I.4 Exercícios

1. **Uma matriz de transição para o número de linhas telefônicas ocupadas.**
Suponha que o número de linhas usadas nos tempos 1, 2, ... formem uma Cadeia de Markov com matriz de probabilidades de transição estacionária. Essa cadeia possui seis estados possíveis 0, 1, ..., 5, onde i é o estado no qual exatamente i linhas estão sendo usadas em um determinado momento $(i = 0, 1, \cdots, 5)$. Suponha que a matriz de transição Γ seja a seguinte:

$$\Gamma = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} \cdot$$

(a) Supondo que todas as cinco linhas estejam em uso em um determinado momento de observação, determinar a probabilidade de que exatamente quatro linhas serão usadas no próximo tempo de observação.
(b) Supondo que nenhuma linha esteja em uso em um determinado momento, determinar a probabilidade de que pelo menos uma linha esteja em uso no próximo momento de observação.

2. Mostre que o seguinte processo auto-regressivo é um processo Markov:

$$C_n = \rho C_{n-1} + \xi_n, \qquad C_0 = 0,$$

onde $\xi_1, \cdots, \xi_n$ são variáveis aleatórias independentes e igualmente distribuídas.

3. Cinco pontos são marcados sobre um círculo. Um processo se move a partir de um determinado ponto a seus vizinhos, com uma probabilidade de 1/2 para cada vizinho. Encontre a matriz de transição da Cadeia de Markov resultante.

4. Sejam $\{C_n\}$ e $\{D_n\}$ duas Cadeias de Markov com espaço de estados $S = \mathbb{Z}$. É necessariamente $\{C_n + D_n\}$ uma Cadeia de Markov?

5. Seja $\{\overline{C}_n\}$ a sequência de médias amostrais calculadas a partir de $C_1, C_2, \cdots$, uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, isto é,

$$\overline{C}_n = \frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \cdot$$

(a) É $\{\overline{C}_n\}$ um processo de Markov?
(b) Se a resposta à primeira parte é sim, encontrar a probabilidade de

transição $P\big(\overline{C}_n = y \,|\, \overline{C}_{n-1} = x\big)$.

6. Seja $\{C_n\}$ uma Cadeia de Markov. Prove que, para todo $1 < r < n$,

$$P\big(C_r = c_r \,|\, C_i = c_i\big) \;=\; P\big(C_r = c_r \,|\, C_{r-1} = c_{r-1}, C_{r+1} = c_{r+1}\big),$$

sendo $i = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n$ e $c_1, c_2, \cdots$ os valores observados da cadeia.

7. Realizamos uma sequência de experimentos da seguinte forma: primeiro uma moeda honesta é lançada. Em seguida, se no experimento $n-1$ sai cara, jogamos uma moeda honesta; se nele sai coroa lançamos uma moeda que tem probabilidade de $1/n$ de obter cara. Quais são as probabilidades de transição? É este um processo estacionário?

8. Uma urna contém inicialmente cinco bolas pretas e cinco bolas brancas. A seguinte experiência é repetida indefinidamente: Uma bola é retirada da urna; se a bola for branca, ela é colocada de volta na urna, caso contrário ela é deixada de fora. Considere C_n o número de bolas pretas restantes na urna após a n-ésima retirada da urna.
   (a) É $\{\overline{C}_n\}$ um processo de Markov? Se assim for, encontrar as probabilidades de transição adequados e faça o grafo correspondente.
   (b) Será que as probabilidades de transição dependem de n?.

9. Mostrar que qualquer sequência de variáveis aleatórias independentes que assumem valores em um conjunto enumerável S é uma Cadeia de Markov. Em qual condição essa cadeia é homogênea?

10. Demonstrar o Teorema 1.

11. Suponha que João está atirando cestas no ginásio da escola e está muito interessado no número de cestos que ele é capaz de acertar em sequência. Suponha que cada tiro vai entrar no cesto com uma probabilidade $\alpha \in (0,1)$ e que o sucesso ou fracasso de cada tiro é independente de todos os outros tiros. Considere C_n ser o número de cestas que ele acertou após n tiros. Assim, por exemplo, $C_0 = 0$ e $C_1 \in \{0,1\}$, dependendo se ele acertou ou não o primeiro tiro. É razoável modelar C_n como uma Cadeia de Markov? Qual é o espaço de estado? Qual é a matriz de probabilidadaes de transição?

12. Para uma Cadeia de Markov $\{C_n\}$, prove que

$$P\big(C_n = x \,|\, C_{n_1} = c_{n_1}, \cdots, C_{n_k} = c_{n_k}\big) \;=\; P\big(C_n = x \,|\, C_{n_k} = c_{n_k}\big)$$

quaisquer sejam $n_1 < n_2 < \cdots < n$.

13. Prove as expressões das matrizes de transição no Exemplo 5 (b) e (c).

14. Suponha que um aluno vai chegar na hora ou atrasado para uma determinada classe e que os eventos de que ele está na hora ou atrasado para a aula, em

dias sucessivos, formam uma Cadeia de Markov com matriz de probabilidades de transição estacionária. Suponhamos também que, se ele está atrasado em um determinado dia, então a probabilidade de que ele vai chegar na hora certa no dia seguinte é de 0.8. Além disso, se ele chega em tempo em um determinado dia, então a probabilidade de que ele chegará tarde no dia seguinte é de 0.5.

(a) Se o aluno está atrasado em um determinado dia, qual é a probabilidade de que ele vai estar na hora em cada um dos próximos três dias?

(b) Se o aluno está no tempo em um determinado dia, qual é a probabilidade de que ele chegará tarde em cada um dos próximos três dias?

15. Suponha que a profissão de um homem pode ser classificada como profissional, trabalhador qualificado ou operário não qualificado. Suponha que, dos filhos de homens profissionais, 80 por cento são profissionais, 10 por cento são trabalhadores qualificados e 10 por cento são trabalhadores não qualificados. No caso dos filhos de trabalhadores qualificados, 60 por cento são hábeis trabalhadores qualificados, 20 por cento são profissionais e 20 por cento são trabalhadores não qualificados. Finalmente, no caso de operários não qualificados, 50 por cento dos filhos são operários não qualificados e 25 por cento em cada um são as chances das outras duas categorias. Suponha que cada homem tem pelo menos um filho e que seguindo a profissão de um filho escolhido aleatoriamente de uma determinada família através de várias gerações temos definida uma Cadeia de Markov. Configure a matriz de probabilidades de transição. Encontre a irobabilidade de que um neto escolhido aleatoriamente de um operário não qualificado seja um homem profissional.

16. No Exercício anterior assumimos que todo homem tem pelo menos um filho. Suponha que, ao invés disso a probabilidade de que um homem tenha pelo menos um filho seja 0.8. Formar uma Cadeia de Markov com quatro estados. Se um homem tem pelo menos um filho, a probabilidade de que o filho esteja em uma profissão específica seja a mesma que no Exercício mencionado. O quarto estado seria o caso de não houver filho e, portanto, não existir continuidade na linha masculina. Encontre a matriz de probabilidades de transição e encontre a probabilidade de que um neto escolhido aleatoriamente de um operário não qualificado seja um homem profissional.

17. Considere um passeio aleatório, isto é, uma Cadeia de Markov com espaço de estados o conjunto $S=\{0,1,\cdots,M\}$ e probabilidades de transição

$$\gamma_{0,1} \,=\, 1, \qquad \gamma_{M,M-1} \,=\, 1$$

e, para $x=1,2,\cdots,M-1$,

$$\gamma_{x,x-1} \,=\, 1-\alpha, \qquad \gamma_{x,x+1} \,=\, \alpha, \qquad \text{com} \qquad 0<\alpha<1\cdot$$

Desenhe o grafo da matriz de probabilidades de transição.

18. Uma máquina é constituída por duas partes que não são reparadas de forma

independente. A parte operante falha durante qualquer dia com probabilidade α. Uma parte que não esteja funcionando será reparada no dia seguinte com probabilidade β. Defina C_n como o número de peças trabalhando no n-ésimo dia. Mostre que $\{C_n\}$ é uma Cadeia de Markov com três estados e apresentar sua matriz de probabilidades de transição.

19. Seja $\{C_n \,:\, n \geq 0\}$ uma Cadeia de Markov. Mostre que

$$P\big(C_0 = c_{_0} \,|\, C_1 = c_{_1}, \cdots, C_n = c_{_n}\big) \,=\, P\big(C_0 = c_{_0} \,|\, C_1 = c_{_1}\big)\cdot$$