Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

4 - Relações

4.1) Relações e Dígrafos

4.2) Caminhos em Relações e Dígrafos

4.3) Propriedades de Relações

4.4) Relações de Equivalência

4.5) Manipulação e Fecho de Relações

Lista de Exercícios

Para os próximos 2 exercícios, sejam R e S as relações dadas de A para B. Compute:

(a) $\overline{R}$

(b) $R \cap S$

(c) $R \cup S$

(d) S^{-1}

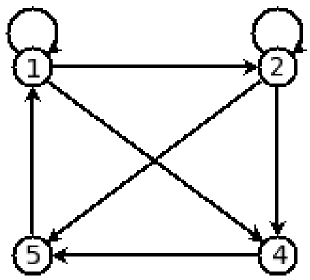
1. *(Kolman5-seção 4.7-ex.1)*

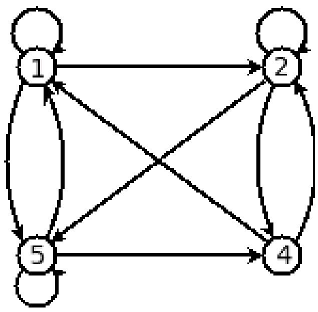
$A = B = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

$S = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

2. *(Kolman5-seção 4.7-ex.7)* Sejam R e S duas relações cujos dígrafos correspondentes são mostrados abaixo. Compute: (a) $\overline{R}$; (b) $R \cap S$; (c) $R \cup S$; (d) S^{-1}





3. *(Kolman5-seção 4.7-ex.9)* Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Sejam R e S relações de A para B cujas matrizes são dadas abaixo. Compute (a) $\overline{S}$; (b) $R \cap S$; (c) $R \cup S$; (d) R^{-1}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *(Kolman5-seção 4.7-ex.12)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Dadas as matrizes M_R e M_S abaixo, das relações R e S de A para B, compute:
(a) $M_{R \cap S}$; (b) $M_{R \cup S}$; (c) $M_{R^{-1}}$; (d) $M_{\overline{S}}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *(Kolman5-seção 4.7-ex.22)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$
$S = \{(3, 1), (4, 4), (2, 3), (2, 4), (1, 1), (1, 4)\}$

   (a) Será que $(1, 3) \in R \circ R$?
   (b) Será que $(4, 3) \in S \circ R$?
   (c) Será que $(1, 1) \in R \circ S$?
   (d) Compute $R \circ R$.
   (e) Compute $S \circ R$.
   (f) Compute $R \circ S$.
   (g) Compute $S \circ S$.

6. *(Kolman5-seção 4.7-ex.25)* Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sejam M_R e M_S matrizes das relações R e S sobre A.
Compute (a) $M_{R \circ R}$; (b) $M_{S \circ R}$; (c) $M_{R \circ S}$; (d) $M_{S \circ S}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fechos:

7. *(Kolman5-seção 4.8-ex.1)* Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 1), (3, 2)\}$.

   (a) Compute a matriz M_{R^∞}, do fecho transitivo de R, usando a fórmula:
   $$M_{R^\infty} = M_R \vee (M_R)^2_\odot \vee (M_R)^3_\odot$$
   (b) Liste a relação R^∞ cuja matriz foi computada na parte (a).

8. *(Kolman5-seção 4.8-ex.3)* Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e seja R uma relação sobre A cuja matriz é:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = W_0$$

Compute as matrizes W_1, W_2 e W_3 que seriam geradas pelo algoritmo de Warshall neste caso.

9. *(Kolman5-seção 4.8-ex.5)* Seja $A = \mathbb{Z}^+$ e seja R a relação sobre A definida por:

   $a\ R\ b$ se e somente se $b = a + 1$. Forneça o fecho transitivo de R.

Nos próximos 2 exercícios, seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Para a relação R cuja matriz é dada, encontre a matriz do fecho transitivo usando o algoritmo de Warshall.

10. *(Kolman5-seção 4.8-ex.9)*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. *(Kolman5-seção 4.8-ex.11)*

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$