유체역학

권현우

공군사관학교

참고문헌

- Alexandre J. Chorin and Jerrold E. Marsden, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer.
- Andrew J. Majda and Andrea L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge texts in applied mathematics.
- Norman Riley and Philip Drazin, *The Navier–Stokes equations*: *a classification of flows and exact solutions*, LMS.
- Vladimir Sverak, *Lecture notes on fluid mechanics*
- Tai-Peng Tsai, *Lectures on Navier-Stokes equations*, AMS.

Contents

1. 지배방정식

2. 다양한 특수해

3. Taylor-Couette 안정성

유체역학 가정

본 강의에서 다루는 유체는 다음과 같은 가정을 따른다.

- 유체의 밀도는 ρ, 유체의 속도는 $\mathbf{u}$, 유체에 가해지는 압력을 p로 쓴다.
- 온도의 미세한 유동은 무시한다.
- 뉴턴유체만 다룬다. 즉 응력텐서(stress tensor)가 $\nabla\mathbf{u}$에 비례하는 경우만 다룬다.

예제 (뉴턴유체와 비 뉴턴유체)

- 뉴턴유체의 예 : 공기, 물
- 비 뉴턴유체의 예 : 샴푸, 피, 점성이 높은 꿀

질량보존의 법칙

유체의 속도장이 $\mathbf{u}$라고 하자. 고정된 영역 D의 경계에서 정의된 단위법선벡터를 $\mathbf{n}$이라 하자. 유체의 밀도를 ρ라고 하면, 유체에 유입하고 빠져나가는 양은 D에서 유체의 질량의 변화와 같다. 이를 나타내면

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dx = -\int_{\partial D} (\rho\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,dS$$

이 된다. 발산정리에 의하여

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\,dx = -\int_D \nabla\cdot(\rho\mathbf{u})\,dx$$

가 되며 이로부터 다음의 연속방정식(continuity equation)을 얻는다.

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0.$$

운동량 방정식

운동량 방정식을 구하기 위하여 유체의 한 입자를 골라 그 궤적을 관찰한 것을 $\mathbf{x}(t)$라 하자. 이 입자는 유체의 흐름에 따라 움직이므로 입자의 속도는

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$$

이 된다. 여기서 $\mathbf{u}$는 유체의 속도장이다.

운동량 방정식

운동량 방정식을 구하기 위하여 유체의 한 입자를 골라 그 궤적을 관찰한 것을 $\mathbf{x}(t)$라 하자. 이 입자는 유체의 흐름에 따라 움직이므로 입자의 속도는

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$$

이 된다. 여기서 $\mathbf{u}$는 유체의 속도장이다.

입자에 뉴턴역학을 적용하기 위해 입자에 가해지는 힘을 F라 하면

$$\rho(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{x}''(t) = F(\mathbf{x}(t), t)$$

이 된다. 이제 $\mathbf{x}''(t)$을 계산하면

$$[\mathbf{x}''(t)]^i = \partial_t u^i(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{j=1}^{3} u^i_{x_j}(\mathbf{x}(t), t)[\mathbf{x}'(t)]^j = \partial_t u^i(\mathbf{x}(t), t) + u^j \cdot u^i_{x_j}(\mathbf{x}(t), t)$$

를 얻는다. 이를 다르게 기술하면

$$\mathbf{x}''(t) = \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)$$

이다.

운동량 방정식

레이놀즈의 수송정리

W를 D의 한 영역이라 하고 $W_t = \mathbf{x}(W)$라 하자. 그러면

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \mathbf{v}\,dx = \int_{W_t} \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u})\right) dx$$

이다.

운동량 방정식

레이놀즈의 수송정리

W를 D의 한 영역이라 하고 $W_t = \mathbf{x}(W)$라 하자. 그러면

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \mathbf{v}\,dx = \int_{W_t} (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}))\,dx$$

이다.

코시의 운동방정식 (1828)

$\mathbf{f}$은 외부힘, $\mathbf{T}$를 응력텐서라고 하면

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\mathbf{u}\,dx = \int_{W_t} \rho\mathbf{f}\,dx + \int_{\partial G_t} \mathbf{T}\mathbf{n}\,dx$$

이 성립한다.

운동량 방정식

레이놀즈의 수송정리

W를 D의 한 영역이라 하고 $W_t = \mathbf{x}(W)$라 하자. 그러면

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \mathbf{v}\, dx = \int_{W_t} (\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla\cdot\mathbf{u}))\, dx$$

이다.

코시의 운동방정식 (1828)

$\mathbf{f}$은 외부힘, $\mathbf{T}$를 응력텐서라고 하면

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho\mathbf{u}\, dx = \int_{W_t} \rho\mathbf{f}\, dx + \int_{\partial G_t} \mathbf{Tn}\, dx$$

이 성립한다.

발산정리와 레이놀즈 수송정리에 의하여 코시의 운동방정식은

$$\int_{W_t} \rho(\partial_t\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}) + (\rho\mathbf{u})(\nabla\cdot\mathbf{u})\, dx = \int_{W_t} \rho\mathbf{f}\, dx + \nabla\cdot\mathbf{T}\, dx$$

이다.

운동량 방정식

따라서 질량보존의 법칙을 사용하면

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{f}$$

를 얻는다. 유체에 부여되는 가정에 따라 응력텐서 $\mathbf{T}$의 형태가 달라진다.

운동량 방정식

따라서 질량보존의 법칙을 사용하면

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \mathbf{f}$$

를 얻는다. 유체에 부여되는 가정에 따라 응력텐서 $\mathbf{T}$의 형태가 달라진다.

공기 또는 물과 같이 유체는 응력텐서가 속도장의 그래디언트에 선형관계를 가지며, 샴푸나 오일의 경우에는 비선형 관계를 만족한다.
특히 뉴턴유체의 경우 이와 같은 가정을 하는 것이 합리적이다.

$$T^{ij} = \nu \left(\partial_i u^j + \partial_j u^i - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) - \delta_{ij} p$$

이를 위 방정식에 대입하면 유체의 압축성 따라 방정식이 달라진다.

운동량 방정식

- (비압축성) 밀도 $\rho = \rho_0 > 0$이 상수인 경우다. 따라서 연속방정식으로부터 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$임을 안다. 그러므로

  $$\rho_0(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p$$

  을 얻는다.

- (압축성) 압력 $p(\rho) = \rho^\alpha$라 하면 코시 운동방정식은

  $$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{f} - \nabla \rho^\alpha + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \nu \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})$$

  을 만족한다. 여기서 연속방정식

  $$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

  은 만족한다.

앞으로는 비압축성 유체에 한정해서 다룬다.

비압축성 오일러, 나비에-스토크스 방정식

- Euler 방정식

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

- Navier-Stokes 방정식

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Bernoulli's law

정리

$(\mathbf{u}, p)$가

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0$$

의 해라고 하자. 만약 ρ가 상수이고 $\mathbf{u} = \nabla\phi$인 ϕ가 존재하면 각각의 시간 t에 대하여

$$p + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = f(t)$$

인 함수 $f(t)$가 존재한다.

Bernoulli's law

정리

$(\mathbf{u}, p)$가

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0$$

의 해라고 하자. 만약 ρ가 상수이고 $\mathbf{u} = \nabla\phi$인 ϕ가 존재하면 각각의 시간 t에 대하여

$$p + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = f(t)$$

인 함수 $f(t)$가 존재한다.

증명:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right),$$

$$\nabla\left(\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + p\right) = 0$$

$\nabla\psi = 0$이면 ψ는 상수함수이므로 원하는 결론을 얻는다.

원기둥 좌표계 변환

문제의 상황에 따라 방정식의 좌표계를 변환하는 것이 유리할 때가 있다.

$$\mathbf{e}_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0\right), \quad \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0\right), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

다음과 같은 관계식을 이용하면

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

아래와 같은 등식이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta.$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta.$$

원기둥 좌표계 변환

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^z}{\partial z}.$$

이다.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

와도 (Vorticity)

정의

벡터장 $\mathbf{u}$에 대하여

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

를 와도(vorticity)라고 한다.

와도는 국소적인 회전을 측정하는 수단이다.

와도 (Vorticity)

정의

벡터장 $\mathbf{u}$에 대하여

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

를 와도(vorticity)라고 한다.

와도는 국소적인 회전을 측정하는 수단이다.

강체 회전

$\mathbf{u} = \Omega \times \mathbf{r}$이라 하자. 여기서 Ω는 상수인 각속도이고 $\mathbf{r} = (x, y, z)$이다. 드러면

$$\omega = \nabla \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{r} = 2\Omega$$

이다.

와도 (Vorticity)

정의

벡터장 $\mathbf{u}$에 대하여

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}$$

를 와도(vorticity)라고 한다.

와도는 국소적인 회전을 측정하는 수단이다.

강체 회전

$\mathbf{u} = \Omega \times \mathbf{r}$이라 하자. 여기서 Ω는 상수인 각속도이고 $\mathbf{r} = (x, y, z)$이다. 드러면

$$\omega = \nabla \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \Omega(\nabla \cdot \mathbf{r}) - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{r} = 2\Omega$$

이다.

전단 흐름(shear flow)

$\mathbf{u} = (ky, 0, 0)$의 와도는 $\omega = (0, 0, -k)$이 된다. 그러나 이 전단 흐름은 대역적인 회전이 전혀 없다.

와도 (Vorticity)

선형 소용돌이

$k > 0$이고 $u_r = 0$, $u_\theta = k/r$, $u_z = 0$라 하자. 그러면

$$\omega = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}u_r\right]\mathbf{e}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial k}{\partial r}\mathbf{e}_z = 0$$

이다.

벡터장을 그려보면 전역적으로 회전하나, 국소적으로는 회전이 없다.

와도 (Vorticity)

와도를 쓰면 나비에-스토크스 방정식에서 압력항을 제거할 수 있다. 이를 위해 잠시 다음의 성질들을 사용한다:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right),$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

와도 (Vorticity)

와도를 쓰면 나비에-스토크스 방정식에서 압력항을 제거할 수 있다. 이를 위해 잠시 다음의 성질들을 사용한다:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right),$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

따라서

$$\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) = \nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) + \nabla \times \left(\nabla \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \nabla \times (\omega \times \mathbf{u})$$

이고 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$이므로

$$\nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

이다.

와도 (Vorticity)

이로부터 와도로 기술된 나비에-스토크스 방정식이 유도된다:

$$\partial_t \omega - \nu \nabla^2 \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \omega = 0$$

2차원의 경우 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, 0)$이면 $\omega = (0, 0, \omega)$이기 때문에 이를 계산하면

$$\partial_t \omega - \nu \nabla^2 \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \partial_1 f^2 - \partial_2 f^1$$

이 된다.

와도 (Vorticity)

이로부터 와도로 기술된 나비에-스토크스 방정식이 유도된다:

$$\partial_t \omega - \nu \nabla^2 \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \omega = 0$$

2차원의 경우 $\mathbf{u} = (u^1, u^2, 0)$이면 $\omega = (0, 0, \omega)$이기 때문에 이를 계산하면

$$\partial_t \omega - \nu \nabla^2 \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = \partial_1 f^2 - \partial_2 f^1$$

이 된다.

Vorticity로부터 원래 flow을 다시 복구할 수 있다.

$$-\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

이 성립하고 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$이므로

$$-\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \times \omega$$

를 얻는다. 따라서 그린함수를 이용하여 풀면

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi |x - y|} \nabla \times \omega(y)\, dy$$

를 얻는다. 여기에 부분적분을 한번 하면 비오-사바르의 법칙을 얻는다.

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi |x - y|} \times \omega(y)\, dy.$$

Contents

1. 지배방정식

2. 다양한 특수해

3. Taylor-Couette 안정성

Channel flow

$x = 0$에서 압력이 p_1이고 $x = L$에서 압력이 p_2라 하고 $p_1 > p_2$라 하자. 그리고

$$\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, t), 0) \quad \text{and} \quad p(x, y, t) = p(x)$$

라 하자. $(\mathbf{u}, p)$가 비압축 오일러 방정식의 해라고 하자. 그러면 $\partial_x u = 0$이므로 오일러 방정식은

$$\rho_0 \partial_t u = -\partial_x p$$

가 된다. 따라서 양변을 x에 관하여 미분하면 $\partial_x^2 p = 0$이 된다. 따라서

$$p(x) = p_1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) x$$

이 된다. 이를 앞선 방정식에 대입하고 계산하면

$$u(x, t) = \frac{p_1 - p_2}{\rho_0 L} t + \text{상수}$$

가 된다.

원기둥 좌표계 변환

문제의 상황에 따라 방정식의 좌표계를 변환하는 것이 유리할 때가 있다.

$$\mathbf{e}_r = \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0\right), \quad \mathbf{e}_\theta = \left(-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0\right), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$$

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \quad \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r$$

다음과 같은 관계식을 이용하면

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

아래와 같은 등식이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta. \end{aligned}$$

특히

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^z}{\partial z}.$$

이다.

원기둥 좌표계

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

원기둥 좌표계 변환

axisymmetric flow $\mathbf{u}$에 대한 방정식을 한번 작성해보도록 하자.

$$\mathbf{u} = u_r(r,z)\mathbf{e}_r + u_\theta(r,z)\mathbf{e}_\theta + u_z(r,z)\mathbf{e}_z.$$

원기둥 좌표계 변환

이 계산을 정리하면 다음과 같이 원기둥좌표계에서의 오일러 방정식을 유도할 수 있다:

$$\rho\left[\frac{Du^r}{Dt} - \frac{(u^\theta)^2}{r}\right] = -\frac{\partial p}{\partial r},$$
$$\rho\left[\frac{Du^\theta}{Dt} - \frac{(u^\theta)(u^r)}{r}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta},$$
$$\rho\frac{Du^z}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

여기서

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u^\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + u^z\frac{\partial}{\partial z}$$

이다.

원기둥 좌표계 변환

원기둥 좌표계에서의 나비에-스토크스 방정식은

$$\rho\left[\frac{Du^r}{Dt}-\frac{(u^\theta)^2}{r}\right]-\nu\left(\nabla^2 u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\rho\left[\frac{Du^\theta}{Dt}-\frac{(u^\theta)(u^r)}{r}\right]-\nu\left(\nabla^2 u_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$

$$\rho\frac{Du^z}{Dt}-\nu\nabla^2 v_z=-\frac{\partial p}{\partial z}.$$

여기서

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u^r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{u^\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+u^z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

이다.

Taylor-Couette flow

Ω가 중심이 동일한 반지름이 각각 R_1과 R_2인 원기둥으로 둘러싸인 공간이라고 하자. 여기서 $R_1 < R_2$이다. 그리고

$$u^r = 0, \quad u^z = 0, \quad u^\theta = \frac{A}{r} + Br,$$

라고 하자. 여기서

$$A = -\frac{R_1^2 R_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{and} \quad B = -\frac{R_1^2\omega_1 - R_2^2\omega_2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

이다.

- $\mathbf{u}$는 밀도가 1인 정상 오일러 방정식의 해다.
- 와도는 $2B\mathbf{e}_z$이다.
- 각각 원기둥에서의 각속도는 ω_1, ω_2이다. 왜냐하면 $u^\theta(R_1, \theta, z) = R_1\omega_1$이고 $u^\theta(R_2, \theta, z) = R_2\omega_2$이다.

Lamb-Oseen vortex with circulation Γ

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} g(r,t), \quad u_z = 0$$

$$g(r,t) = 1 - e^{-r^2/4\nu t}$$

는 나비에-스토크스 방정식의 한 해다. 여기서 g는

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} \right)$$

을 만족한다.

$$r u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} g(r,t)$$

라는 관계식으로부터 대입하여 정리하면 $\mathbf{u}$는 NS의 해가 됨을 알 수 있다.
이 해의 vorticity를 계산하면

$$\omega = \left(0, 0, \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t} \right)$$

임을 알 수 있다.

https://en.wikipedia.org/wiki/Lamb-Oseen_vortex

Poiseuille flow (푸아쉐유 흐름)

반지름이 a이고 z축에 정렬된 관을 생각하자. 여기서 $r = a$일 때 $\mathbf{u} = 0$이라고 하자. 유체에 가해지는 압력이 $p = Cz$라고 하자. 그리고 $u_z = u_z(r)$, $u_r = u_\theta = 0$이라고 하자. 그러면

$$u_z(r) = -\frac{C}{4\nu}(a^2 - r^2)$$

이다.

Poiseuille flow (푸아쥐유 흐름)

반지름이 a이고 z축에 정렬된 관을 생각하자. 여기서 $r = a$일 때 $\mathbf{u} = 0$이라고 하자. 유체에 가해지는 압력이 $p = Cz$라고 하자. 그리고 $u_z = u_z(r)$, $u_r = u_\theta = 0$이라고 하자. 그러면

$$u_z(r) = -\frac{C}{4\nu}(a^2 - r^2)$$

이다.

고려하는 해는 정적인 해이고 $u_r = u_\theta = 0$이고, $p = Cz$이므로 방정식의 z-성분을 보면

$$C = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

이다.

r을 곱한 후

Contents

1. 지배방정식

2. 다양한 특수해

3. Taylor-Couette 안정성

Taylor-Couette flow revisited

Not covered in the exam.