UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Disciplina: Álgebra Linear - prof. Oliver

3^a **Lista de Exercícios - 09 / 05 /2019 -**

1. Considere em $V = \mathbb{R}$ a operação multiplicação por escalar $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $p(\alpha, x) = t\alpha x$, onde $t \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula fixada e a operação soma $s : \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dada por $s(x, y) = xy$. Este conjunto V com estas operações é um espaço vetorial? Se sim, prove. Senão indique qual das propriedades não é satisfeita para qual operação. Não é um espaço vetorial. Não são satisfeitas: a propriedade do elemento oposto da adição e as propriedades distributivas.

2. Verifique se o subconjunto $\{(-1, 0, 1, 1), (2, 6, -2, 4), (-2, 3, -4, -1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ é l.i. Sim.

3. Complete o conjunto $\{(1, 1, 2, 0), (-1, 1, 0, 3)\}$ de modo a encontrar uma base de $\mathbb{R}^4$. Existem várias possibilidades. Basta esocler dois vetores tal que o determinante da matriz formada por eles tenha determinante não nulo.

4. O conjunto dos polinômios reais (de qualquer grau) é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usuais? Se sim qual a dimensão deste espaço vetorial? Sim. Mas a dimensão é infinita, pois o conjunto dos monômios $\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ é l.i. e tem infinitos vetores.

5. Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

(a) Encontre a matriz de mudança de base de $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ para a base canônica.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Encontre a matriz de mudança da base canônica para a base $\{(1, 2), (-2, 1)\}$.
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

(c) Encontre a matriz de mudança de base de $\{(1, 2), (, -2, 1)\}$ para $\{(1, 3), (2, 4)\}$.
$$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Dados $U = span(\{(0, 1, 0)\})$ e $V = span(\{(1, 0, 2), (-2, 0, 1)\})$, mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Disciplina: Álgebra Linear - prof. Oliver
4^a **Lista de Exercícios - 16 / 05 /2019 -**

1. Para cada uma das seguintes transformações $T_i : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, encontre uma matriz $A_{2\times 2}$ tal que $T_i(x, y)$ pode ser escrita como $T_i(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) A transformação identidade $T_1(x, y) = (x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) A transformação homotetia, isto é, $T_2(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ fixado. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

c) A projeção sobre o eixo x, isto é, $T_3(x, y) = (x, 0) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d) A transformação nula $T_4(x, y) = (0, 0) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

e) A rotação de $\theta = \frac{\pi}{2}$ sobre o eixo x, ou seja, a transformação que leva o sistema de eixos coordenados xy no eixo $x'y'$, ortogonais, com a mesma origem e rotacionados de $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Considere o espaço vetorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

(a) Encontre a matriz de mudança de base de $\{(1, 2), (-2, 1)\}$ para a base canônica. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Encontre a matriz de mudança da base canônica para a base $\{(1, 2), (-2, 1)\}$. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

(c) Encontre a matriz de mudança de base de $\{(1, 2), (, -2, 1)\}$ para $\{(1, 3), (2, 4)\}$. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$.

3. Considere as bases $\alpha = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ e $e = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre a matriz da transformação $T_a : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ de α para e dada por $T_a(x,y) = (-2x+y, x+y)$. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Encontre uma transformação de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$ cuja matriz de transformação de α para e seja $T_b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. $T_b(x,y) = (\frac{x-y}{2}, 2y)$.

c) Encontre a matriz da transformação obtida no item (b) da base α para a base $\gamma = \{(-2,1),(0,3)\}$. $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

4. Considere as bases α e e do exercício anterior de $\mathbb{R}^2$ e a base $\beta = \{(1,0,0),(0,0,1),(,0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre a matriz da transformação $S_a : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ de e para β dada por $S_a(x,y) = (x+2y, 2x-y, x-y)$. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Encontre uma transformação de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$ cuja matriz de transformação de β para e seja $S_b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. $S_b(x,y,z) = (x+y-z, -x+z+y)$.

c) Considere a transformação de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ dada pela composição $T_e = (S_a(T_a(x,y)))$ (dos itens (a) dos exercícios 4 e 3 respectivamente). Encontre a matriz de transformação de T_e de α para β. Basta multiplicar a matriz obtida em 4a pela matriz obtida em 3a, nesta ordem.

5. Invente um produto interno de $\mathbb{R}^n$ que não seja um dos vistos em sala e verifique que é de fato um produto interno.

6. Dados os vetores $u = (1,1,0), v = (1,-1,2)$ e $w = (0,-1,3)$ obtenha uma base ortonormal de vetores de $\mathbb{R}^3$ usando o processo de Gram-Schmidt.

$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$.