Verão IME-USP 2019 - Álgebra Linear - Lista 2

araujofpinto

janeiro 2019

1. Decida se cada uma das transformações abaixo são lineares:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (-x, -y)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (x, y) + (a, b)$, onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixo.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (xcos(\theta) - ysen(\theta), xsen(\theta) + ycos(\theta))$, com $\theta \in [0, 2\Pi]$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y, z)) = (z, x + y)$.

   e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = (x, 2)$.

   f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (x^2 + y^2, x)$.

   g) $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T\left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

   h) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p) = 2p$.

   i) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p) = q$ com $q(x) = p(2x)$.

2. Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (x, -y)$. Faça a representação gráfica da imagem do triângulo de vértices $(-1, 4), (3, 1)$ e $(2, 6)$ pela transofrmação T.

3. Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T((x, y)) = (2x - y, -x + 2y)$. Dertermine uma base para cada um dos deguintes subespaços: $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T((x, y)) = 3(x, y)\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T((x, y)) = (x, y)\}$.

4. Em cada caso determine uma transformação linear

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T((1, 0, 0)) = (0, 0, 1)$, $T((1, 0, 1)) = (1, 1, 1)$ e $T((0, -1, 1)) = (1, 1, 0)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_3$ tal que $T((1, 1)) = x^2 - 1$, $T((1, -1)) = x^3 - 1$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T((1, 0, 0)) = -x + 1$, $T((0, 1, 0)) = 1 + x$ e $T((0, 0, 1)) = 1 - x^2$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T((1, 0, 0)) = (1, 0)$, $T((0, 1, 0)) = (1, -1)$ e $T((0, 0, 1)) = (0, 1)$.

5. Determinar base para $KerT$, ImT, o posto e a nulidade das seguintes transformações lineares:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x - y - z, 2z - x)$.

   b) $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(1) = (1, 2, 0)$, $T(x) = (-1, 0, 1)$, $T(x^2) = (0, 8, 4)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(1, 1) = (1, 0, 2)$, $T(-1, 1) = (3, 0, 6)$.

6. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = \{(x, , y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

7. Considere os seguintes subespaços: $U = \{(x, , y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e $W = [(1, 0, 1), (0, -1, 1)]$. Determine uma transofrmação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $Im(T) = U$ e $Ker(T) = U \cap W$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(2, 1) = (3, 0, 2)$ e $T(1, 2) = (1, 1, 0)$. Determine uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $Ker(P) = Im(T)$.

9. Sejam V um espaço vetorial real com $dim(V) = n$ e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $Im(T) = Ker(T)$. Mostre que n é par. Considerando $V = \mathbb{R}^4$, dê um exemplo de uma transformação linear com essas propriedades.

10. Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(a, b, c) = (a - b) + (c - a)x + (b + c)x^2$ é um isomorfismo.

11. Determine se V é isomorfo à W, exibindo um isomorfismo $T : V \to W$ caso seja, e argumentando caso não seja, onde:

    a) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$.

    b)$V = \mathbb{R}^2$ e W, onde W é qualquer subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 2.

    c) $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

12. Sejam U, V, W espaços vetoriais reais de dimensão finita. Mostre que se U e V são isomorfos e V e W são isomorfos, então U e W são isomorfos.

13. Determine se a seguinte transformação linear T é invertível e caso afirmatível determine T^{-1}.

    a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

    b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, definido por $T(1, -1) = 2 + x$ e $T(0, 1) = x - 1$.

    c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$.

    d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, definida por $T(1, 1) = 1 - x$ e $T(1, -1) = 1 + 3x$.

14. Sejam V um espaço vetorial real e $T, P : V \to V$ transformações lineares tais que $P \circ T = T \circ P$. Prove que $Ker(T) + Ker(P) \subset Ker(T \circ P)$.

15. Considere as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (y - z, z - x)$.

    a) Determine $P \circ T$ e uma base para $ker(P \circ T)$.

    b) Determine $T \circ P$ e uma base para $Im(T \circ P)$

    c) Verifique se $T \circ P$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^3$.

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, x + 2y + z).$$

    Determine $[T]_{can,can}$, onde $can = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

17. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 4y)$. Determine $[T]_{can,can}$, $[T]_{B,C}$, $[T]_{C,B}$, $[T]_{C,C}$, $[T]_{can,B}$, $[T]_{B,can}$, $[T]_{C,can}$ e $[T]_{can,C}$, onde $can = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$ e $C = \{(1, -1), (1, 1)\}$.

18. Considere a transformação linear $T : P_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com a seguinte representação matricial $[T]_{can,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, onde can é a base canônica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ e $B = \{x - x^2, x + x^2, 1 - x - x^2\}$ é base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

    Seja $p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dado por $[p]_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determine a transformação T, o elemento e p em $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $[T(p)]_B$ e o elemento $T(p)$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

19. Mostre que a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(p) = (p(-1), p(0), p(1))$ é bijetora. Determine $[T]_{can,can}$.

20. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{can,C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, onde $C = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

    a) Determine $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.

    b) Determine uma base para $Im(T)$.

    c) Vale que T é injetora?

21. Determine a matriz mudança de base de B para C para os seguintes espa co vetoriais V.

    a) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)\}$.

    b) Para $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $B = \{1 - x^2, 1 - x, 1\}$ e $C = \{x^2, x + x^2, 1 + x + x^2\}$.