Introdução ao Cálculo de Probabilidades Lista 1

Evandro M. Melo
Victor J. Takara

Programa de verão de 2019

Combinatória

1. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com cinco alternativas por questão?

2. Sacam-se 3 cartas sucessivamente e sem reposição de um baralho comum (52 cartas). Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

3. De quantos modos é possível enfileirar 7 pessoas de modo que duas determinadas pessoas desse grupo não fiquem juntas?

4. Em um torneio no qual cada participante enfrenta todos os demais uma única vez, são jogadas 780 partidas. Quantos são os participantes?

5. Uma partícula, estando no ponto (x, y), pode mover-se para o ponto $(x + 1, y)$ ou para o ponto $(x, y + 1)$. De quantos modos a partícula pode, partindo do ponto $(0, 0)$, chegar ao ponto (a, b), com a e b positivos?

6. Uma fábrica produz 8 tipos de bombons. Eles são vendidos em caixas de 30 bombons de forma sortida (com repetição). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

7. De quantos modos é possível colocar 8 torres brancas em um tabuleiro de xadrez 8 x 8 de mood que nenhuma torre fique na diagonal branca e não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna?

8. Numa eleição com dois candidatos A e B, há 20 eleitores e o candidato A vence por 15 x 5. Quantas são as marchas da apuração nas quais o candidato A permanece em vantagem (nem sequer empata) desde o primeiro voto?

9. Calcule $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k$.

Probabilidade Discreta

1. Prove que, se os eventos A e B têm probabilidade positiva e são não disjuntos, então $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)$.

2. Se n bolas são colocadas aleatoriamente em n caixas, qual a probabilidade de que exatamente uma delas fique vazia?

3. Considere os eventos A, B e C, de modo que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6}$, , $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$. Calcule:
   (a) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$
   (b) $\mathbb{P}(A - (B \cup C))$
   (c) $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$

4. Uma mulher tem n chaves, das quais apenas uma abre a porta. Se ela testar usar as chaves aleatoriamente, sem descartar as chaves, qual a probabilidade dela abrir a porta em sua k-ésima tentativa? E se ela descartar as chaves utilizadas no processo?

5. Mostre que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

6. Sejam A e B eventos com $\mathbb{P}(A) = 0,7 e \mathbb{P}(B) = 0,6$. Determine os valores máximo e mínimo de $\mathbb{P}(A \cap B)$

7. Uma urna contém 1 bola branca e 1 bola verde. Uma bola é retirada da urna "ao acaso", registrando-se sua cor. Essa bola é devolvida à urna juntamente com n bolas da mesma cor da bola retirada da urna, $n \in N = \{0, 1, ...\}$. Em seguida, retira-se uma nova bola da urna "ao acaso", registrando-se sua cor. Seja $X_i = 1$, se a i-ésima bola retirada da urna é branca e $X_i = 0$, caso contrário, i = 1, 2. Obtenha $\mathbb{P}(X_1 \neq X_2)$

8. Um armário contém n pares de sapatos. Se 2r sapatos são escolhidos ao acaso $(2r < n)$, então, qual a probabilidade de que:
   (a) nenhum par esteja completo?
   (b) exatamente um par esteja completo?

9. Suponha que cada um dos n gravetos são quebrados em 2 partes, uma longa e uma curta. Dessa forma, as 2n partes são todas misturadas e, depois, combinadas em n pares.
   (a) Qual a probabilidade de todos os pares serem formados pelas suas respectivas partes originais?
   (b) Qual a probabilidade de que todas as partes longas formem pares com partes curtas?