Trabalho Nº06 - Modelos Markovianos

Willian Meira Schlichta | GRR20159077

14 de Setembro de 2020

Exercicio 1a

Resolução A

Da propriedade de Markov e da estacionariedade da sequência C_t onde t = 1, 2, 3, temos:

$$P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k) = P(C_1 = i).P(C_2 = j|C_1 = j).P(C_3 = k|C_2 = j) = \delta_i \gamma_{ij} \gamma_{jk}$$

Usando a propriedade de independência condicional, obtemos:

$$P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1|C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k)P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_i(0)p_j(2)p_k(1)\delta_i \gamma_{ij} \gamma_{jk},\ Onde\ p_l(s) = \frac{\lambda_l^s e^{-\lambda_l}}{s!},\ l \epsilon \{1, 2\}$$

Então temos:

$$(\delta_1\ \delta_2) = \frac{1}{0.9 + 0.4}(0.4\ 0.9) = (4/13\ 9/13)$$

E com o valor dos lambdas $\lambda_1 = 1\ e\ \lambda_2 = 3$ obtemos:

$$p_1(0) \approx 0,368\ ,\ p_1(2) \approx 0,184\ ,\ p_1(1) \approx 0.368$$

$$p_2(0) \approx 0,05\ ,\ p_2(2) \approx 0,224\ ,\ p_2(1) \approx 0,149$$

A tabela a seguir lista todas as sequências possíveis de estados e as respectivas probabilidades:

i	j	k	$p_i(0)$	$p_j(2)$	$p_k(1)$	δ_i	γ_{ij}	γ_{jk}	Π
1	1	1	0.368	0.184	0.368	4/13	0.1	0.1	0.000077
1	1	2	0.368	0.184	0.149	4/13	0.1	0.9	0.000280
1	2	1	0.368	0.224	0.368	4/13	0.9	0.4	0.003359
1	2	2	0.368	0.224	0.149	4/13	0.9	0.6	0.002045
2	1	1	0.050	0.184	0.368	9/13	0.4	0.1	0.000093
2	1	2	0.050	0.184	0.149	9/13	0.4	0.9	0.000341
2	2	1	0.050	0.224	0.368	9/13	0.6	0.4	0.000682
2	2	2	0.050	0.224	0.149	9/13	0.6	0.6	0.000415
								Σ	0.007292

Observe que os valores da tabela podem ser usados para calcular a probabilidade condicional de cada sequência possível de estados, C_1, C_2, C_3 usando:

$P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k | S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1)$

$= \frac{P(C_1=i, C_2=j, C_3=k, S_1=0, S_2=2, S_3=1)}{P(S_1=0, S_2=2, S_3=1)},\ para\ i, j, k \ \epsilon \ \{1, 2\}$

Assim, a sequência de estados mais provável aqui é $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 1$ sua probabilidade condicional é dada por $\frac{0.003359}{0.007292} \approx 0.461$.

Exercicio 1b

Resolução B

$$P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1) = \delta \mathbf{P(0)\Gamma P(2)\Gamma P(1)1'}$$

$$= (4/13 \ 9/13) \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0 & 0.050 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.184 & 0 \\ 0 & 0.0224 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0 & 0.149 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 0.007292$$

Exercicio 3

Resolução A

Sabemos que se $X \sim P_0(\lambda)$ então $\mu = E(X) = Var(X) = \lambda$

$E(S_t) = \sum_{i=1}^{m} E(S_t \mid C_t = i) P(C_t = i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_i = \delta \lambda'$

Resolução B

Sabemos que se $X \sim P_0(\lambda)$ então $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$.

Partindo desse fato temos:

$E(S_t^2) = \sum_{i=1}^{m} E(S_t^2 \mid C_t = i) P(C_t = i)$

$= \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_i^2) \delta_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \delta_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_i$

$= \lambda \mathbf{D} \lambda' + \delta \lambda'$

Exercicio 5

Desenvolver da seguinte forma: simule um HMM Poisson com três estados, $\lambda = (1, 5, 10)$ e mesma matriz de probabilidades de transição apresentada. Estime a função de autocorrelação da Cadeia de MArkov subjacente e interprete.

Resolução

Modelo gerado pela função *hmmspec* do pacote *mhsmm* com valores de Γ e $\lambda's$ solicitados:

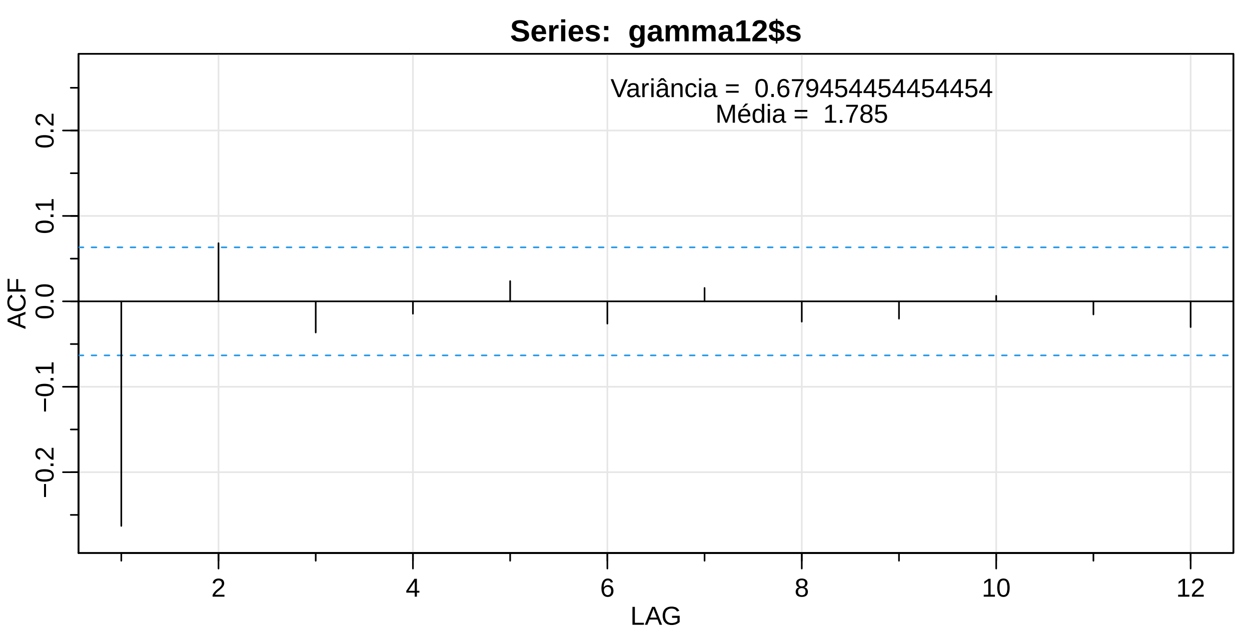
```
Hidden Markov Model specification:
J (number of states):
3
init:
[1] 0.3333 0.3333 0.3333
transition:
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.3333 0.3333 0.3333
[2,] 0.6667 0.0000 0.3333
[3,] 0.5000 0.5000 0.0000
emission:
$lambda
[1]  1  5 10
```

$\lambda's$ estimados via simulação com 1000 repetições:

```
[1] 1.045
[1] 5.044
[1] 9.627
```

dese Plotando a função de autocorrelação da série simulada:

```
 [1] -0.26  0.07 -0.04 -0.01  0.02 -0.03  0.02 -0.02 -0.02  0.01 -0.02 -0.03
```



Sabemos que se $X \sim P(\lambda_i)$ então $Var(X) = E(X) = \lambda$. Os valores estimados da média e variância não são próximos, indicando que a cadeia pode ser uma mistura de séries. E como foi dado no enunciado, a distribuição é Poisson, ou seja, a cadeia foi obtida como mistura de três variáveis Poissons.