Métodos de Monte Carlo em inferência estatística

Propriedades de estimadores

Fernando P. Mayer

1 Introdução

Seja X uma variável aleatória com função densidade (ou de probabilidade) denotada por $f(x, \theta)$, em que θ é um parâmetro desconhecido. Chamamos de **inferência estatística** o problema que consiste em especificar um ou mais valores para θ, baseado em um conjunto de valores X.

A inferência pode ser feita de duas formas:

- estimativa pontual
- estimativa intervalar

Redução de dados

- Um experimentador usa as informações em uma amostra aleatória $X_1, \ldots, X_n$ para se fazer inferências sobre θ.
- Normalmente n é grande e fica inviável tirar conclusões baseadas em uma longa **lista** de números.
- Por isso, um dos objetivos da inferência estatística é **resumir** as informações de uma amostra, da maneira mais **compacta** possível, mas que ao mesmo tempo seja também **informativa**.
- Normalmente esse resumo é feito por meio de **estatísticas**, por exemplo, a média amostral e a variância amostral.

População e amostra

- O conjunto de valores de uma característica associada a uma coleção de indivíduos ou objetos de interesse é dito ser uma população.
- Uma sequência $X_1, \ldots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com função densidade (ou de probabilidade) $f(x, \theta)$ é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de X.
- Como normalmente $n > 1$, então temos que a fdp ou fp conjunta será

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = f(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta).$$

2 Estimadores

Espaço paramétrico

- O conjunto Θ em que θ pode assumir seus valores é chamado de **espaço paramétrico**

Estimador

- Qualquer estatística que assume valores em Θ é um estimador para θ.

Estimador pontual

- Dessa forma, um **estimador pontual** para θ é qualquer estatística que possa ser usada para estimar esse parâmetro, ou seja,

$$\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$$

Observações:

1. Todo estimador é uma estatística, mas nem toda estatística é um estimador.
2. O valor assumido pelo estimador pontual é chamado de **estimativa pontual**,

$$\hat{\theta} = T(\mathbf{X}) = T(X_1, \ldots, X_n) = t$$

ou seja, o estimador é uma **função** da amostra, e a estimativa é o **valor observado** de um estimador (um número) de uma amostra particular.

Estimação pontual

- A ideia geral por trás da estimação pontual é muito simples:
- Quando a amostragem é feita a partir de uma população descrita por uma função $f(x, \theta)$, o conhecimento de θ a partir da amostra, gera todo o conhecimento para a população.
- Dessa forma, é natural que se procure um **método** para se achar um **bom** estimador para θ.
- Existem algumas **propriedades** que definem o que é um bom estimador, ou o ``**melhor**'' estimador entre uma série de candidatos.

Localização do problema:

- Considere $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatóra de uma variável aleatória X com fdp ou fp $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$. Sejam:

$$\hat{\theta}_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n) \qquad \hat{\theta}_2 = T_2(X_1, \ldots, X_n)$$

Qual dos dois estimadores pontuais é **melhor** para θ?

- Como não conhecemos θ, não podemos afirmar que $\hat{\theta}_1$ é melhor do que $\hat{\theta}_2$ e vice-versa.
- O problema da estimação pontual é então escolher um estimador $\hat{\theta}$ que se aproxime de θ segundo algumas **propriedades**.

3 Propriedades dos estimadores

De modo geral, um ``**bom**'' estimador deve ser:

1. Não viciado
2. Consistente
3. Eficiente

Vício

Erro quadrático médio (EQM)

O Erro Quadrático Médio (EQM) de um estimador $\hat{\theta}$ de θ é dado por

$$\begin{aligned} \text{EQM}[\hat{\theta}] &= \text{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= \text{Var}[\hat{\theta}] + \text{B}[\hat{\theta}]^2 \end{aligned}$$

onde

$$\text{B}[\hat{\theta}] = \text{E}[\hat{\theta}] - \theta$$

é denominado de **vício** do estimador $\hat{\theta}$. Portanto, dizemos que um estimador é **não viciado** para θ quando

$$\text{B}[\hat{\theta}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

Estimador não viciado

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$, uma amostra aleatória de uma variável aleatória com fdp ou fp $f(x, \theta), \theta \in \Theta$, dizemos que o estimador $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ é não viciado para θ se

$$\text{E}[\hat{\theta}] = \text{E}[T(\mathbf{X})] = \theta \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

Um estimador $\hat{\theta}$ é dito **assintoticamente não viciado** se

$$\lim_{n \to \infty} \text{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

Ou seja, para grandes amostras, $\hat{\theta}$ passa a ser imparcial.

Consistência

Estimador consistente

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$, uma amostra aleatória de uma variável aleatória com fdp ou fp $f(x, \theta), \theta \in \Theta$, o estimador $\hat{\theta} = T(\mathbf{X})$ é consistente para θ se satisfaz simultaneamente

$$\lim_{n \to \infty} \text{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

e

$$\lim_{n \to \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = 0$$

Exemplo: média amostral $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ como estimador da média populacional μ:

$$\text{E}(\bar{x}) = \text{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \text{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Portanto $\bar{x}$ é um estimador **não viciado** e **consistente** para μ.

Exemplo: variância amostral $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ como estimador da variância populacional σ^2:

$$\text{E}(\hat{\sigma}^2) = \text{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right] = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$$

Portanto $\hat{\sigma}^2$ é um estimador **viciado** para σ^2. (Embora seja um estimador **assintoticamente** não viciado).

Para eliminar esse vício, podemos definir então um novo estimador: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, e

$$\mathrm{E}(S^2) = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = \sigma^2$$

que é então um estimador **não viciado** para σ^2.

Eficiência

Eficiência relativa

Sejam $\hat{\theta}_1 = T_1(\mathbf{X})$ e $\hat{\theta}_2 = T_2(\mathbf{X})$ dois estimadores pontuais **não viciados** para θ. A eficiência relativa de $\hat{\theta}_1$ em relação a $\hat{\theta}_2$ é

$$\mathrm{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \frac{\mathrm{Var}[\hat{\theta}_1]}{\mathrm{Var}[\hat{\theta}_2]}$$

Se:

- $\mathrm{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] > 1 \Rightarrow \hat{\theta}_2$ é mais eficiente
- $\mathrm{ER}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] < 1 \Rightarrow \hat{\theta}_1$ é mais eficiente

Exemplo

Uma amostra $(X_1, \ldots, X_n)$ é retirada de uma população com $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, e dois estimadores são propostos para μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\mu}_2 = \text{mediana}(X_1, \ldots, X_n)$$

Qual dos dois é melhor para μ?

Podemos notar que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\mu}_1) &= \mathrm{E}(\bar{X}) = \mu \\ \mathrm{Var}(\hat{\mu}_1) &= \mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\mu}_2) &= \mathrm{E}(\text{mediana}(X_1, \ldots, X_n)) = \mu \\ \mathrm{Var}(\hat{\mu}_2) &= \mathrm{Var}(\text{mediana}(X_1, \ldots, X_n)) = (\pi/2)(\sigma^2/n) \end{aligned}$$

Portanto, ambos são estimadores não viciados e consistentes. Mas:

$$\mathrm{ER}[\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2] = \frac{\mathrm{Var}[\hat{\mu}_1]}{\mathrm{Var}[\hat{\mu}_2]} = \frac{\sigma^2/n}{(\pi/2)(\sigma^2/n)} = \frac{2}{\pi} = 0,63$$

Como $\mathrm{ER}[\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2] < 1$ então $\hat{\mu}_1 = \bar{X}$ é mais **eficiente**.

Erro padrão

O **erro padrão** de um estimador dá uma ideia da **precisão** da estimativa.

O erro padrão (EP) de um estimador é o seu desvio-padrão (raíz quadrada da variância), ou seja,

$$\mathrm{EP}(\hat{\theta}) = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}$$

Exemplo: Sabemos que a distribuição de $\bar{X}$ tem média μ e variância σ^2/n. Então o erro padrão de $\bar{X}$ é

$$\mathrm{EP}(\bar{X}) = \sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Exemplo 1

Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma variável aleatória

$X \sim \text{N}(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ e os estimadores pontuais para μ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

Qual dos dois estimadores pode ser considerado como o **melhor** para estimar o verdadeiro valor de μ?

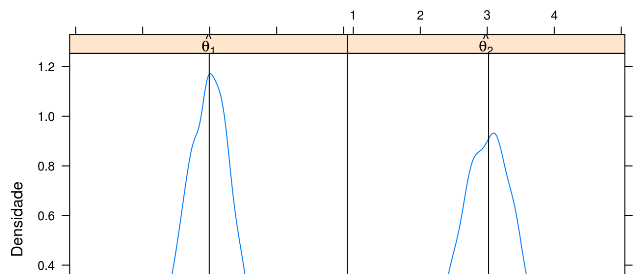
Considere os seguintes pseudo-códigos para um estudo de simulação do comportamento destes dois estimadores:

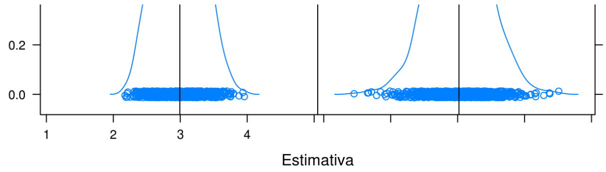
Pseudo-código 1

1. Simule uma amostra de tamanho $n = 10$ da distribuição considerada
2. Para essa amostra, calcule a média ($\hat{\theta}_1$) e o ponto médio ($\hat{\theta}_2$)
3. Repita os passos (1) e (2) acima $N = 1000$ vezes
4. Faça um gráfico da densidade das $N = 1000$ estimativas de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ e verifique seu comportamento

```
library(lattice)
library(latticeExtra)
# Loading required package: RColorBrewer
library(plyr)
```

```
## Define valores
N <- 1000
n <- 10
## Gera amostras e calcula estimativas
set.seed(1)
th1 <- replicate(N, mean(rnorm(n, mean = 3, sd = 1)))
th2 <- replicate(N, mean(range(rnorm(n, mean = 3, sd =
  1))))
## Converte para data frame
L <- list(th1 = data.frame(est = th1), th2 = data.frame
  (est = th2))
L <- ldply(L)
str(L)
# 'data.frame': 2000 obs. of  2 variables:
#  $ .id: chr  "th1" "th1" "th1" "th1" ...
#  $ est: num  3.13 3.25 2.87 3.12 3.13 ...
## Distribuição das estimativas
densityplot(
    ~ est | .id, data = L,
    panel = function(x, ...){
        panel.densityplot(x, ...)
        panel.abline(v = mean(x))
    },
    xlab = "Estimativa", ylab = "Densidade",
    strip = strip.custom(
        factor.levels = c(expression(hat(theta[1])),
                          expression(hat(theta[2]))))
)
```



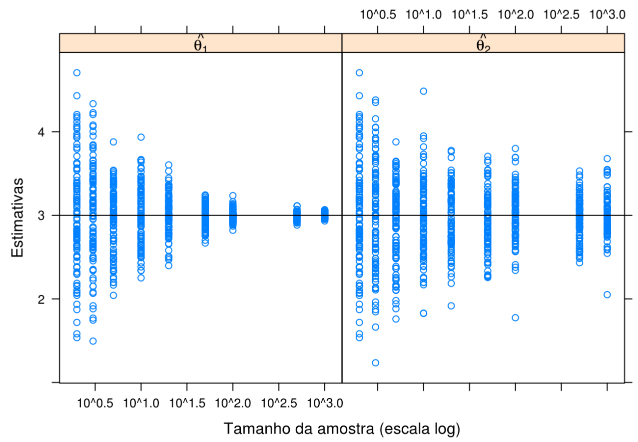



```
## Erro padrão das estimativas
tapply(L$est, L$.id, sd)
#       th1       th2
# 0.3232719 0.4263769
```

Pseudo-código 2

1. Simule amostras de tamanhos (n) 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000 da distribuição considerada
2. Para cada amostra de tamanho n, calcule a média ($\hat{\theta}_1$) e o ponto médio ($\hat{\theta}_2$)
3. Repita os passos (1) e (2) acima $N = 100$ vezes
4. Faça um gráfico das $N = 100$ estimativas de $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ para cada tamanho de amostra n e verifique seu comportamento

```
## Define valores
N <- 100
nval <- c(2, 3, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000)
## Calcula média para cada tamanho de amostra
set.seed(1)
th1 <- sapply(
    nval,
    function(n){
        replicate(N, mean(rnorm(n, mean = 3, sd = 1)))
    }
)
str(th1)
th1 <- stack(as.data.frame(th1))
levels(th1$ind) <- as.character(nval)
th1$ind <- as.numeric(as.character(th1$ind))
## Calcula ponto médio para cada tamanho de amostra
set.seed(1)
th2 <- sapply(
    nval,
    function(n){
        replicate(N, mean(range(rnorm(n, mean = 3, sd =
  1))))
    }
)
str(th2)
th2 <- stack(as.data.frame(th2))
levels(th2$ind) <- as.character(nval)
th2$ind <- as.numeric(as.character(th2$ind))
## Converte para data frame
L <- list(th1 = th1, th2 = th2)
L <- ldply(L)
L$.id <- factor(L$.id)
## Distribuição para cada tamanho de amostra
xyplot(
    values ~ ind | factor(.id), L,
    xlab = "Tamanho da amostra (escala log)", ylab = "E
  stimativas",
    strip = strip.custom(
        factor.levels =
            c(expression(hat(theta[1])),
              expression(hat(theta[2])))),
    scales = list(x = list(log = 10))) +
    layer(panel.abline(h = 3))
```



Exemplo 2

Considere uma amostra aleatória $(X_1, \dots, X_n)$ de uma variável aleatória

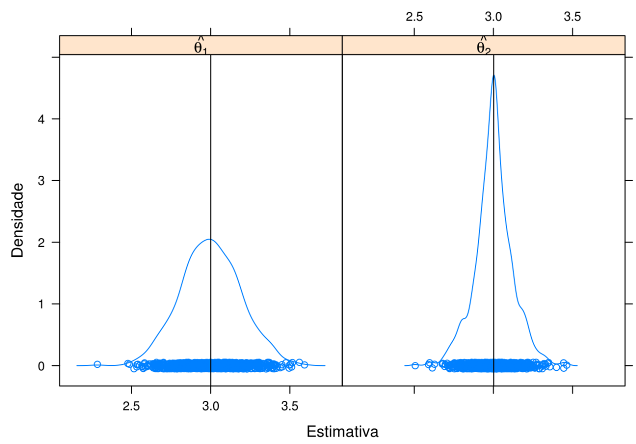
$Y \sim \text{U}(\min = 2, \max = 4)$(distribuição uniforme no intervalo [2,4]) e os estimadores pontuais para μ

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$

Qual dos dois estimadores pode ser considerado como o **melhor** para estimar a média de Y?

Pseudo-código 1

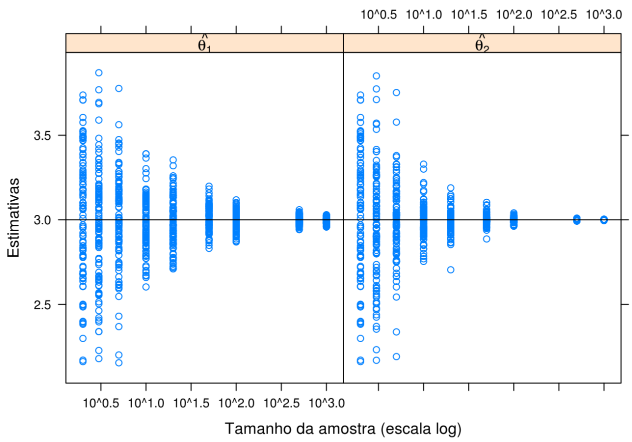
```
N <- 1000
n <- 10

set.seed(1)
th1 <- replicate(N, mean(runif(n, min = 2, max = 4)))
th2 <- replicate(N, mean(range(runif(n, min = 2, max =
  4))))

L <- list(th1 = data.frame(est = th1), th2 = data.frame
  (est = th2))
L <- ldply(L)
str(L)
# 'data.frame': 2000 obs. of  2 variables:
#  $ .id: chr  "th1" "th1" "th1" "th1" ...
#  $ est: num  3.1 3.12 2.84 3.06 3.21 ...

densityplot(
    ~est | .id, data = L,
    panel = function(x, ...){
        panel.densityplot(x, ...)
        panel.abline(v = mean(x))
    },
    xlab = "Estimativa", ylab = "Densidade",
    strip = strip.custom(
        factor.levels =
            c(expression(hat(theta[1])),
              expression(hat(theta[2])))))
```




```
tapply(L$est, L$.id, sd)
#       th1       th2
# 0.1902737 0.1205587
```

Pseudo-código 2

```
N <- 100
nval <- c(2, 3, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000)

set.seed(1)
th1 <- sapply(
    nval,
    function(n){
        replicate(N, mean(runif(n, min = 2, max = 4)))
    }
)
str(th1)
#  num [1:100, 1:9] 2.64 3.48 3.1 3.61 2.69 ...
th1 <- stack(as.data.frame(th1))
levels(th1$ind) <- as.character(nval)
th1$ind <- as.numeric(as.character(th1$ind))

set.seed(1)
th2 <- sapply(
    nval,
    function(n){
        replicate(N, mean(range(runif(n, min = 2, max =
  4))))
    }
)
str(th2)
#  num [1:100, 1:9] 2.64 3.48 3.1 3.61 2.69 ...
th2 <- stack(as.data.frame(th2))
levels(th2$ind) <- as.character(nval)
th2$ind <- as.numeric(as.character(th2$ind))

L <- list(th1 = th1, th2 = th2)
L <- ldply(L)
L$.id <- factor(L$.id)

xyplot(
    values ~ ind | .id, L,
    xlab = "Tamanho da amostra (escala log)", ylab = "E
  stimativas",
    strip = strip.custom(
        factor.levels =
            c(expression(hat(theta[1])),
              expression(hat(theta[2])))),
    scales = list(x = list(log = 10))) +
    layer(panel.abline(h = 3))
```



4 Distribuição amostral da média

```
##===================================================================
## Script Teorema do Limite Central - TLC
##===================================================================

set.seed(2014)
## Grafico de convergência de 4 distribuições de acordo
  com o TLC
# Normal(500, 1000)
norm <- rnorm(500, mean = 500, sd = 100)
# Uniforme[200,800]
unif <- runif(500, min = 200, max = 800)
# Exponencial(1)
expo <- rexp(500, rate = 1)
# Poisson(2)
pois <- rpois(500, lambda = 2)
# n amostral
n <- c(5, 25, 100)
# m = número de amostras aleatórias de tamanho n
m <- 500
# vetor temporario para receber os valores de média
temp <- numeric(m)

## Limites para cada distribuicao
xlim.norm <- c(150, 800)
xlim.unif <- c(200, 800)
xlim.expo <- c(0, 6)
xlim.pois <- c(0, 7)

## pdf("img/dist_amostrais.pdf", width = 8, height = 8)
par(mfrow = c(4, 4))
# Distribuição Normal
hist(norm, freq = TRUE, main = "População - N = 500",
     include.lowest = TRUE, right = FALSE, ylab = "Freq
  uência",
     col = "lightgray", xlab = "Normal", xlim = xlim.no
  rm)
for(i in 1:3){
    for(j in 1:m){
        temp[j] <- mean(sample(norm, size = n[i], repla
  ce = TRUE))
    }
    hist(temp, freq = TRUE, main = paste("n = ", n[i]),
         include.lowest = TRUE, right = FALSE, ylab = "
  Frequência",
         xlab = "Médias amostrais", xlim = xlim.norm)
}
# Distribuição Uniforme
hist(unif, freq = TRUE, main = "População - N = 500",
     include.lowest = TRUE, right = FALSE, xlim = xlim.
  unif,
     col = "lightgray", xlab = "Uniforme", ylab = "Freq
  uência")
for(i in 1:3){
    for(j in 1:m){
        temp[j] <- mean(sample(unif, size = n[i], repla
  ce = TRUE))
    }
    hist(temp, freq = TRUE, main = paste("n = ", n[i]),
         include.lowest = TRUE, right = FALSE, ylab = "
  Frequência",
         xlab = "Médias amostrais", xlim = xlim.unif)
}
# Distribuição Exponencial
hist(expo, freq = TRUE, main = "População - N = 500",
```

```
     include.lowest = TRUE, right = FALSE, xlim = xlim.expo,
     col = "lightgray", xlab = "Exponencial", ylab = "Frequência")
for(i in 1:3){
    for(j in 1:m){
        temp[j] <- mean(sample(expo, size = n[i], replace = TRUE))
    }
    hist(temp, freq = TRUE, main = paste("n = ", n[i]),
         include.lowest = TRUE, right = FALSE, ylab = "Frequência",
         xlab = "Médias amostrais", xlim = xlim.expo)
}
# Distribuição Poisson
hist(pois, freq = TRUE, main = "População - N = 500",
     include.lowest = TRUE, right = FALSE, xlim = xlim.pois,
     col = "lightgray", xlab = "Poisson", ylab = "Frequência")
for(i in 1:3){
    for(j in 1:m){
        temp[j] <- mean(sample(pois, size = n[i], replace = TRUE))
    }
    hist(temp, freq = TRUE, main = paste("n = ", n[i]),
         include.lowest = TRUE, right = FALSE, ylab = "Frequência",
         xlab = "Médias amostrais", xlim = xlim.pois)
}
par(mfrow = c(1, 1))
## dev.off()
```

5 Teste de hipótese de Monte Carlo

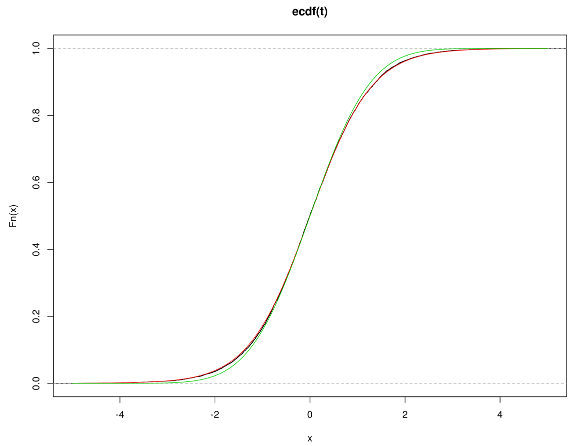
- **Erro Tipo I**: rejeitar H_0, quando H_0 é verdadeira.
- **Erro Tipo II**: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa.

Definimos por α e β as probabilidades de cometer os erros do tipo I e II:

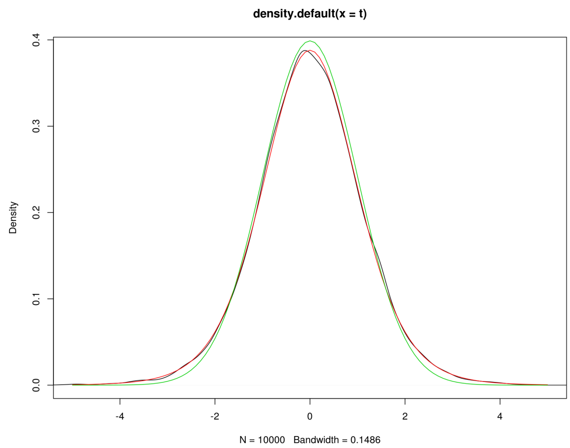
- $\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$
- $\beta = P(\text{error tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$

Cálculo da taxa empírica do erro do tipo I

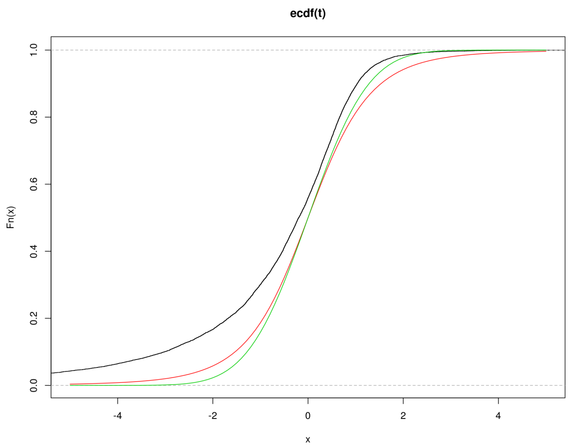
```
## Obtém o valor da estatística t do teste de Student p
  ara a média de
## uma população. Assume que a distribuição de X seja n
  ormal.
simula0 <- function(n, mu0, sig0){
    X <- rnorm(n, mean=mu0, sd=sig0)
    T <- (mean(X)-mu0)/(sqrt(var(X)/n))
    return(T)
}

simula0(n=10, mu0=0, sig0=1)
# [1] -0.2900813

t <- replicate(10000, simula0(n=10, mu0=0, sig0=1))

## Comparação por distribuições acumuladas.
plot(ecdf(t), xlim=c(-5, 5))
curve(pt(x, df=10-1), add=TRUE, col=2)
curve(pnorm(x), add=TRUE, col=3)
```




```
## Comparação pela densidade.
plot(density(t), xlim=c(-5, 5))
curve(dt(x, df=10-1), add=TRUE, col=2)
curve(dnorm(x), add=TRUE, col=3)
```



```
## p-valor da simulação.
sum(abs(t) >= qt(0.975, df=10-1))/length(t)
# [1] 0.0478

## Distribuição da estatística com afastamento dos pres
  supostos sobre a
## distribuição da população (X) que não tem distribuiç
  ão normal.
simula1 <- function(n, mu0=1){
    X <- rexp(n, 1)
    T <- (mean(X)-mu0)/(sqrt(var(X)/n))
    return(T)
}

## Tamanho da amostra da exponencial
n <- 5
t <- replicate(10000, simula1(n=n))

plot(ecdf(t), xlim=c(-5, 5))
curve(pt(x, df=n-1), add=TRUE, col=2)
curve(pnorm(x), add=TRUE, col=3)
```




```
## p-valor real vs nível se significância nominal.
sum(abs(t) >= qt(0.975, df=n-1))/length(t)
# [1] 0.1181

## O que aconteceria se o tamanho da amostra da exponan
  ecial fosse
## maior?
```