# 행렬과 연립일차방정식

권현우

September 4, 2021

선형대수학은 많은 문제에서 자연스럽게 나온다.

- 시계열 문제 (시간이 지나면 어떤 상태로 상황이 변할까?)
- 최적화 문제 (한정된 재화에서 최대의 효용을 구하기)
- 신호처리 (손상된 이미지의 복구)
- 선호도 문제 (어떤 웹사이트가 유용한 정보를 많이 담고 있을 것인가? - 구글의 페이지랭크 알고리즘)
- 기하학적 문제 (4차원 공간의 원소를 시각화하기)

이 모든 이야기들은 연립일차방정식

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

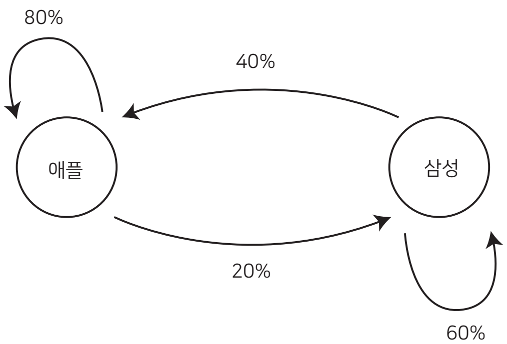
을 푸는 문제와 연관이 있다.

기업
외신

아이폰 사용자 79% "다시 아이폰 선택하겠다"...삼성사용자 재구매 의사는 63%

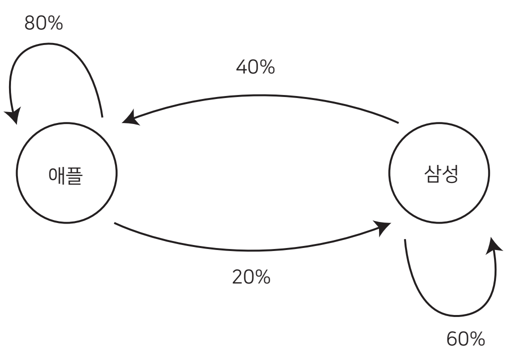
유진상 기자

입력 2017.08.28 20:12




**질문.** 2021년 현재 권현우 중위는 삼성 핸드폰을 쓰고 있다. 5년 후에 어떤 핸드폰을 사용할 확률이 높을까?

# 1 행렬의 정의




이를 표로 표현하면

| 기존 / 신규 | 애플 | 삼성 |
|---|---|---|
| 애플 | 0.8 | 0.4 |
| 삼성 | 0.2 | 0.6 |

**정의 1.1.** 다음과 같이 $mn$개의 숫자를 $m$개의 행과 $n$개의 열을 갖도록 직사각형 모양으로 나열한 것을 **크기가** $m \times n$**인 행렬**이라고 한다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{또는} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

여기서 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$을 행렬의 **원소** 또는 **성분**이라 한다. 행렬을 표기할 때 $A = (a_{ij})_{m \times n}$라 쓴다. 또는 간단히 $A = (a_{ij})$와 같이 나타낸다.

특히 행의 수와 열의 수가 같은 행렬, 즉, $m = n$이면, $n$**차 정방행렬** 또는 $n$**차 정사각행렬**이라고 한다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \phantom{\cdots} & j\text{열} & \phantom{\cdots} & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ i\text{행} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & \phantom{\cdots} & j\text{열} & \phantom{\cdots} & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ i\text{행} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$(i,\ j)$의 성분

**예제 1.1**. 다음 행렬 $A$는 $3 \times 3$ 행렬, $B$는 $3 \times 2$ 행렬, 그리고 $C$는 $2 \times 3$ 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

특히 행렬 $A$는 3차 정방행렬이다.

**예제 1.2**. 도입부분에서 제시한 표

| 기존<br>신규 | 애플 | 삼성 |
|---|---|---|
| 애플 | 0.8 | 0.4 |
| 삼성 | 0.2 | 0.6 |

를 바탕으로 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- $n$차 정방행렬 $A = (a_{ij})$의 성분 $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{nn}$을 $A$의 **주대각선성분** 또는 **대각성분**이라 부른다.
- 특히 대각성분을 제외한 나머지 성분이 모두 0일 때 $A$를 **대각행렬**이라 한다.
- 특별히 $n$차 대각행렬의 대각성분이 모두 1인 행렬을 $n$차 **단위행렬**이라 하고, 기호로 $I_n$이라 쓴다.

**예제 1.3**. 다음 행렬 $A$는 3차 정방행렬이고 대각성분을 1, 2, 3으로 갖는 행렬이다. 특히 대각성분을 제외한 나머지 성분이 모두 0이므로 대각행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## 2 행렬의 합과 스칼라배

**정의 2.1.** 행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$에서 대응되는 성분이 모두 같을 때, 두 행렬이 서로 **같다**고 정의하고, 이것을 $A=B$로 표시한다.

즉 두 행렬의 크기가 같고, 모든 $i$, $j(1\le i\le m, 1\le j\le n)$에 대하여 $a_{ij}=b_{ij}$일 때, 두 행렬은 같다고 한다.

**정의 2.2.** 행렬 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$에 대하여 대응되는 성분끼리 더하여 얻은 새로운 행렬의 $(i,j)$성분이 $a_{ij}+b_{ij}$인 행렬을 **두 행렬의 합**이라 하며, 이를 $A+B$ 로 표시한다.

$k$가 임의의 실수일 때, 행렬 $A$의 각 성분에 $k$를 곱하여 얻은 새로운 행렬을 행렬 $A$의 **스칼라배**(scalar multiple) 또는 **실수배**라 정의하고 $kA$로 표시한다. 즉

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n},\quad kA=(ka_{ij})_{m\times n}$$

**예제 2.1.** 행렬 $A=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-2&4\end{bmatrix}$에서 $A+B$와 $2A$를 구하여라.

(풀이) 합의 정의에 의하여

$$A+B=\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-2&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&2&3\\3&-3&7\end{bmatrix}$$

이고, 행렬 $A$의 실수 2에 의한 스칼라배는

$$2\begin{bmatrix}3&1&4\\2&-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times 3&2\times 1&2\times 4\\2\times 2&2\times(-1)&2\times 3\end{bmatrix}.$$

**정의 2.3.** 행렬의 모든 성분이 0인 행렬을 **영행렬**이라 한다. 영행렬은 $O$로 나타내며 특별히 크기가 $m\times n$인 영행렬을 $O_{m\times n}$으로 표기한다.

**정리 2.1.** $m\times n$ 행렬 $A$, $B$, $C$와 임의의 실수 $r$, $s$에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $A+B=B+A$ (교환법칙)

(b) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (결합법칙)

(c) $A+O=O+A=A$

(d) $A+(-1)A=(-1)A+A=O$

(e) $r(A+B)=rA+rB$ (분배법칙)

(f) $(r+s)A = rA + sA$ (분배법칙)

(g) $(rs)A = r(sA)$ (스칼라배의 결합법칙)

(h) $1A = A$

- $(-1)A + A = O$이므로 $(-1)A$는 $A$의 합에 대한 역원이다. 이제 편의상 $(-1)A = -A$라 쓰자.

이제 $m \times n$ 행렬 $A, B$에 대해 **두 행렬의 차** $A - B$를

$$A - B = A + (-B)$$

라 정의하자.

## 3 행렬의 곱셈

**정의 3.1.** 행렬 $A = (a_{ij})_{m\times k}$ , $B = (b_{ij})_{k\times n}$에 대하여 $A$의 열의 수와 $B$의 행의 수가 같을 때, 두 행렬의 곱을 $AB$로 나타낸다. $AB$를 행렬 $C = (c_{ij})_{m\times n}$라고 할 때, 행렬 $C$의 성분 $c_{ij}$는 행렬 $A$의 $i$행과 행렬 $B$의 $j$열의 서로 대응되는 성분끼리 곱하여 모두 더한 값으로 정의한다. 즉,

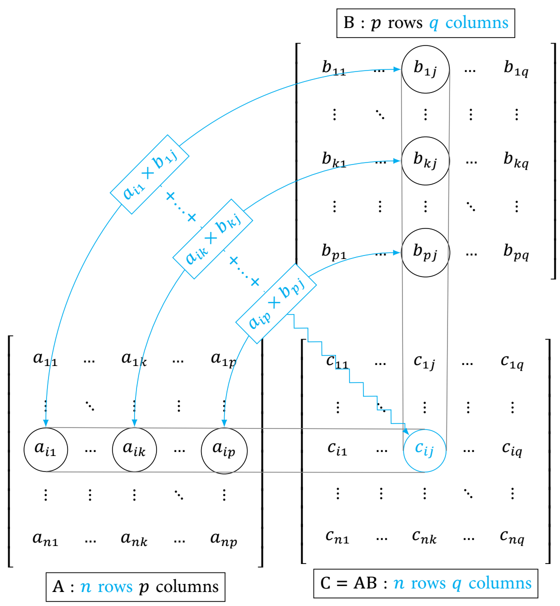
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n)$$

이다.

$$\begin{array}{rcc} & & j\text{열} \\ i\text{행} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} \\ & A & B \end{array}$$

$$C = AB$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n)$$




**예제 3.1.** 다음 두 행렬 $A$, $B$에 대하여 $AB$를 구하여라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**예제 3.2.** 다음 두 행렬 $A$, $B$에 대해 $AB$와 $BA$를 각각 구하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**정리 3.1.** 합과 곱이 정의되는 세 행렬 $A$, $B$, $C$에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $(AB)C = A(BC)$ (곱의 결합법칙)

(b) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (분배법칙)

(c) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (단, $k$는 실수) (스칼라배의 결합법칙)

참고. 행렬을 이용하면 연립일차방정식을 보다 간편하게 표현할 수 있다. 즉

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

**정의 3.2.** $n$차 정방행렬 $A$의 거듭제곱을 아래와 같이 정의한다.

$$A^0 = I_n,\ A^1 = A,\ A^2 = AA,\ A^3 = AAA\ ,\cdots$$

$$A^k = AAA\cdots A \quad (A\text{가 } k\text{개})$$

**예제 3.3.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$일 때, $A^2$와 $A^3$을 각각 구하여라.

**예제 3.4.** 권현우 중위가 올해 삼성 핸드폰을 사용하고 있다. 다음의 표는 올해 2000명을 대상으로 '핸드폰 구매희망에 대한 설문조사' 를 한 결과를 정리한 것이다.

| 신규 \ 기존 | 애플 | 삼성 |
|---|---|---|
| 애플 | 0.8 | 0.4 |
| 삼성 | 0.2 | 0.6 |

권현우 중위가 매년 핸드폰을 바꾸고, 표에 제시된 선호도를 따른다고 가정할 때, 5년 후에 권현우 중위가 어떤 회사의 핸드폰을 쓸 가능성이 높은지 분석하라.

| 신규 \ 기존 | 애플 | 삼성 |
|---|---|---|
| 애플 | 0.8 | 0.4 |
| 삼성 | 0.2 | 0.6 |

$n$년이 지난 후 애플 핸드폰 구매를 희망하는 확률을 $p_n$, 삼성 핸드폰으로 구매를 희망하는 확률을 $q_n$이라 하자. 현재 권현우 중위가 삼성 핸드폰을 쓰고 있으므로 $p_0 = 0$, $q_0 = 1$이다. 그러면 $(n+1)$년에 애플 핸드폰을 구매할 확률 $p_{n+1}$과 삼성 핸드폰을 구매할 확률 $q_{n+1}$을 구하면 다음과 같다.

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 0.4q_n$$
$$q_{n+1} = 0.2p_n + 0.6q_n$$

이다. 답은

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0.67008 & 0.65984 \\ 0.32992 & 0.34016 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_5 \\ q_5 \end{bmatrix} = A^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.65984 \\ 0.34016 \end{bmatrix}$$

# 4 가역행렬

**정의 4.1.** $n$차 정방행렬 $A$와 $n$차 단위행렬 $I$에 대하여

$$AB = BA = I$$

가 되는 $n$차 정방행렬 $B$가 존재하면 $A$를 **가역**invertible 또는 **정칙**nonsingular이라 하고, 이때의 행렬 $B$를 $A$의 역행렬이라 하며, $A^{-1}$으로 나타낸다. 이러한 $B$가 존재하지 않으면 $A$를 **비가역**noninvertible 또는 **비정칙**singular이라 한다.

**예제 4.1.** 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$의 역행렬은

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

이다.

**정리 4.1.** $ad - bc \neq 0$일 때 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$는 가역행렬이고 $A$의 역행렬은

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**예제 4.2.** 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$일 때 역행렬 $A^{-1}$를 구하여라.

**정리 4.2.** 정방행렬 $A$의 역행렬이 $B$와 $C$이면 항상 $B = C$이다.

위 정리는 기호 $A^{-1}$의 정당성을 부여한다.

증명. $C$는 $A$의 역행렬이므로 $AC = I$이다. 그런데 $B$도 $A$의 역행렬이므로 $BA = I$이다. 따라서

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = C$$

이다.

**정리 4.3.** 행렬 $A, B$가 $n$차 정방행렬이면 다음 성질들이 성립한다.

(i) 단위행렬 $I$는 가역이고, $I^{-1} = I$이다.

(ii) 행렬 $A$가 가역이면, $A$의 역행렬 $A^{-1}$도 가역이고 $(A^{-1})^{-1} = A$이다.

(iii) 행렬 $A, B$가 가역이면, $AB$도 가역이고 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$이다.

(iv) 행렬 $A$가 가역이면, 0이 아닌 실수 $r$의 스칼라배 $rA$도 가역이고, $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$이다.

# 5 전치행렬과 대각합

**정의 5.1.** 행렬 $A$의 거듭제곱을 아래와 같이 정의한다.

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \ldots, A^k = AAA\cdots A$$

특히 행렬 $A$가 가역일 때, $A^{-1}$에 대한 거듭제곱을 다음과 같이 정의한다.

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}, \quad A^{-3} = (A^{-1})^3, \ldots, A^{-k} = (A^{-1})^k$$

**정의 5.2.** $m \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]$에서 행과 열을 바꾸어 놓은 $n \times m$ 행렬을 $A$의 **전치행렬**transpose matrix이라 하고, 이 행렬을 $A^T$로 나타낸다.

**예제 5.1.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -9 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}$의 전치행렬은 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & -9 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$이다.

**정리 5.1.** 행렬 $A$와 $B$는 연산이 가능하고 $r$이 임의의 실수이면 다음 성질들이 성립한다.

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(rA)^T = rA^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

증명 (4). $A$를 $m \times n$ 행렬, $B$를 $n \times p$ 행렬이라고 하자. 전치행렬의 정의에 의하여 $(AB)^T$의 $(i, j)$ 원소는 $AB$의 $(j, i)$ 원소다. 행렬의 곱셈의 정의에 의하여

$$(AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_k = \sum_{k=1}^{n} A^T_{kj}B^T_{ik} = \sum_{k=1}^{n} B^T_{ik}A^T_{ki} = (B^T A^T)_{ij}$$

이다. 따라서 $(AB)^T = B^T A^T$이다.

**정의 5.3.** $n$차 정방행렬 $A = (a_{ij})$의 대각원소 $a_{11}$, $a_{22}$, ..., $a_{nn}$을 모두 더한 합을 $A$의 대각합(trace)이라 하고, 이것을 $\mathrm{tr}\, A$로 나타낸다. 즉

$$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

**정리 5.2.** 행렬 $A, B$가 $n$차 정방행렬이면 다음 성질들이 성립한다.

(i) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$

(ii) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}\,A$ (단, $k$는 임의의 실수)

(iii) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}\,A$

(iv) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

참고: $A, B, C$가 $n$차 정방행렬일때 $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$는 성립.

**예제 5.2.** 관계식 $AB-BA = I_n$을 만족하는 $n$차 정방행렬 $A, B$는 존재하지 않는다.

풀이.$AB - BA = I_n$을 만족하는 행렬 $A, B$가 있다고 하자. 그러면

$$0 = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(I_n) = n$$

이므로 이는 모순이다. 따라서 $AB - BA = I_n$을 만족하는 $n$차 정방행렬 $A, B$는 존재하지 않는다.