# 5º CE231 - Modelos Markovianos

## Modelos Ocultos de Markov - I Fundamentos

Brendha Rodrigues de Lima GRR20149163

02 de Setembro de 2020

**Exercicio 1**

Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição uma mistura de duas distribuições com esperanças $\mu_1, \mu_2$ e variância $\sigma_1^2, \sigma_2^2$, respectivamente, onde os parâmetros de mistura são $\delta_1$ e $\delta_2$ com $\delta_1 + \delta_2 = 1$

**a)** Prove que $Var(X) = \delta_1\sigma_1^2 + \delta_2\sigma_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1 - \mu_2)^2$.

**Resolução**

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i E(x_i)$

$E(x) = \sum_{i=1}^{2} \delta_i E(x_i) = \delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2$

$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i E(X_i^2)$

$E(x^2) = \sum_{i=1}^{2} \delta_i E(X_i^2) = \delta_1 E(X_i^2) + \delta_2 E(X_2^2)$

$\delta_i^2 = E(X_i^2) - \mu_i^2$

Temos que:

$E(X_i^2) = \delta_i^2 + \mu_i^2$

$E(X^2) = \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_(\delta_2^2 + \mu_2^2)$

$Var(X) = \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_2(\delta_2^2 + \mu_2^2) - (\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2) = \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_2(\delta_2^2 + \mu_2^2) - \delta_1^2\mu_1^2 - 2\delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 - \delta_2^2\mu_2^2 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\mu_1^2 + \delta_2\mu_1^2 - \delta_1^2\mu_1^2 - 2\delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 - \delta_2^2\mu_2^2 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\mu_1^2 + (1 - \delta_1) + \delta_2\mu_2^2(1 - \delta_2) - 2\delta_1 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2\mu_1^2 + \delta_1\delta_2\mu_2^2 - 2\delta_1\delta_2\mu_1 - \mu_2 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2) = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1 + \mu_2) = Var(X)$

**b)** Mostre que a mistura de duas distribuições Poisson, $P(\lambda_1), P(\lambda_2)$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, é superdispersa, ou seja, $VAR(X) > E(X)$.

**Resolução**

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i E(X_i) = \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i E(X_1^2) = \delta_1 E(X_1^2) + \delta_2 E(X_2^2)$

Distribuição de Poisson $\sim Var(X) = E(X) = \lambda$

$Var(X_i) = E(X_1^2) - E(X_1)^2\lambda_i = E(X_1^2) - \lambda_1^2 \rightarrow E(X_1^2) = \lambda_i + \lambda_i^2$

$E(X^2) = \delta_1(\lambda + \lambda_1^2) + \delta_2(\lambda_2 + \lambda_2^2)$

$Var(X)\delta_1(\lambda_1 + \lambda_1^2) + \delta_2(\lambda_2 + \lambda_2^2) - (\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2)^2 = \delta_1\lambda_1 + \delta_1\lambda_1^2 + \delta_2\lambda_2 + \delta_2\lambda_2^2 - \delta_1^2\lambda_1^2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 - \delta_2^2\lambda_2^2 = \delta_1\lambda_1^2(1 - \delta_1) + \delta_2\lambda_2^2(1 - \delta_2) + \delta_2\lambda_2 + \delta_2\lambda_2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 = \delta_1\delta_2\lambda_1^2 + \delta_1\delta_2\lambda_2^2 + \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 = \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + \delta_1\delta_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$

Então

$\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + \delta_1\delta_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > \delta_1\lambda_1 + \delta_1\lambda_2$

Para:

$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ uma vez que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

**Exercicio 3**

Considere uma Cadeia de Markov estacionária de dois estados e matriz de probabilidades de transição dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

**a)** Mostre que a distribuição estacionária é

$$(\pi(1), \pi(2)) = \frac{1}{\gamma_{1,2} + \gamma_{2,1}}(\gamma_{2,1}, \gamma_{1,2})$$

**Resolução**

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Do item 2.1: $\pi(I - G + U) = 1$

$$\begin{bmatrix} \pi(1) & \pi(2) \end{bmatrix} (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{\pi(1)(2 - a) + \pi(2)(1 - c) = 1$

$\{\pi(1)(1 - b) + \pi(2)(1 - d) = 1$

$\pi(1) = \frac{1-\pi(2)(1-c)}{(2-a)}$

$\frac{(1-\pi(2)(1-c))(1-b)}{(2-a)} + \pi(2)(2 - d) = 1$

$(1 - b)(1 - \pi(2)(1 - c)) + (2 - a)(2 - b)\pi(2) = (2 - a)$

$(1 - b)(1 - \pi(2)(1 - c)) + (1 + b)(1 + c)\pi(2) = (1 + b)$

$(1 - b)(1 - b)(1 - c)\pi(2) + (1 + b)(1 + c)\pi(2) = (1 + b)$

$\pi(2)(-1 + b - 1 + c + 1 + b + 1 + c) = 1 + b - 1 + b$

$\pi(2)(2b + 2c) = 2b$

$\pi(2) = \frac{2b}{2b+2c} = \frac{b}{b+c}$

Sabemos que $\pi(1) + \pi(2) = 1$

Logo:

$\pi(1) = -1\frac{b}{b+c} = \frac{b+c-b}{b+c} = \frac{c}{b+c}$

$\pi(1) = \frac{c}{b+c}, \pi(2) = \frac{b}{b+c}$

Assim:

$(\pi(1), \pi(2)) = \frac{1}{b+c}(c, b)$ onde $b = \gamma_{1,2}$ e $c = \gamma_{2,1}$

**b)** Considera o caso:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

e as duas sequências de observações seguintes, que se supõe serem geradas pela Cadeia de Markov acima

Sequencia 1: 1 1 1 2 2 1

Sequencia 2: 2 1 1 2 1 1

Calcule a distribuição estacionária de cada uma das sequências. Note que cada sequência contém o mesmo número de uns e dois. Porquê estas sequências não são igualmente prováveis?

**Resolução**

Distribuição estacionária de $\Gamma$:

```
             1         2
[1,] 0.6666667 0.3333333
```

Distribuição estacionária da matriz de transição gerada pela Sequência 1:

```
       1   2
[1,] 0.6 0.4
```

Distribuição estacionária da matriz de transição gerada pela Sequência 2:

```
        1    2
[1,] 0.75 0.25
```

As sequências não são igualmente prováveis pois pela distribuição estacionária da matriz $\Gamma$ que gerou ambas sequências, a probabilidade de iniciar no estado 1 ($\frac{2}{3}$) é maior do que iniciar no estado 2 ($\frac{1}{3}$).

**Exercicio 7**

Exemplo em Bisgaard and Travis (1991). Considere a seguinte sequência de 21 observações, assumidas como resultantes de uma Cadeia de Markov homogénea de dois estados

$$11101 \quad 10111 \quad 10110 \quad 11111 \quad 1$$

**a)** Estimar a matriz de probabilidades de transição por máxima verossimilhança condicionada à primeira observação.

**Resolução**

```
MLE Fit
 A  2 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 0, 1
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
     0    1
0 0.00 1.00
1 0.25 0.75
```

**Exercicio 9**

Exemplo em Singh (2003). Considere a seguinte, muito curta, sequência de ADN:

$$AACGT \quad CTCTA \quad TCATG \quad CCAGG \quad ATCTG$$

Ajuste uma Cadeia de Markov homogênea a estes dados por:

**a)** Máxima verossimilhança condicionada à primeira observação;

**Resolução**

```
MLE Fit
 A  4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 A, C, G, T
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
          A         C         G         T
A 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.5000000
C 0.2857143 0.1428571 0.1428571 0.4285714
G 0.2500000 0.2500000 0.2500000 0.2500000
T 0.1428571 0.5714286 0.2857143 0.0000000
```

```
MLE Fit^500
 A  4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 A, C, G, T
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
         A         C         G         T
A 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
C 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
G 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
T 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
```

Sendo assim a matriz de probabilidades de transição por máxima verossimilhança condicionada:

```
MLE Fit^600
 A  4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
 A, C, G, T
 The transition matrix  (by rows)  is defined as follows:
         A         C         G         T
A 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
C 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
G 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
T 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
```