Trabalho Nº3 - Modelos Markovianos

Willian Meira Schlichta - GRR20159077

18 de Agosto de 2020

Exercicio 1

Mostrar que se o estado x é recorrente e não se comunica com o estado y, então $\gamma_{x,y} = 0$

Resolução:

Seja $S(x, y)$ onde x é um estado recorrente e não se comunica com y, ou seja, $\rho_{x,x} = 1$ e $\rho_{x,y} = 0$.

Seja C_n uma Cadeia de Markov com espaço de estados S onde $N(y)$ é o número de vezes em que a cadeia permanece no espaço y, então:

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_y(C_n)$$

Também observamos que $N(y) \geq 1$ é o mesmo que $T_y < \infty$ logo:

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) = \rho_{x,y}$$

Temos que a probabilidade com a qual a cadeia começando em x visitar a primeira vez y no tempo m e visitar novamente no tempo n (onde m e n são inteiros positivos) é:

$$P_x(T_y = m).P_y(T_y = n)$$

Logo:

$$P_x(N(y) \geq 2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = m).P_y(T_y = n) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y = m)\right] . \left[\sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y = m)\right] = \rho_{x,x}\rho_{x,y} = 1{*}0 = 0$$

Exercicio 3

Mostre que se o estado x se comunica com y e y se comunica com z, então x se comunica com z.

Resolução:

Se x se comunica com y, então temos que $P_x(T_y = n) > 0$, para algum n finito. Pelo mesmo princípio, se y se comunica com z, então temos que $P_y(T_z = m) > 0$, para algum m finito.

Logo $P_x(T_z = m + n) > 0$, mostrando que x se comunica com z.

Exercicio 4

Considere uma Cadeia de Markov com espaço de estados $\{1, 2, ..., 9\}$ e matriz de probabilidades de transição

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Esta cadeia é irredutível? Ou seja, prove que o conjunto de estados irredutíveis F satisfaz $F = S$, sendo $S =\{1, ..., 9\}$. Prove também que esta cadeia é recorrente, ou seja, prove que cada estado em S é recorrente.

Resolução:

```
gamma4 <- matrix(c(0,0.5,0,0,0.5,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,rep(0,8),
                  rep(0,5),1,rep(0,3),rep(0,6),1,0,0,rep(0,7),1,0,rep(0,8),1,1,rep(0,8)), byrow=T, ncol
ProbT4 = new("markovchain", states=as.character(1:9), transitionMatrix=gamma4, name="Gamma")
```

Verificando o *summary* da cadeia:

```
summary(ProbT4)
```

```
Gamma  Markov chain that is composed by:
Closed classes:
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Recurrent classes:
{1,2,3,4,5,6,7,8,9}
Transient classes:
NONE
The Markov chain is irreducible
The absorbing states are: NONE
```

Pela saída do R temos que todos os estados se comunicam, logo a matriz é irredutível, com os estados sendo recorrentes, como mostra o **Teorema 17**.

Exercicio 6

A Fiscalía de Mídia identificou seis estados associados à televisão: 0 (nunca assiste TV), 1 (assiste apenas notícias), 2 (assiste TV com bastante frequência), 3 (viciado), 4 (em modificação de comportamento), 5 (morte encefálica). As transições de estado para estado podem ser modeladas como uma cadeia de Markov com a seguinte matriz de transição:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 1/3 & 0.0 & 0.0 & 1/3 & 1/3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

a) Quais estados são recorrentes e quais transientes.
b) Começando do estado 1, qual é a probabilidade de o estado 5 ser atingido antes do estado 0, ou seja, qual é a probabilidade de um visualizador de notícias acabar com morte cerebral?

Resolução 6.a: Com o auxílio do pacote *markovchain*, temos a seguinte informação:

```r
estadosy <- c("0","1","2","3","4","5")
y <- matrix(data = c(1.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 ,
0.5 , 0.0 , 0.5 , 0.0 , 0.0 , 0.0 ,
0.1 , 0.0 , 0.5 , 0.3 , 0.0 , 0.1 ,
0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.7 , 0.1 , 0.2 ,
1/3 , 0.0 , 0.0 , 1/3 , 1/3 , 0.0 ,
0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 0.0 , 1.0
), nrow=6,ncol=6,byrow=T, dimnames=list(estadosy,estadosy))
y
```

```
       0 1   2      3      4   5
0 1.0000 0 0.0 0.0000 0.0000 0.0
1 0.5000 0 0.5 0.0000 0.0000 0.0
2 0.1000 0 0.5 0.3000 0.0000 0.1
3 0.0000 0 0.0 0.7000 0.1000 0.2
4 0.3333 0 0.0 0.3333 0.3333 0.0
5 0.0000 0 0.0 0.0000 0.0000 1.0
```

```r
library(markovchain)
Proby = new("markovchain", states=estadosy, transitionMatrix=y)
transientStates(Proby)
```

```
[1] "1" "2" "3" "4"
```

```r
steadyStates(Proby)
```

```
     0 1 2 3 4 5
[1,] 0 0 0 0 0 1
[2,] 1 0 0 0 0 0
```

Logo, podemos observar que os estados 0 e 5 são recorrentes, enquanto os estados 1, 2, 3 e 4 são transientes.

Resolução 6.b:

Seja o teorema 19:

$f(x) = \sum_{y \in F} \gamma_{x,z} + \sum_{y \in St} \gamma_{x,y} f(y),\ x \in St$

$f(x) = \rho_{x,f},\ x \in St$

Queremos a probabilidade partindo do estado "1" chegando ao estado "5" antes de chegar ao estado "0", então toma-se F={5}.

Podemos tomar F={$5, 0$} e substrair $\gamma_{x,0},\ x \in St$

Então:

$f(1) = \gamma_{1,5} + \gamma_{1,1} f(1) + \gamma_{1,2} f(2) + \gamma_{1,3} f(3) + \gamma_{1,4} f(4)$

$f(2) = \gamma_{2,5} + \gamma_{2,1} f(1) + \gamma_{2,2} f(2) + \gamma_{2,3} f(3) + \gamma_{2,4} f(4)$

$f(3) = \gamma_{3,5} + \gamma_{3,1} f(1) + \gamma_{3,2} f(2) + \gamma_{3,3} f(3) + \gamma_{3,4} f(4)$

$f(4) = \gamma_{4,5} + \gamma_{4,1} f(1) + \gamma_{4,2} f(2) + \gamma_{4,3} f(3) + \gamma_{4,4} f(4)$

com isso temos:

$f(1) = 0.5 f(2)$

$f(2) = 0.5 f(2) + 0,3 f(3) + 0,1$

$f(3) = 0.7 f(3) + 0,1 f(4) + 0,2$

$f(4) = \frac{1}{3} f(3) + \frac{1}{3} f(4)$

Resolvendo o sistema, temos:

$f(1) = 0,34\ f(2) = 0,68\ f(3) = 0,8\ f(4) = 0,4$

Como $f(x) = \rho_{x,f}$,

Temos: $f(1) = \rho_{1,5} = 0,34$

Para encontrarmos a probabilidade de que assintoticamente pelo R, partindo de determinado estado, o visualizador atinja determinado estado antes de entrar no estado absorvente, podemos utilizar uma potência elevada da matriz de transição:

```r
require(expm)
y %^% 10000
```

```
     0 1 2 3 4    5
0 1.00 0 0 0 0 0.00
1 0.66 0 0 0 0 0.34
2 0.32 0 0 0 0 0.68
3 0.20 0 0 0 0 0.80
4 0.60 0 0 0 0 0.40
5 0.00 0 0 0 0 1.00
```

Portanto, podemos perceber que, partindo do estado 1, o visualizador terá probabilidade de 0.34 de atingir o estado 5 antes que caia no estado 0.