CE075 - Análise de Dados Longitudinais

Silva, J.L.P.

18 de setembro, 2019

Modelo Linear Misto

O Modelo Linear Misto

1. Modelo de Efeitos Fixos: apresenta somente fatores fixos, exceto o termo do erro experimental.

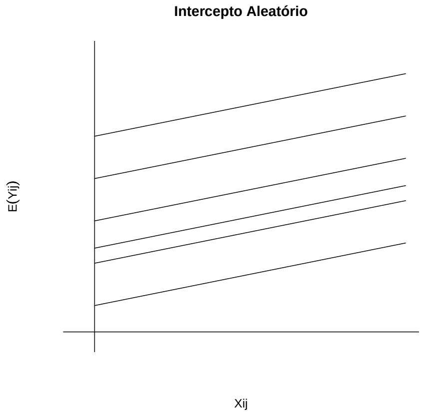
2. Modelo de Efeitos Mistos: apresenta tanto fatores fixos como aleatórios, além do erro experimental.

Modelo Linear Misto: Ideia

- Os parâmetros da regressão variam de indivíduo para indivíduo explicando as fontes de heterogeneidade da população.
- Cada indivíduo tem a sua própria trajetória média e um subconjunto dos parâmetros de regressão são tomados como aleatórios.
- Efeitos fixos são compartilhados por todos os indivíduos e os aleatórios são específicos de cada um.

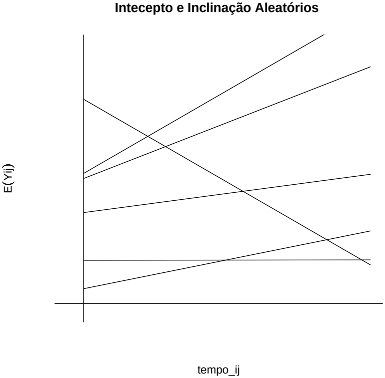
Modelo Linear Misto: Intercepto aleatório

$$\begin{aligned} Y_{ij} =& \beta_{0i} + \beta_1 t_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ =& (\beta_0 + b_{0i}) + \beta_1 t_{ij} + \varepsilon_{ij} \end{aligned}$$



Modelo Linear Misto: Intercepto e Inclinação Aleatórios

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} =& \beta_{0i} + \beta_{1i} t_{ij} + \varepsilon_{ij} \\
=& (\beta_0 + b_{0i}) + (\beta_1 + b_{1i}) t_{ij} + \varepsilon_{ij}
\end{aligned}
$$



Modelo Linear Misto

- **Características:**
  1. Características populacionais β (fixos);
  2. Características individuais β_i ou b_i (aleatórios).

- **Efeito:**
  1. Média: $E(Y_i) = X_i\beta$
  2. Estrutura de Covariância: Efeito aleatório induz $Var(Y_i)$.
  3. Separa a variação entre indivíduos daquela intra indivíduos.
  4. Permite obter estimativa de trajetórias individuais no tempo.

Modelo Linear Misto - Simetria Composta

Modelo com intercepto aleatório:

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \beta t_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

- $\beta_{0i} \sim N(\beta_0, \sigma^2_{\beta_0})$.
- $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.
- β_{0i} e ε_{ij} são independentes.

1. $Var(Y_{ij}) = \sigma^2 + \sigma^2_{\beta_0}$.
2. $Cov(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \sigma^2_{\beta_0}$

Modelo Linear Misto - Inclinação aleatória

Modelo com intercepto e inclinação aleatórios:

$$Y_{ij} = \beta_{0i} + \beta_{1i} t_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

- $\beta_{0i} \sim N(\beta_0, \sigma^2_{\beta_0})$, $\quad \beta_{1i} \sim N(\beta_1, \sigma^2_{\beta_1})$, $\quad Cov(\beta_{0i}, \beta_{1i}) = \sigma_{\beta_{01}}$.
- $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.
- $\beta' = (\beta_{0i}, \beta_{1i})$ e ε_{ij} são independentes.

1. $Var(Y_{ij}) = \sigma^2_{\beta_0} + \sigma^2_{\beta_1} t^2_{ij} + 2 t_{ij} \sigma_{\beta_{01}} + \sigma^2$.
2. $Cov(Y_{ij}, Y_{ij'}) = \sigma^2_{\beta_0} + t_{ij} t_{ij'} \sigma^2_{\beta_1} + (t_{ij} + t_{ij'}) \sigma_{\beta_{01}}$.

Vantagens

1. Predizer trajetórias individuais (ex: intercepto aleatório)

$$Y_{ij} = X_{ij}\beta + b_i + \varepsilon_{ij}$$

   Resposta Média populacional:

$$E(Y_{ij}) = X_{ij}\beta$$

   Resposta média para o i-ésimo indivíduo (trajetória):

$$E(Y_{ij}|b_i) = X_{ij}\beta + b_i.$$

2. Flexibilidade em acomodar estruturas não balanceadas.

Forma Geral do Modelo Misto

A forma geral do modelo é

$$Y_i = X_i\beta + Z_i b_i + \varepsilon_i,$$

em que:

- β é um vetor $p \times 1$ de efeitos fixos;
- b_i é um vetor $q \times 1$ de efeitos aleatórios;
- $b_i \sim N_q(0, D)$ e $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, sendo b_i e ε_{ij} independentes.
- $q \leq p \Rightarrow Z_i$ é um subconjunto de X_i.

Característica do Modelo

1. Média Populacional ou Marginal

$$E(Y_i) = X_i\beta.$$

2. Média condicional ou específica por indivíduo

$$E(Y_i|b_i) = X_i\beta + Z_i b_i.$$

3. Covariância Marginal

$$Var(Y_i) = Z_i Var(b_i) Z_i' + \sigma^2 I_{n_i}.$$

4. Podemos assumir que $\varepsilon_i \sim N(0, R_i)$ mas o usual é tomar $R_i = \sigma^2 I_{n_i}$ e interpretá-lo como covariância condicional. Ou seja,

$$Var(Y_i|b_i) = R_i = \sigma^2 I_{n_i}.$$

Como os Efeitos Aleatórios Capturam Correlação

- Dados os efeitos aleatórios, as medidas de cada indivíduo são independentes (suposição de independência condicional)

$$p(y_i|b_i) = \prod_{j=1}^{n_i} p(y_{ij}|b_i)$$

- Marginalmente (integrando nos efeitos aleatórios, as medidas de cada indivíduo são correlacionadas)

$$p(y_i) = \int p(y_i|b_i)p(b_i)db_i \Longrightarrow y_i \sim N_{n_i}(X_i\beta, Z_i Var(b_i)Z_i' + \sigma^2 I_{n_i})$$