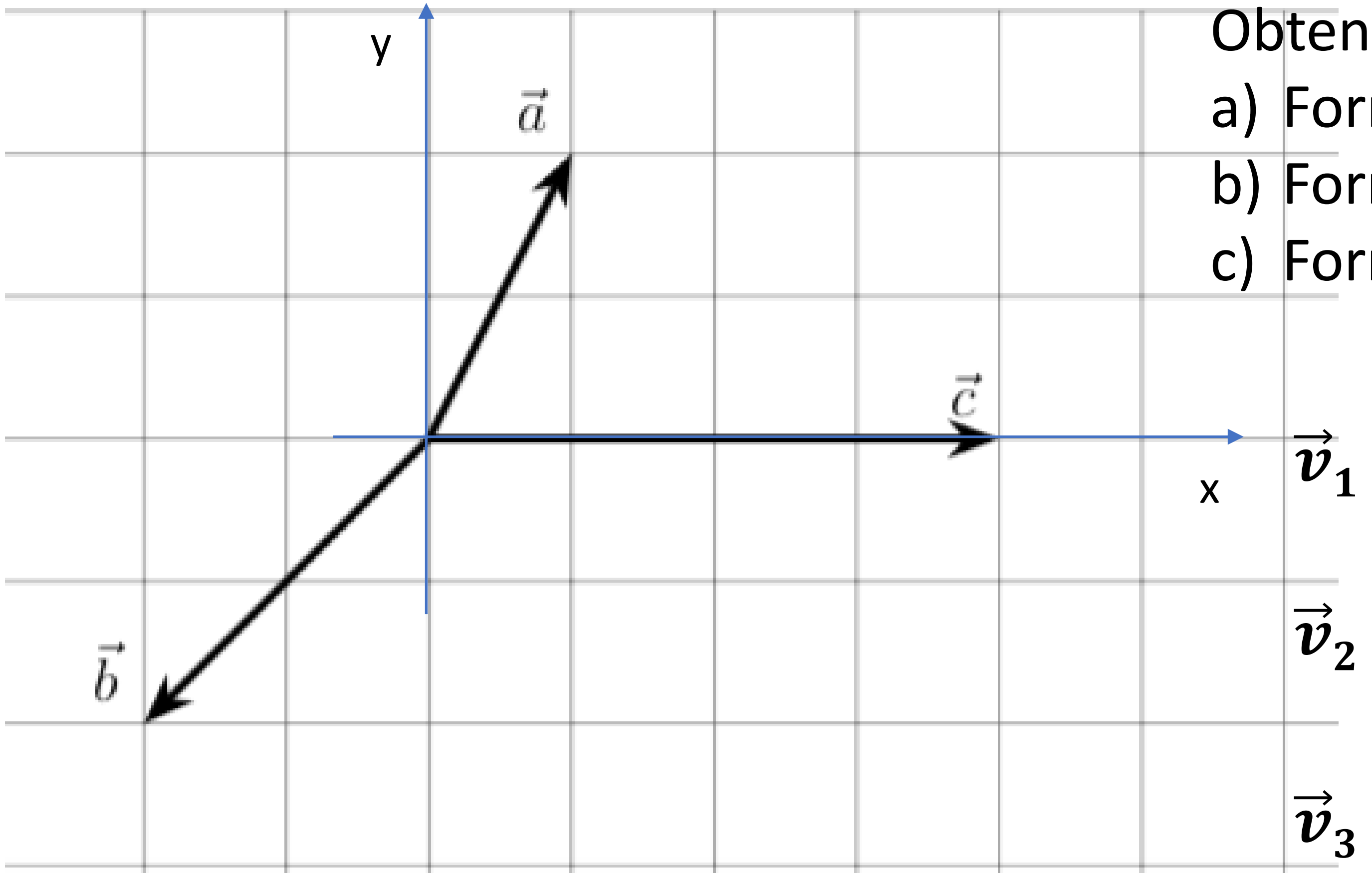
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

MULTIPLICAÇÃO DE VETOR POR UM NÚMERO REAL – FORMA ANALÍTICA

- Dado o vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ e considerando $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$, o produto $\mathbf{a}.\vec{\boldsymbol{u}}$ resulta no vetor:

$$\boldsymbol{a}.\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}) = (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{a}.\boldsymbol{y_1})$$

EXEMPLOS:



Obtenha os vetores abaixo utilizando:

a) Forma geométrica
b) Forma decomposta
c) Forma analítica

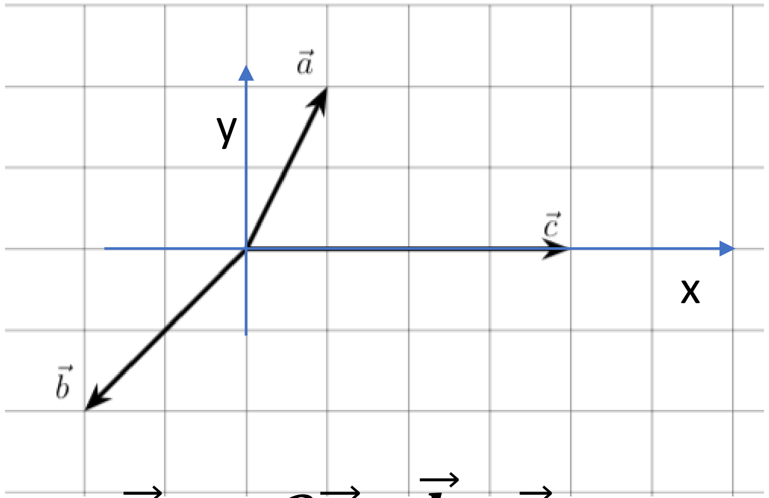
$$\vec{v}_1 = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - 2\,\vec{c}$$

$$\vec{v}_4 = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$$

RESOLUÇÃO (aula)



$$\vec{v}_1 = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{v}_2 = -\vec{a} + 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - 2\,\vec{c}$$

$$\vec{v}_4 = 3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$$