INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

6 - RELAÇÕES DE ORDENAMENTO

6.1) Conjuntos parcialmente ordenados (posets)

6.2) Extremos de posets

6.3) Reticulados

6.4) Álgebras Booleanas Finitas

Ordenamentos parciais

- Algumas relações são usadas para ordenar elementos de conjuntos (alguns ou todos):
  - ordenamos palavras usando xRy, onde x vem antes de y no dicionário
  - fazemos a programação de um projeto com xRy, onde x e y são tarefas tais que x deve ser concluída antes de y começar
- Quando adicionamos todos os pares (x, x), obtemos uma relação que é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

ORDENAMENTOS PARCIAIS

- **Ordenamento Parcial**: relação R sobre um conjunto A que é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
  - Reflexividade: $(a, a) \in R, \quad \forall a \in A$
  - Antissimetria: $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R \rightarrow a = b$
    - para $a \neq b$: ou $(a, b) \notin R$ ou $(b, a) \notin R$
  - Transitividade: $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$
- Um conjunto A, junto com seu Ordenamento Parcial R é chamado de **conjunto parcialmente ordenado (poset)**.
  - Denotado por (A, R).

ORDENAMENTOS PARCIAIS

- **Exemplo1**: A relação $\leq$ é um ordenamento parcial sobre o conjunto dos inteiros (assim como $\geq$).
  - $\leq$ = { $(n_1, n_2) \in Z \times Z \mid n_1$ "é menor ou igual a" n_2 }
    - $a \leq a$ para todo inteiro a $\Rightarrow$ $\leq$ é reflexiva
    - se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ $\Rightarrow$ $\leq$ é antissimétrica
    - se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ $\Rightarrow$ $\leq$ é transitiva
  - conclui-se que $\leq$ é um ordenamento parcial sobre o conjunto dos inteiros e $(Z, \leq)$ é um poset $\square$

POSETS - EXEMPLOS

- **Exemplo2**: A relação de divisibilidade ($a \; R \; b$ se e somente se $a \mid b$) é um ordenamento parcial sobre Z^+.
  - Ela é reflexiva, antissimétrica e transitiva.
  - Conclui-se que $(Z^+, |)$ é um poset. $\square$

POSETS - EXEMPLOS

- **Exemplo3**: A relação de inclusão, ($\subseteq$) é um ordenamento parcial sobre o conjunto $P(S)$ (= "todos os subconjuntos de S").
  - $\subseteq \; = \; \{(S_1, S_2) \in P(S) \times P(S) \mid S_1 \subseteq S_2\}$
  - Seja $S_1 \in P(S)$:
    - como $S_1 \subseteq S_1$, $\subseteq$ é reflexiva
    - $\subseteq$ é antissimétrica, pois:
      $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1 \;\; \rightarrow \;\; S_1 = S_2$
    - $\subseteq$ é transitiva, pois:
      $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_3 \;\; \rightarrow \;\; S_1 \subseteq S_3$
  - Portanto, $(P(S), \subseteq)$ é um poset. $\square$

POSETS - EXEMPLOS

- **Exemplo4**: Seja W o conjunto de todas as relações de equivalência sobre um conjunto A.
  - W consiste de subconjuntos de $A \times A$
  - Então W é um poset (sob o ordenamento parcial de inclusão)
  - Se R e S são relações de equivalência sobre A, o mesmo pode ser expresso como:
    - $R \subseteq S$ se e somente se $x\ R\ y \Rightarrow x\ S\ y$ para todo $x, y\ em\ A$
  - Então $(W, \subseteq)$ é um poset. $\square$

POSETS - EXEMPLOS

- **Exemplo5**: A relação $<$ sobre Z^+ não é um ordenamento parcial, pois não é reflexiva. $\square$

Inversas e duais

- **Exemplo6**: A relação inversa R^{-1} de um ordenamento parcial R sobre um conjunto A também é um ordenamento parcial.
  - Se R é reflexiva, simétrica e transitiva, então:
    - $\Delta \subseteq R$
    - $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$
    - $R^2 \subseteq R$
  - R^{-1} também é um poset, pois, tomando inversas, vêm:
    - $\Delta^{-1} = \Delta \subseteq R^{-1}$
    - $R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq \Delta$
    - $(R^{-1})^2 \subseteq R^{-1}$ $\square$
- Nota: (A, R^{-1}) é o **poset dual** de (A, R).
  - O ordenamento parcial R^{-1} é o **dual** de R.
  - Exemplo de posets duais: $(Z, \leq)$ e $(Z, \geq)$

Convenção

- O símbolo "$\leq$" vai denotar qualquer relação de ordem parcial.
  - Não apenas as do tipo "menor ou igual".
  - Propriedades ficam mais familiares.
  - Mas, em geral, os posets não terão nada em comum entre si, ou com a relação "$\leq$" usual.
    - Quando necessário, usaremos algo como "$\leq_1$" ou "$\leq'$"
- Sempre usaremos o símbolo $\geq$ para o ordenamento parcial $\leq^{-1}$
- A notação $a < b$ significa "$a \leq b$, mas $a \neq b$".

Comparabilidade

- Quando a e b são elementos do poset $(A, \leq)$, não é necessário que ocorra sempre $a \leq b$ ou $b \leq a$.

- **Exemplo**: em $(Z, |)$, 2 não está relacionado com 3 e nem 3 com 2.

COMPARABILIDADE

- Os elementos a e b de um poset $(A, \leq)$ são **comparáveis** se ou $a \leq b$ ou $b \leq a$.
    - Se nem $a \leq b$ nem $b \leq a$, a e b são ditos **incomparáveis**.

- **Exemplo**: No poset $(Z+, |)$, 3 e 9 são comparáveis? E 5 e 7?
    - Os inteiros 3 e 9 são comparáveis, pois $3 \mid 9$.
    - Já os inteiros 5 e 7 são incomparáveis, pois $5 \not| 7$ e $7 \not| 5$.

ORDENAMENTOS PARCIAIS

- O adjetivo “parcial” é usado porque pode haver pares de elementos incomparáveis.
- Se todos os elementos em um poset $(A, \leq)$ são comparáveis, o conjunto A é dito **totalmente ordenado**.
  - E o ordenamento parcial é chamado de **ordenamento linear**.
  - Neste caso, diz-se também que A é uma **cadeia**.

ORDENAMENTOS TOTAIS

- **Exemplo1**: O poset $(Z, \leq)$ é totalmente ordenado, pois $a \leq b$ ou $b \leq a$ sempre que a e b são inteiros.

- **Exemplo2**: O poset $(Z+, |)$ não é totalmente ordenado, pois ele contém elementos incomparáveis (por ex., 5 e 7).

TEOREMA (1/3)

- **Teorema**: Se $(A, \leq_1)$ e $(B, \leq_2)$ são posets, então $(A \times B, \leq_3)$ também é um poset, com ordenamento parcial definido por:

  $$(a,b) \leq_3 (a',b') \quad \text{se} \quad a \leq_1 a' \ \text{em } A \quad \text{e} \quad b \leq_2 b' \ \text{em } B$$

- **Prova**: mostrar que $\leq_3$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva (1/3):
  - Reflexividade: se $(a,b) \in A \times B$, então $(a,b) \leq_3 (a,b)$, pois $a \leq_1 a$ em A e $b \leq_2 b$ em B

TEOREMA (2/3)

- $\leq_3$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva (2/3):
  - Antissimetria: suponha que $(a, b) \leq_3 (a', b')$ e que $(a', b') \leq_3 (a, b)$, com $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$. Então:
    - em A: $a \leq_1 a'$ e $a' \leq_1 a \Rightarrow a = a'$
    - em B: $b \leq_2 b'$ e $b' \leq_2 b \Rightarrow b = b'$
    - ou seja, $(a, b) \in \leq_3$ e $(b, a) \in \leq_3 \Rightarrow a = b$

TEOREMA (3/3)

- $\leq_3$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva (2/3):
  - Transitividade: suponha $(a, b) \leq_3 (a', b')$ e $(a', b') \leq_3 (a'', b'')$.
    - Pela propriedade transitiva da ordem parcial em A:
    $$a \leq_1 a' \quad \text{e} \quad a' \leq_1 a'' \quad \Rightarrow \quad a \leq_1 a''$$
    - Pela propriedade transitiva em B:
    $$b \leq_2 b' \quad \text{e} \quad b' \leq_2 b'' \quad \Rightarrow \quad b \leq_2 b''$$
    - logo:
    $$(a, b) \leq_3 (a', b') \quad \text{e} \quad (a', b') \leq_3 (a'', b'') \quad \Rightarrow \quad (a, b) \leq_3 (a'', b'')$$
- Conclusão: $(A \times B, \leq_3)$ é um poset. $\square$

ORDENAMENTOS LEXICOGRÁFICOS

- Uma ordem parcial $\leq$ definida sobre o produto cartesiano como acima é chamada de **ordem parcial produto**.

- Sejam os posets $(A, \leq_1)$ e $(B, \leq_2)$. Define-se a **ordem lexicográfica** (ou “dicionário”) sobre $A \times B$, denotada por $\prec$, como:

  $(a, b) \prec (a', b')$ se: $a <_1 a'$ em A
  ou se: $a = a'$ em A e $b \leq_2 b'$ em B

  - “O ordenamento dos elementos na primeira variável domina, exceto no caso de coincidir, quando a atenção passa para a 2a. variável”.

ORDENAMENTOS LEXICOGRÁFICOS

- A ordem lexicográfica pode ser estendida para os produtos cartesianos $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ como:

  $(a_1, a_2, ..., a_n) < (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ se e somente se:

  $a_1 < a'_1$ ou

  $a_1 = a'_1$ e $a_2 < a'_2$ ou

  $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$ e $a_3 < a'_3$ ou ...

  $\vdots$

  $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, $\ldots$, $a_{n-1} < a'_{n-1}$ e $a_n \leq a'_n$

  - "A 1ra coordenada domina, exceto para igualdade, caso em que se considera a 2a coordenada - e assim por diante".

ORDENAMENTOS LEXICOGRÁFICOS

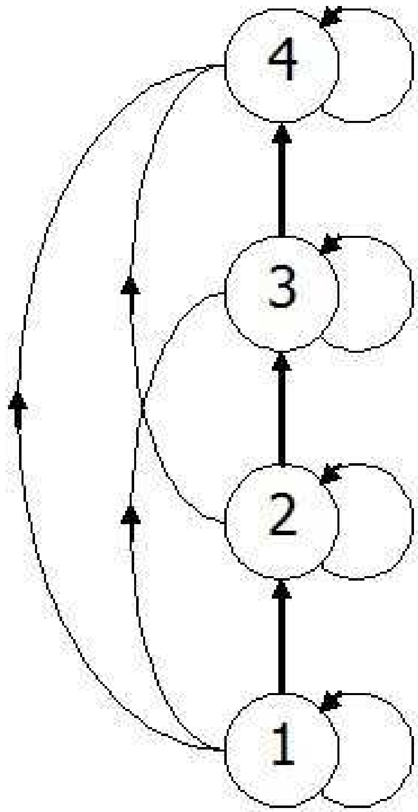
- **Exemplo**: Seja $S = \{a, b, c, ..., z\}$ o alfabeto comum, ordenado da forma usual.
- Então S^n pode ser identificado como o conjunto de todas as palavras de comprimento n.
- Uma ordem lexicográfica sobre S^n tem a propriedade de que, se $w1 \prec w2$, então w1 precederia w2 em uma listagem de dicionário.
- Portanto:
  - livre $\prec$ livro
  - firma $\prec$ forma
  - carro $\prec$ carta.

DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- Posets são relações e pode-se sempre desenhar seus dígrafos.
- No entanto, muitas arestas não precisam ser mostradas, já que devem necessariamente estar presentes (dígrafo sempre reflexivo e transitivo).
- Pode-se retirar as arestas que sempre devem estar presentes.
- As estruturas obtidas desta forma são chamadas de **Diagramas de Hasse** dos posets.

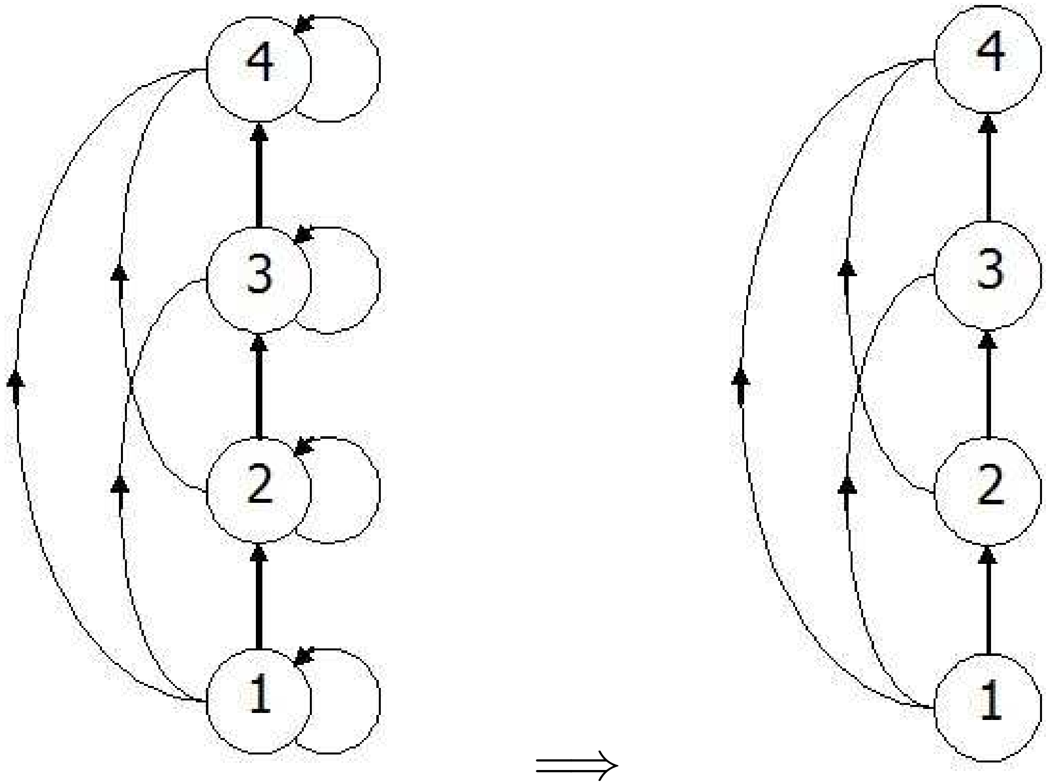
DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- **Exemplo1**: Considere o dígrafo da ordem parcial, sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dado por $\leq = \{(a, b) \in A \times A \mid a \leq b\}$:



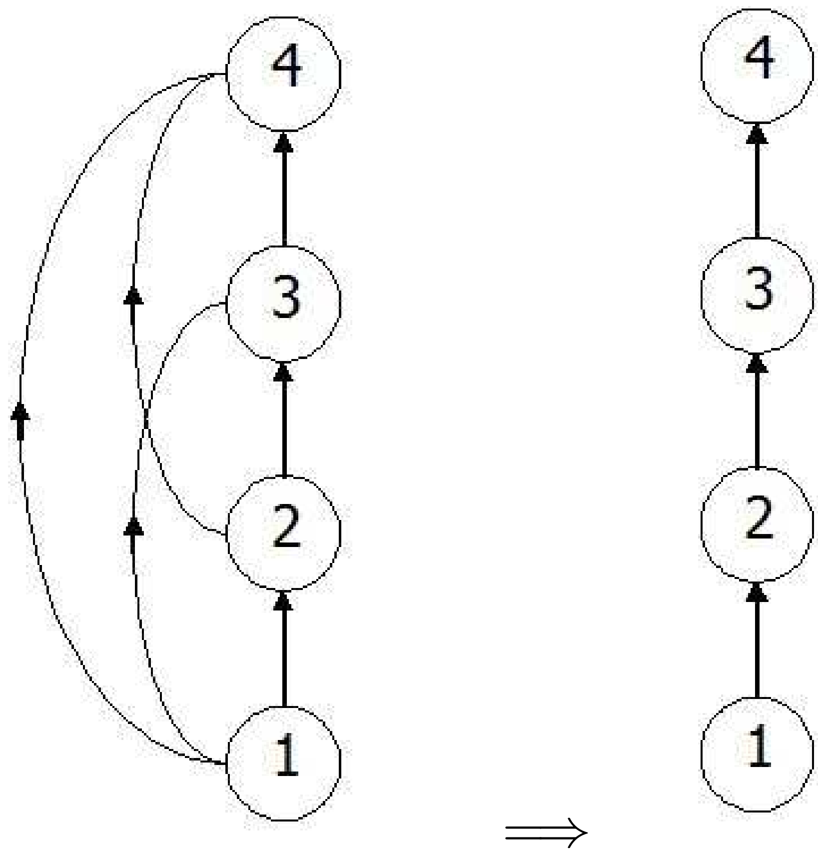
DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- Esta relação é uma ordem parcial $\Rightarrow \leq$ é automaticamente reflexiva $\Rightarrow$ possui vértices em todos os loops $\Rightarrow$ os loops podem ser omitidos:



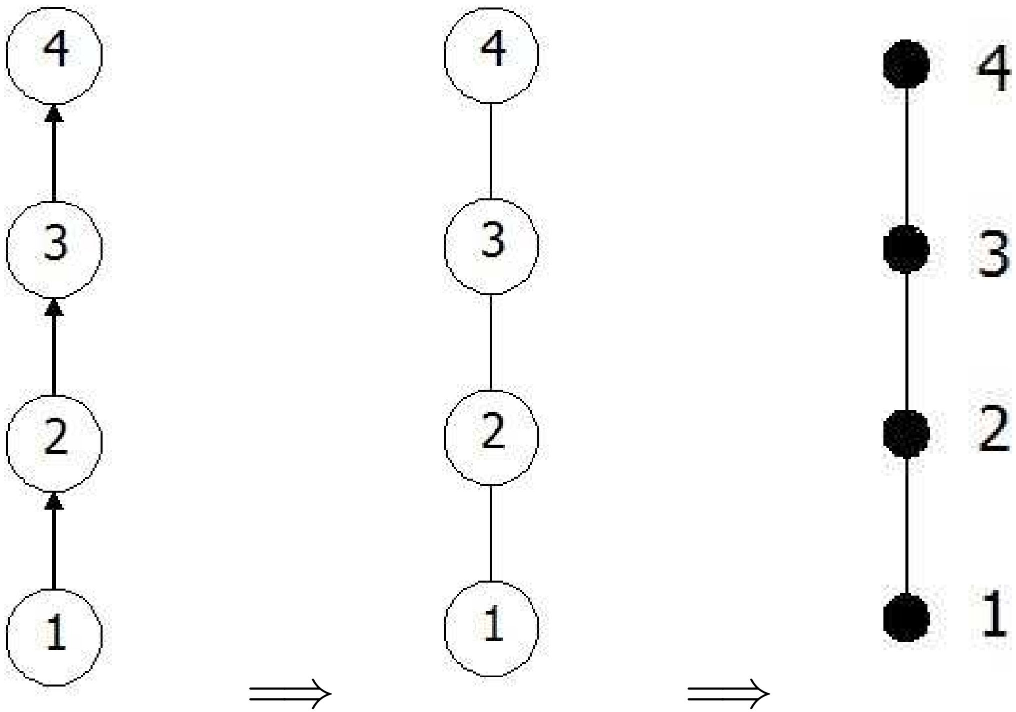
DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- Esta relação é uma ordem parcial $\Rightarrow \leq$ é automaticamente transitiva $\Rightarrow$ as arestas presentes por causa da transitividade não precisam ser mostradas:



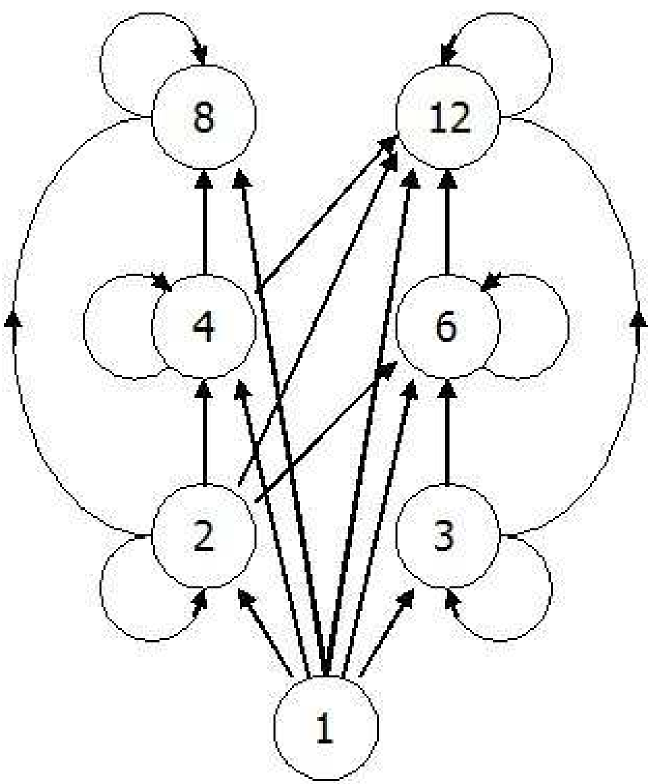
Diagramas de Hasse de Posets

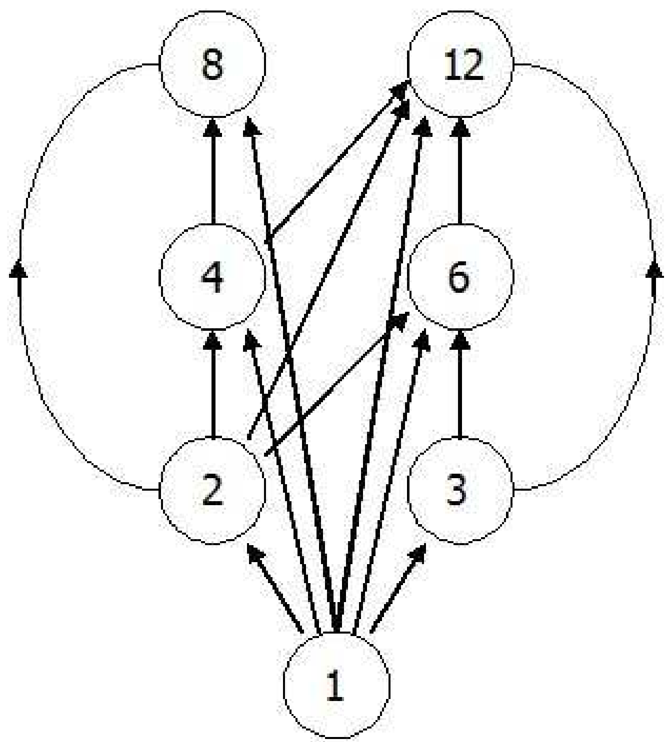
- Ainda, assumindo-se que se desenhe todas as arestas apontadas para cima, pode-se omitir a sua orientação.
- Finalmente, substitui-se os círculos por pontos:



DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- **Exemplo2**: Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. A ordem parcial é a de divisibilidade sobre A (ou seja, $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$).
  - Desenhe o diagrama de Hasse do poset $(A, \leq)$.





POSETS - DEFINIÇÕES

- Se $(A, \leq)$ é um poset e $a, b \in A$, então:
  1. Se $a \leq b$, diz-se que “a **precede** b”
  2. Se $a < b$, diz-se que “a **precede** b **estritamente**”
  3. Se $a \geq b$, diz-se que “a **sucede** b”
  4. Se $a > b$, diz-se que “a **sucede** b **estritamente**”

- Seja $(A, \leq)$ um poset e $a, b \in A$. Diz-se que a é um **predecessor imediato** de b e b é um **sucessor imediato** de a se $a < b$ mas não existe nenhum elemento $c \in A$ tal que $a < c < b$
  - escreve-se: $a \angle b$

POSETS - DEFINIÇÕES

- Diz-se $a < b$ se $a \leq b$ com $a \neq b$.
- Se $\leq$ é uma ordem parcial, então "$\geq$" denota a relação $\leq^{-1}$
  - a **ordem parcial inversa** de $\leq$

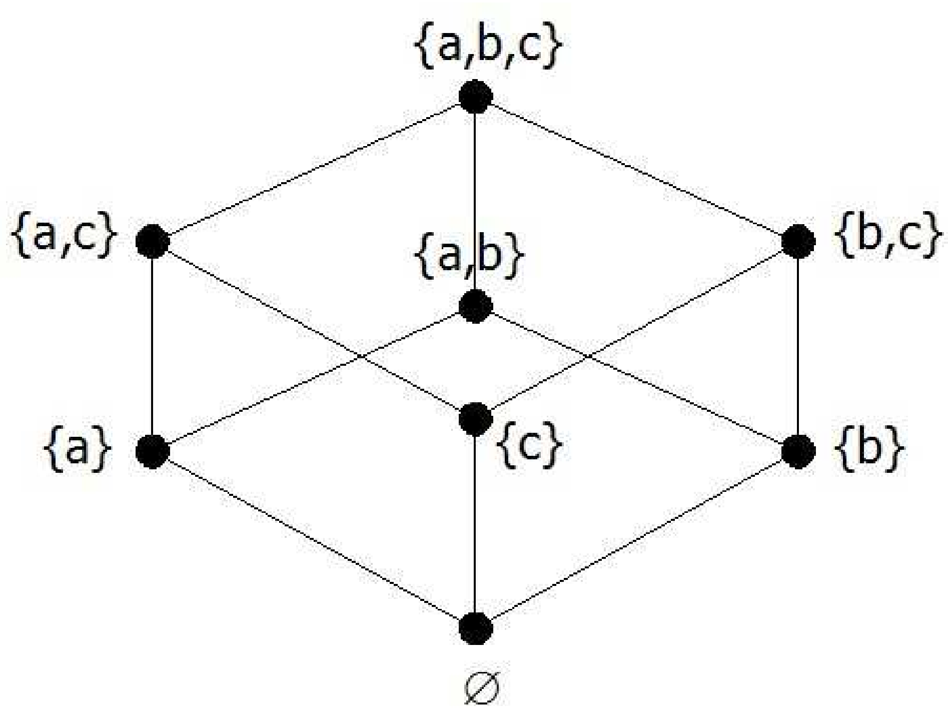
Diagramas de Hasse de Posets

- **Outra maneira** de construir o Diagrama de Hasse de um poset:
- O Diagrama de Hasse de um poset $(A, \leq)$ é o dígrafo no qual os vértices são elementos de A.
  - Existe aresta de um vértice a para um vértice b sempre que $a \angle b$.
- Então:
  - Ao invés de desenhar uma seta de a para b, coloca-se b mais alto do que a e desenha-se uma linha entre eles.
  - Fica subentendido que o movimento para cima indica sucessão.
  - No diagrama de Hasse existe um caminho orientado de um vértice x para um vértice y se e somente se $x \angle y$.

DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- **Exemplo1**: Seja $S = \{a, b, c\}$ e seja $A = 2^S$ (o conjunto de todas as partes de S). Desenhe o diagrama de Hasse do poset $(A, \subseteq)$.

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

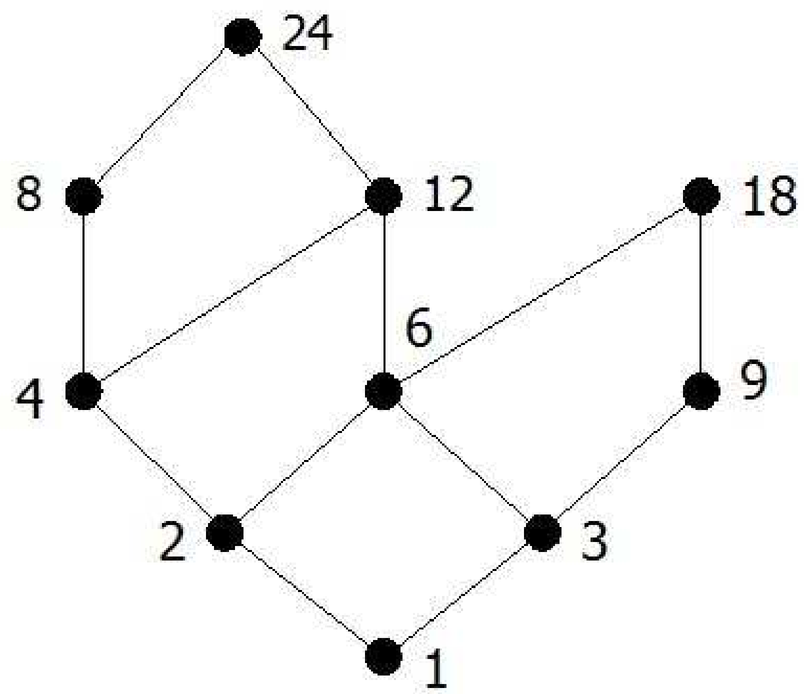


DIAGRAMAS DE HASSE DE POSETS

- **Procedimento**:
  - Eliminar loops
  - Eliminar arestas ligadas à transitividade:
    - $(\emptyset, \{a, b\})$
    - $(\emptyset, \{a, c\})$
    - $(\emptyset, \{b, c\})$
    - $(\emptyset, \{a, b, c\})$
    - $(\{a\}, \{a, b, c\})$
    - $(\{b\}, \{a, b, c\})$
    - $(\{c\}, \{a, b, c\})$

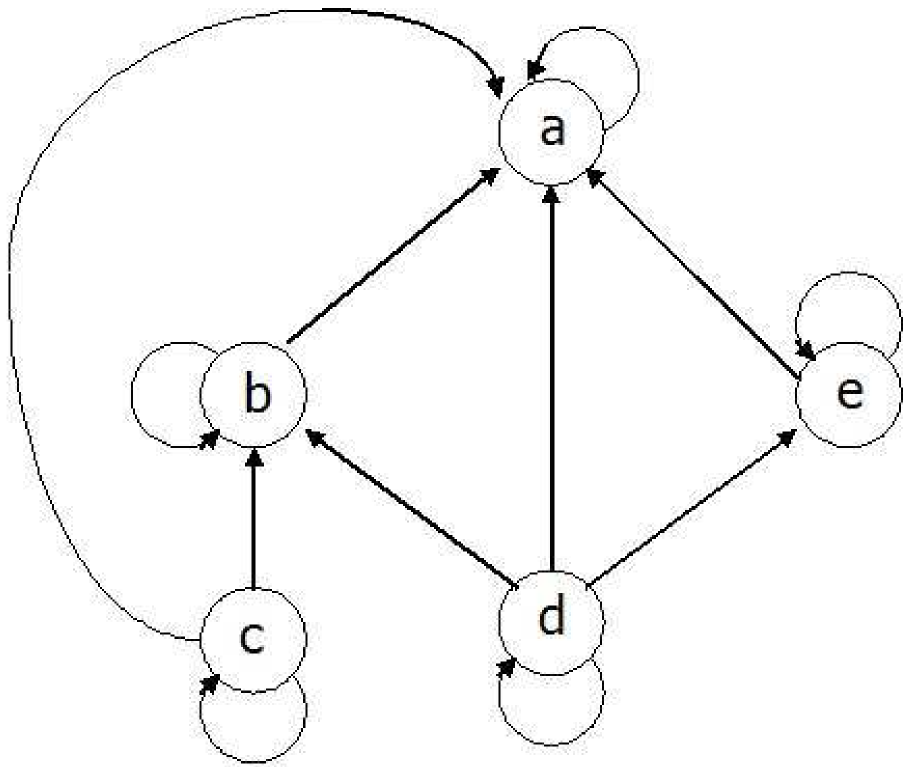
Diagramas de Hasse de Posets

- **Exemplo2**: Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$. A ordem parcial é a divisibilidade sobre A (ou seja, $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$).
  - Desenhe o diagrama de Hasse do poset $(A, \leq)$.



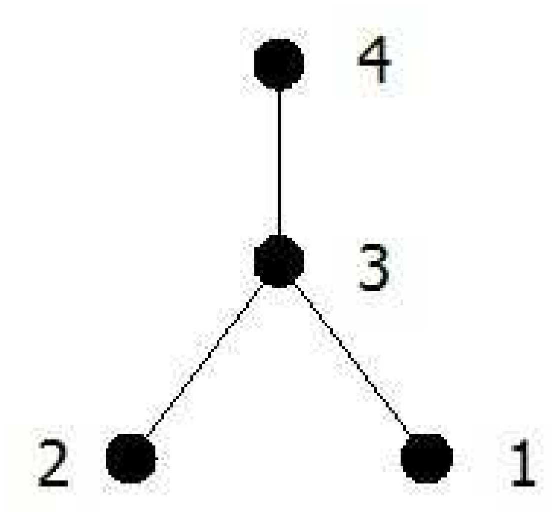
EXERCÍCIOS (1/3)

- **Exerc1**: Determine o diagrama de Hasse do ordenamento parcial que tem o seguinte dígrafo:



EXERCÍCIOS (2/3)

- **Exerc2**: Descreva os pares ordenados na relação determinada pelo diagrama de Hasse sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dado abaixo:



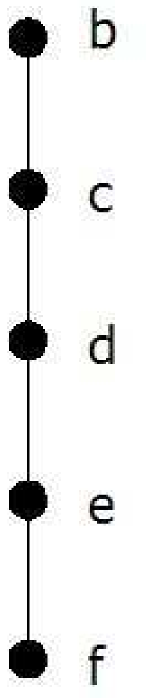
EXERCÍCIOS (3/3)

- **Exerc3**: Determine o diagrama de Hasse da relação sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuja matriz é dada por:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

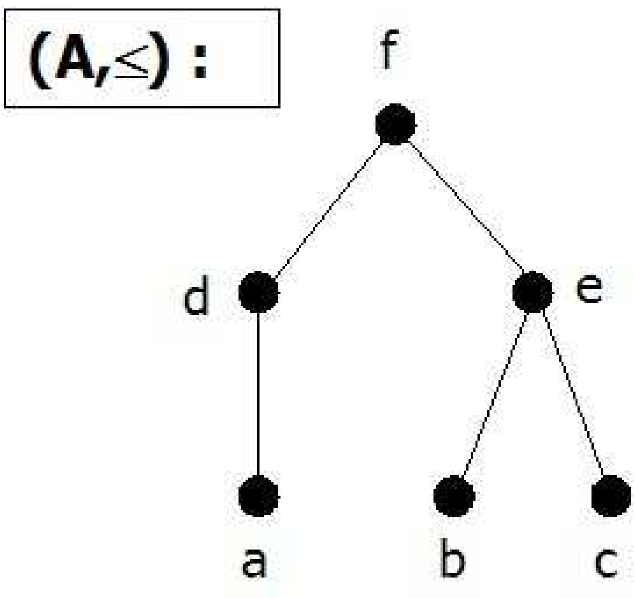
OBSERVAÇÕES (1/2)

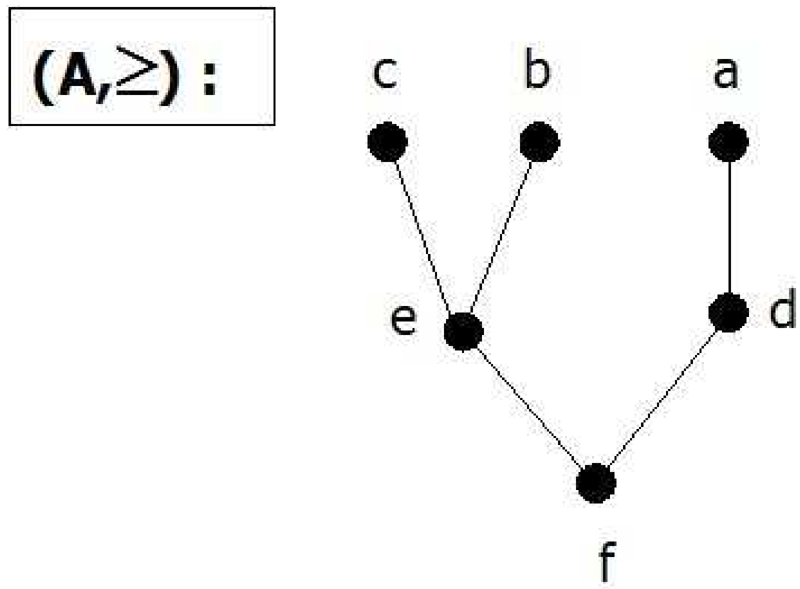
- O diagrama de Hasse de um conjunto linearmente ordenado tem sempre a forma de uma linha:



OBSERVAÇÕES (2/2)

- O diagrama de Hasse de $(A, \geq)$ é o diagrama de Hasse do seu dual $(A, \leq)$ de cabeça para baixo:





ORDENAMENTO TOPOLÓGICO

- Dado um poset $(A, \leq)$, às vezes é preciso encontrar uma ordem linear $\prec$ para o conjunto A que seja simplesmente uma extensão da ordem parcial dada:

  se $a \leq b$, então (na nova ordem) $a \prec b$

- O processo de construir uma ordem linear do tipo $\prec$ é chamado de **ordenamento topológico**.

ORDENAMENTO TOPOLÓGICO

- **Exemplo**: suponha que um projeto seja composto de 20 tarefas diferentes:
  - Algumas tarefas só podem ser completadas depois que outras tenham sido acabadas.
  - Como encontrar uma ordem para estas tarefas?
- Para modelar este problema, monta-se uma ordem parcial sobre o conjunto de tarefas, de modo que:
  - "$a < b$" $\Leftrightarrow$ "b é uma tarefa que não pode ser iniciada até que a esteja completa"
  - Para produzir uma programação para este projeto, é preciso uma ordem para todas as 20 tarefas que seja compatível com esta ordem parcial.

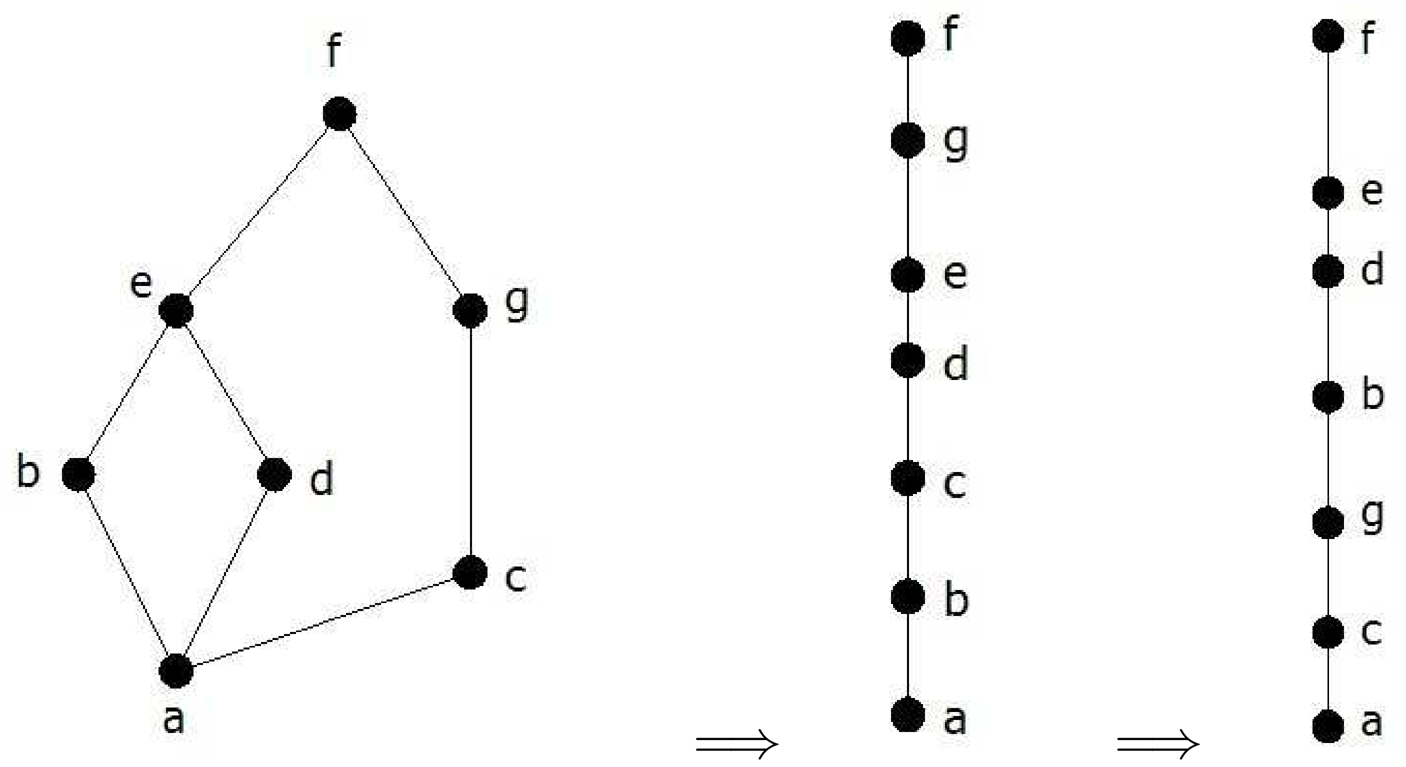
Ordenamento topológico

- Uma ordem linear total $\prec$ é dita ser **compatível** com uma ordem parcial $\leq$ se:
  - $a \prec b$ sempre que $a \leq b$.

- O problema de obter ordens lineares a partir de uma ordem parcial é chamado de **ordenamento topológico**.

ORDENAMENTO TOPOLÓGICO

- **Exemplo**: Algumas ordens lineares compatíveis com um poset dado:



- **Questão**: Como encontrar ordenamentos topológicos??

ISOMORFISMO EM POSETS

- LEMBRETE: Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada de uma bijeção (correspondência um-para-um) entre A e B se:
  - f é uma função injetora: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
  - f é sobrejetora: $Ran(f) = B$

Isomorfismo em posets

- Sejam $(A, \leq)$ e $(A', \leq')$ posets e seja $f : A \rightarrow A'$ uma bijeção:
  - esta função f é chamada de um **isomorfismo** de $(A, \leq)$ para $(A', \leq')$ se, para quaisquer elementos $a, b \in A$:

$$a \leq b \;\; \Rightarrow \;\; f(a) \leq' f(b).$$

- **Exemplo**: Sejam:
  - A = Z^+ (inteiros positivos) e seja $\leq$ a ordem usual sobre A.
  - A' = inteiros pares e seja $\leq'$ a ordem usual sobre A'.

Mostre que a função $f : A \rightarrow A'$ dada por $f(a) = 2.a$ é um isomorfismo de $(A, \leq)$ para $(A', \leq')$.

Isomorfismo em posets

- **Exemplo (cont.)** ($f : A \to A'$ é isomorfismo):

1. a função f é uma bijeção, ou seja, f é injetora e sobrejetora:
   - f é injetora pois se $f(a) = f(b)$, então pela definição de f tem-se que $2a = 2b$ e segue daí que $a = b$
   - se $c \in A'$, então c é par e sempre pode ser escrito como $c = 2a$ para algum $a \in A \;\; \Rightarrow \;\; c = f(a) \Rightarrow f$ é sobrejetora
   - logo, f é uma bijeção.

2. f preserva o ordenamento $\leq'$:
   - se $a, b \in A$, é claro que $a \leq b \Leftrightarrow 2a \leq 2b$, isto é:

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; f(a) \leq' f(b) \qquad \square$$

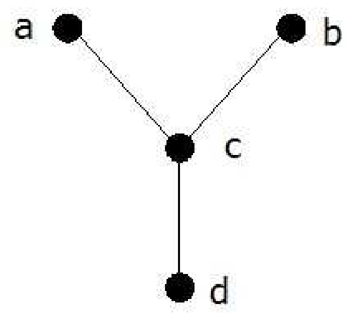
Princípio da Correspondência

- Seja $f : A \to A'$ um isomorfismo entre os posets $(A, \leq)$ e $(A', \leq')$.
- $B \subseteq A$ e $B' = f(B)$ é o correspondente subconjunto de A'.
- Então, a partir da definição de isomorfismo, vale o resultado geral:

- **Teorema (Princípio da Correspondência)**:
  - Se os elementos do conjunto B têm uma propriedade qualquer, relacionando-os uns aos outros ou a outros elementos de A;
  - e se esta propriedade pode ser definida inteiramente em termos da ordem parcial $\leq$;
  - Então: os elementos de B' devem possuir exatamente a mesma propriedade, definida em termos de $\leq'$.

PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

- **Exemplo**: Seja $(A, \leq)$ um poset com o diagrama de Hasse:



- suponha que exista um isomorfismo f de $(A, \leq)$ para algum outro poset $(A', \leq')$
- observe que: $d \leq x, \quad \forall x \in A$
  - então o elemento correspondente $f(d) \in A'$ deverá satisfazer:

$$f(d) \leq' y, \quad \forall y \in A'$$

- outro exemplo: note que a e b não são comparáveis em A
  - então $f(a)$ e $f(b)$ não serão comparáveis em A'. $\square$

PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

- Para um poset finito, um dos objetos que é inteiramente definido em termos do ordenamento parcial é o seu diagrama de Hasse.
- Segue, então, do princípio da correspondência, que 2 posets isomórficos têm os mesmos diagramas de Hasse.

- **Teorema**: Sejam $(A, \leq)$ e $(A', \leq')$ dois posets finitos, seja $f : A \to A'$ uma bijeção e seja H um diagrama de Hasse de $(A, \leq)$.
  - Então:
    - se f é um isomorfismo e cada designação a de H for trocada por $f(a)$, então H torna-se um diagrama de Hasse de $(A', \leq')$.
  - *Reciprocamente*:
    - se H se torna um diagrama de Hasse de $(A', \leq')$ sempre que a é substituído por $f(a)$ em H, então f é um isomorfismo.

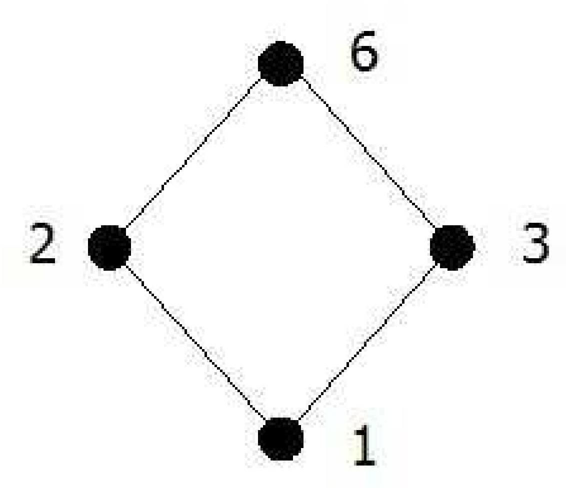
ISOMORFISMO EM POSETS

- Se $f : A \to B$ é uma bijeção do poset $(A, \leq)$ para o conjunto B, podemos usar a função f para definir uma ordem parcial $\leq'$ sobre B:
  - se b_1 e b_2 estão em B, então existe $a_1 \in A$ tal que $b_1 = f(a_1)$ e $a_2 \in A$ tal que $b_2 = f(a_2)$
  - defina $b_1 \leq' b_2$ em B como significando que $a_1 \leq' a_2$ em A

- Se A e B são finitos, pode-se descrever este processo geometricamente como:
  - construa o diagrama de Hasse para $(A, \leq)$
  - substitua cada elemento a pelo correspondente $f(a)$ em B
  - o resultado é o diagrama de Hasse da ordem parcial $\leq'$ sobre B

ISOMORFISMO EM POSETS

- **Exemplo**: Seja $A = \{1, 2, 3, 6\}$ e seja $\leq$ a relação de divisibilidade "$\,|\,$" cujo diagrama de Hasse é dado por:



- Por outro lado, sejam:
  - $A' = P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}.\{a, b\}\}$
  - $\leq'$ a relação de inclusão de conjuntos $\subseteq$

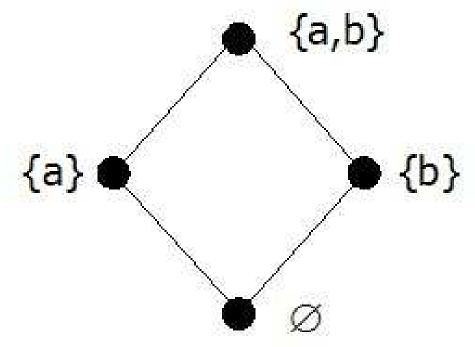
ISOMORFISMO EM POSETS

- **Exemplo (cont.):**
  - Se $f : A \rightarrow A'$ é definida por:

    $$f(1) = \emptyset \quad , \quad f(2) = \{a\} \quad , \quad f(3) = \{b\} \quad , \quad f(6) = \{a, b\}$$

    é fácil ver que f é uma bijeção.

  - Substituindo cada a por $f(a)$ no diagrama de Hasse, obtemos:



    - que é o diagrama de Hasse de $(A', \leq')$
    - portanto, f é um isomorfismo entre $(A, \leq)$ e $(A', \leq')$ $\square$