CE043 - GAMLSS

Distribuições discretas

Silva, J.P; Taconeli, C.A.

30 de agosto, 2020

Conteúdo

Introdução

Introdução

- Distribuições discretas são amplamente utilizadas para modelar contagens:

Introdução

- Distribuições discretas são amplamente utilizadas para modelar contagens:
    - Número de chegadas de aviões a um aeroporto;

Introdução

- Distribuições discretas são amplamente utilizadas para modelar contagens:
    - Número de chegadas de aviões a um aeroporto;
    - Número de itens defeituosos em lotes de uma produção;

Introdução

- Distribuições discretas são amplamente utilizadas para modelar contagens:
  - Número de chegadas de aviões a um aeroporto;
  - Número de itens defeituosos em lotes de uma produção;
  - Número de frutos gerados por plantas;

Introdução

- Distribuições discretas são amplamente utilizadas para modelar contagens:

    - Número de chegadas de aviões a um aeroporto;
    - Número de itens defeituosos em lotes de uma produção;
    - Número de frutos gerados por plantas;
    - Número de problemas de execução de um sistema operacional...

- Diferentes modelos probabilísticos para variáveis discretas estão implementados na biblioteca `gamlss`, definidos em diferentes conjuntos de valores:

Introdução

- Diferentes modelos probabilísticos para variáveis discretas estão implementados na biblioteca `gamlss`, definidos em diferentes conjuntos de valores:

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$, como a distribuição Poisson (`PO`);

Introdução

- Diferentes modelos probabilísticos para variáveis discretas estão implementados na biblioteca `gamlss`, definidos em diferentes conjuntos de valores:

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$, como a distribuição Poisson (`PO`);

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{1, 2, 3, ...\}$, como a distribuição logarítmica (`LO`);

Introdução

- Diferentes modelos probabilísticos para variáveis discretas estão implementados na biblioteca `gamlss`, definidos em diferentes conjuntos de valores:

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$, como a distribuição Poisson (`PO`);

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{1, 2, 3, ...\}$, como a distribuição logarítmica (`LO`);

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ..., n\}$, como a distribuição binomial (`BI`).

Introdução

- Diferentes modelos probabilísticos para variáveis discretas estão implementados na biblioteca `gamlss`, definidos em diferentes conjuntos de valores:

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$, como a distribuição Poisson (`PO`);

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{1, 2, 3, ...\}$, como a distribuição logarítmica (`LO`);

  - Variáveis com suporte no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ..., n\}$, como a distribuição binomial (`BI`).

- Além dos modelos implementados, novas distribuições podem ser definidas, por exemplo, através de truncamento e discretização.

Distribuição de Poisson

- Para a distribuição de Poisson é o modelo clássico para contagens definidas no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$.

Distribuição de Poisson

- Para a distribuição de Poisson é o modelo clássico para contagens definidas no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$.

- A v.a. $y \sim \text{Poisson}(\mu)$ tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu) := f(y; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, ...; \mu > 0.$$

Distribuição de Poisson

- Para a distribuição de Poisson é o modelo clássico para contagens definidas no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$.

- A v.a. $y \sim \text{Poisson}(\mu)$ tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu) := f(y; \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, ...; \mu > 0.$$

- Por ter um único parâmetro, a distribuição de Poisson é pouco flexível na modelagem de dados de contagens.

Distribuição de Poisson

- Para a distribuição de Poisson é o modelo clássico para contagens definidas no conjunto $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$.

- A v.a. $y \sim \text{Poisson}(\mu)$ tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu) := f(y;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, ...; \mu > 0.$$

- Por ter um único parâmetro, a distribuição de Poisson é pouco flexível na modelagem de dados de contagens.

- A distribuição de Poisson é caracterizada pela equidispersão:

$$\mathrm{E}(y) = \mathrm{Var}(y).$$

Distribuição de Poisson

- Dentre as principais limitações da distribuição de Poisson, destacamos a impossibilidade de modelar adequadamente dados com:

Distribuição de Poisson

- Dentre as principais limitações da distribuição de Poisson, destacamos a impossibilidade de modelar adequadamente dados com:
  - Superdispersão ($\text{Var}(y) > \text{E}(y)$) e subdispersão ($\text{Var}(y) < \text{E}(y)$);

Distribuição de Poisson

- Dentre as principais limitações da distribuição de Poisson, destacamos a impossibilidade de modelar adequadamente dados com:
    - Superdispersão ($\text{Var}(y) > \text{E}(y)$) e subdispersão ($\text{Var}(y) < \text{E}(y)$);
    - Excesso ou escassez de zeros;

Distribuição de Poisson

- Dentre as principais limitações da distribuição de Poisson, destacamos a impossibilidade de modelar adequadamente dados com:
  - Superdispersão ($\text{Var}(y) > \text{E}(y)$) e subdispersão ($\text{Var}(y) < \text{E}(y)$);
  - Excesso ou escassez de zeros;
  - Forte assimetria à direita.

Distribuição de Poisson

- Dentre as principais limitações da distribuição de Poisson, destacamos a impossibilidade de modelar adequadamente dados com:
  - Superdispersão ($\mathrm{Var}(y) > \mathrm{E}(y)$) e subdispersão ($\mathrm{Var}(y) < \mathrm{E}(y)$);
  - Excesso ou escassez de zeros;
  - Forte assimetria à direita.
- Distribuições alternativas podem contornar as limitações da Poisson na modelagem de contagens.

Modelos probabilísticos para variáveis discretas

Modelos probabilísticos para variáveis discretas

Tabela 1: Distribuições com suporte em $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$

Distribuicao	Nome `gamlss`	Parâmetro (função de ligação)			
		μ	σ	ν	τ
beta neg binomial	`BNB`	log	log	log	-
Delaporte	`DEL`	log	log	logit	-
discrete Burr XII	`DBURR12`	log	log	log	-
double Poisson	`DPO`	log	log	-	-
generalized Poisson	`GPO`	log	log	-	-
geometric	`GEOM`	log	-	-	-
geometric (original)	`GEOMo`	logit	-	-	-
negative binomial type I	`NBI`	log	log	-	-
negative binomial type II	`NBII`	log	log	-	-
neg binomial family	`NBF`	log	log	log	-
Poisson	`PO`	log	-	-	-
Poisson - inv Gaussian	`PIG`	log	log	-	-
Poisson - inv Gaussian 2ª	`PIG2`	log	log	-	-
Poisson shifted GIG	`PSGIG`	log	log	ident	logit
Sichel	`SI`	log	log	ident	-
Sichel (μ the mean)	`SICHEL`	log	log	ident	-
Waring	`WARING`	log	log	-	-
Yule	`YULE`	log	-	-	-

Tabela 2: Distribuições com suporte em $R_y = \{0, 1, 2, ...\}$ modificadas em $y = 0$

Distribuição	Nome gamlss	Parâmetro (função de ligação)			
		μ	σ	ν	τ
zero-adj beta neg binom	`ZABNB`	log	log	log	logit
zero-adj logarithmic	`ZALG`	logit	logit	-	-
zero-adj neg binomial	`ZANBI`	log	log	logit	-
zero-adj PIG	`ZAPIG`	log	log	logit	-
zero-adj Sichel	`ZASICHEL`	log	log	ident	logit
zero-adj Poisson	`ZAP`	log	logit	-	-
zero-adj Zipf	`ZAZIPF`	log	logit	-	-
zero-inf beta neg binom	`ZIBNB`	log	log	log	logit
zero-inf neg binomial	`ZINBI`	log	log	logit	-
zero-inf neg binom fam	`ZINBF`	log	log	log	logit
zero-inf Poisson	`ZIP`	log	logit	-	-
zero-inf Poisson (μ the mean)	`ZIP2`	log	logit	-	-
zero-inf PIG	`ZIPIG`	log	log	logit	-
zero-inf Sichel	`ZISICHEL`	log	log	ident	logit

Tabela 3: Distribuições com suporte em $R_y = \{0, 1, 2, ..., n\}$

Distribuição	Nome gamlss	Parâmetro (função de ligação)			
		μ	σ	ν	τ
binomial	`BI`	logit	-	-	-
beta binomial	`BB`	logit	log	-	-
double binomial	`DBI`	logit	log	-	-
zero-adj beta binomial	`ZABB`	logit	log	logit	-
zero-adj binomial	`ZABI`	logit	logit	-	-
zero-inf beta binomial	`ZIBB`	logit	log	logit	-
zero-inf binomial	`ZIBI`	logit	logit	-	-

Modelos probabilísticos para variáveis discretas

Tabela 4: Distribuições com suporte em $R_y = \{1, 2, ...\}$

Distribuição	Nome gamlss	Parâmetro (ligação)			
		μ	σ	ν	τ
logarithmic	`LG`	logit	-	-	-
Zipf	`BB`	log	-	-	-

Sessão R - Parte 1

- Nesta sessão, vamosu usar as demos do pacote `gamlss` para conhecer algumas das distribuições implementadas e suas propriedades.

Superdispersão e subdispersão

Superdispersão e subdispersão

- Superdispersão e subdispersão são recorrentes em problemas envolvendo dados de contagens.

Superdispersão e subdispersão

- Superdispersão e subdispersão são recorrentes em problemas envolvendo dados de contagens.

- Sob a distribuição de Poisson, os eventos sob contagem ocorrem de maneira aleatória ao longo do tempo, espaço, implicando em equidispersão, $\mathrm{Var}(\mathrm{y}) = \mathrm{E}(\mathrm{y})$.

Superdispersão e subdispersão

- Superdispersão e subdispersão são recorrentes em problemas envolvendo dados de contagens.

- Sob a distribuição de Poisson, os eventos sob contagem ocorrem de maneira aleatória ao longo do tempo, espaço, implicando em equidispersão, $\mathrm{Var}(\mathrm{y}) = \mathrm{E}(\mathrm{y})$.

- Quando os eventos ocorrem de maneira não aleatória, podemos ter superdispersão, $\mathrm{Var}(y) > \mathrm{E}(y)$, ou subdispersão, $\mathrm{Var}(y) < \mathrm{E}(y)$.

Superdispersão e subdispersão

- Superdispersão e subdispersão são recorrentes em problemas envolvendo dados de contagens.

- Sob a distribuição de Poisson, os eventos sob contagem ocorrem de maneira aleatória ao longo do tempo, espaço, implicando em equidispersão, $\text{Var}(\text{y}) = \text{E}(\text{y})$.

- Quando os eventos ocorrem de maneira não aleatória, podemos ter superdispersão, $\text{Var}(y) > \text{E}(y)$, ou subdispersão, $\text{Var}(y) < \text{E}(y)$.

- A Figura 1 ilustra processos de contagens que caracterizados por equi, super e subdispersão.

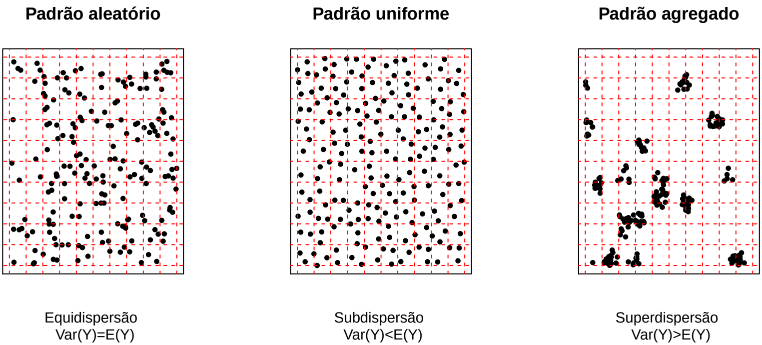

Figura 1: Ilustração de processos pontuais com equi, sub e superdispersão.

Superdispersão e subdispersão

- Não acomodar super (ou sub) dispersão na análise de dados de contagens pode comprometer a acurácia dos erros padrões, a taxa de cobertura dos intervalos de confiança, nível de significância e poder de testes de hipóteses;

Superdispersão e subdispersão

- Não acomodar super (ou sub) dispersão na análise de dados de contagens pode comprometer a acurácia dos erros padrões, a taxa de cobertura dos intervalos de confiança, nível de significância e poder de testes de hipóteses;

- Uma alternativa frequente nesses casos são os métodos de quase-verossimilhança;

Superdispersão e subdispersão

- Não acomodar super (ou sub) dispersão na análise de dados de contagens pode comprometer a acurácia dos erros padrões, a taxa de cobertura dos intervalos de confiança, nível de significância e poder de testes de hipóteses;

- Uma alternativa frequente nesses casos são os métodos de quase-verossimilhança;

- Na análise via quase-verossimilhança fazemos suposições apenas quanto aos dois primeiros momentos da distribuição da resposta: média e variância;

Superdispersão e subdispersão

- Não acomodar super (ou sub) dispersão na análise de dados de contagens pode comprometer a acurácia dos erros padrões, a taxa de cobertura dos intervalos de confiança, nível de significância e poder de testes de hipóteses;

- Uma alternativa frequente nesses casos são os métodos de quase-verossimilhança;

- Na análise via quase-verossimilhança fazemos suposições apenas quanto aos dois primeiros momentos da distribuição da resposta: média e variância;

- Como limitações, na abordagem de quase-verossimilhança não temos condições de estimar a função de probabilidades, não dispomos de uma função de verossimilhança...

Superdispersão e subdispersão

- Usando GAMLSS, assumimos uma distribuição de probabilidades, o que nos habilita a estimar a função de probabilidades, produzir inferências usando a função de verossimilhança.

Superdispersão e subdispersão

- Usando GAMLSS, assumimos uma distribuição de probabilidades, o que nos habilita a estimar a função de probabilidades, produzir inferências usando a função de verossimilhança.

- As duas principais abordagens para lidar com sub e superdispersão no contexto de GAMLSS são:

Superdispersão e subdispersão

- Usando GAMLSS, assumimos uma distribuição de probabilidades, o que nos habilita a estimar a função de probabilidades, produzir inferências usando a função de verossimilhança.

- As duas principais abordagens para lidar com sub e superdispersão no contexto de GAMLSS são:

    - Distribuições geradas por misturas;

Superdispersão e subdispersão

- Usando GAMLSS, assumimos uma distribuição de probabilidades, o que nos habilita a estimar a função de probabilidades, produzir inferências usando a função de verossimilhança.

- As duas principais abordagens para lidar com sub e superdispersão no contexto de GAMLSS são:

    - Distribuições geradas por misturas;

    - Distribuições contínuas discretizadas.

Distribuições geradas por mistura

Distribuições geradas por mistura

- Distribuições geradas por misturas permitem lidar com superdispersão ao assumir que a distribuição da variável resposta Y depende de uma v.a. γ cuja distribuição é conhecida.

Distribuições geradas por mistura

- Distribuições geradas por misturas permitem lidar com superdispersão ao assumir que a distribuição da variável resposta Y depende de uma v.a. γ cuja distribuição é conhecida.

- Seja Y uma v.a. discreta com função de probabilidade $P(Y = y|\gamma)$, e γ uma v.a. contínua com f.d.p. $f_\gamma(\gamma)$.

Distribuições geradas por mistura

- Distribuições geradas por misturas permitem lidar com superdispersão ao assumir que a distribuição da variável resposta Y depende de uma v.a. γ cuja distribuição é conhecida.

- Seja Y uma v.a. discreta com função de probabilidade $P(Y = y|\gamma)$, e γ uma v.a. contínua com f.d.p. $f_\gamma(\gamma)$.

- A função de probabilidade marginal (não condicional) de Y fica dada por:

$$P(Y = y) = \int_{R_\gamma} P(Y = y|\gamma) f_\gamma(\gamma) d\gamma.$$

Distribuições geradas por mistura

- Podemos assumir ainda γ uma v.a. discreta com função de probabilidade $P(\gamma = \gamma_j)$, produzindo como distribuição marginal:

$$P(Y = y) = \sum_{R_\gamma} P(Y = y | \gamma = \gamma_j) P(\gamma = \gamma_j).$$

Distribuições geradas por mistura

- Podemos assumir ainda γ uma v.a. discreta com função de probabilidade $P(\gamma = \gamma_j)$, produzindo como distribuição marginal:

$$P(Y = y) = \sum_{R_\gamma} P(Y = y|\gamma = \gamma_j)P(\gamma = \gamma_j).$$

- A distribuição resultante da mistura pode ou não ter uma forma explícita.

Distribuições geradas por mistura

- Podemos assumir ainda γ uma v.a. discreta com função de probabilidade $P(\gamma = \gamma_j)$, produzindo como distribuição marginal:

$$P(Y = y) = \sum_{R_\gamma} P(Y = y|\gamma = \gamma_j)P(\gamma = \gamma_j).$$

- A distribuição resultante da mistura pode ou não ter uma forma explícita.

- Nas situações em que não se tem uma forma explícita, métodos de aproximação (como quadratura Gaussiana) são usados para integrar γ.

Distribuições geradas por mistura - caso da Poisson com mistura contínua

- Misturas envolvendo a distribuição de Poisson são bastante usuais para modelar dados com superdispersão.

Distribuições geradas por mistura - caso da Poisson com mistura contínua

- Misturas envolvendo a distribuição de Poisson são bastante usuais para modelar dados com superdispersão.

- Neste caso, consideramos $Y|\gamma \sim \text{Poisson}(\mu\gamma)$, e $\gamma \sim f_\gamma(\gamma)$ definida em $(0, \infty)$.

Distribuições geradas por mistura - caso da Poisson com mistura contínua

- Misturas envolvendo a distribuição de Poisson são bastante usuais para modelar dados com superdispersão.

- Neste caso, consideramos $Y|\gamma \sim \text{Poisson}(\mu\gamma)$, e $\gamma \sim f_\gamma(\gamma)$ definida em $(0, \infty)$.

- Assumindo que $\text{E}(\gamma) = 1$, então a variável resultante da mistura terá média igual a μ.

Distribuições geradas por mistura - caso da Poisson com mistura contínua

- Misturas envolvendo a distribuição de Poisson são bastante usuais para modelar dados com superdispersão.

- Neste caso, consideramos $Y|\gamma \sim \text{Poisson}(\mu\gamma)$, e $\gamma \sim f_\gamma(\gamma)$ definida em $(0, \infty)$.

- Assumindo que $\text{E}(\gamma) = 1$, então a variável resultante da mistura terá média igual a μ.

- O caso mais conhecido de mistura contínua da distribuição Poisson é a **binomial negativa**.

Distribuições geradas por mistura - caso da Poisson com mistura contínua

- Seja $Y|\gamma \sim \text{Poisson}(\mu\gamma)$ e $\gamma \sim \text{gama}(1, \sigma^{1/2})$, isso é:

$$P(Y = y|\gamma) = \frac{e^{-\mu\gamma}(\mu\gamma)^y}{y!}$$

e

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{\gamma^{1/\sigma-1}\exp(-\gamma/\sigma)}{\sigma^{(1/\sigma)}\Gamma(1/\sigma)}, \quad \text{para } \gamma > 0.$$

Distribuições geradas por mistura - Poisson com mistura contínua

- A distribuição marginal de Y fica dada por:

$$P(Y = y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\gamma}(\mu\gamma)^y}{y!} \frac{\gamma^{1/\sigma-1}\exp(-\gamma/\sigma)}{\sigma^{(1/\sigma)}\Gamma(1/\sigma)} d\gamma$$

$$= \frac{\Gamma\left(y + 1/\sigma\right)}{\Gamma\left(1/\sigma\right)\Gamma(y+1)} \left(\frac{\sigma\mu}{1+\sigma\mu}\right)^y \left(\frac{1}{1+\sigma\mu}\right)^{1/\sigma}, \text{para } y = 0, 1, ...,$$

com $\mu > 0$ e $\sigma > 0$ que corresponde à distribuição binomial negativa, `NBI`(μ,σ)

Distribuições geradas por mistura - Poisson com mistura contínua

- A distribuição marginal de Y fica dada por:

$$
\begin{aligned}
P(Y=y) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\mu\gamma}(\mu\gamma)^y}{y!} \frac{\gamma^{1/\sigma-1}\exp(-\gamma/\sigma)}{\sigma^{(1/\sigma)}\Gamma(1/\sigma)} d\gamma \\
&= \frac{\Gamma\left(y+1/\sigma\right)}{\Gamma\left(1/\sigma\right)\Gamma(y+1)} \left(\frac{\sigma\mu}{1+\sigma\mu}\right)^y \left(\frac{1}{1+\sigma\mu}\right)^{1/\sigma} \text{, para } y = 0, 1, ...,
\end{aligned}
$$

com $\mu > 0$ e $\sigma > 0$ que corresponde à distribuição binomial negativa, `NBI`(μ,σ)

- Ao usar diferentes distribuições para γ temos diferentes distribuições marginais para Y, conforme pode ser visto na Tabela 5.

Tabela 5: Distribuições geradas por mistura - Poisson com misturas contínuas e discretas.

Distribuição	nome **gamlss**	Dist. Mistura	E(Y)	Var(Y)
Delaporte	DEL(μ, σ, ν)	SG(1, $\sigma^{1/2}$, ν)	μ	$\mu + \sigma(1-\mu)^2\mu^2$
NB tipo I	NBI(μ, σ)	GA(1, $\sigma^{1/2}$)	μ	$\mu + \sigma\mu^2$
NB tipo II	NBII(μ, σ)	GA(1, $\sigma^{1/2}\mu^{-1/2}$)	μ	$\mu + \sigma\mu$
NB family	NBF(μ, σ, ν)	GA(1, $\sigma^{1/2}\mu^{\nu/2-1}$)	μ	$\mu + \sigma\mu^{\nu}$
PIG	PIG(μ, σ)	IG(1, $\sigma^{1/2}$)	μ	$\mu + \sigma\mu^2$
Sichel	SICHEL(μ, σ, ν)	GIG(1, $\sigma^{1/2}$,ν)	μ	$\mu + h(\sigma,\nu)\mu^2$
ZI Poisson	ZIP(μ, σ)	BI(1, 1-σ)	(1-σ)μ	$(1-\sigma)(\mu + \sigma\mu^2)$
ZI Poisson 2	ZIP2(μ, σ)	$(1-\sigma)^{-1}$BI(1, 1-σ)	μ	$\mu + \frac{\sigma}{(1-\sigma)}\mu^2$
ZI NB	ZINBI(μ, σ, ν)	ZAGA(1, $\sigma^{1/2}$,ν)	(1-ν)μ	$(1-\nu)\left[\mu + (\sigma+\nu)\mu^2\right]$
ZI PIG	ZIPIG(μ, σ, ν)	ZAIG(1, $\sigma^{1/2}$)	(1-ν)μ	$(1-\nu)\left[\mu + (\sigma+\nu)\mu^2\right]$

- Nesta sessão R, vamos usar simulação para verificar algumas misturas resultantes da distribuição Poisson:

Sessão R - Parte 2

- Nesta sessão R, vamos usar simulação para verificar algumas misturas resultantes da distribuição Poisson:

    - Binomial negativa (Poisson com componente de mistura com distribuição gama);

Sessão R - Parte 2

- Nesta sessão R, vamos usar simulação para verificar algumas misturas resultantes da distribuição Poisson:

    - Binomial negativa (Poisson com componente de mistura com distribuição gama);

    - Poisson inflacionada de zeros (Poisson com componente de mistura com distribuição Bernoulli).

Distribuições contínuas discretizadas

Distribuições contínuas discretizadas

- Qualquer v.a. contínua com suporte no intervalo $(0, \infty)$ pode ser discretizada, originando uma nova distribuição útil para modelar contagens.

Distribuições contínuas discretizadas

- Qualquer v.a. contínua com suporte no intervalo $(0, \infty)$ pode ser discretizada, originando uma nova distribuição útil para modelar contagens.

- Seja W uma v.a. contínua com f.d.p., f.d.a. e função de sobrevivência denotadas, respectivamente, por $f_W(w)$, $F_W(w)$ e $S_W(w) = 1 - F_W(w)$.

Distribuições contínuas discretizadas

- Qualquer v.a. contínua com suporte no intervalo $(0, \infty)$ pode ser discretizada, originando uma nova distribuição útil para modelar contagens.
- Seja W uma v.a. contínua com f.d.p., f.d.a. e função de sobrevivência denotadas, respectivamente, por $f_W(w)$, $F_W(w)$ e $S_W(w) = 1 - F_W(w)$.
- A correspondente variável discretizada Y fica definida pela seguinte f.p.:

$$
\begin{aligned}
P(Y = y) = P(y < W < y+1) &= \int_y^{y+1} f_W(w)dw \\
&= F_W(y+1) - F_W(y) = S_W(y) - S_W(y+1),
\end{aligned}
$$

enquanto a f.d.a. é simplesmente $F_Y(y) = F_W(y+1)$, para $y = 0, 1, 2, \ldots$.

Distribuições Weibull discreta

- Como exemplo, vamos considerar a versão discreta da distribuição Weibull.

- Como exemplo, vamos considerar a versão discreta da distribuição Weibull.

- Seja $W \sim \texttt{WEI}(\mu, \sigma)$, isto é, W com f.d.p. e f.d.a. dadas por:

$$f_W(w|\mu,\sigma) = \frac{\sigma y^{\sigma-1}}{\mu^{\sigma}} \exp\left[-\left(\frac{y}{\mu}\right)^{\sigma}\right]$$

e

$$F_W(w|\mu,\sigma) = 1 - \exp\left[-(y/\mu)^{\sigma}\right],$$

com $y > 0$, $\mu > 0$ e $\sigma > 0$.

Distribuição Weibull discreta

- Desta forma, a distribuição Weibull discreta tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu, \sigma) = \{1 - \exp\left[-((y+1)/\mu)^{\sigma}\right]\} - \{1 - \exp\left[-(y/\mu)^{\sigma}\right]\},$$

Distribuição Weibull discreta

- Desta forma, a distribuição Weibull discreta tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu, \sigma) = \{1 - \exp\left[-((y+1)/\mu)^{\sigma}\right]\} - \{1 - \exp\left[-(y/\mu)^{\sigma}\right]\},$$

enquanto a f.d.a. é dada por:

$$F_Y(y|\mu, \sigma) = P(Y \leq y|\mu, \sigma) = 1 - \exp\left[-(y+1)/\mu)^{\sigma}\right],$$

para $y = 0, 1, 2, ...$

Distribuição Weibull discreta

- Desta forma, a distribuição Weibull discreta tem f.p. dada por:

$$P(Y = y|\mu, \sigma) = \{1 - \exp\left[-((y+1)/\mu)^{\sigma}\right]\} - \{1 - \exp\left[-(y/\mu)^{\sigma}\right]\},$$

enquanto a f.d.a. é dada por:

$$F_Y(y|\mu, \sigma) = P(Y \leq y|\mu, \sigma) = 1 - \exp\left[-(y+1)/\mu)^{\sigma}\right],$$

para $y = 0, 1, 2, ...$

- Vamos "construir" a versão discretizada da distribuição Weibull($\mu = 2$, $\sigma = 2$).

Distribuições Weibull discreta

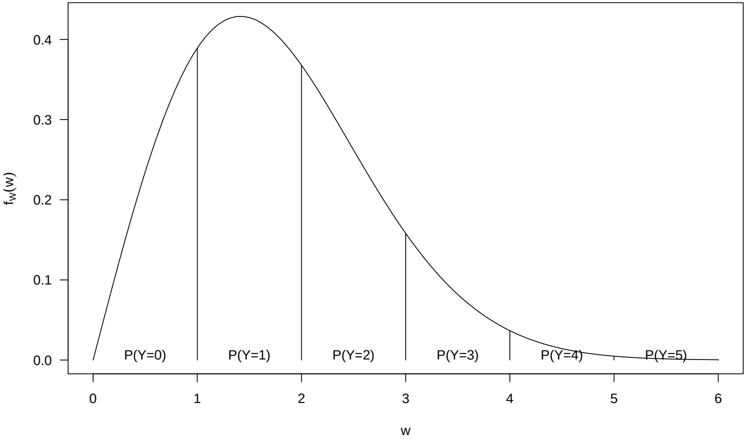

Figura 2: Ilustração - distribuição Weibull discreta.

Tabela 6: Função de probabilidades e função distribuição acumulada - Weibull discreta

y	P(W<y)	P(W<y+1)	P(Y=y)	$P(Y \leq y)$
0	0.0000	0.2212	0.2212	0.2212
1	0.2212	0.6321	0.4109	0.6321
2	0.6321	0.8946	0.2625	0.8946
3	0.8946	0.9816	0.0870	0.9816
4	0.9816	0.9980	0.0164	0.9980
5	0.9980	0.9998	0.0018	0.9998

Distribuições contínuas discretizadas

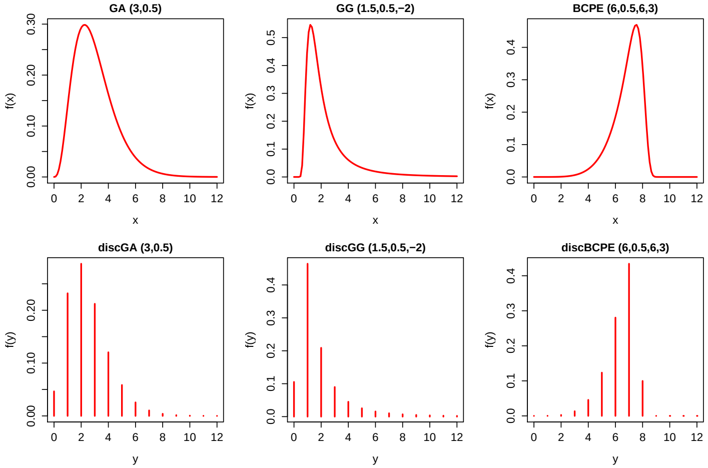

Figura 3: Distribuições contínuas discretizadas

Distribuições contínuas discretizadas

- Em algumas aplicações, como em estudos de confiabilidade na Engenharia, é comum o interesse em variáveis discretas com suporte no conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$.

Distribuições contínuas discretizadas

- Em algumas aplicações, como em estudos de confiabilidade na Engenharia, é comum o interesse em variáveis discretas com suporte no conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$.

- Neste caso, variáveis discretizadas podem ser construidas de maneira semelhante, mas atribuindo as $P(y < W < y + 1)$ a $y + 1$, e não mais a y, para $y = 0, 1, 2, ...$.

Distribuições contínuas discretizadas

- Em algumas aplicações, como em estudos de confiabilidade na Engenharia, é comum o interesse em variáveis discretas com suporte no conjunto $\{1, 2, 3, ...\}$.

- Neste caso, variáveis discretizadas podem ser construidas de maneira semelhante, mas atribuindo as $P(y < W < y + 1)$ a $y + 1$, e não mais a y, para $y = 0, 1, 2, ...$.

- Distribuições discretizadas podem ser criadas usando recursos do pacote `gamlss.cens`. Vamos ao `R`!

Sessão R - Parte 3

- Nesta sessão R, vamos usar dados de contagens de cistos encontrados em rins de ratos (base de dados `cysts`).

O problema do excesso ou escassez de zeros

Excesso ou escassez de zeros

- Problemas envolvendo contagens prodem produzir frequências de contagens iguais a zero que são incompatíveis às ajustadas pelos modelos convencionais.

Excesso ou escassez de zeros

- Problemas envolvendo contagens prodem produzir frequências de contagens iguais a zero que são incompatíveis às ajustadas pelos modelos convencionais.

- Nesses casos, modelos zero-inflacionados (*zero inflated models*) ou modelos zero-ajustados (*zero-adjusted models*) são recomendáveis.

Excesso ou escassez de zeros

- Problemas envolvendo contagens prodem produzir frequências de contagens iguais a zero que são incompatíveis às ajustadas pelos modelos convencionais.

- Nesses casos, modelos zero-inflacionados (*zero inflated models*) ou modelos zero-ajustados (*zero-adjusted models*) são recomendáveis.

- Modelos zero-inflacionados podem lidar apenas com excesso de zeros, enquanto modelos zero-ajustados podem lidar tanto com excesso quanto com escassez de zeros.

Distribuições zero-inflacionadas

Distribuições zero-inflacionadas

- Uma v.a. Y tem distribuição zero-inflacionada se ela assume valor zero com probabilidade p e segue alguuma distribuição de probabilidades discreta com probabilidade $1 - p$.

Distribuições zero-inflacionadas

- Uma v.a. Y tem distribuição zero-inflacionada se ela assume valor zero com probabilidade p e segue alguuma distribuição de probabilidades discreta com probabilidade $1 - p$.

- Assim, para $Y \sim \texttt{ZID}$:

$$P(Y = y) = \begin{cases} p + (1-p)P(Y_1 = 0) & \text{se } y = 0 \\ (1-p)P(Y_1 = y) & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

onde Y_1 representa uma v.a. com distribuição de contagem, e $0 < p < 1$, tal que $P(Y = 0) > P(Y_1 = 0)$.

Distribuições zero-inflacionadas

- Desta forma, a média e a variância de Y ficam dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = 0 \times P(Y = 0) + (1 - p) \times \sum_{i=1}^{\infty} yP(Y_1 = y) = (1 - p)\mathrm{E}(Y_1)$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = (1 - p)\mathrm{Var}(Y_1) + p(1 - p)\left[E(Y_1)\right]^2.$$

Distribuições zero-inflacionadas

- Desta forma, a média e a variância de Y ficam dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = 0 \times P(Y = 0) + (1 - p) \times \sum_{i=1}^{\infty} yP(Y_1 = y) = (1 - p)\mathrm{E}(Y_1)$$

e

$$\mathrm{Var}(Y) = (1 - p)\mathrm{Var}(Y_1) + p(1 - p)\left[E(Y_1)\right]^2.$$

- Além disso, a f.d.a. de Y é dada por:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = p + (1 - p)P(Y_1 \leq y), \quad \text{para } y = 0, 1, 2, \ldots$$

Distribuições zero-inflacionadas

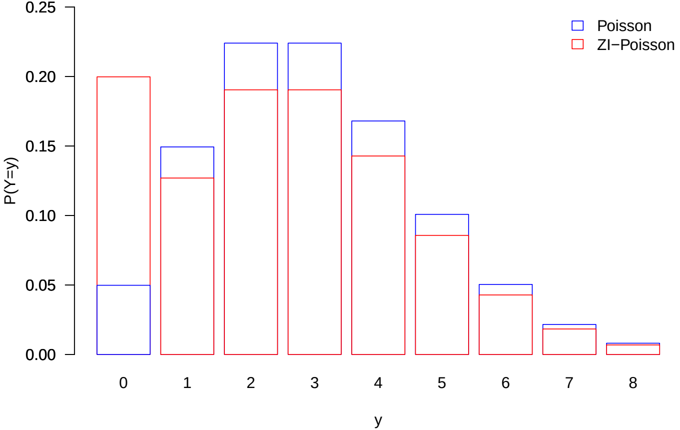

Figura 4: Ilustração - distribuição Poisson zero-inflacionada.

Distribuição Poisson zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição Poisson zero-inflacionada (`ZIP`) se assume valor zero com probabilidade σ $(0<\sigma<1)$ e se comporta como uma Poisson(μ) com probabilidade $1 - \sigma$:

Distribuição Poisson zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição Poisson zero-inflacionada (`ZIP`) se assume valor zero com probabilidade σ $(0<\sigma<1)$ e se comporta como uma Poisson(μ) com probabilidade $1-\sigma$:

$$P(Y=y|\mu,\sigma)=\begin{cases}\sigma+(1-\sigma)e^{-\mu} & \text{se } y=0\\ (1-\sigma)\frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} & \text{se } y=1,2,3,...,\end{cases}$$

Distribuição Poisson zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição Poisson zero-inflacionada (`ZIP`) se assume valor zero com probabilidade σ ($0<\sigma<1$) e se comporta como uma Poisson(μ) com probabilidade $1-\sigma$:

$$P(Y=y|\mu,\sigma)=\begin{cases}\sigma+(1-\sigma)e^{-\mu} & \text{se } y=0\\ (1-\sigma)\frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} & \text{se } y=1,2,3,...,\end{cases}$$

com média $\mathrm{E}(Y)=(1-\sigma)\mu$ e variância $\mathrm{Var}(Y)=(1-\sigma)\mu+\sigma(1-\sigma)\mu^2$.

Distribuição binomial negativa zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição binomial negativa zero-inflacionada (`ZINBI`) se assume valor zero com probabilidade ν $(0<\nu<1)$ e se comporta como uma `NBI`(μ, σ) com probabilidade $1 - \nu$:

Distribuição binomial negativa zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição binomial negativa zero-inflacionada (`ZINBI`) se assume valor zero com probabilidade ν $(0<\nu<1)$ e se comporta como uma `NBI`(μ, σ) com probabilidade $1-\nu$:

$$P(Y=y|\mu,\sigma,\nu) = \begin{cases} \nu + (1-\nu)P(Y_1 = 0|\mu,\sigma) & \text{se } y = 0 \\ (1-\nu)P(Y_1 = y|\mu,\sigma) & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

Distribuição binomial negativa zero-inflacionada

- A v.a. Y tem distribuição binomial negativa zero-inflacionada (`ZINBI`) se assume valor zero com probabilidade ν $(0<\nu<1)$ e se comporta como uma `NBI`(μ, σ) com probabilidade $1-\nu$:

$$P(Y=y|\mu,\sigma,\nu) = \begin{cases} \nu + (1-\nu)P(Y_1 = 0|\mu,\sigma) & \text{se } y = 0 \\ (1-\nu)P(Y_1 = y|\mu,\sigma) & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

onde $\mu > 0$, $\sigma > 0$, $Y_1 \sim$ `NBI`(μ,σ), com média $\mathrm{E}(Y) = (1-\nu)\mu$ e variância $\mathrm{Var}(Y) = (1-\nu)\mu + (1-\nu)(\sigma+\nu)\mu^2$.

Distribuições zero-inflacionadas

- Outras distribuições zero-inflacionadas disponíveis no pacote `gamlss` são:

Distribuições zero-inflacionadas

- Outras distribuições zero-inflacionadas disponíveis no pacote `gamlss` são:

  - `ZIP2`(μ, σ): Poisson zero-inflacionada tipo 2;

Distribuições zero-inflacionadas

- Outras distribuições zero-inflacionadas disponíveis no pacote `gamlss` são:

  - `ZIP2`(μ, σ): Poisson zero-inflacionada tipo 2;

  - `ZIPIG`(μ, σ, ν): PIG zero-inflacionada;

Distribuições zero-inflacionadas

- Outras distribuições zero-inflacionadas disponíveis no pacote `gamlss` são:

    - `ZIP2`(μ, σ): Poisson zero-inflacionada tipo 2;

    - `ZIPIG`(μ, σ, ν): PIG zero-inflacionada;

    - `ZIBNB`(μ, σ, ν): BNB zero-inflacionada;

Distribuições zero-inflacionadas

- Outras distribuições zero-inflacionadas disponíveis no pacote `gamlss` são:
  - `ZIP2`(μ, σ): Poisson zero-inflacionada tipo 2;
  - `ZIPIG`(μ, σ, ν): PIG zero-inflacionada;
  - `ZIBNB`(μ, σ, ν): BNB zero-inflacionada;
  - `ZISICHEL`(μ, σ, ν, τ): SICHEL zero-inflacionada.

Distribuição K-inflacionadas

- Como caso mais geral, podemos definir uma distribuição inflacionada em $K \in \{0, 1, 2, ...\}$:

Distribuição K-inflacionadas

- Como caso mais geral, podemos definir uma distribuição inflacionada em $K \in \{0, 1, 2, ...\}$:

$$P(Y = y) = \begin{cases} p + (1-p)P(Y_1 = K) & \text{se } y = K \\ (1-p)P(Y_1 = y) & \text{se } y = 0, 1, 2, ... \text{ (exceto K)} \end{cases}$$

Distribuição K-inflacionadas

- Como caso mais geral, podemos definir uma distribuição inflacionada em $K \in \{0, 1, 2, ...\}$:

$$P(Y = y) = \begin{cases} p + (1-p)P(Y_1 = K) & \text{se } y = K \\ (1-p)P(Y_1 = y) & \text{se } y = 0, 1, 2, \ldots \text{ (exceto K)} \end{cases}$$

- O pacote `gamlss.countKinf` permite gerar distribuições K-inflacionadas a partir das distribuições atualmente implementadas. E vamos ao R!

Seção R - Parte 4

- Vamos retomar os dados de frequências de cistos em rins de ratos, e usar disctribuições zero-inflacionadas na modelagem.

Distribuições zero-ajustadas

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Dizemos que Y é uma v.a. discreta zero-ajustada (ou zero-alterada) se:

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Dizemos que Y é uma v.a. discreta zero-ajustada (ou zero-alterada) se:

  - Assume valor zero com probabilidade p $(0 < p < 1)$;

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Dizemos que Y é uma v.a. discreta zero-ajustada (ou zero-alterada) se:

    - Assume valor zero com probabilidade p $(0 < p < 1)$;

    - Se comporta como uma v.a. discreta com distribuição truncada em zero (denotemos por Y_1) para $y = 1, 2, 3, ...$

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Dizemos que Y é uma v.a. discreta zero-ajustada (ou zero-alterada) se:
    - Assume valor zero com probabilidade p $(0 < p < 1)$;
    - Se comporta como uma v.a. discreta com distribuição truncada em zero (denotemos por Y_1) para $y = 1, 2, 3, ...$
- Observe que, diferentemente das distribuições zero-inflacionadas, aqui $P(Y = 0)$ não depende da distribuição de Y_1, mas somente de p;

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Dizemos que Y é uma v.a. discreta zero-ajustada (ou zero-alterada) se:
    - Assume valor zero com probabilidade p $(0 < p < 1)$;
    - Se comporta como uma v.a. discreta com distribuição truncada em zero (denotemos por Y_1) para $y = 1, 2, 3, ...$.
- Observe que, diferentemente das distribuições zero-inflacionadas, aqui $P(Y = 0)$ não depende da distribuição de Y_1, mas somente de p;
- Desta forma, diferentemente das zero-inflacionadas, as distribuições zero-ajustadas podem acomodar também escassez de zero (para p suficientemente pequeno).

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- A f.p. de Y com distribuição zero-ajustada ($Y \sim \texttt{ZAD}$) pode ser representada, de maneira genérica, por:

$$P(Y = y) = \begin{cases} p & \text{se } y = 0 \\ (1-p)P(Y_1 = y) & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

onde Y_1 é a versão truncada em zero de uma v.a. discreta com suporte em $\{0, 1, 2, ...\}$ (denotemos a variável não truncada por Y_2).

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- A f.p. de Y com distribuição zero-ajustada ($Y \sim \texttt{ZAD}$) pode ser representada, de maneira genérica, por:

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & \text{se } y = 0 \\ (1-p)P(Y_1 = y) & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

onde Y_1 é a versão truncada em zero de uma v.a. discreta com suporte em $\{0, 1, 2, ...\}$ (denotemos a variável não truncada por Y_2).

- De maneira equivalente:

$$P(Y=y) = \begin{cases} p & \text{se } y = 0 \\ \frac{(1-p)P(Y_2=y)}{1-P(Y_2=0)} & \text{se } y = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Seja $c = \frac{(1-p)}{1-P(Y_2=0)}$. A média e a variância de $Y \sim$ `ZAD` ficam dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = c\mathrm{E}(Y_2) \text{ e } \mathrm{Var}(Y) = c\mathrm{Var}(Y_2) + c(1-c)\left[\mathrm{E}(Y_2)\right]^2.$$

Distribuições zero-ajustadas (ou zero alteradas)

- Seja $c = \frac{(1-p)}{1-P(Y_2=0)}$. A média e a variância de $Y \sim$ `ZAD` ficam dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = c\mathrm{E}(Y_2) \text{ e } \mathrm{Var}(Y) = c\mathrm{Var}(Y_2) + c(1-c)\left[\mathrm{E}(Y_2)\right]^2.$$

- Já a f.d.a. de Y é dada por:

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} p & \text{se } y = 0 \\ p + c\left[P(Y_2 \leq y) - P(Y_2 = 0)\right] & \text{se } y = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Distribuições zero-ajustadas

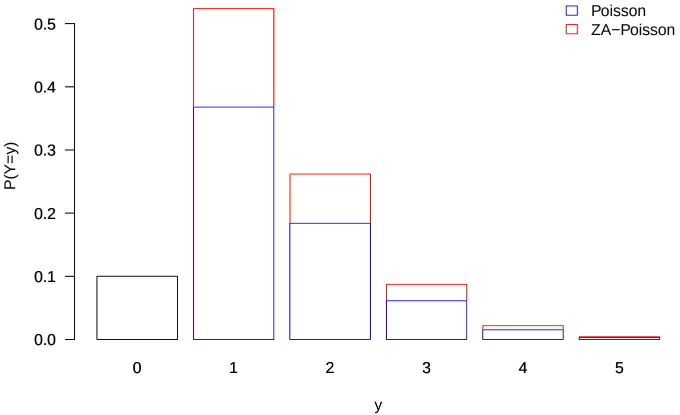

Figura 5: Ilustração - distribuição Poisson zero-ajustada.

Distribuição Poisson zero-ajustada

- A distribuição Poisson zero-ajustada (`ZAP`), assumimos uma mistura de dois componentes: zero, com probabilidade σ $(0 < \sigma < 1)$, e uma Poisson(μ) truncada em zero, com probabilidade $(1 - \sigma)$.

Distribuição Poisson zero-ajustada

- A distribuição Poisson zero-ajustada (`ZAP`), assumimos uma mistura de dois componentes: zero, com probabilidade σ $(0 < \sigma < 1)$, e uma Poisson(μ) truncada em zero, com probabilidade $(1 - \sigma)$.

- A f.p. de $Y \sim$ `ZAP`(μ, σ) é dada por:

$$P(Y = y|\mu, \sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{se } y = 0 \\ \frac{(1-\sigma)e^{-\mu}\mu^y}{y!(1-e^{-\mu})} & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

com $\mu > 0$. A média e a variância de Y são dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{(1 - \sigma)\mu}{(1 - e^{-\mu})} \text{ e } \mathrm{Var}(Y) = (1 + \mu)\mathrm{E}(Y) - [\mathrm{E}(Y)]^2 .$$

Distribuição binomial zero-ajustada

- A distribuição binomial negativa zero-ajustada (`ZANBI`) é gerada por uma mistura de dois componentes: zero, com probabilidade ν $(0 < \nu < 1)$, e uma `NBI`(μ, σ) truncada em zero, com probabilidade $(1 - \nu)$.

Distribuição binomial zero-ajustada

- A distribuição binomial negativa zero-ajustada (`ZANBI`) é gerada por uma mistura de dois componentes: zero, com probabilidade ν $(0 < \nu < 1)$, e uma `NBI`(μ, σ) truncada em zero, com probabilidade $(1 - \nu)$.

- A f.p. de $Y \sim$ `ZANBI`(μ, σ) é dada por:

$$P(Y = y|\mu, \sigma, \nu) = \begin{cases} \nu & \text{se } y = 0 \\ \frac{(1-\nu)P(Y_2 = y|\mu,\sigma)}{1 - P(Y_2 = 0|\mu,\sigma)} & \text{se } y = 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

com $\mu > 0$, $\sigma > 0$ e $Y_2 \sim NBI(\mu, \sigma)$. A média e a variância de Y são dadas por:

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{(1 - \nu)\mu \left[1 - (1 + \mu\sigma)^{-1/\sigma}\right]^{-1}}{(1 - e^{-\mu})}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = [1 + (\sigma + 1)\mu] \, \mathrm{E}(Y) - [E(Y)]^2 \, .$$

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:

    - `ZALG`(μ, σ): zero-ajustada `LG`;

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:

  - `ZALG`(μ, σ): zero-ajustada `LG`;

  - `ZAZIPF`(μ, σ): zero-ajustada `ZIPF`;

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:

    - `ZALG`(μ, σ): zero-ajustada `LG`;
    - `ZAZIPF`(μ, σ): zero-ajustada `ZIPF`;
    - `ZAPIG`(μ, σ, ν): zero-ajustada `PIG`;

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:
  - `ZALG`(μ, σ): zero-ajustada `LG`;
  - `ZAZIPF`(μ, σ): zero-ajustada `ZIPF`;
  - `ZAPIG`(μ, σ, ν): zero-ajustada `PIG`;
  - `ZABNB`(μ, σ, ν, τ): zero-ajustada `BNB`;

Distribuições zero-ajustadas

- Outras distribuições zero-ajustadas implementadas no pacote `gamlss`:
  - `ZALG`(μ, σ): zero-ajustada `LG`;
  - `ZAZIPF`(μ, σ): zero-ajustada `ZIPF`;
  - `ZAPIG`(μ, σ, ν): zero-ajustada `PIG`;
  - `ZABNB`(μ, σ, ν, τ): zero-ajustada `BNB`;
  - `ZASICHEL`(μ, σ, ν, τ): zero-ajustada `SICHEL`.

Seção R - Parte 5

- Vamos usar dados de frequência de visitas ao pediatra como motivação para o ajuste de modelos zero-ajustados e zero-inflacionados.

- Agora, um problema de regressão para dados de contagens (seção 7.7.3 do livro texto).

Resumindo

Família GAMLSS - variáveis discretas

- Modelos para variáveis discretas são amplamente utilizados na análise de dados de contagens;

Família GAMLSS - variáveis discretas

- Modelos para variáveis discretas são amplamente utilizados na análise de dados de contagens;

- Problemas como super (ou sub) dispersão, excesso (ou escassez) de zeros, requerem métodos e modelos específicos;

Família GAMLSS - variáveis discretas

- Modelos para variáveis discretas são amplamente utilizados na análise de dados de contagens;

- Problemas como super (ou sub) dispersão, excesso (ou escassez) de zeros, requerem métodos e modelos específicos;

- A biblioteca `gamlss` tem implementados modelos probabilísticos para dados de contagens, permitindo lidar adequadamente com os problemas mencionados;

Família GAMLSS - variáveis discretas

- Modelos para variáveis discretas são amplamente utilizados na análise de dados de contagens;

- Problemas como super (ou sub) dispersão, excesso (ou escassez) de zeros, requerem métodos e modelos específicos;

- A biblioteca `gamlss` tem implementados modelos probabilísticos para dados de contagens, permitindo lidar adequadamente com os problemas mencionados;

- Novos modelos podem ser gerados por meio de misturas ou discretização de variáveis contínuas.

Próximos passos

Próximos passos

- Família GAMLSS - tópicos adicionais

Próximos passos

- Família GAMLSS - tópicos adicionais
  - Distribuições contínuas com suporte em (0,1);

Próximos passos

- Família GAMLSS - tópicos adicionais
  - Distribuições contínuas com suporte em (0,1);
  - Distribuições contínuas inflacionadas;

Próximos passos

- Família GAMLSS - tópicos adicionais
  - Distribuições contínuas com suporte em (0,1);
  - Distribuições contínuas inflacionadas;
  - Geração de novas distribuições contínuas com suporte em (0,1) e inflacionadas;

Próximos passos

- Família GAMLSS - tópicos adicionais
  - Distribuições contínuas com suporte em (0,1);
  - Distribuições contínuas inflacionadas;
  - Geração de novas distribuições contínuas com suporte em (0,1) e inflacionadas;
  - Recursos adicionais.