Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

6 - Relações de Ordenamento

6.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

6.2) Extremos de Posets

6.3) Reticulados

6.4) Álgebras Booleanas Finitas

Lista de Exercícios

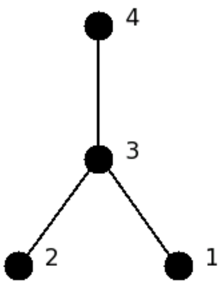
1. *(Kolman5-seção 6.1-ex.1)* Determine se a relação R dada abaixo é um ordenamento parcial sobre o conjunto A.
   (a) $A = \mathbb{Z}$, e $a\ R\ b$ sse $a = 2b$
   (b) $A = \mathbb{Z}$, e $a\ R\ b$ sse $b^2|a$

2. *(Kolman5-seção 6.1-ex.3)* Determine se a relação R dada abaixo é um ordenamento linear sobre o conjunto A.
   (a) $A = \mathbb{R}$, e $a\ R\ b$ sse $a \leq b$
   (b) $A = \mathbb{R}$, e $a\ R\ b$ sse $a \geq b$

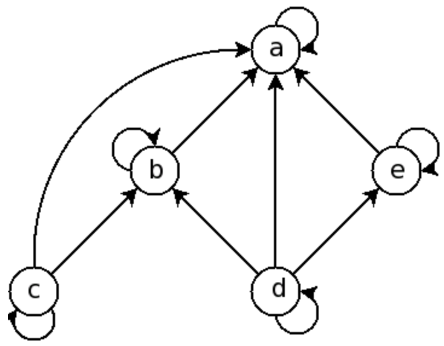
3. *(Kolman5-seção 6.1-ex.5)* Sobre o conjuto $A = \{a, b, c\}$, encontre todas as ordens parciais $\leq$ nas quais $a \leq b$.

4. *(Kolman5-seção 6.1-ex.9)* Determine o diagrama de Hasse da relação R dada por:
   $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 4), (1, 3), (3, 3), (3, 4), (1, 4), (4, 4)\}$

5. *(Kolman5-seção 6.1-ex.11)* Descreva os pares ordenados que estão na relação determinada pelo seguinte diagrama de Hasse sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$:



6. *(Kolman5-seção 6.1-ex.13)* Determine o diagrama de Hasse da ordem parcial que possui o seguinte dígrafo:



7. *(Kolman5-seção 6.1-ex.15)* Determine o diagrama de Hasse da relação sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cuja matriz é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. *(Kolman5-seção 6.1-ex.19)* Seja $A = \{\square, A, B, C, E, O, M, P, S\}$, com a ordem alfabética usual, aonde $\square$ representa um caracter em branco e aonde $\square \leq x,\ \forall x \in A$. Arranje o seguinte em ordem lexicográfica (como elementos de $A \times A \times A \times A$):

   (a) MOP□ (b) MOPE (c) CAP□
   (d) MAP□ (e) BASE (f) ACE□
   (g) MACE (h) CAPE

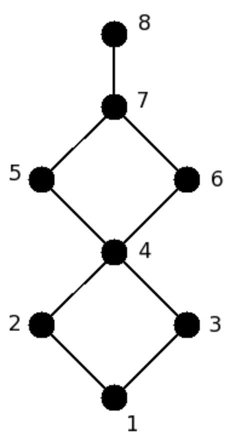
   Para os próximos 2 exercícios, considere a ordem parcial de divisibilidade sobre A. Desenhe o diagrama de Hasse do poset e determine se ele é linearmente ordenado.

9. *(Kolman5-seção 6.1-ex.21)* $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

10. *(Kolman5-seção 6.1-ex.23)* $A = \{3, 6, 12, 36, 72\}$.

11. *(Kolman5-seção 6.1-ex.25)* Descreva como usar M_R para determinar se R é um ordenamento parcial.

12. *(Kolman5-seção 6.1-ex.29)* Desenhe o diagrama de Hasse de um ordenamento topológico do seguinte poset:



13. *(Kolman5-seção 6.1-ex.37)* Seja $B = \{2, 3, 6, 9, 12, 18, 24\}$ e seja $A = B \times B$. Defina a seguinte relação sobre A: $(a, b) \prec (a', b')$ sse $a|a'$ e $b \leq b'$, aonde $\leq$ é a ordem parcial usual. Mostre que $\prec$ é um ordenamento parcial.

14. *(Kolman5-seção 6.1-ex.39)* Seja $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ e considere a ordem parcial $\leq$, da divisibilidade sobre A. Ou seja, defina $a \leq b$ como significando que $a|b$. Seja $A' = P(S)$, onde $S = \{e, f, g\}$, um poset com order parcial $\subseteq$. Mostre que $(A, \leq)$ e $(A', \subseteq)$ são isomórficos.