Trabalho Nº6 - Modelos Markovianos

Rafael Morciani | GRR20160217

14 de Setembro de 2020

Exercicio 1a

Desenvolvimento A

Da propriedade de Markov e da estacionariedade da sequência C_t onde t = 1, 2, 3, temos:

$$P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k) = P(C_1 = i).P(C_2 = j|C_1 = j).P(C_3 = k|C_2 = j) = \delta_i \gamma_{ij} \gamma_{jk}$$

Usando a propriedade de independência condicional, obtemos:

$$P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1|C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k) P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} p_i(0) p_j(2) p_k(1) \delta_i \gamma_{ij} \gamma_{jk},\ Onde\ p_l(s) = \frac{\lambda_l^s e^{-\lambda_l}}{s!},\ l \,\epsilon\, \{1, 2\}$$

Então temos:

$$(\delta_1\ \delta_2) = \frac{1}{0.9+0.4}(0.4\ 0.9) = (4/13\ 9/13)$$

E com o valor dos lambdas $\lambda_1 = 1\ e\ \lambda_2 = 3$ obtemos:

$$p_1(0) \approx 0,368\ ,\ p_1(2) \approx 0,184\ ,\ p_1(1) \approx 0.368$$

$$p_2(0) \approx 0,05\ ,\ p_2(2) \approx 0,224\ ,\ p_2(1) \approx 0,149$$

A tabela a seguir lista todas as sequências possíveis de estados e as respectivas probabilidades:

Observe que os valores da tabela podem ser usados para calcular a probabilidade condicional de cada sequência possível de estados, C_1, C_2, C_3 usando:

$P(C_1 = i, C_2 = j, C_3 = k|S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1)$

$= \frac{P(C_1=i,C_2=j,C_3=k,S_1=0,S_2=2,S_3=1)}{P(S_1=0,S_2=2,S_3=1)},\ para\ i,j,k\ \epsilon \{1,2\}$

Assim, a sequência de estados mais provável aqui é $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 1$ sua probabilidade condicional é dada por $\frac{0.003359}{0.007292} \approx 0.461$.

Exercicio 1b

Desenvolvimento B

$$P(S_1 = 0, S_2 = 2, S_3 = 1) = \delta \mathbf{P}(\mathbf{0})\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}(\mathbf{2})\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{P}(\mathbf{1})\mathbf{1}'$$

$$= (4/13 \ 9/13) \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0 & 0.050 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.184 & 0 \\ 0 & 0.0224 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.368 & 0 \\ 0 & 0.149 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 0.007292$$

Exercicio 3

Desenvolvimento A

Sabemos que se $X \sim P_0(\lambda)$ então $\mu = E(X) = Var(X) = \lambda$

$E(S_t) = \sum_{i=1}^{m} E(S_t \mid C_t = i)P(C_t = i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_i = \delta\lambda'$

Desenvolvimento B

Sabemos que se $X \sim P_0(\lambda)$ então $E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$.

Partindo desse fato temos:

$E(S_t^2) = \sum_{i=1}^{m} E(S_t^2 \mid C_t = i)P(C_t = i)$

$= \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + \lambda_i^2)\delta_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \delta_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \delta_i$

$= \lambda\mathbf{D}\lambda' + \delta\lambda'$

Exercicio 5

Desenvolver da seguinte forma: simule um HMM Poisson com três estados, $\lambda = (1, 5, 10)$ e mesma matriz de probabilidades de transição apresentada. Estime a função de autocorrelação da Cadeia de MArkov subjacente e interprete.

Desenvolvimento

Modelo gerado pela função *hmmspec* do pacote *mhsmm* com valores de Γ e $\lambda's$ solicitados:

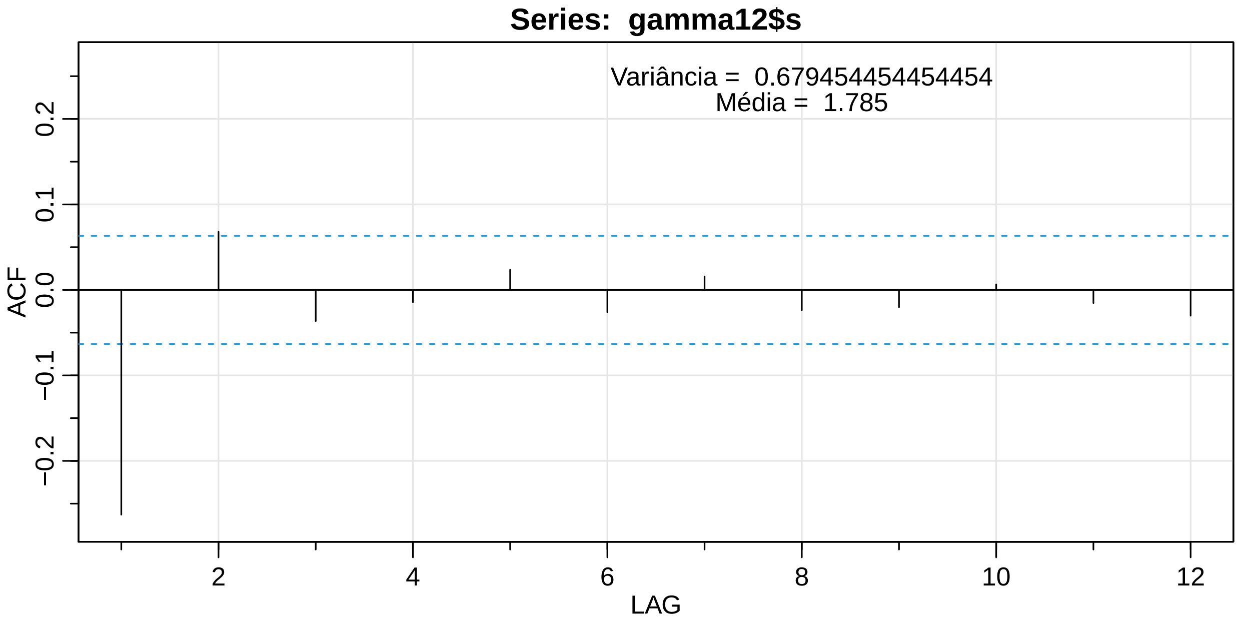
```
Hidden Markov Model specification:
J (number of states):
3
init:
[1] 0.3333 0.3333 0.3333
transition:
       [,1]   [,2]   [,3]
[1,] 0.3333 0.3333 0.3333
[2,] 0.6667 0.0000 0.3333
[3,] 0.5000 0.5000 0.0000
emission:
$lambda
[1]  1  5 10
```

$\lambda's$ estimados via simulação com 1000 repetições:

```
[1] 1.045
[1] 5.044
[1] 9.627
```

Plotando a função de autocorrelação da série simulada:

```
 [1] -0.26  0.07 -0.04 -0.01  0.02 -0.03  0.02 -0.02 -0.02  0.01 -0.02 -0.03
```



Sabemos que se $X \sim P(\lambda_i)$ então $Var(X) = E(X) = \lambda$. Os valores estimados da média e variância não são próximos, indicando que a cadeia pode ser uma mistura de séries. E como foi dado no enunciado, a distribuição é Poisson, ou seja, a cadeia foi obtida como mistura de três variáveis Poissons.