Geração de números não uniformes

Método da transformação de variáveis

Walmes M. Zeviani e Fernando P. Mayer

1 Introdução

A ideia do método da transformação de variáveis é gerar valores aleatórios de uma distribuição qualquer, com base na relação com alguma outra distribuição conhecida. Portanto, primeiro gera-se valores de uma distribuição da qual se conhece e que possua um bom gerador disponível. Depois disso, basta aplicar a transformação para se chegar nos valores da distribuição desejada.

Um exemplo típico é, por exemplo, quando queremos gerar valores de uma distribuição $\text{logN}(\mu, \sigma^2)$ a partir de valores gerados de uma $\text{N}(\mu, \sigma^2)$. Nesse caso, se $Y \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$, então usando a transformação $X = e^Y$, X terá distribuição $\text{logN}(\mu, \sigma^2)$, pois $\log X = Y$.

Para um diagrama completo (ou quase) da relação entre distribuições univariadas, veja Univariate Distribution Relationships (http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html) de Lawrence Leemis.

2 Exemplos de transformações

Alguns exemplos são:

1. Se $Z \sim \text{N}(0, 1)$, então $V = Z^2 \sim \chi^2(1)$
2. Se $U \sim \chi^2(m)$ e $V \sim \chi^2(n)$ são independentes, então $F = \frac{U/m}{V/n}$ terá a distribuição F com (m, n) graus de liberdade.
3. Se $Z \sim \text{N}(0, 1)$ e $V \sim \chi^2(n)$ são independentes, então $T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$ terá a distribuição t de Student com n graus de liberdade.
4. Se $U_1, \ldots, U_{12} \sim \text{U}(-1/2, 1/2)$, então $Z = \sum_{i=1}^{12} U_i$ terá distribuição $\text{N}(0, 1)$ (usando o **Teorema do Limite Central**).
5. Se $U, V \sim \text{U}(0, 1)$ são independentes, então

$$Z_1 = \sqrt{-2 \log U} \cos(2\pi V) \qquad Z_2 = \sqrt{-2 \log U} \sin(2\pi V)$$

serão duas VAs **independentes** com distribuição normal padrão.

6. Se $U \sim \text{Gama}(r, \lambda)$ e $V \sim \text{Gama}(s, \lambda)$ são independentes, então $X = \frac{U}{U+V}$ terá a distribuição $\text{Beta}(r, s)$.
7. Se $U, V \sim \text{U}(0, 1)$ são independentes, então
$$X = \left\lfloor 1 + \frac{\log(V)}{\log(1 - (1-\theta)^U)} \right\rfloor$$
terá a distribuição $\text{Logaritmica}(\theta)$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira (arredondada para baixo) de x.
8. $U \sim \text{U}(0, 1)$, então $X = -\lambda \log U$ terá distribuição $\text{Exp}(\lambda)$.

Somas e **misturas** de distribuições são considerados tipos especiais de transformações.

Veremos algumas implementações abaixo.

2.1 Exemplo (distribuição Beta)

Se $U \sim \text{Gama}(r, \lambda)$ e $V \sim \text{Gama}(s, \lambda)$ são independentes, então

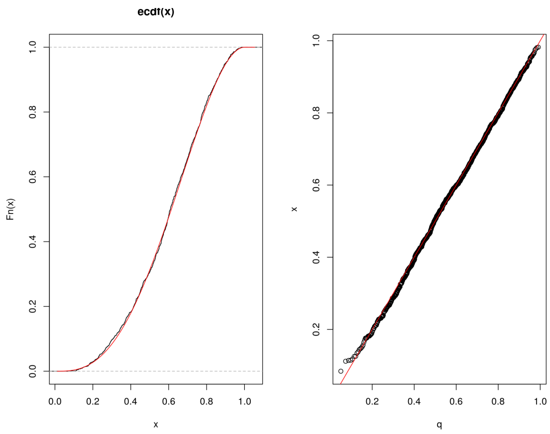
$$X = \frac{U}{U + V}$$

terá a distribuição $\text{Beta}(r, s)$.

1. Gere um valor aleatório u de $\text{Gama}(r, 1)$
2. Gere um valor aleatório v de $\text{Gama}(s, 1)$
3. Calcule $x = \dfrac{u}{u + v}$

Para gerar valores de uma $\text{Beta}(3, 2)$ fazemos então:

```
n <- 1000
r <- 3
s <- 2
u <- rgamma(n, shape = r, rate = 1)
v <- rgamma(n, shape = s, rate = 1)
x <- u/(u + v)
## Comparação
par(mfrow = c(1, 2))
plot(ecdf(x))
curve(pbeta(x, r, s), add = TRUE, col = 2)
q <- qbeta(ppoints(n), r, s)
qqplot(q, x)
abline(0, 1, col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



2.2 Exemplo (distribuição Logarítmica)

(Este é um exemplo de uma distribuição onde não existe uma função pronta no R para gerar valores).

Dizemos que X segue a distribuição (discreta) Logarítmica se

$$f(x) = P[X = x] = \frac{a\theta^x}{x}, \quad x = 1, 2, \dots$$

onde $0 < \theta < 1$ e $a = (-\log(1-\theta))^{-1}$.

Se $U, V \sim \text{U}(0,1)$ são independentes, então

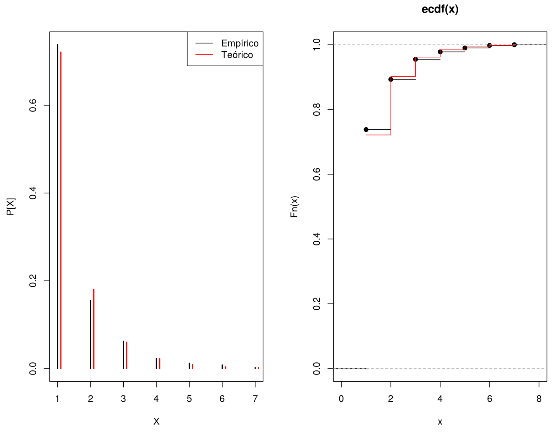
$$X = \left\lfloor 1 + \frac{\log(V)}{\log(1-(1-\theta)^U)} \right\rfloor$$

terá a distribuição $\text{Logaritmica}(\theta)$.

1. Gere um valor aleatório u de $\text{U}(0,1)$
2. Gere um valor aleatório v de $\text{U}(0,1)$
3. Calcule $x = \left\lfloor 1 + \frac{\log(v)}{\log(1-(1-\theta)^u)} \right\rfloor$

Para gerar valores de uma $\text{Logaritmica}(0.5)$ fazemos então

```
n <- 1000
theta <- 0.5
u <- runif(n)
v <- runif(n)
x <- floor(1 + log(v) / log(1 - (1 - theta)^u))
## Calcula as probabilidades teóricas (exatas) usando a definição da
## distribuição
k <- 1:max(x)
p <- -1/log(1 - theta) * theta^k/k
## Compara a proporção de valores gerados com a prob. teórica
cbind("Gerado" = prop.table(table(x)), "Teórico" = p)
#   Gerado     Teórico
# 1  0.738 0.721347520
# 2  0.155 0.180336880
# 3  0.062 0.060112293
# 4  0.023 0.022542110
# 5  0.012 0.009016844
# 6  0.008 0.003757018
# 7  0.002 0.001610151
## Comparação gráfica
par(mfrow = c(1, 2))
plot(prop.table(table(x)), xlab = "X", ylab = "P[X]")
points(p ~ I(k + 0.1), type = "h", col = 2, lwd = 2)
legend("topright", legend = c("Empírico", "Teórico"),
       lty = 1, col = c(1, 2))
plot(ecdf(x))
lines(cumsum(p), type = "s", col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



3 Somas e misturas

Somas e misturas de VAs são tipos especiais de transformações. Chamamos de **convolução** a soma de VAs independentes. As **misturas** são VAs formadas pela mistura de outras VAs (discretas ou contínuas).

3.1 Convoluções

Seja $X_1, \dots, X_n$ VAs independentes e identicamente distribuídas, com distribuição comum $X_j \sim X$, e considere $S = X_1 + \cdots + X_n$. A função de distribuição da soma S é chamada de **convolução de ordem** n de X, e denotada por $F_X^{*(n)}$.

Portanto, podemos gerar uma convolução diretamente através da geração de $X_1, \dots, X_n$ e calculando a soma.

Algumas convoluções importantes:

1. Se $Z_1, \dots, Z_n \sim \text{N}(0, 1)$, então $V = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$
2. Se $U_1, \dots, U_{12} \sim \text{U}(-1/2, 1/2)$, então $Z = \sum_{i=1}^{12} U_i$ terá distribuição $\text{N}(0, 1)$ (usando o **Teorema do Limite Central**).
3. A distribuição binomial negativa $\text{BinNeg}(r, p)$ pode ser definida como:
   - A convolução de r VAs iid $\text{Geom}(p)$ (**convolução**)
   - Se $X|\lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $\lambda \sim \text{Gama}(r, \beta)$, então X terá distribuição binomial negativa com parâmetros r e $p = \beta/(1+\beta)$ (**mistura**)
4. A convolução de r VAs independentes $\text{Exp}(\lambda)$ tem distribuição $\text{Gama}(r, \lambda)$.
5. A soma de n VAs iid $\text{Ber}(p)$ tem distribuição $\text{Bin}(n, p)$.

3.1.1 Exemplo (distribuição qui-quadrado)

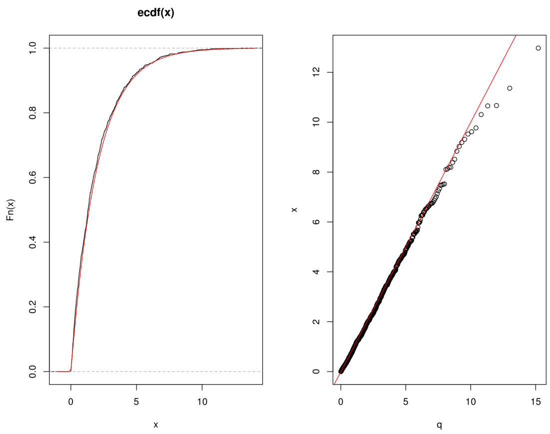
Se $Z_1, \dots, Z_n \sim \text{N}(0, 1)$, então $V = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n)$.

Para gerar m valores de uma $\chi^2(n)$:

1. Crie uma matriz $m \times n$ com mn VAs $\text{N}(0{,}1)$
2. Calcule o quadrado de cada número da matriz em (1)
3. Calcule a soma das linhas da matriz. Cada soma de linha é uma realização da distribuição $\chi^2(n)$
4. Retorne o vetor com as somas

Para gerar $m = 1000$ valores da $\chi^2(2)$:

```
m <- 1000
n <- 2
X <- matrix(rnorm(n * m), nrow = m, ncol = n)
  ^2
x <- rowSums(X)
## Comparação
par(mfrow = c(1, 2))
plot(ecdf(x))
curve(pchisq(x, n), add = TRUE, col = 2)
q <- qchisq(ppoints(m), 2)
qqplot(q, x)
abline(0, 1, col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



3.1.2 Exemplo (distribuição binomial)

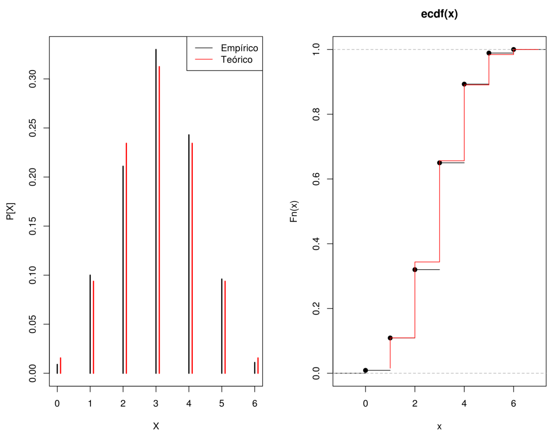
Se $X_1, \dots, X_n \sim \text{Ber}(p)$, então
$Y = \sum_{i=1}^{n} X_1 + \cdots + X_n$ terá distribuição $\text{Bin}(n, p)$

Para gerar m valores de uma $\text{Bin}(n, p)$ (usando a geração de Bernoulli pela uniforme):

1. Crie uma matriz $m \times n$ com mn VAs $\text{U}(0, 1)$
   - Se $u > p$ faça 1, caso contrário 0. Até aqui é o mesmo que gerar n valores aleatórios de uma $\text{Ber}(p)$ em cada linha da matriz
2. Calcule a soma das linhas da matriz. Cada soma de linha é uma realização da distribuição $\text{Bin}(n, p)$
3. Retorne o vetor com as somas

Para gerar $m = 1000$ valores de $\text{Bin}(6, 0.5)$:

```
m <- 1000
size <- 6
prob <- 0.5
X <- matrix(runif(m * size) > prob, nrow = m,
  ncol = size)
x <- rowSums(X)
## Calcula as probabilidades teóricas (exata
  s) usando a definição da
## distribuição
k <- 0:max(x)
p <- dbinom(k, size = size, prob = prob)
## Compara a proporção de valores gerados com
  a prob. teórica
round(cbind("Gerado" = prop.table(table(x)),
  "Teórico" = p), 3)
#   Gerado Teórico
# 0  0.009   0.016
# 1  0.100   0.094
# 2  0.211   0.234
# 3  0.330   0.312
# 4  0.243   0.234
# 5  0.096   0.094
# 6  0.011   0.016
## Comparação gráfica
par(mfrow = c(1, 2))
plot(prop.table(table(x)), xlab = "X", ylab =
  "P[X]")
points(p ~ I(k + 0.1), type = "h", col = 2, l
  wd = 2)
legend("topright", legend = c("Empírico", "Te
  órico"),
       lty = 1, col = c(1, 2))
plot(ecdf(x))
lines(cumsum(p), type = "S", col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



4 Distribuição normal

Existem vários métodos para se gerar valores aleatórios de uma distribuição normal.

Geralmente, estes métodos são desenvolvidos para gerar valores de uma distribuição normal padrão $\text{N}(0,1)$. No entanto, sabemos que a transformação

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \text{N}(0,1)$$

Portanto, podemos obter

$$X = Z\sigma + \mu$$

que terá distribuição $\text{N}(\mu, \sigma^2)$, a partir de valores gerados de Z.

4.1 Por convolução

Se $U_1, \ldots, U_{12} \sim \text{U}(-1/2, 1/2)$, então $Z = \sum_{i=1}^{12} U_i$ terá distribuição $\text{N}(0,1)$.

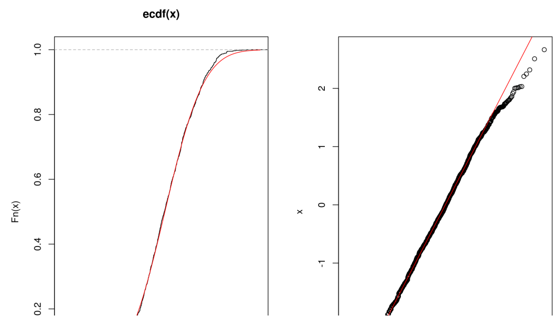
Note que, neste caso, $\text{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z] = 1$. Pelo **Teorema do Limite Central** (TLC), e sabendo do fato que a Uniforme é simétrica, então $Z \sim \text{N}(0,1)$.

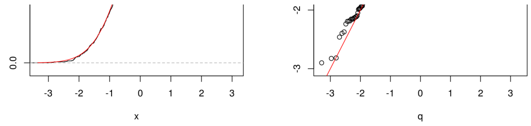
Para gerar m valores de uma $\text{N}(0,1)$:

1. Crie uma matriz $m \times n = 12$ com mn VAs $\text{U}(-0.5, 0.5)$
2. Calcule a soma das linhas da matriz
3. Retorne o vetor com as somas

Para gerar $m = 1000$ valores de $\text{N}(0,1)$:

```
m <- 1000
n <- 12
X <- matrix(runif(m * n, -0.5, 0.5), nrow =
  m, ncol = n)
x <- rowSums(X)
## Comparação
par(mfrow = c(1, 2))
plot(ecdf(x))
curve(pnorm(x), add = TRUE, col = 2)
q <- qnorm(ppoints(m))
qqplot(q, x)
abline(0, 1, col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```





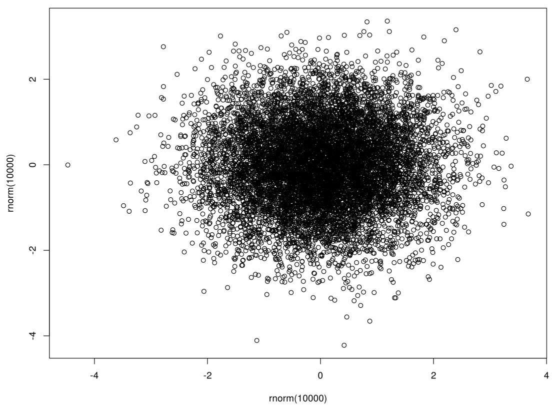
Note que as caudas da distribuição empírica começa a se afastar um pouco da teórica. De fato, esse é um problema desse método simples por convolução.

Os métodos a seguir são mais recomendados (e utilizados) para gerar valores da normal.

4.2 Método de Box-Muller

A ideia geral do métopdo desenvolvido por Box e Muller é transformar a relação entre duas normais padrão, de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, ou seja,

```
plot(rnorm(10000), rnorm(10000))
```



Usando as coordenadas polares, soteiam-se valores do raio (r) e do ângulo θ (usando associações com a $\text{U}(0, 1)$), que darão as coordenadas (r, θ) em coordenadas polares. Depois, converte-se novamente para o plano cartesiano, obtendo assim um ponto na coordenada (x, y), que representam um par de observações de duas VAs $X, Y \sim \text{N}(0, 1)$ independentes.

Assista ao vídeo A integral Gaussiana (https://www.youtube.com/watch?v=IHB7P8-ctLE) no perfil do Luiz Chamon para compreender a passagem de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

Para gerar números aleatórios da distribuição normal padrão, precisamos de valores para o **raio** r e o **ângulo** θ (em coordenadas polares)de tal forma a poder convertê-los em valores x e y usando as expressões

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta). \end{cases}$$

Dessa forma, o par (x, y) será uma realização das variáveis aleatórias (X, Y), que possuem, cada uma, distribuição $\mathrm{N}(0, 1)$.

Valores para o **ângulo** podem ser obtidos pelo produto de uma $\mathrm{Uniforme}(0, 1)$ por 2π, ou seja $\theta \sim 2\pi U(0, 1)$.

Para o **raio**, precisamos verificar **qual a distribuição adequada**. Note que a função de distribuição acumulada da variável R pode ser determinada a partir da integral

$$\begin{aligned} \Pr(R \leq r) &= \int_0^{2\pi} \int_0^r (2\pi)^{-1} s \exp\{-s^2/2\}\, \mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r s \exp\{-s^2/2\}\, \mathrm{d}s \\ &= (2\pi)^{-1}(2\pi) \int_0^r s \exp\{-s^2/2\}\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^r s \exp\{-s^2/2\}\, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Para resolver a integral, considere $u = s^2$ e com isso $\mathrm{d}s = \mathrm{d}u/2s$. Os limites de integração são alterados: quando $s = 0$ tem-se que $u = s^2 = 0$; quando $s = r$ tem-se que $u = s^2 = r^2$. Dessa forma, a integral fica

$$
\begin{aligned}
\Pr(R \leq r) &= \int_0^r s\exp\{-s^2/2\}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{r^2} s\exp\{-u/2\}\,(2s)^{-1}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{r^2} \exp\{-u/2\}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}(-2)(\exp\{-u/2\})\Big|_0^{r^2} \\
&= -(\exp\{-u/2\})\Big|_0^{r^2} \\
&= -(\exp\{-r^2/2\} - \exp\{-0^2/2\}) \\
&= 1 - \exp\{-r^2/2\}.
\end{aligned}
$$

O resultado obtido foi a função de distribuição acumulada da variável aleatória R, ou seja, $F(r)$. Se formos capazes de inverter essa função, poderemos gerar números aleatórios de R usando números uniformes.

A inversa da função $F(r) = 1 - \exp\{-r^2/2\}$ é

$$
\begin{aligned}
u &= 1 - \exp\{-r^2/2\} \\
\log(1-u) &= -r^2/2 \\
r &= \pm\sqrt{-2\log(1-u)}
\end{aligned}
$$

Como os valores de u são realizações de uma uniforme padrão, podemos simplificar esse resultado para

$$
r = \sqrt{-2\log(u)}
$$

Assim, para gerar números da normal padrão, usamos

$$
\begin{cases}
x = \sqrt{-2\log(u_1)}\,\cos(2\pi u_2) \\
y = \sqrt{-2\log(u_1)}\,\sin(2\pi u_2),
\end{cases}
$$

em que u_1 e u_2 são números da Uniforme padrão.

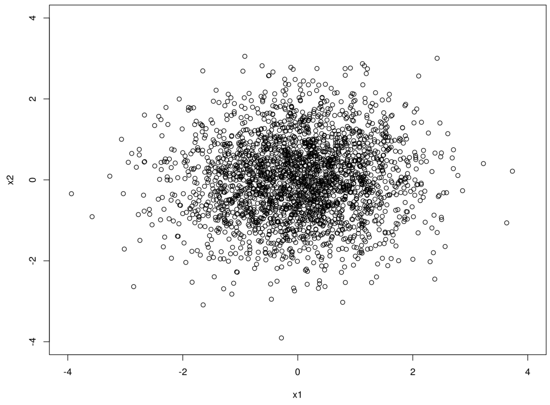
O algoritmo de Box-Muller é definido como:

1. Gera valores u_1 e u_2 de $\mathrm{U}(0,1)$
2. Calcule

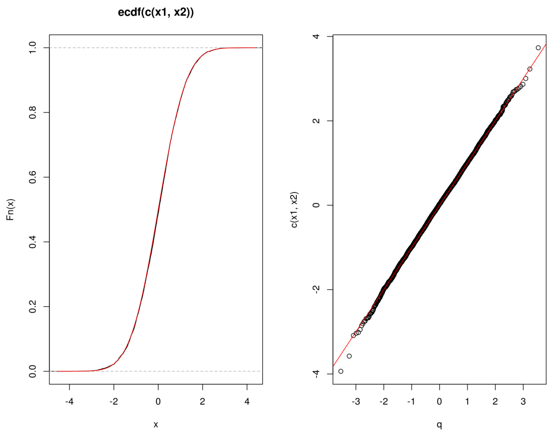
$$
\begin{cases}
x_1 = \sqrt{-2\log(u_1)}\,\cos(2\pi u_2) \\
x_2 = \sqrt{-2\log(u_1)}\,\sin(2\pi u_2),
\end{cases}
$$

3. Retorne $\{x_1, x_2\}$

```
## Gerando valores da normal pelo algoritmo d
  e Box-Muller
Nsim <- 2500
## Amostra das uniformes
u1 <- runif(Nsim)
u2 <- runif(Nsim)
## Raio
R <- sqrt(-2 * log(u1))
## Angulo
T <- 2 * pi * u2
x1 <- R * cos(T)
x2 <- R * sin(T)
plot(x1, x2, xlim = c(-4, 4), ylim = c(-4,
  4))
```




```
## Confere
par(mfrow = c(1, 2))
plot(ecdf(c(x1, x2)))
curve(pnorm(x), add = TRUE, col = 2)
q <- qnorm(ppoints(Nsim))
qqplot(q, c(x1, x2))
abline(0, 1, col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



Note que sempre serão geradas duas normais padrão, `x1` e `x2`. Com isso, o resultado final será sempre o dobro do valor requerido. Assim, para gerar n valores (e não $2n$), temos duas opções:

1. Usar apenas `x1` ou `x2`
2. Rodar o algoritmo em $n/2$ passos e concatenar `x1` e `x2`

```
## Uma função mais eficiente
boxmuller <- function(n) {
    ## Executa o algoritmo em somente metade dos valores requeridos
    m <- ceiling(n/2)
    u1 <- runif(m)
    u2 <- runif(m)
    R <- sqrt(-2 * log(u1))
    T <- 2 * pi * u2
    x <- c(R * cos(T), R * sin(T))
    ## Se n for par, retorne tudo, caso contrário, tire um valor
    if (n %% 2 == 0) x else x[-1]
}
boxmuller(2)
# [1] 0.9234418 1.0826671
boxmuller(3)
# [1]  0.66055651  0.07799255 -1.80340422
boxmuller(4)
# [1]  0.6975372 -0.3609859 -0.1677477 -0.4755585
boxmuller(5)
# [1] 1.0071460 1.0662797 0.1684460 0.1523806 0.3098626
```

4.3 Método de coordenadas polares

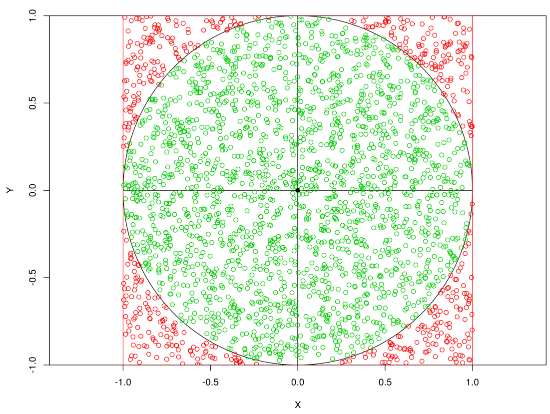
O método de coordenadas polares (ou simplemente método polar) é uma variação do método de Box-Muller. A motivação do método foi a de evitar o uso de funções transcendentais como seno e cossseno.

1. Gere valores $u_1, u_2 \sim \text{U}(-1, 1)$
2. Calcule $r^2 = u_1^2 + u_2^2$.
3. Se esse ponto estiver dentro do raio unitário, ou seja, se $r^2 \leq 1$, então calcule $z = \sqrt{(-2 \log r^2)/r^2}$
   - Faça $x_1 = u_1 z$ e $x_2 = u_2 z$

Veja que esse método nada mais é do que uma forma do algoritmo de **aceitação-rejeição**.

Note que apenas substituimos $\cos(2\pi u_2) = u_1/\sqrt{r^2}$ e $\sin(2\pi u_2) = u_2/\sqrt{r^2}$.

```
Nsim <- 2500
u1 <- runif(Nsim, -1, 1)
u2 <- runif(Nsim, -1, 1)
r2 <- u1^2 + u2^2
ac <- r2 <= 1
z <- sqrt((-2 * log(r2[ac]))/r2[ac])
x1 <- u1[ac] * z
x2 <- u2[ac] * z
## O código desta função está no final da pág
  ina
plotcirc()
points(u1[ac], u2[ac], pch = 1, col = 3)
points(u1[!ac], u2[!ac], pch = 1, col = 2)
```



Note que a taxa de aceitação será sempre a razão entre a área do círculo e a área do quadrado. A área do cículo é $A_c = \pi r^2 = \pi$. A área do quadrado é $A_q = l^2 = (2r)^2 = 4$. Portanto, a taxa de aceitação (teórica) será

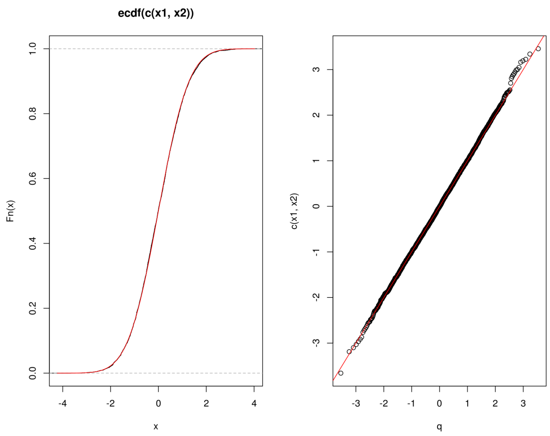
$$\frac{A_c}{A_q} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

A taxa de aceitação da simulação foi

```
sum(ac)/Nsim
# [1] 0.7912
```

Conferindo os valores gerados:

```
par(mfrow = c(1, 2))
plot(ecdf(c(x1, x2)))
curve(pnorm(x), add = TRUE, col = 2)
q <- qnorm(ppoints(Nsim))
qqplot(q, c(x1, x2))
abline(0, 1, col = 2)
par(mfrow = c(1, 1))
```



Podemos também defnir uma função gernérica para gerar n valores:

```
polarmethod <- function(n) {
    m <- ceiling(n/2)
    x1 <- numeric(m)
    x2 <- numeric(m)
    i <- 1
    while (i <= m) {
        u1 <- runif(1, -1, 1)
        u2 <- runif(1, -1, 1)
        R2 <- u1^2 + u2^2
        if (R2 <= 1) {
            z <- sqrt((-2 * log(R2))/R2)
            x1[i] <- u1 * z
            x2[i] <- u2 * z
            i <- i + 1
        }
    }
    x <- c(x1, x2)
    if (n %% 2 == 0) x else x[-1]
}
polarmethod(2)
# [1]  0.8877987 -0.9400620
polarmethod(3)
# [1] -0.5380968 -0.2598577 -0.9556475
polarmethod(4)
# [1] 0.1673346 0.9279059 1.1766460 1.7330495
polarmethod(5)
# [1] -1.0159191 -1.4593440  1.1055767 -0.999
  1863 -1.2083035
```

Comparando os dois métodos vemos que, apesar do método polar não usar funções seno e cosseno, é necessário usar o `while()` , o que "encarece" o algoritmo computacionalemnte.

```
microbenchmark::microbenchmark(boxmuller(100
  0), polarmethod(1000))
# Unit: microseconds
#                expr      min        lq
  mean    median        uq      max
#    boxmuller(1000)  102.713  105.8735  115.
  4254  115.0595  121.5315  165.975
#  polarmethod(1000) 2885.286 2988.9975 3418.
  3494 3061.1625 3159.0245 9931.133
#  neval cld
#    100  a
#    100   b
```

4.4 A função `rnorm()`

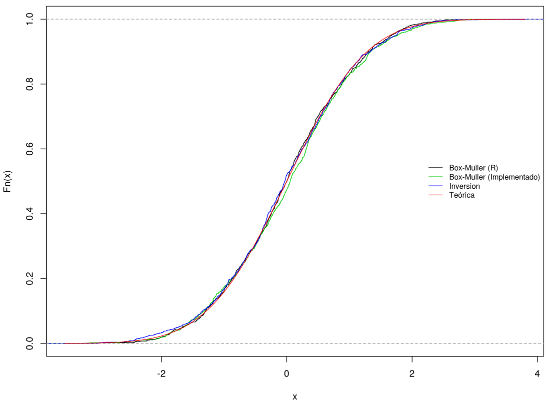
No R, sabemos que a função `rnorm()` serve para gerar valores aleatórios da distribuição normal. Esta função usa um algoritmo chamadpo de "inversão", cujos detalhes estão descritos em `help(qnorm)` .

No entanto, assim como no caso da Uniforme, também estão implementados outros algoritmos para gerar valores da Normal, incluindo o algoritmo de Box-Muller.

```
## Confere os métodos padrão para a geração d
  e valores aleatórios. O
## primeiro algoritmo é da Uniforme, o segund
  o é o da Normal e o
## terceiro é o método utilizado pela função
  sample(). Veja os detalhes
## em help(Random)
RNGkind()
# [1] "Mersenne-Twister" "Inversion"        "
  Rejection"
## Define semente e altera o gerados para o d
  e Box-Muller
set.seed(1, normal.kind = "Box-Muller")
## Box-MUller pela rnorm
xx <- rnorm(1000)
## Box-Muller implementado aqui
yy <- boxmuller(1000)
RNGkind()
# [1] "Mersenne-Twister" "Box-Muller"       "
  Rejection"
## Volta para o padrão da rnorm
set.seed(1, normal.kind = "Inversion")
RNGkind()
# [1] "Mersenne-Twister" "Inversion"        "
  Rejection"
## Gera valores com o algoritmo padrão
zz <- rnorm(1000)
```

Comparando todo mundo:

```
plot(ecdf(xx), main = "")
plot(ecdf(yy), col = 3, add = TRUE)
plot(ecdf(zz), col = 4, add = TRUE)
curve(pnorm(x), add = TRUE, col = 2)
legend("right",
       legend = c("Box-Muller (R)", "Box-Mull
  er (Implementado)",
                  "Inversion", "Teórica"), ce
  x = 0.8,
       col = c(1, 3, 4, 2), lty = 1, bty = "
  n")
```



5 Funções

```
plotcirc <- function(xlim = c(-1, 1), ylim =
  c(-1, 1)) {
    ## eixo x = a + cos \theta * raio
    circx <- cos(seq(0, 2*pi, .01)) * 1
    ## eixo y = b + sin \theta * raio
    circy <- sin(seq(0, 2*pi, .01)) * 1
    ## (a,b) eh o ponto de origem, aqui (0,0)
    plot(circx, circy, type = "l", xlim = xli
  m, ylim = ylim,
        xaxs = "i", yaxs = "i", asp = 1, xla
  b = "X", ylab = "Y")
    abline(v = c(-1,1), col = 2)
    abline(v = c(0,0), col = 1)
    segments(-1, -1, 1, -1, col = 2)
    segments(-1, 1, 1, 1, col = 2)
    segments(-1, 0, 1, 0, col = 1)
    points(0, 0, pch = 19, col = 1)
}
```

6 Exercícios

1. Faça a implementação das distribuições mencionadas e que não foram implementadas aqui.