3º CE231 - Modelos Markovianos

III Decomposição do espaço de estados

XXXX

17 de Agosto de 2020

Exercicio 1

Seja S(x,y) onde x é um estado recorrente e não se comunica com y, ou seja, $\rho_{x,x} = 1$ *e* $\rho_{x,y} = 0$.

R: Seja C_n uma cadeia de markov com espaço de estados S onde $N(y)$ é o número de vezes em que a cadeia permanece no espaço y, então:

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} l_y(C_n)$$

Também observamos que $N(y) \geq 1$ é o mesmo que $T_y < \infty$ logo:

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{x,y}$$

Temos que a probabilidade com a qual a cadeia começando em x visitar a primeira vez y no tempo m e visitar novamente no tempo n (onde m e n são inteiros positivos) é:

$$P_x(T_y = m).P_y(T_y = n)$$

Logo:

$$P_x(N(y) \geq 2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m).P_y(T_y = n) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m)\right] . \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = m)\right] = \rho_{x,x}\rho_{x,y} = 1{*}0 = 0$$

Exercicio 3

Mostre que se o estado x se comunica com y e y se comunica com z, então x se comunica com z

R: Pela Definição 19, temos que se x se comunica com y, então temos $\rho_x(\Gamma_y = n) > 0$ para algum n finito. Portanto do mesmo princípio, se y se comunica com z temos $\rho_y(\Gamma_z = m) > 0$ para algum m finito. Portanto $\rho_x(\Gamma_z = m + n) > 0$ o que demonstra que x se comunica com z

Exercicio 4

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Esta cadeia é irredutível? ou seja, prove que o conjunto de estados irredutíveis F satisfaz $F = S$, sendo $S = (1, \cdots, 9)$. Prove também que está cadeia é recorrente, ou seja, prove que cada estado em S é recorrente

R:

Seja $F = S$ =$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a partir do teorema 12, temos que $E_y = (N_y) = \infty$ para todo y e S, portanto a cadeia S é recorrente, pois não apresenta valores proximos ou iguais a zero conforme resultado obtido no R

1) $\gamma_{1,2} = 0.5$
2) $\gamma_{2,3} = 1.0$
3) $\gamma_{3,4} = 1.0$
4) $\gamma_{4,1} = 1.0$
5) $\gamma_{1,5} = 1.0$
6) $\gamma_{5,6} = 1.0$
7) $\gamma_{6,7} = 1.0$
8) $\gamma_{7,8} = 1.0$
9) $\gamma_{8,9} = 1.0$
10) $\gamma_{9,1} = 1.0$

Portanto, todos os estados se comunicam entre si, e a cadeia é irredutível.

Para verificar se a cadeia é recorrente, podemos utilizar a definição 17, que enuncia que para que uma cadeia seja recorrente, todos os seus estados devem ser recorrentes. Ou seja, para todos os estados, $\rho_{y,y} = 1$ (Definição 14). Podemos verificar quais estados são recorrentes por meio da função steadyStates do pacote markovchain:

```
Unnamed Markov chain
 A  9 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
  0   1 2 3   4 5 6 7 8
0 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0 0
1 0 0.0 1 0 0.0 0 0 0 0
2 0 0.0 0 1 0.0 0 0 0 0
3 1 0.0 0 0 0.0 0 0 0 0
4 0 0.0 0 0 0.0 1 0 0 0
5 0 0.0 0 0 0.0 0 1 0 0
6 0 0.0 0 0 0.0 0 0 1 0
7 0 0.0 0 0 0.0 0 0 0 1
8 1 0.0 0 0 0.0 0 0 0 0
```

```
       0   1   2   3   4   5   6   7   8
[1,] 0.2 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1
```

```
character(0)
```

```
      0   1   2   3   4   5   6   7   8
[1,] 0.2 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1
```

```
      0   1   2   3   4   5   6   7   8
[1,] 0.0 0.2 0.0 0.2 0.2 0.0 0.2 0.0 0.2
[2,] 0.4 0.0 0.2 0.0 0.0 0.2 0.0 0.2 0.0
```

```
character(0)
```

```
Unnamed Markov chain  Markov chain that is composed by:
Closed classes:
0 1 2 3 4 5 6 7 8
Recurrent classes:
{0,1,2,3,4,5,6,7,8}
Transient classes:
NONE
The Markov chain is irreducible
The absorbing states are: NONE
```

Como nenhum dos valores acusados é praticamente nulo, podemos concluir que todos os estados são recorrentese, por conseguinte, a cadeia também o é.

Exercicio 6

A **Fiscalía de Mídia** identificou seis estados associados à televisão: 0 (nunca assiste TV), 1 (assiste apenas notícias), 2 (assiste TV com bastante frequência), 3 (viciado), 4 (em modificação de comportamento), 5 (morte encefálica). As transições de estado para estado podem ser modeladas como uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 1/3 & 0.0 & 0.0 & 1/3 & 1/3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

a) Quais estados são recorrentes e quais transientes.

R: Utilizando o pacote markovchain, podemos extrair a informação:

```
          0 1   2         3         4   5
0 1.0000000 0 0.0 0.0000000 0.0000000 0.0
1 0.5000000 0 0.5 0.0000000 0.0000000 0.0
2 0.1000000 0 0.5 0.3000000 0.0000000 0.1
3 0.0000000 0 0.0 0.7000000 0.1000000 0.2
4 0.3333333 0 0.0 0.3333333 0.3333333 0.0
5 0.0000000 0 0.0 0.0000000 0.0000000 1.0
```

```
[1] "1" "2" "3" "4"
```

```
     0 1 2 3 4 5
[1,] 0 0 0 0 0 1
[2,] 1 0 0 0 0 0
```

Logo, podemos observar que os estados 0 e 5 são recorrentes, enquanto os estados 1, 2, 3 e 4 são transientes.

b) Começando do estado 1, qual é a probabilidade de o estado 5 ser atingido antes do estado 0, ou seja, qual é a probabilidade de um visualizador de notícias acabar com morte cerebral?

R:

Seja o teorema 19:

$f(x) = \sum_{y \in F} \gamma_{x,z} + \sum_{y \in St} \gamma_{x,y} f(y)$, $x \in St$ $f(x) = \rho_{x,f}$, $x \in St$

Queremos a probabilidade partindo do estado "1" chegando ao estado "5" antes de chegar ao estado "0", então toma-se F={5}.

Podemos tomar F={5,0} e substrair $\gamma_{x,0}$, $x \in St$

Então:

$f(1) = \gamma_{1,5} + \gamma_{1,1} f(1) + \gamma_{1,2} f(2) + \gamma_{1,3} f(3) + \gamma_{1,4} f(4)$

$f(2) = \gamma_{2,5} + \gamma_{2,1} f(1) + \gamma_{2,2} f(2) + \gamma_{2,3} f(3) + \gamma_{2,4} f(4)$

$f(3) = \gamma_{3,5} + \gamma_{3,1} f(1) + \gamma_{3,2} f(2) + \gamma_{3,3} f(3) + \gamma_{3,4} f(4)$

$f(4) = \gamma_{4,5} + \gamma_{4,1} f(1) + \gamma_{4,2} f(2) + \gamma_{4,3} f(3) + \gamma_{4,4} f(4)$

com isso temos:

$f(1) = 0.5 f(2)$

$f(2) = 0.5 f(2) + 0,3 f(3) + 0,1$

$f(3) = 0.7f(3) + 0,1f(4) + 0,2$

$f(4) = \frac{1}{3}f(3) + \frac{1}{3}f(4)$

Resolvendo o sistema, temos:

$f(1) = 0,34$ $f(2) = 0,68$ $f(3) = 0,8$ $f(4) = 0,4$

Como $f(x) = \rho_{x,f}$,

Temos: $f(1) = \rho_{1,5} = 0,34$

Para encontrarmos a probabilidade de que assintoticamente pelo R, partindo de determinado estado, o visualizador atinja determinado estado antes de entrar no estado absorvente, podemos utilizar uma potência elevada da matriz de transição:

```
     0 1 2 3 4    5
0 1.00 0 0 0 0 0.00
1 0.66 0 0 0 0 0.34
2 0.32 0 0 0 0 0.68
3 0.20 0 0 0 0 0.80
4 0.60 0 0 0 0 0.40
5 0.00 0 0 0 0 1.00
```

Portanto, podemos perceber que, partindo do estado 1, o visualizador terá probabilidade de 0.34 de atingir o estado 5 antes que caia no estado 0.