

5º CE231 - Modelos Markovianos

Modelos Ocultos de Markov - I Fundamentos

Willian Meira Schlichta GRR20159077

02 de Setembro de 2020

Exercicio 1

Seja X uma variável aleatória com distribuição uma mistura de duas distribuições com esperanças μ_1, μ_2 e variância σ_1^2, σ_2^2 , respectivamente, onde os parâmetros de mistura são δ_1 e δ_2 com $\delta_1 + \delta_2 = 1$

a) Prove que $Var(X) = \delta_1\sigma_1^2 + \delta_2\sigma_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1 - \mu_2)^2$.

Resolução

$$E(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i E(x_i)$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^2 \delta_i E(x_i) = \delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^n \delta_i E(x_i^2)$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^2 \delta_i E(x_i^2) = \delta_1 E(x_1^2) + \delta_2 E(x_2^2)$$

$$\delta_i^2 = E(x_i^2) - \mu_i^2$$

Temos que:

$$E(x_i^2) = \delta_i^2 + \mu_i^2$$

$$E(x^2) = \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_2(\delta_2^2 + \mu_2^2)$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_2(\delta_2^2 + \mu_2^2) - (\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2)^2 = \delta_1(\delta_1^2 + \mu_1^2) + \delta_2(\delta_2^2 + \mu_2^2) - \delta_1^2\mu_1^2 - 2\delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 - \delta_2^2\mu_2^2 = \\ &= \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\mu_1^2 + \delta_2\mu_2^2 - \delta_1^2\mu_1^2 - 2\delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 - \delta_2^2\mu_2^2 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\mu_1^2 + (1 - \delta_1) + \delta_2\mu_2^2(1 - \delta_2) - 2\delta_1 = \\ &= \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2\mu_1^2 + \delta_1\delta_2\mu_2^2 - 2\delta_1\delta_2\mu_1 - \mu_2 = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1\mu_2) = \delta_1\delta_1^2 + \delta_2\delta_2^2 + \delta_1\delta_2(\mu_1 + \mu_2) = \\ &= Var(X) \end{aligned}$$

b) Mostre que a mistura de duas distribuições Poisson, $P(\lambda_1), P(\lambda_2)$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, é superdispersa, ou seja, $VAR(X) > E(X)$.

Resolução

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \delta_i E(X_i) = \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n \delta_i E(X_i^2) = \delta_1 E(X_1^2) + \delta_2 E(X_2^2)$$

Distribuição de Poisson $\sim Var(X) = E(X) = \lambda$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2\lambda_i = E(X_i^2) - \lambda_i^2 \rightarrow E(X_i^2) = \lambda_i + \lambda_i^2$$

$$E(X^2) = \delta_1(\lambda + \lambda_1^2) + \delta_2(\lambda + \lambda_2^2)$$

$$\begin{aligned} Var(X)\delta_1(\lambda + \lambda_1^2) + \delta_2(\lambda + \lambda_2^2) - (\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2)^2 &= \delta_1\lambda_1 + \delta_1\lambda_1^2 + \delta_2\lambda_2 + \delta_2\lambda_2^2 - \delta_1^2\lambda_1^2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 - \delta_2^2\lambda_2^2 = \\ &= \delta_1\lambda_1^2(1 - \delta_1) + \delta_2\lambda_2^2(1 - \delta_2) + \delta_2\lambda_2 + \delta_2\lambda_2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 = \delta_1\delta_2\lambda_1^2 + \delta_1\delta_2\lambda_2^2 + \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 - 2\delta_1\delta_2\lambda_1\lambda_2 = \\ &= \delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + \delta_1\delta_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

Então

$$\delta_1\lambda_1 + \delta_2\lambda_2 + \delta_1\delta_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > \delta_1\lambda_1 + \delta_1\lambda_2$$

Para:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0 \text{ uma vez que } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Exercício 3

Considere uma Cadeia de Markov estacionária de dois estados e matriz de probabilidades de transição dada por

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

a) Mostre que a distribuição estacionária é

$$(\pi(1), \pi(2)) = \frac{1}{\gamma_{1,2} + \gamma_{2,1}} (\gamma_{2,1}, \gamma_{1,2})$$

Resolução

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Do item 2.1: $\pi(I - G + U) = 1$

$$[\pi(1) \quad \pi(2)] \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = [1 \quad 1]$$

$$\{\pi(1)(2 - a) + \pi(2)(1 - c) = 1$$

$$\{\pi(1)(1 - b) + \pi(2)(1 - d) = 1$$

$$\pi(1) = \frac{1 - \pi(2)(1 - c)}{(2 - a)}$$

$$\frac{(1 - \pi(2)(1 - c))(1 - b)}{(2 - a)} + \pi(2)(2 - d) = 1$$

$$(1 - b)(1 - \pi(2)(1 - c)) + (2 - a)(2 - b)\pi(2) = (2 - a)$$

$$(1 - b)(1 - \pi(2)(1 - c)) + (1 + b)(1 + c)\pi(2) = (1 + b)$$

$$(1 - b)(1 - b)(1 - c)\pi(2) + (1 + b)(1 + c)\pi(2) = (1 + b)$$

$$\pi(2)(-1 + b - 1 + c + 1 + b + 1 + c) = 1 + b - 1 + b$$

$$\pi(2)(2b + 2c) = 2b$$

$$\pi(2) = \frac{2b}{2b + 2c} = \frac{b}{b + c}$$

$$\text{Sabemos que } \pi(1) + \pi(2) = 1$$

Logo:

$$\pi(1) = -1 \frac{b}{b + c} = \frac{b + c - b}{b + c} = \frac{c}{b + c}$$

$$\pi(1) = \frac{c}{b + c}, \pi(2) = \frac{b}{b + c}$$

Assim:

$$(\pi(1), \pi(2)) = \frac{1}{b + c} (c, b) \text{ onde } b = \gamma_{1,2} \text{ e } c = \gamma_{2,1}$$

b) Considere o caso:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

e as duas seqüências de observações seguintes, que se supõe serem geradas pela Cadeia de Markov acima

Sequencia 1: 1 1 1 2 2 1

Sequencia 2: 2 1 1 2 1 1

Calcule a distribuição estacionária de cada uma das sequências. Note que cada sequência contém o mesmo número de uns e dois. Porquê estas sequências não são igualmente prováveis?

Resolução

Distribuição estacionária de Γ :

	1	2
[1,]	0.6666667	0.3333333

Distribuição estacionária da matriz de transição gerada pela Sequência 1:

	1	2
[1,]	0.6	0.4

Distribuição estacionária da matriz de transição gerada pela Sequência 2:

	1	2
[1,]	0.75	0.25

As sequências não são igualmente prováveis pois pela distribuição estacionária da matriz Γ que gerou ambas sequências, a probabilidade de iniciar no estado 1 ($\frac{2}{3}$) é maior do que iniciar no estado 2 ($\frac{1}{3}$).

Exercicio 7

Exemplo em Bisgaard and Travis (1991). Considere a seguinte sequência de 21 observações, assumidas como resultantes de uma Cadeia de Markov homogênea de dois estados

11101 10111 10110 11111 1

a) Estimar a matriz de probabilidades de transição por máxima verossimilhança condicionada à primeira observação.

Resolução

MLE Fit

A 2 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:

0, 1

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

0 1

0 0.00 1.00

1 0.25 0.75

Exercício 9

Exemplo em Singh (2003). Considere a seguinte, muito curta, sequência de ADN:

AACGT CTCTA TCATG CCAGG ATCTG

Ajuste uma Cadeia de Markov homogênea a estes dados por:

a) Máxima verossimilhança condicionada à primeira observação;

Resolução

MLE Fit

A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:

A, C, G, T

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

	A	C	G	T
A	0.1666667	0.1666667	0.1666667	0.5000000
C	0.2857143	0.1428571	0.1428571	0.4285714
G	0.2500000	0.2500000	0.2500000	0.2500000
T	0.1428571	0.5714286	0.2857143	0.0000000

MLE Fit⁵⁰⁰

A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:

A, C, G, T

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

	A	C	G	T
A	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
C	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
G	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
T	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227

Sendo assim a matriz de probabilidades de transição por máxima verossimilhança condicionada:

MLE Fit⁶⁰⁰

A 4 - dimensional discrete Markov Chain defined by the following states:

A, C, G, T

The transition matrix (by rows) is defined as follows:

	A	C	G	T
A	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
C	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
G	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227
T	0.212297	0.2923434	0.2111369	0.2842227