# INE5403

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

# 0 - APRESENTAÇÃO

0.0) Apresentação do curso

0.1) Conjuntos e Sub-conjuntos

0.2) Seqüências e somas

# Conjuntos e Subconjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção “bem-definida” de objetos.
  - Objetos: **membros** ou **elementos** do conjunto.
  - “Bem-definida”: é possível decidir se um dado objeto pertence ou não à coleção.
- Ou: “coleção não-ordenada de objetos”.
- Normalmente, os objetos em um conjunto possuem uma mesma propriedade.
- **Exemplo:** o conjunto dos “inteiros menores do que 4”:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

# EXEMPLOS DE CONJUNTOS

- Conjunto dos livros da livraria da FEESC (finito).
- Conjunto dos números naturais (infinito).
- Conjunto dos dinossauros vivos (Vazio, { }, $\emptyset$)
- Conjunto $S$ de 2 elementos, um dos quais é o conjunto das letras minúsculas do alfabeto e o outro é o conjunto dos dígitos decimais:

$$X = \{a, b, c, d, \ldots, y, z\}$$

$$Y = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

$$S = \{X, Y\} = \{\{a, b, c, \ldots, y, z\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$$

# Conjuntos e Subconjuntos

- Usualmente:
  - letras maiúsculas denotam conjuntos
  - letras minúsculas denotam elementos de um conjunto
- (Pertinência) O símbolo $\in$ denota que um elemento pertence ao conjunto ($a \in A$).
- **Exemplo:** Se $A = \{violeta, amarelo, vermelho\}$, então:
  - $amarelo \in A$
  - $azul \notin A$

# CARACTERÍSTICAS DOS CONJUNTOS

- A ordem em que os elementos são listados é irrelevante:

  $\{3, 2, 1\}$ e $\{1, 3, 2\}$ representam o mesmo conjunto

- A repetição dos elementos em um conjunto é irrelevante:

  $\{1, 1, 1, 3, 2\}$ é uma outra representação de $\{1, 2, 3\}$

# CONJUNTOS DEFINIDOS POR PROPRIEDADES

- Conjuntos infinitos podem ser definidos indicando-se um padrão.
  - **Exemplo**: conjunto $S$ de todos os inteiros pares: $\{2, 4, 6, ...\}$

- $S$ também pode ser definido por "recursão":

  1) $2 \in S$

  2) Se $n \in S$, então $(n + 2) \in S$

- Forma mais clara (e mais segura) de descrever este conjunto $S$:
  - $S = \{x \mid x$ é inteiro positivo par$\}$
  - ou: "o conjunto de todos os $x$ tal que $x$ é inteiro positivo e par"

# CONJUNTOS DEFINIDOS POR PROPRIEDADES

- A melhor maneira de definir um conjunto é especificando uma propriedade que os elementos do conjunto têm em comum.

- Usa-se um predicado $P(x)$ para denotar uma propriedade $P$ referente a uma variável objeto $x$.

- Notação para um conjunto $S$ cujos elementos têm a propriedade $P$:
  - $S = \{x \mid P(x)\}$

- O que significa também:
  - $\{x \mid x \in S \land P(x)\}$
  - $\{x \in S \mid P(x)\}$

# Conjuntos definidos por propriedades

- **Exemplos:**
  1. $\{x \mid x$ é um inteiro e $3 < x \leq 7\}$
  2. $\{x \mid x$ é um mês com exatamente 30 dias$\}$
  3. $\{x \mid x$ é a capital do Brasil$\}$

- **Exercícios:** Descreva os seguintes conjuntos:
  1. $\{1, 4, 9, 16\}$
  2. $\{$o pedreiro, o padeiro, o alfaiate$\}$
  3. $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

# CONJUNTOS ESPECIAIS

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^*$ : conjunto dos números inteiros positivos: $\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$: conjunto dos nros. racionais: $\{x \mid x = n/m,\ m, n \in Z\ e\ m \neq 0\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais: $\{x \mid x$ é um número real$\}$

# IGUALDADE DE CONJUNTOS

- Dois conjuntos $A$ e $B$ são ditos **iguais** se e somente se eles possuem os mesmos elementos.
  - Neste caso, escreve-se: $A = B$

- $A = B$ significa:

$$(\forall x)\,[\,(x \in A \rightarrow x \in B)\ \wedge\ (x \in B \rightarrow x \in A)\,]$$

# SUBCONJUNTOS

- O conjunto $A$ é um **subconjunto** de $B$ se e somente se:
  - todo elemento de $A$ é também um elemento de $B$
  - isto é: $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$

- Neste caso, diz-se que “$A$ está contido em $B$” e escreve-se $A \subseteq B$
- Se $A$ não é um subconjunto de $B$, escreve-se $A \not\subseteq B$
- Se $A$ é um subconjunto de $B$, mas queremos enfatizar que $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$
  - neste caso, $A$ é um **subconjunto próprio** de $B$

# SUBCONJUNTOS (EXEMPLOS)

- Para os conjuntos:

  $A = \{1, 7, 9, 15\}$ $\quad B = \{7, 9\}$ $\quad C = \{7, 9, 15, 20\}$

  - as seguintes sentenças são verdadeiras:

    $B \subseteq C$ $\quad 15 \in C$

    $B \subseteq A$ $\quad \{7, 9\} \subseteq B$

    $B \subset A$ $\quad \{7\} \subset A$

    $A \not\subset C$ $\quad \emptyset \subseteq C$

- Nota: O conjunto Vazio é um subconjunto de todo conjunto, pois:
  - se $x \in \emptyset$, então $x \in S$

# Subconjuntos (exemplos)

- Conjuntos podem ter outros conjuntos como membros.
- **Exemplos:**
  - $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
  - Ou: $\{x \mid x$ é um subconjunto do conjunto $\{a, b\}\}$

# Subconjuntos (exemplos)

- Conjuntos podem ter outros conjuntos como membros.
- **Exemplo:** Seja $A$ um conjunto e seja $B = \{A, \{A\}\}$.
  - Como $A$ e $\{A\}$ são elementos de $B$, tem-se que:

    $A \in B$ e $\{A\} \in B$
  - Segue então que $\{A\} \subseteq B$ e que $\{\{A\}\} \subseteq B$
  - Mas não é verdade que $A \subseteq B$ (Por quê?)

# Subconjuntos

- Suponha que $B = \{x \mid P(x)\}$ e que $A \subseteq B$
- Para provar que $A \subseteq B$:
  - toma-se um $x \in A$ arbitrário
  - mostramos que $P(x)$ é verdadeira
    - os elementos de $A$ "herdam" a propriedade de $B$
- **Exemplo:** seja $B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 4\}$

  $A = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 8\}$
  - para mostrar que $A \subseteq B$, tomamos um $x \in A$:

    $x = m.8$ para algum inteiro $m$
  - então $x = m.2.4$

    ou $x = k.4$, onde $k = 2m$ também é um inteiro
  - isto mostra que $x$ é múltiplo de 4 e que, portanto, $x \in B$

# Igualdade de conjuntos

- $A$ e $B$ são iguais se e somente se contêm os mesmos elementos
- Logo, podemos provar que A=B provando que:

  $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

- **Exemplo:** Provar que:

  $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 < 15\} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2x < 7\}$

  - Elementos de $A$: $\{0, 1, 2, 3\}$ (todos com dobro $< 7$)
  - Elementos de $B$: $\{0, 1, 2, 3\}$ (todos com quadrado $< 15$)

# CONJUNTO POTÊNCIA

- Muitos problemas envolvem testar todas as combinações dos elementos de um conjunto para ver se satisfazem uma certa propriedade.
- O **conjunto potência** de um conjunto $A$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de $A$
  - denotado por $P(A)$ ou $2^A$
  - também chamado de conjunto de “todas as partes” de $A$
- **Exemplo:** Seja $A = \{1, 2, 3\}$.
  - Então $P(A)$ consiste dos seguintes subconjuntos de $A$:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

- **Nota:** se $A$ tem $n$ elementos, então $P(A)$ tem $2^n$ elementos.

# SEQÜÊNCIAS

- Como os conjuntos não são ordenados, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.
- Uma **seqüência** é uma lista de objetos em ordem.
  - um "primeiro elemento", um "segundo elemento",...
  - a lista pode ser finita ou não

# Exemplos de Seqüências

- 1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1
- 1,4,9,16,25,... = "quadrados dos n$^{os}$ positivos" (infinita)
  - também pode ser denotada por $(n^2)_{1 \leq n \leq \infty}$
- A seqüência finita 1,2,4,...,256 pode ser denotada por $(2^n)_{0 \leq n \leq 8}$
- A notação $(1/n)_{2 \leq n \leq \infty}$ representa a seqüência: 1/2, 1/3, 1/4,...
- A palavra "pesquisa" pode ser vista como a seqüência finita: p,e,s,q,u,i,s,a
  - é costume omitir-se as vírgulas e escrever a palavra no modo usual
  - mesmo uma palavra sem sentido, como "abacabcd" pode ser vista como uma seqüência de tamanho 8
  - seqüências de letras ou outros símbolos, sem vírgulas, são chamadas de "strings"

# CONJUNTO CORRESPONDENTE A UMA SEQÜÊNCIA

- Conjunto de todos os elementos distintos na seqüência.
- **Exemplo**: o conjunto correspondente à seqüência:
  - a,b,a,b,a,b,a,b,...
  - é, simplesmente: $\{a, b\}$

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- Um conjunto é dito **contável** se for o conjunto correspondente a alguma seqüência.
- Os elementos de um conjunto contável podem ser arranjados em uma lista ordenada, a qual pode, portanto, ser contada.
- Todos os conjuntos finitos são contáveis.
- Alguns conjuntos infinitos também:
  - por definição, o conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ é contável.
- Um conjunto que não é contável é dito **incontável**.

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- O número de elementos em um conjunto $X$ é a **cardinalidade** de $X$
  - denotada por $|X|$.
  - Exemplo: $|\{2, 5, 7\}| = 3$
- Importante: saber se dois conjuntos possuem mesma cardinalidade
  - se ambos forem finitos, é só contar os elementos de cada um
  - porém: será que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ possuem a mesma cardinalidade??
- Ainda: será que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{R}$ são contáveis???

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- Para nos convencermos de que dois conjuntos $X$ e $Y$ possuem a mesma cardinalidade:
  - tentamos produzir um “emparelhamento” de cada $x$ em $X$ com apenas um $y$ em $Y$
  - de maneira que cada elemento de $Y$ seja usado apenas uma vez neste emparelhamento
- **Exemplo:** para os conjuntos $X = \{2, 5, 7\}$ e $Y = \{?, !, \#\}$, o emparelhamento:

$$2 \leftrightarrow ?, \quad 5 \leftrightarrow \#, \quad 7 \leftrightarrow !$$

  - mostra que ambos possuem a mesma cardinalidade $\square$

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** O emparelhamento:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \cdots \end{array}$$

  - mostra que os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^+$ possuem mesma cardinalidade
  - logo, o conjunto $\mathbb{Z}$ é contável. $\square$

- **Exemplo:** O conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, é contável.
  - Emparelhamento com $\mathbb{Z}^+$ ???

# Cardinalidade de conjuntos

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
  - Nota: um nro real entre 0 e 1 é o decimal infinito $.a_1a_2a_3\dots$, onde $a_i$ é um inteiro tal que $0 \leq a_i \leq 9$.

- **Prova (por contradição):**
  - assuma que o conjunto dos decimais ($0.a_1a_2a_3\dots$) entre 0 e 1 é contável (!)
  - então deve ser possível formar uma seqüência contendo todos estes decimais:

$$\begin{aligned} n_1 &= .a_1a_2a_3\dots \\ n_2 &= .b_1b_2b_3\dots \\ n_3 &= .c_1c_2c_3\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

  - todo decimal infinito deve aparecer em algum lugar desta lista. $(\Rightarrow)$

# Cardinalidade de conjuntos

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - Vamos estabelecer uma contradição construindo um decimal infinito $x$ que não está na lista.
  - Construindo o decimal $x = .x_1 x_2 x_3 \ldots$:
    - valor de $x_1$: qualquer dígito diferente de $a_1$
    - valor de $x_2$: qualquer dígito diferente de $b_2$
    - valor de $x_3$: qualquer dígito diferente de $c_3$
    - e assim por diante...

# Cardinalidade de conjuntos

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - Por exemplo, se tivéssemos:

$$n_1 = 0.3659663426\ldots$$

$$n_2 = 0.7103958453\ldots$$

$$n_3 = 0.0358493553\ldots$$

$$n_4 = 0.9968452214\ldots$$

$$\vdots$$

  - o número $x$ poderia ser dado por: $0.5637\ldots$

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS

- **Exemplo:** o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1 é incontável.
- **Prova (cont.):**
  - o número $x$ que resulta é um decimal infinito
    - certamente está entre 0 e 1
  - mas: difere de todos os números da lista em algum dígito
    - logo, $x$ não está na lista
  - resumindo: não importa como a lista é construída
    - sempre é possível construir um número real entre 0 e 1 que não está nela
  - Contradição!
    - (a lista deveria conter todos os reais entre 0 e 1) $\square$

# Seqüências e alfabetos

- $A^*$: conjunto de todas as seqüências finitas de elementos de $A$
  - quando $A$ é um conjunto de símbolos (e não de números), é chamado de alfabeto
- Seqüências em $A^*$: palavras ou strings de $A$
  - neste caso, as seqüências em $A^*$ não são escritas com vírgulas entre os elementos
- Assume-se que $A$ contém a seqüência vazia ($\Lambda$)

# SEQÜÊNCIAS E ALFABETOS

- **Exemplo:** seja $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$
  - $A^*$ = todas as palavras comuns
    - tais como: macaco, universidade, desburocratizar,...
    - mas também: ixalovel, zigadongdong, cccaaa, pqrst, ...
  - Todas as seqüências finitas de $A$ estão em $A^*$
    - tenham elas significado ou não...

# PRODUTO CARTESIANO

- O **produto cartesiano** de dois conjuntos $A$ e $B$, é o conjunto de todos os pares ordenados $(a, b)$, onde $a \in A$ e $b \in B$, ou seja:

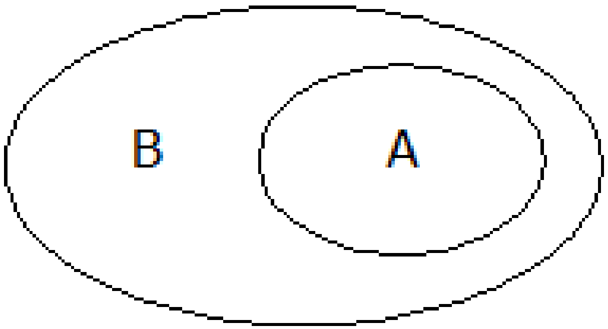
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- Exemplo: qual é o produto de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

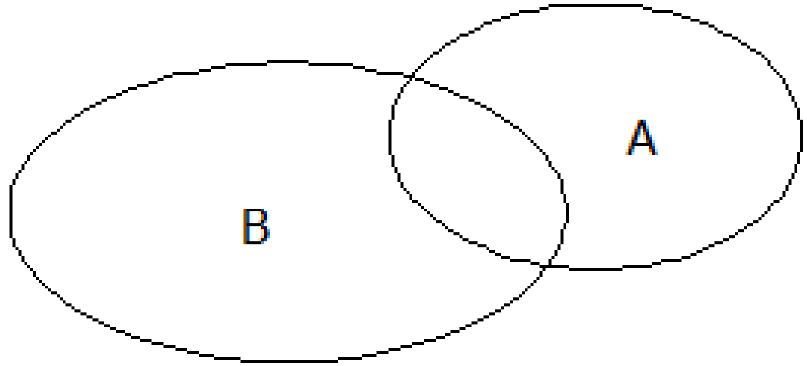
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

- Note que: $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

# DIAGRAMAS DE VENN

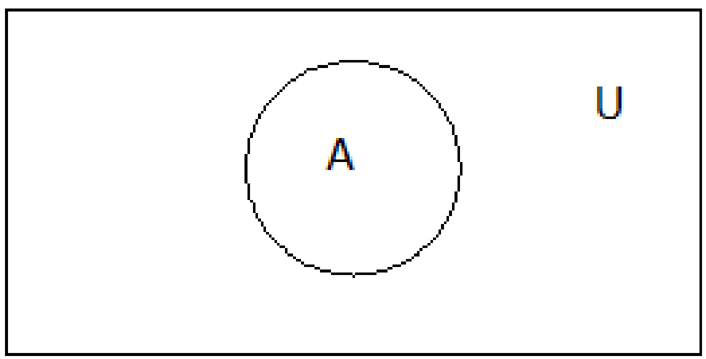



$A \subseteq B$




$A \not\subseteq B$

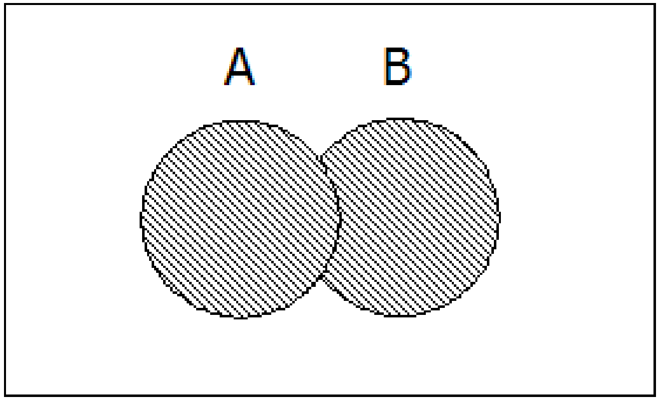
- Conjunto universal U: conjunto contendo todos os objetos em consideração:



# OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- A **união** de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em $A$ ou em $B$, ou em ambos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

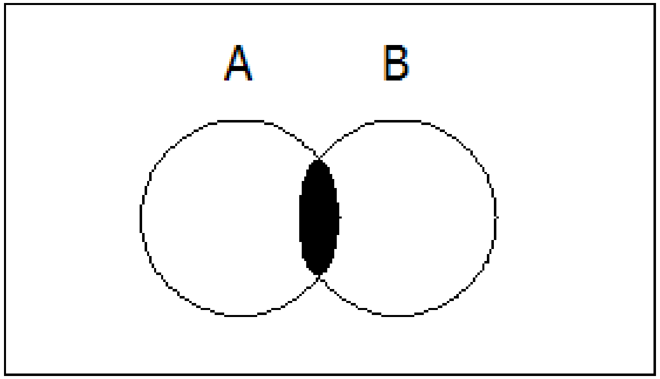



- **Exemplo**: A união dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$.

# OPERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS

- A **intersecção** de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto que contém aqueles elementos que estão tanto em $A$ como em $B$:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

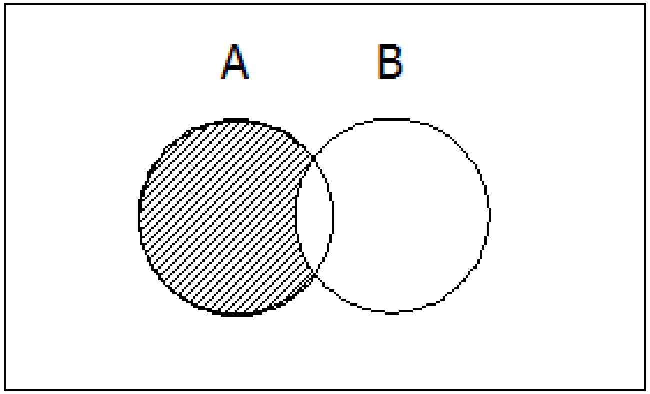



- **Exemplo**: A intersecção dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{1, 3\}$.

# Operações sobre conjuntos

- A **diferença** de dois conjuntos $A$ e $B$ é o conjunto de todos os elementos que estão em $A$ mas não em $B$:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

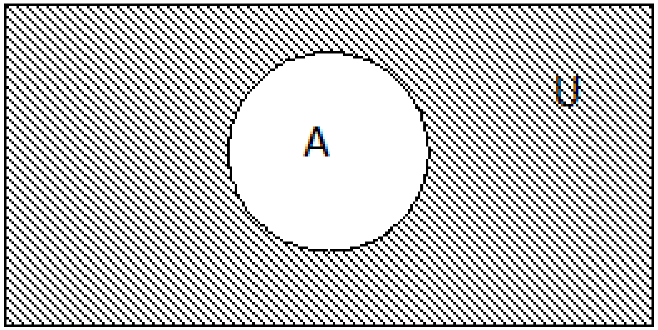



- **Exemplo**: A diferença dos conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{5\}$.

# Operações sobre conjuntos

- Se $U$ é o conjunto universo, $U - A$ é chamado de **complemento** de $A$:

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$




- **Exemplo**: Seja $A$ o conjunto dos inteiros positivos maiores do que 10 (onde o universo é o conjunto de todos os inteiros positivos).
  - Então: $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

# IDENTIDADES DE CONJUNTOS

- As operações sobre conjuntos satisfazem às propriedades:
  - Comutatividade:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Associatividade:
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Distributividade:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - Idempotência:
    - $A \cup A = A$
    - $A \cap A = A$

# IDENTIDADES DE CONJUNTOS

- As operações sobre conjuntos satisfazem às propriedades:
  - Propriedades do complemento:
    - $\overline{\overline{A}} = A$
    - $A \cup \overline{A} = U$
    - $A \cap \overline{A} = \emptyset$
    - $\overline{\emptyset} = U$ e também: $\overline{U} = \emptyset$
    - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (1a. Lei de De Morgan)
    - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (2a. Lei de De Morgan)

# Identidades de conjuntos

- Propriedades do conjunto Universo:
  - $A \cup U = U$
  - $A \cap U = A$
- Propriedades do conjunto Vazio:
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Nota: cada identidade acima tem o seu dual:
  - Troca-se $\cup$ por $\cap$
  - Troca-se $U$ por $\emptyset$

# UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

**Solução (1/4):**

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} \qquad \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

# UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

**Solução (2/4):**

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} \qquad \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

$$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \qquad \text{(2}^a \text{ lei de De Morgan)}$$

# UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

**Solução (3/4):**

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(2}^a \text{ lei de De Morgan)} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cap \text{)}
\end{aligned}$$

# UTILIZAÇÃO DAS IDENTIDADES

- **Exemplo:** Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Mostre que:

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

**Solução (4/4):**

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{(1}^a \text{ lei de De Morgan)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) && \text{(2}^a \text{ lei de De Morgan)} \\
&= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cap\text{)} \\
&= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} && \text{(comutatividade de } \cup\text{)}
\end{aligned}$$

# CONJUNTO UNIVERSO

- O conjunto “todas as coisas” não pode ser considerado sem destruir a lógica da matemática.
- Para cada discussão existe um “conjunto universal” $U$ contendo todos os objetos para os quais a discussão faz sentido.

# CARDINALIDADE DE CONJUNTOS (REL.)

- Conjuntos são muito usados em problemas de contagem, o que leva a uma discussão sobre o seu tamanho.
- Um conjunto $A$ é dito **finito** se ele tem $n$ elementos distintos, onde $n \in \mathbb{N}$.
  - Neste caso, $n$ é chamado de **cardinalidade** de A
  - A cardinalidade de $A$ é denotada por $|A|$
  - Um conjunto que não é finito é chamado de **infinito**

# Cardinalidade de conjuntos

- **Exemplos:**
  - Seja $A$ o conjunto dos inteiros positivos ímpares $< 10$.
    - Então $|A| = 5$
  - Seja $A$ o conjunto das letras do alfabeto: $|A| = 26$
  - $|\emptyset| =?$

# CONTAGEM DE CONJUNTOS

- **Princípio da adição:** Se
  - uma primeira tarefa pode ser feita de $n_1$ modos e uma segunda de $n_2$ modos
  - e se ambos os eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo

  então há $n_1 + n_2$ modos de fazer uma ou outra tarefa

- Ou seja, se $A$ e $B$ são conjuntos, temos que: $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Esta regra pode ser estendida para:

  $$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$

  - desde que não haja duas tarefas que podem ser realizadas ao mesmo tempo.

# PRINCÍPIO DA ADIÇÃO

- **Exemplo 1:** Um estudante tem que escolher um projeto em uma de 3 listas. As 3 listas contêm 23, 15 e 19 possíveis projetos, respectivamente. Quantas possibilidades de projetos há para escolher?

- **Exemplo 2:** Qual o valor de k após a execução do código:

```
k:=0
for i_1:=1 to n_1
  k:=k+1
end
for i_2:=1 to n_2
  k=k+1
end
...
for i_m:=1 to n_m
  k=k+1
end
```

# CONTAGEM DE CONJUNTOS

- **Princípio da multiplicação:** Suponha que:
  - um procedimento possa ser subdividido em duas tarefas
  - há $n_1$ modos de fazer a $1^{ra}$ tarefa
  - e $n_2$ modos de fazer a segunda depois que a $1^{ra}$ esteja pronta

  então há $n_1.n_2$ modos de executar o procedimento.

- Ou seja, se $A$ e $B$ são conjuntos finitos, temos que:

  $$|A \times B| = |A|.|B|$$

- Esta regra pode ser estendida para:

  $$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1|.|A_2|.\ldots.|A_m|$$

# PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 1:** A última parte de um número de telefone tem 4 dígitos. Quantos números de 4 dígitos existem?

  **Resposta:** podemos imaginar como o total de possibilidades de uma seqüência de 4 etapas de escolha de 1 dígito:

  10x10x10x10 = 10000

# PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 2:** Quantos números de 4 dígitos sem repetições de dígitos existem?

  **Resposta:** novamente temos uma seqüência de 4 etapas

  - mas não podemos usar o que já foi usado
  - assim: $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

# PRINCÍPIO DA MULTIPLICAÇÃO

- **Exemplo 3:** Cada usuário em um dado sistema tem uma senha com 6 a 8 caracteres, onde:
  - cada caracter é uma letra maiúscula ou um número
  - cada senha tem que conter pelo menos 1 número

  então quantas possibilidades de senhas existem?

  **Resposta:**
  - $P_6$ , $P_7$ , $P_8$ = senhas com 6,7 e 8 caracteres
  - cálculo de $P_6$:
    - strings de letras maiúsculas e números com 6 caracteres = $36^6$
      - (incluindo as sem número algum)
    - strings de letras maiúsculas e sem nro algum = $26^6$
    - logo: $P_6 = 36^6 - 26^6$
  - de maneira similar: $P_7 = 36^7 - 26^7$

    $P_8 = 36^8 - 26^8$
  - total = 2.684.483.063.360 senhas $\square$

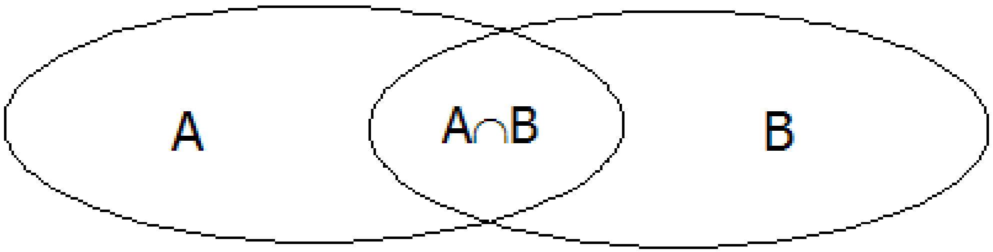
# Princípio da Inclusão e Exclusão

- **Exemplo:** Sabe-se que em uma aula de uma certa disciplina da Computação há 10 mulheres e 40 formandos. Quantos estudantes desta aula são mulheres ou formandos?
  - Provavelmente, a resposta correta não é “adicionar a quantidadade de mulheres e formandos”
    - mulheres formandas seriam contadas duas vezes
  - Logo, o nro de mulheres ou formandos é
    - a soma do nro de mulheres com o nro de formandos
    - menos o nro de mulheres formandas

# PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- Se $A$ e $B$ são conjuntos finitos, então:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$




- **Exemplo:** Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{c, e, f, h, k, m\}$. Verifique a igualdade acima.
  - $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h, k, m\}$
  - $A \cap B = \{c, e\}$
  - $|A \cup B| = 9$ $\qquad |A| = 5$ $\qquad |B| = 6$ $\qquad |A \cap B| = 2$

# PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Suponha que haja 450 calouros no CTC da UFSC. Destes, 48 estão cursando Computação, 98 estão cursando Eng. Mecânica e 18 estão em ambos os cursos. Quantos não estão cursando Computação nem Eng. Mecânica?

  **Resposta:**

  - $A =$ conjunto dos calouros em Computação
  - $B =$ conjunto dos calouros em Eng. Mecânica
    - $|A| =$48 $|B| =$98 $|A \cap B|$=18
  - logo:
    - $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| =$ 48+98-18 = 128
    - (128 calouros estão cursando Comp. ou Eng. Mec.)
  - Assim: há 450-128=322 calouros que não estão em nenhum dos 2 cursos.

# PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo:** Uma companhia de computação deve contratar 25 programadores para lidar com tarefas de programação de sistemas e 40 programadores para programação de aplicativos. Dos contratados, 10 terão que realizar tarefas de ambos os tipos. Quantos programadores devem ser contratados?

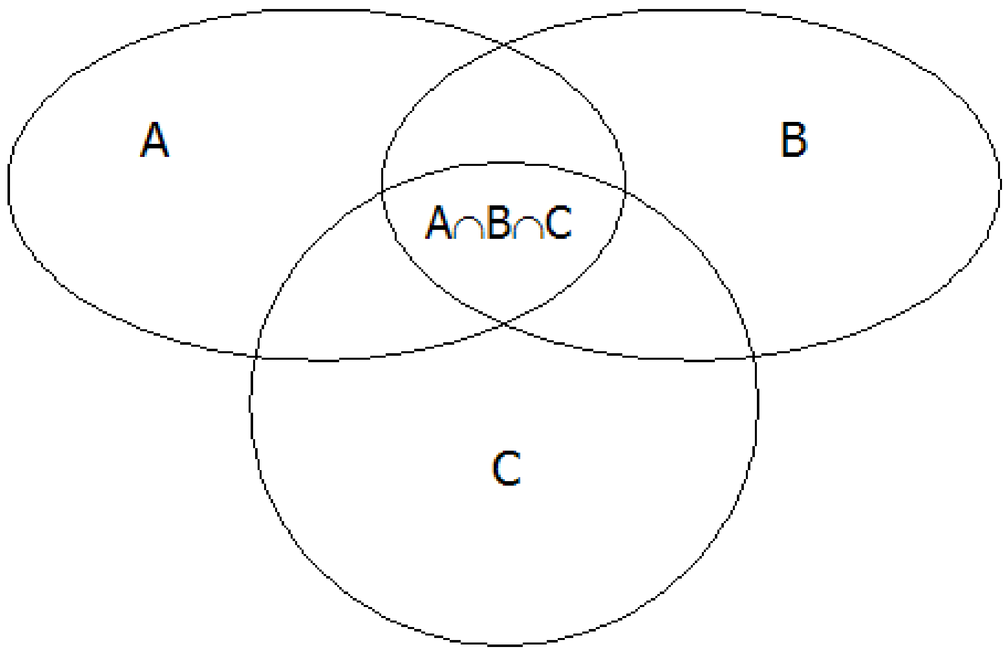
  **Solução:**

  - $A =$ conjunto de programadores para sistemas
  - $B =$ conjunto de programadores para aplicativos
  - Deve-se ter $|A \cup B|$ programadores = 55

# PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- Se $A$, $B$ e $C$ são conjuntos finitos, então:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



# Princípio da inclusão e exclusão

- **Exemplo 1:** Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, e, g, h\}$, e $C = \{b, d, e, g, h, k, m, n\}$. Verifique o princípio da inclusão-exclusão neste caso.

  **Solução:**

  - $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, g, h, k, m, n\}$
  - $A \cap B = \{a, b, e\}$, $A \cap C = \{b, d, e\}$, $B \cap C = \{b, e, g\}$
  - $A \cap B \cap C = \{b, e\}$

  - de modo que:
    - $|A \cup B \cup C| = 10$
    - $|A| = 5$, $|B| = 5$, $|C| = 8$
    - $|A \cap B| = 3$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 4$
    - $|A \cap B \cap C| = 2$

  - portanto:
    - $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 5 + 5 + 8 - 3 - 3 - 4 + 2 = 10$
    - o teorema é verificado $\square$

# PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

- **Exemplo 2:** Uma pesquisa de opinião foi feita sobre as formas de deslocamento para o trabalho dos cidadãos de Fpolis. Solicitou-se a cada entrevistado que marcasse ÔNIBUS, AMARELINHO ou CARRO como o seu modo preferencial de se deslocar. Era permitido marcar mais de uma resposta. Os resultados foram os seguintes: ÔNIBUS, 30 pessoas; AMARELINHO, 35; CARRO, 100; ÔNIBUS e AMARELINHO, 15; ÔNIBUS e CARRO, 15; AMARELINHO e CARRO, 20; todos os 3 modos, 5. Pergunta: quantas pessoas preencheram um formulário da pesquisa?

  **Solução:**

  - Sejam $O, A$ e $C$ os conjuntos das pessoas que marcaram ÔNIBUS, AMARELINHO E CARRO
  - Então, sabemos que:
    - $|O| = 30, \qquad |A| = 35, \qquad |C| = 100$
    - $|O \cap A| = 15, \qquad |O \cap C| = 15, \qquad |A \cap C| = 20$
    - $|O \cap A \cap C| = 5$
  - portanto: $|O| + |A| + |C| - |O \cap A| - |O \cap C| - |A \cap C| + |O \cap A \cap C| = 30 + 55 + 100 - 15 - 15 - 20 + 5$
    - ou seja, qtde de pessoas que responderam $= \color{red}{120} = |O \cup A \cup C|$ $\square$

# TEORIA DOS CONJUNTOS

- Final deste item.
- **Dica**: fazer exercícios sobre Teoria dos Conjuntos...