4.25

因為 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{da}} = \sigma(1-\sigma)$, 我們可以求$\sigma$微分後在 a=0 的值為$\sigma(0)\big(1-\sigma(0)\big) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 。

另外因為累計分布函數微分後相當於機率密度函數，即 $\lambda N(0|0,1) = \lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\lambda\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{4}$ => $\lambda = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ => $\lambda^2 = \frac{\pi}{8}$

4.26

先將右邊 $\Phi(\frac{\mu}{(\lambda^{-2}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}})$ 對 μ 微分得到 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$以及$\frac{\mu}{(\lambda^{-2}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$ 對 μ 微分的 $\frac{1}{(\lambda^{-2}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$，因負無限大代入為 0，剩下 x = $\frac{\mu}{(\lambda^{-2}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$ 代入得到

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{\mu^2}{2(\lambda^{-2}+\sigma^2)}}\frac{1}{(\lambda^{-2}+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}$

左邊的部分令 $a = \mu + \sigma z$，代入並將高斯分布寫出來後得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda\mu + \lambda\sigma z)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz$$

用同樣方式將對μ 微分得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ e^{-\frac{1}{2}z^2-\frac{\lambda^2}{2}(\mu+\sigma z)^2}\ \sigma\ dz$$

將$-\frac{1}{2}z^2 - \frac{\lambda^2}{2}(\mu+\sigma z)^2$配方法後對 z 積分可得到

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2\sigma^2)}}e^{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda^4\mu^2\sigma^2}{(1+\lambda^2\sigma^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2\sigma^2)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2\mu^2}{(1+\lambda^2\sigma^2)}}$$

左右兩邊對μ微分後相同

將μ=−∞代入兩邊式子發現均為 0，故積分後的常數項也為 0，可知兩式相等。