

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO ESTATÍSTICA**

**RODOLFO PIROLO GATZKE - GRR 20149150**

**RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DA LISTA V  
MODELOS MARKOVIANOS**

**CURITIBA  
Setembro de 2020**

## Exercício 1

Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição uma mistura de duas distribuições com esperanças  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e variâncias  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ , respectivamente, onde os parâmetros de mistura são  $\delta_1$  e  $\delta_2$  com  $\delta_1 + \delta_2 = 1$ .

a) Prove que  $Var(X) = \delta_1 \sigma_1^2 + \delta_2 \sigma_2^2 + \delta_1 \delta_2 (\mu_1 - \mu_2)^2$

b) Mostre que a mistura de duas distribuições Poisson,  $P(\lambda_1), P(\lambda_2)$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , é superdispersa, ou seja,  $Var(X) > E(X)$ .

*Resposta*

## Exercício 3

Considere uma Cadeia de Markov estacionária de dois estados e matras de probabilidades de transição dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

a) Mostre que a distribuição estacionária é

$$(\pi(1), \pi(2)) = \frac{1}{\gamma_{1,2} + \gamma_{2,1}} (\gamma_{2,1}, \gamma_{1,2})$$

b) Considere o caso

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

e as duas sequências de observações seguintes, que se supõe serem geradas pela Cadeia de Markov acima

*Sequência1* : 1 1 1 2 2 1

*Sequência2* : 2 1 1 2 1 1

Calcule a distribuição estacionária de cada uma das sequências. Note que cada sequência contém o mesmo número de uns e dois. Porquê estas sequências não são igualmente prováveis

## Exercício 7

Exemplo em Bisgaard and Travis (1991). Considere a seguinte sequência de 21 observações, assumidas como resultantes de uma Cadeia de Markov homogênea de dois estados

1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1

a) Estimar a matriz de probabilidades de transição por máxima verossimilhança condicionada à primeira observação.

```
library( markovchain )
ex7= c(1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1)
markovchainFit( data = ex7 )$estimate
```

```
## MLE Fit
## A 2 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## 0, 1
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##      0      1
## 0 0.00 1.00
## 1 0.25 0.75
```

## Exercício 9

Exemplo em Singh (2003). Considere a seguinte, muito curta, sequência de ADN:

*AACGT CTCTA TCATG CCAGG ATCTG*

Ajuste uma Cadeia de Markov homogênea a estes dados por:

- a) Máxima verossimilhança condicionada à primeira observação;

```
library(markovchain)
ex9<- c('A','A','C','G','T','C','T','C','T','A','T','C','A','T','G','C','C','A','G','G','A','T','C','T')
fit_ex9<- markovchainFit(data = ex9)
fit_ex9[[1]]
```

```
## MLE Fit
## A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## A, C, G, T
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##      A      C      G      T
## A 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.5000000
## C 0.2857143 0.1428571 0.1428571 0.4285714
## G 0.2500000 0.2500000 0.2500000 0.2500000
## T 0.1428571 0.5714286 0.2857143 0.0000000
```

```
fit_ex9[[1]]^500
```

```
## MLE Fit^500
## A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## A, C, G, T
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##      A      C      G      T
## A 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## C 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## G 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## T 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
```

```
fit_ex9[[1]]^600
```

```
## MLE Fit^600
## A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## A, C, G, T
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
```

```
##           A           C           G           T
## A 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## C 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## G 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## T 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
```

Resultando em

```
fit_ex9[[1]]^600
```

```
## MLE Fit^600
## A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:
## A, C, G, T
## The transition matrix (by rows) is defined as follows:
##           A           C           G           T
## A 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## C 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## G 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
## T 0.212297 0.2923434 0.2111369 0.2842227
```