Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Prova 1

araujofpinto

2019/01/21

1. A soma e a multiplicação por escalar de vetores de $V \times W$ estão bem definidas, bastando demonstrar os axiomas de espaço vetorial:

   (S1) (Soma associativa) $[(v_1, w_1) + (v_1, w_2)] + (v_3, w_3) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) + (v_3, w_3) = ([v_1 + v_2] + v_3, [w_1 + w_2] + w_3) = (v_1 + [v_2 + v_3], w_1 + [w_2 + w_3]) = (v_1, w_1) + (v_2 + v_3, w_2 + w_3) = (v_1, w_1) + [(v_2, w_2) + (v_3, w_3)]$

   (S2) (Soma comutativa) $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (v_2 + v_1, w_2 + w_1) = (v_2, w_2) + (v_1, w_1)$

   (S3) (Vetor nulo) $\vec{0} = (0_V, 0_W)$, pois $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$

   (S4) (Elemento oposto) $-(v, w) = (-v, -w)$, pois $(v, w) + (-v, -w) = (v + [-v], w + [-w]) = (0_V, 0_W) = \vec{0}$

   (M1) (Multiplicação associativa) $\lambda.[\alpha.(v, w)] = \lambda.[(\alpha v, \alpha w)] = (\lambda[\alpha v], \lambda[\alpha w]) = ([\lambda\alpha]v, [\lambda\alpha]w) = [\lambda\alpha].(v, w)$

   (M2) (Unidade multiplicativa) $1.(v, w) = (1.v, 1.w) = (v, w)$

   (D1) (Distributiva em V) $\lambda.[(v_1, w_1) + (v_2, w_2)] = \lambda.[(v_1 + v_2, w_1 + w_2)] = (\lambda[v_1 + v_2], \lambda[w_1 + w_2]) = (\lambda v_1 + \lambda v_2, \lambda w_1 + \lambda w_2) = (\lambda v_1, \lambda w_1) + (\lambda v_2, \lambda w_2) = \lambda.v_1, w_1) + \lambda.(v_2, w_2)$

   (D2) (Distributiva em $\mathbb{R}$) $[\lambda + \alpha].(v, w) = ([\lambda + \alpha]v, [\lambda + \alpha]w) = (\lambda v + \alpha v, \lambda w + \alpha w) = (\lambda v, \lambda w) + (\alpha v, \alpha w) = \lambda.(v, w) + \alpha.(v, w)$

   Logo, $V \times W$ é um espaço vetorial real com esta soma e esta multiplicação por escalar.

2. **(a)** S é subespaço vetorial de V, pois:

   (i) 0_V é o polinômio nulo dado por $0_V(x) = 0$ para x em $\mathbb{R}$. Como $0_V(1) = 0$, segue que $0_V \in S$.

   (ii) Dados p, q em S, temos que $p(1) = 0$ e $q(1) = 0$. Logo, $p+q \in V$ com $(p+q)(1) = p(1)+q(1) = 0+0 = 0$ e, portanto, $p + q \in S$.

   (iii) Dados p em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $p(1) = 0$. Logo, $\lambda.p \in V$ com $(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda.p \in S$.

   (b) S é subespaço vetorial de V, pois:

   (i) $0_V = (0, 0, 0, 0) \in S$

   (ii) Dados $v_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ em S, temos que $x_1 - y_1 + z_1 + t_1 = 0, -x_1 + 2y_1 + z_1 - t_1 = 0, x_2 - y_2 + z_2 + t_2 = 0$ e $-x_2 + 2y_2 + z_2 - t_2 = 0$. Logo, $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2) \in S$, pois $(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+(z_1+z_2)+(t_1+t_2) = 0+0 = 0$ e $-(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)+(z_1+z_2)-(t_1+t_2) = 0+0 = 0$

   (iii) Dados $v = (x, y, z, t)$ em S e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda.v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ com $(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) + (\lambda t) = \lambda 0 = 0$ e $-(\lambda x) + 2(\lambda y) + (\lambda z) - (\lambda t) = \lambda 0 = 0$ e, portanto, $\lambda.p \in S$.

   (c) $U \cap W$ é subespaço vetorial de V, pois:

   (i) $0_V \in U$ e $0_V \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $0_V \in U \cap W$

   (ii) Dados v_1, v_2 em $U \cap W$, temos que $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $v_1 + v_2 \in U \cap W$

   (iii) Dados $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda.v \in U$ e $\lambda.v \in W$, pois U e W são subespaços vetoriais de V. Logo, $\lambda.v \in U \cap W$

3. **(a)** Como V tem dimensão 2 e $\mathcal{B}_0$ tem 2 vetores, basta mostrarmos que $\mathcal{B}_0$ é linearmente independente para concluirmos que $\mathcal{B}_0$ é base de V.

   Mas $\alpha(2, 1) + \beta(-1, 2) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \beta = 0$ e $\alpha = 0$.

   Como a solução trivial é a única, temos que $\mathcal{B}_0$ é linearmente independente e, portanto, $\mathcal{B}_0$ é base de V.

(b) $(3,-1)_{\mathcal{B}_0} = 3(2,1) - 1(-1,2) = (6,3) - (-1,2) = (7,1) = 7(1,0) + 1(0,1) = (7,1)_{\mathcal{C}}$

(c) $(1,0) = (\alpha_1,\beta_1)_{\mathcal{B}_0} = \alpha_1(2,1) + \beta_1(-1,2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = -\frac{1}{5}$ e $\alpha_1 = \frac{2}{5}$.

Logo $(1,0) = (\alpha_1,\beta_1)_{\mathcal{B}_0} = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})_{\mathcal{B}_0}$.

$(0,1) = (\alpha_2,\beta_2)_{\mathcal{B}_0} = \alpha_2(2,1) + \beta_2(-1,2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta_1 = \frac{2}{5}$ e $\alpha_1 = \frac{1}{5}$.

Logo $(0,1) = (\alpha_2,\beta_2)_{\mathcal{B}_0} = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})_{\mathcal{B}_0}$.

(d) $(x,y) = (\alpha,\beta)_{\mathcal{B}_0} = \alpha(2,1) + \beta(-1,2) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 - \beta_2 = x \\ \alpha_2 + 2\beta_2 = y \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & x \\ 1 & 2 & | & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & | & y - \frac{x}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = -\frac{x}{5} + 2\frac{y}{5}$ e $\alpha = 2\frac{x}{5} + \frac{y}{5}$.

Logo $(x,y) = (\alpha,\beta)_{\mathcal{B}_0} = (2\frac{x}{5} + \frac{y}{5}, -\frac{x}{5} + 2\frac{y}{5})_{\mathcal{B}_0}$.

(e) Como V tem dimensão 2 e $\mathcal{B}$ tem 2 vetores, basta mostrarmos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente para concluirmos que $\mathcal{B}$ é base de V.

Mas $\alpha(a,b) + \beta(-b,a) = 0_V = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a\alpha - b\beta = 0 \\ b\alpha + a\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b & | & 0 \\ b & a & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b & | & 0 \\ 0 & a + \frac{b^2}{a} & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} a & -b & | & 0 \\ 0 & \frac{a^2+b^2}{a} & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 0$ e $\alpha = 0$, pois $\frac{a^2+b^2}{a} \neq 0$.

Como a solução trivial é a única, temos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente e, portanto, $\mathcal{B}$ é base de V.

4. **(a)** A equação cartesiana de π é da forma $ax + by + cz = d$. Substituindo os vetores dados na equação, obtemos o sistema linear 3×4 : $\begin{cases} a + 0b + 0c = d \\ 0a + b + 0c = d \\ 0a + 0b + c = d \end{cases}$ que é um sistema linear homogêneo possível e indeterminado com 1 grau de liberdade, pois para qualquer valor de d em $\mathbb{R}$, temos uma solução para o sistema com $c = d$, $b = d$ e $a = d$. Portanto, uma possível equação cartesiana de π é $x + y + z = 1$.

Para obter a equação vetorial de π, note que qualquer $v = (x,y,z) \in \pi$ pode ser escrito como $v = (x, y, 1-x-y) = (0,0,1) + (x,0,-x) + (0,y,-y) = (0,0,1) + x.(1,0,-1) + y.(0,1,-1)$, logo uma possível equação vetorial de π é dada por $(x,y,z) = (0,0,1) + \alpha.(1,0,-1) + \beta.(0,1,-1), \alpha, \beta$ em $\mathbb{R}$; e uma possível equação paramétrica é dada por $(x,y,z) = (\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta), \alpha, \beta$ em $\mathbb{R}$.

Portanto, $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ ou
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (0,0,1) + \alpha.(1,0,-1) + \beta.(0,1,-1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ ou
$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(b) R1: Pela equação cartesiana, vemos que π é o conjunto solução do sistema linear 1×3 dado por $\begin{cases} x + y + z = 1 \end{cases}$ e, portanto, π é um espaço afim de $\mathbb{R}^3$.

R2: Pela equação vetorial, vemos que $\pi = \{(0,0,1)\} + H$, onde $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução do sistema linear homogêneo 1×3 dado por $\begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$ que é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2 e, como π é o transladado de um subespaço vetorial, temos que π é um espaço afim de $\mathbb{R}^3$.

R3: Sejam $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em π e $t \in \mathbb{R}$. Então, $P_t = tP_1 + (1-t)P_2 = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2)$ pertence a π, pois $tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 + tz_1 + (1-t)z_2 =$

$x_2 + y_2 + z_2 + t[x_1 - x_2 + y_1 - y_2 + z_1 - z_2] = 1 + t[1-1] = 1 + t.0 = 1 + 0 = 1$. Logo, π é um espaço afim de $\mathbb{R}^3$.

(c) A dimensão de $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ é 2 e $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ é base de H.

(d) Seja $v = (1,1,1) \notin H$. Logo, $w = [(1,1,1)]$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1 tal que $H \cap W = \{(0,0,0)\}$.

Logo, $dim(H+W) = dim(H) + dim(W) - dim(H \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3$ e, portanto, $H+W$ é um subespaço vetorial de dimensão 3 dentro do $\mathbb{R}^3$, que também tem dimensão 3.
Portanto, $H + W = \mathbb{R}^3$ e, como $H \cap W = \{(0,0,0)\}$, temos $H \oplus W = \mathbb{R}^3$.

5. **(a)** A equação $a(0,1,0) + b(0,0,1) + c(0,2,-5) + d(1,2,3) = 0_V = (0,0,0)$ gera o sistema linear homogêneo $3 \times 4 : \begin{cases} 0a + 0b + 0c + d = 0 \\ a + 0b + 2c + 2d = 0 \\ 0a + b - 5c + 3d = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$ que é um sistema possível e indeterminado com 1 grau de liberdade e, portanto, U é linearmente dependente.

Como o sistema (já escalonado) tem 3 linhas não-nulas (ou 3 colunas com pivôs), temos que o subespaço $S = spanU$ tem dimensão 3 e, como $S \subseteq \mathbb{R}^3$, temos $S = \mathbb{R}^3$.

Logo, uma possível base de S é $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$($ou$\{(0,0,1),(0,2,-5),(1,2,3)\}ou
\{(0,1,0),(0,2,-5),(1,2,3)\}ou\{(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}).

(b) Sejam $f, g, h \in U$ dadas por $f(x) = 1$, $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \cos x$.
A equação $af + bg + ch = 0_V$, onde 0_V é a função nula de V dada por $0_V(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$, nos gera infinitas equações $af(x) + bg(x) + ch(x) = a + b\sin x + c\cos x = 0$ para cada x em $\mathbb{R}$.
Escolhendo 3 valores para x em $\mathbb{R}$, como $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$; obtemos o sistema linear homogêneo $3 \times 3 \begin{cases} 1a + 0b + 1c = 0 \\ 1a + 1b + 0c = 0 \\ 1a + 0b - c = 0 \end{cases}$ que é um sistema possível e determinado com solução $a = 0$, $b = 0$ e $c = 0$.
Como a solução trivial é a única, temos que U é linearmente independente.

6. Sabemos que $dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 3 + 3 - dim(U \cap W) = 6 - dim(U \cap W)$.

Como $dim(U+W) \le dim(\mathbb{R}^4) = 4$ e $dim(U \cap W) \le dim(U) = 3$, temos que $U \cap W$ tem dimensão 2 ou 3: Se $dim(U \cap W) = 3$, então $U \cap W = U = W$ e, portanto, $U + W = U = W$; se $dim(U \cap W) = 2$, então $dim(U+W) = 4$ e, portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$.

Para descobrirmos a dimensão de $U \cap W$, vamos verificar quantos vetores (2 ou 3) linearmente independentes existem no conjunto gerador de $U \cap W$ dado por $\{(1,2,1,0),(2,1,0,-1),(1,5,3,1)\}$.

Se $\alpha_1(1,2,1,0) + \alpha_2(2,1,0,-1) + \alpha_3(1,5,3,1) = (0,0,0,0)$, temos o sistema $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \to$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Como o sistema escalonado tem 2 colunas com pivôs (ou 2 linhas não-nulas), segue que $dim(U \cap W) = 2$ e, portanto, $dim(U+W) = 4$, ou seja, $U + W = \mathbb{R}^4$.

7. **(a)** Como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3 e $\mathcal{B}_a$ tem 3 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}_a$ é base de $\mathbb{R}^3$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}_a$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ ou que $\mathcal{B}_a$ é linearmente independente.

Para verificarmos se $\mathcal{B}_a$ é linearmente independente, vamos analisar a equação $\alpha(a,1,0)+\beta(1,a,0)+\gamma(0,1,a) = 0_V = (0,0,0)$ em função do parâmetro a. Esta equação gera o sistema linear homogêneo $3\times 3 \begin{cases} a\alpha+\beta+0\gamma=0 \\ \alpha+a\beta+\gamma=0 \\ 0\alpha+0\beta+a\gamma=0 \end{cases}$, que tem a última linha nula quando $a=0$ e, portanto, $\mathcal{B}$ não é base de $\mathbb{R}^3$ se $a=0$.

Se $a\neq 0$, o sistema pode ser escalonado como $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & a-\frac{1}{a} & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & a & | & 0 \end{pmatrix}$ e, portanto, $\mathcal{B}$ será linearmente independente se os pivôs na diagonal forem não-nulos, ou seja $a\neq 0$ e $a-\frac{1}{a}\neq 0$, ou ainda, $a\neq 0$, $a\neq 1$ e $a\neq -1$.

Portanto, $\mathcal{B}_a$ é base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $a\notin\{-1,0,1\}$.

(b) Sejam p_a, q_a, r_a em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definidos por $p_a(x)=1$, $q_a(x)=x-a$ e $r_a(x)=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$.

Como $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tem dimensão 3 e $\mathcal{B}_a$ tem 3 vetores, para provarmos que $\mathcal{B}_a$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, basta mostrarmos que $\mathcal{B}_a$ é gerador de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ou que $\mathcal{B}_a$ é linearmente independente.

Para verificarmos se $\mathcal{B}_a$ é linearmente independente, vamos analisar a equação $\alpha p_a+\beta q_a+\gamma r_a = 0_V = 0.1+0.x+0.x^2$ em função do parâmetro a.

Esta equação gera o sistema linear homogêneo $3\times 3 \begin{cases} \alpha-a\beta+a^2\gamma=0 \\ 0\alpha+\beta-2a\gamma=0 \\ 0\alpha+0\beta+\gamma=0 \end{cases}$, que já está escalonado e tem todas as linhas não nulas (ou tem os pivôs na diagonal não-nulos) para qualquer a em $\mathbb{R}$.

Portanto, $\mathcal{B}_a$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ para todo a em $\mathbb{R}$.

8. **(a)** $\mathcal{B}_U$ é gerador de U, pois $A\in U \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A=aA_1+bA_2+cA_3$.

$\mathcal{B}_U$ é linearmente independente, pois a equação $\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3 = 0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gera o sistema linear homogêneo $4\times 3 \begin{cases} \alpha+0\beta+0\gamma=0 \\ 0\alpha+\beta+0\gamma=0 \\ 0\alpha+\beta+0\gamma=0 \\ 0\alpha+0\beta+\gamma=0 \end{cases}$, que tem como única solução $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Logo, $\mathcal{B}_U=\{A_1,A_2,A_3\}$ é base de U e, portanto, $dim(U)=3$.

(b) $\mathcal{B}_W$ é gerador de W, pois $A\in U \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=d\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=dA_4$.

$\mathcal{B}_W$ é linearmente independente, pois a equação $\alpha A_4 = 0_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gera o sistema linear homogêneo $4\times 1 \begin{cases} 0\alpha=0 \\ \alpha=0 \\ \alpha=0 \\ 0\alpha=0 \end{cases}$, que tem como única solução $\alpha=0$.

Logo, $\mathcal{B}_W=\{A_4\}$ é base de W e, portanto, $dim(W)=1$.

(c) Note que $A_4\notin U$, logo $\mathcal{B}=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ é linearmente independente e, portanto, $U+W=span\mathcal{B}$ é um subespaço vetorial de dimensão 4 dentro de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, que também tem dimensão 4 e, portanto, $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = U+W$.

(d) Como $dim(U+W)=4$, obtemos que $dim(U\cap W)=0$, de onde a soma é direta, ou seja $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=U\oplus W$.