Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

7 - Estruturas Algébricas

7.1) Operações Binárias

7.2) Semigrupos

7.3) Produtos e Quocientes de Semigrupos

7.4) Grupos

7.5) Produtos e Quocientes de Grupos

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.3-ex.1)* Sejam $(S, *)$ e $(T, *')$ semigrupos comutativos. Mostre que $S \times T$ também é um semigrupo comutativo.

2. *(Kolman5-seção 9.3-ex.3)* Sejam $(S, *)$ e $(T, *')$ semigrupos. Mostre que a função $f : S \times T \to S$, definida por $f(s, t) = s$, é um homomorfismo do semigrupo $S \times T$ sobre o semigrupo S.

3. *(Kolman5-seção 9.3-ex.5)* Prove o Teorema 1 visto em aula:
   - Se $(S, *)$ e $(T, *')$ são semigrupos, então $(S \times T , *'')$ é um semigrupo, com $*''$ dado por: $(s_1, t_1) \ *'' \ (s_2, t_2) \ = \ (s_1 * s_2 \ , \ t_1 *' t_2)$

4. *(Kolman5-seção 9.3-exs.7-15)* Em cada exercício abaixo, determine se a relação R sobre o semigrupo S mostrada é uma relação de congruência.
   - (7) $S = \mathbb{Z}$ sob a operação de adição comum; $a \ R \ b$ se e somente se $a + b$ é par.
   - (9) S é o conjunto de todos os números racionais sob a operação de adição; $a/b \ R \ c/d$ se e somente se $ad = bc$.
   - (11) $S = \mathbb{Z}$ sob a operação de adição comum; $a \ R \ b$ se e somente se $a \equiv b \ (mod \ 3)$.
   - (13) $S = \mathbb{Z}^+$ sob a operação de multiplicação comum; $a \ R \ b$ se e somente se $|a - b| \leq 2$.
   - (15) $S = \{0, 1\}$ sob a operação $*$ definida pela seguinte tabela:

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

     $a \ R \ b$ se e somente se $a * a = b * b$. (Dica: observe que se x é qualquer elemento em S, então $x * x = 0$.)

5. *(Kolman5-seção 9.3-ex.21)* Descreva o semigrupo quociente para S e R dados no exemplo (11) acima.

6. *(Kolman5-seção 9.3-ex.23)* Descreva o semigrupo quociente para $S = \mathbb{Z}$ com a adição comum e R definida por $a \ R \ b$ se e somente se $a \equiv b \ (mod \ 5)$.

7. *(Kolman5-seção 9.3-ex.25)* Considere o monóide $S = \{e, a, b, c\}$, com a seguinte tabela de operação:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	b	c
b	b	c	b	c
c	c	b	b	c

Agora considere a relação de congruência $R = \{(e,e), (e,a), (a,e), (a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c)\}$ sobre S.

(a) Escreva a tabela de operação do monóide quociente S/R.

(b) Descreva o homomorfismo natural $f_R : S \to S/R$.