INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

6) Relações de Ordenamento

- 6.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)
- 6.2) Extremos de Posets
- 6.3) Reticulados
- 6.4) Álgebras Booleanas Finitas

Elementos extremos de posets

Definição: Considere o poset $(A,\leq)$ com a ordem parcial $\leq$. Então:

a) Um elemento $a\in A$ é chamado de um **elemento maximal** de A se não existe $c\in A$ tal que $a<c$ ($a\leq c$, $a\neq c$).

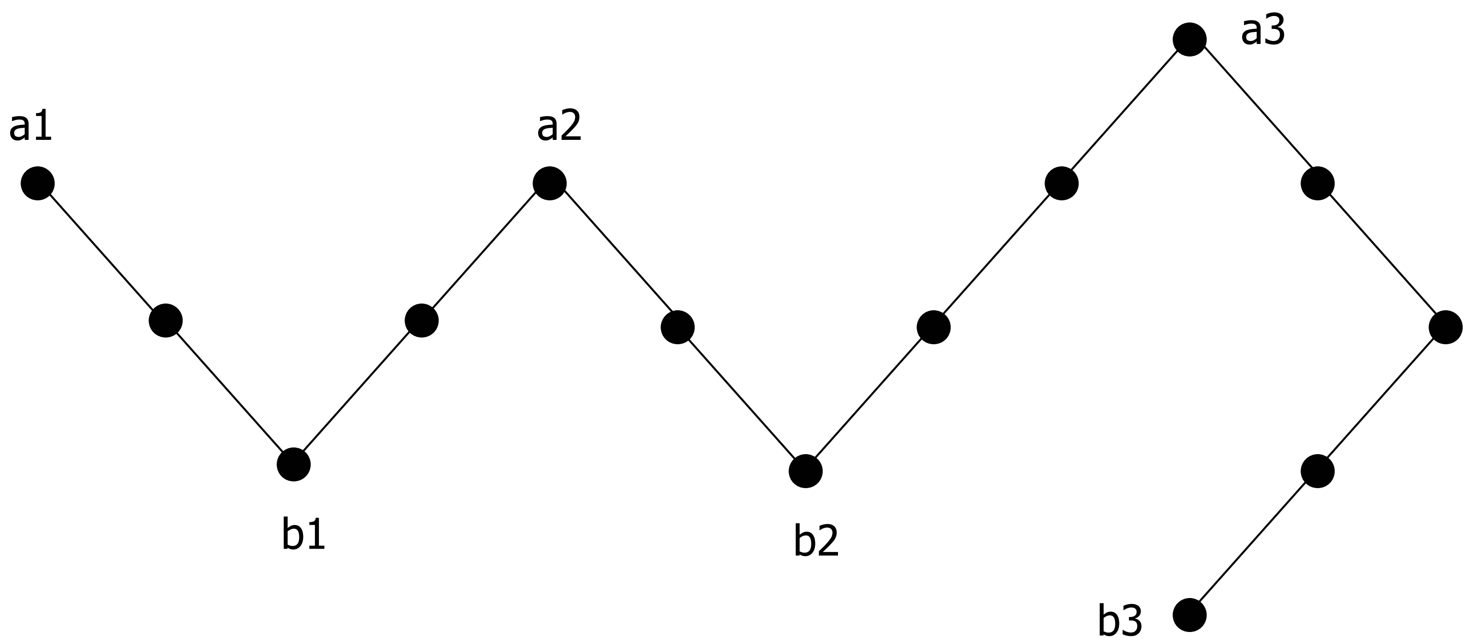
b) Um elemento $b\in A$ é chamado de um **elemento minimal** de A se não existe $c\in A$ tal que $c<b$ ($c\leq b$, $c\neq b$).

<u>Exemplos</u>:

1. $(\mathbf{Z}^+,\leq)$: elemento minimal: 1, maximal: não tem
2. $(\mathbf{R},\leq)$: elemento minimal: não tem, maximal: não tem
3. $(\{1,2,3,4\},\leq)$: elemento minimal: 1, maximal: 4
4. $(\{1,2,3,4\},\geq)$: elemento minimal: 4, maximal: 1

Elementos extremos de posets

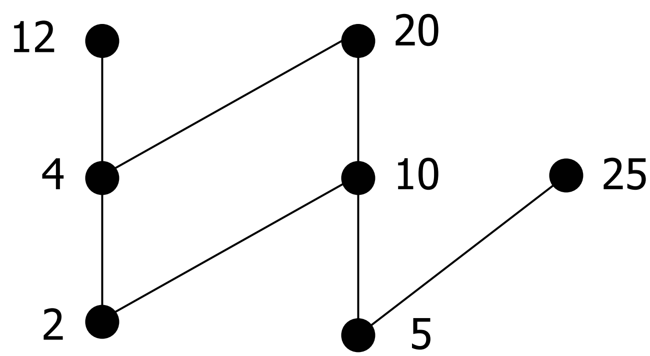
Exemplo: Considere o poset A com o diagrama de Hasse abaixo:



- a1, a2 e a3 são elementos *maximais* de A
- b1, b2 e b3 são elementos *minimais* de A

Elementos extremos de posets

<u>Exemplo</u>: Quais elementos do poset ({2,4,5,10,12,20,25},|) são maximais e quais são minimais?



- Elementos maximais: 12, 20 e 25.
- Elementos minimais: 2 e 5.
- Note que um poset pode ter mais do que um elemento maximal e mais do que um elemento minimal.

Elementos extremos de posets

Teorema: Seja $(A,\leq)$ um poset finito e não vazio com ordem parcial $\leq$. Então A tem pelo menos um elemento maximal e ao menos um elemento minimal.

Prova:

- Seja $a \in A$. Se a não é maximal, então pode-se achar $a_1 \in A$ com $a < a_1$.
- Se a_1 não é maximal então pode-se achar $a_2 \in A$ com $a_1 < a_2$.
- Este argumento não pode ser continuado indefinidamente, pois o conjunto A é finito.
- Assim, eventualmente será formada a seguinte cadeia:
  $$a < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{k-1} < a_k$$
- Não é possível encontrar mais algum $b \in A$ tal que $a_k < b$.
- Logo, a_k é um elemento maximal de $(A,\leq)$.

Algoritmo para ordenação topológica de posets

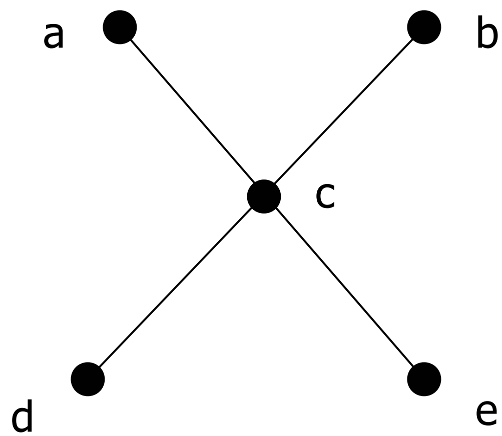
- Com o conceito de elementos minimais, pode-se estabelecer um *algoritmo* para encontrar uma ordenação topológica de um dado poset finito $(A,\leq)$.
- O algoritmo abaixo produz um vetor chamado *SORT* que satisfaz: SORT[1] $<$ SORT[2] $<$ ...
- A relação $<$ sobre A definida desta forma é uma *ordenação topológica* de $(A,\leq)$.

Algoritmo SORT:

1. $I \leftarrow 1$
2. $S \leftarrow A$
3. Enquanto $S \neq \varnothing$
   a. Escolha um elemento minimal a do conjunto S
   b. $SORT[I] \leftarrow a$
   c. $I \leftarrow I+1$
   d. $S \leftarrow S - \{a\}$

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de ≤ sobre A dado por:

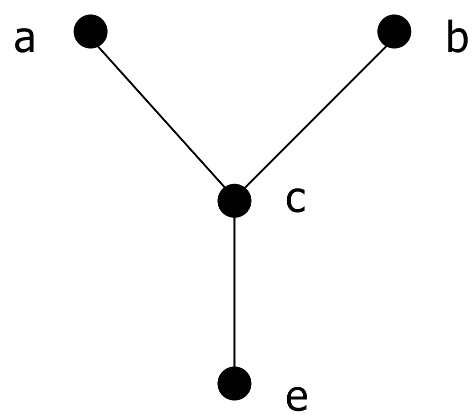


SORT				

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo (cont.)</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de ≤ sobre A dado por:

Passo 1:

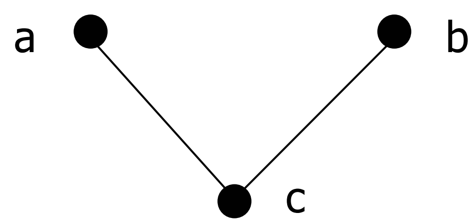


SORT				
d				

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo (cont.)</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de ≤ sobre A dado por:

Passo 2:



SORT				
d	e			

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo (cont.)</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de $\leq$ sobre A dado por:

Passo 3:

SORT				
d	e	c		

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo (cont.)</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de ≤ sobre A dado por:

Passo 4:

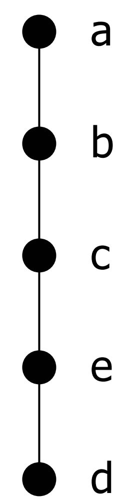
SORT				
d	e	c	b	

Algoritmo para ordenação topológica de posets

<u>Exemplo (cont.)</u>: Seja A={a,b,c,d,e} e seja o diagrama de Hasse de ≤ sobre A dado por:

Passo 5:

SORT				
d	e	c	b	a



Elementos extremos de posets

Definição: Seja o poset $(A,\leq)$. Então:

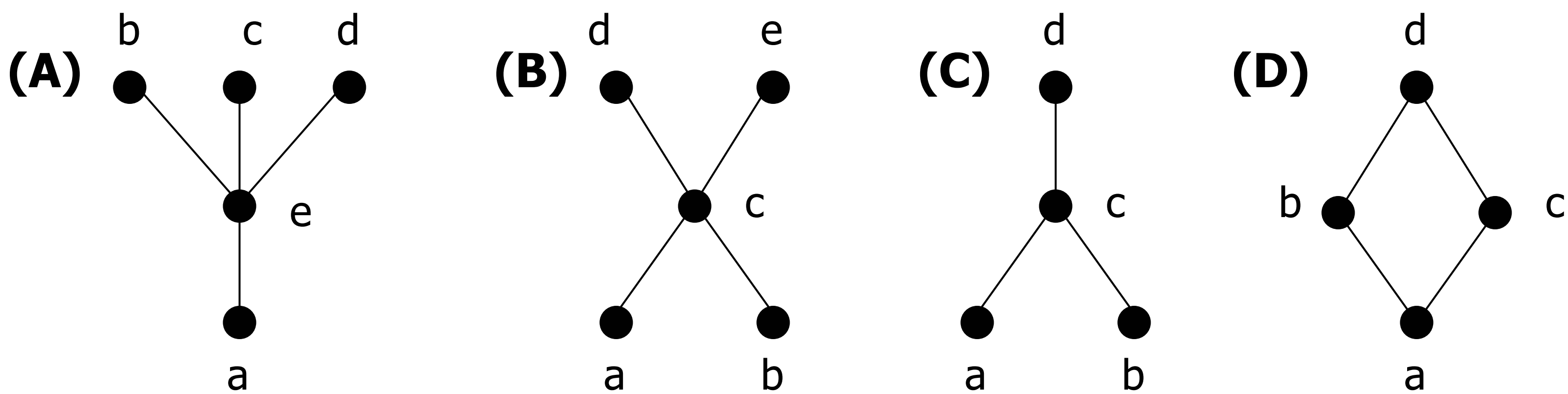
1) Um elemento $a\in A$ é chamado de um **maior elemento** de A se $b\leq a$ <u>para todo</u> $b\in A$

2) Um elemento $a\in A$ é chamado de um **menor elemento** de A se $a\leq b$ <u>para todo</u> $b\in A$.

Nota: Dado um poset $(A,\leq)$, um elemento $a\in A$ é um maior (ou menor) elemento se e somente se ele é um menor (maior) elemento do poset dual $(A,\geq)$.

Elementos extremos de posets

Exemplo: Determine se os posets representados por cada um dos diagramas de Hasse abaixo possuem um maior elemento e um menor elemento.



(A): menor elemento é a, não tem maior elemento
(B): não tem menor nem maior elemento
(C): não tem menor elemento, maior elemento é d
(D): menor elemento é a, maior elemento é d

Elementos extremos em posets

Exemplo: Seja A um conjunto. Determine se há um maior elemento e um menor elemento no poset $(P(A),\subseteq)$.

Solução:

- O menor elemento é o conjunto vazio, pois $\varnothing \subseteq T$ para qualquer subconjunto T de A.
- O próprio conjunto A é o maior elemento deste poset, pois $T \subseteq A$ sempre que T é um subconjunto de A.

Exemplo: Há um maior elemento e um menor elemento no poset $(\mathbf{Z}^+,|)$?

Solução:

- o inteiro 1 é o menor elemento, pois $1|n$ sempre que n é um inteiro positivo.
- Não há maior elemento, pois não existe inteiro que seja divisível por todos os inteiros positivos.

Elementos extremos em posets

Definição: Sejam um poset $(A,\leq)$ *e um subconjunto* $B\subseteq A$. Então:

a) um elemento $a\in A$ é chamado de uma **cota superior** ("upper bound") de B, se:

$$b \leq a, \text{ para todo } b\in B$$

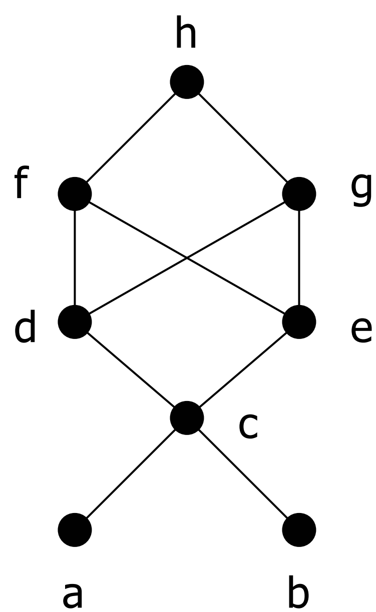
b) um elemento $a\in A$ é chamado de uma **cota inferior** ("lower bound") de B, se:

$$a \leq b, \text{ para todo } b\in B.$$

Elementos extremos em posets

<u>Exemplo</u>: Seja o poset A={a,b,c,d,e,f,g,h} com o diagrama de Hasse abaixo. Ache todas as cotas superiores e inferiores dos seguintes subconjuntos de A:

a) B_1 = {a,b} b) B_2 = {c,d,e}

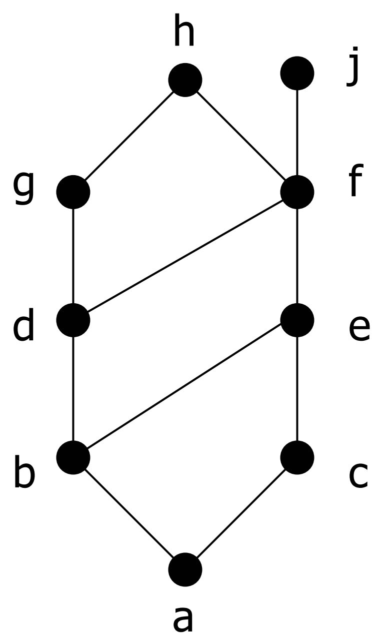


- B_1 não tem cotas inferiores
- suas cotas superiores são:
  c,d,e,f,g,h

- as cotas superiores de B_2 são:
  f,g,h
- suas cotas inferiores são:
  c,a,b

Elementos extremos em posets

<u>Exercício</u>: Encontre as cotas superiores e inferiores dos subconjuntos {a,b,c},{j,h} e {a,c,d,f} no poset cujo diagrama de Hasse é dado por:



- cotas superiores de {a,b,c}:
  e,f,j,h
- única cota inferior: a

- não há cotas superiores de {j,h}
- suas cotas inferiores são:
  a,b,c,d,e,f

- cotas superiores de {a,c,d,f}:
  f,h,j
- sua cota inferior é: a

Elementos extremos em posets

<u>Observações</u>:

- Note que um subconjunto B de um poset pode ou não ter cotas inferiores ou superiores (em A).
- Além isto, uma cota superior ou inferior de B pode ou não pertencer ao próprio B.

Menor cota superior / Maior cota inferior

Definição (1):

- Um elemento x é chamado de **Menor Cota Superior** (LUB - "Least Upper Bound") de um subconjunto A se x é uma cota superior menor do que qualquer outra cota superior de A.
  - ou seja, x será a menor cota superior de A se:

    $a \leq x$ para todo $a \in A$ e
    $x \leq z$ para todo z que seja uma cota superior de A

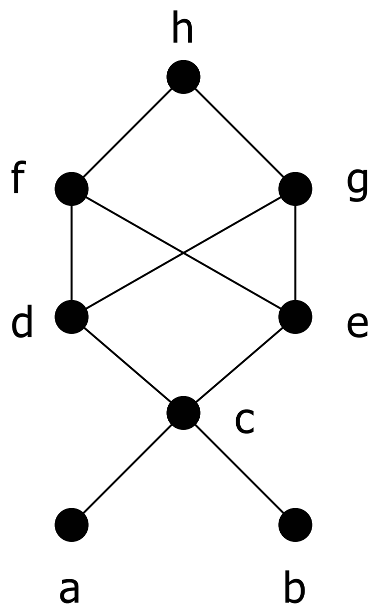
Definição (2):

- Um elemento y é chamado de **Maior Cota Inferior** (GLB - "Greatast Lower Bound") de A se y é uma cota inferior de A e $z \leq y$ para todo z que seja uma cota inferior de A

Menor cota superior / Maior cota inferior

<u>Exemplo</u>: Seja o poset A={a,b,c,d,e,f,g,h} com o diagrama de Hasse abaixo. Ache todos os LUBs e GLBs de:

a) $B_1 = \{a,b\}$ b) $B_2 = \{c,d,e\}$

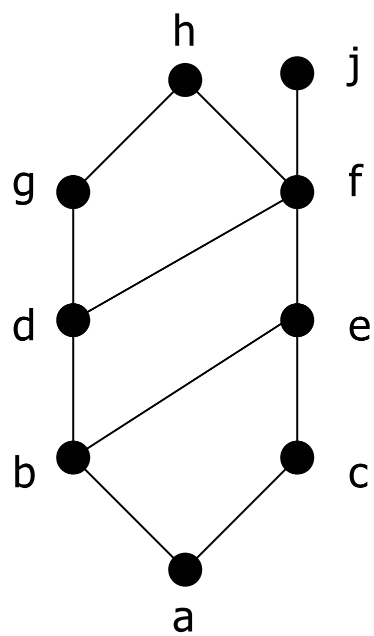


- Como B_1 não tem cotas inferiores, também não terá GLBs
- $LUB(B_1) = c$

- Como as cotas inferiores de B_2 são c,a,b, temos que $GLB(B_2) = c$
- As cotas superiores de B_2 são f,g,h - então, como f não é comparável com g, concluímos que B_2 não tem LUB

Menor cota superior / Maior cota inferior

<u>Exercício</u>: Encontre a LUB e a GLB de {b,d,g}, se elas existirem, no poset cujo diagrama de Hasse é:



- as cotas superiores de {b,d,g} são: g,h
- então, como g<h, g é a menor cota superior (LUB)

- as cotas inferiores de {b,d,g} são: a,b
- então, como a<b, b é a maior cota inferior (GLB)

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exemplo: Encontre a menor cota superior e a maior cota inferior dos conjuntos {3,9,12} e {1,2,4,5,10}, se elas existirem, no poset ($\mathbf{Z}^+$,|).

- Solução:
- GLBs (maiores cotas inferiores):
  - um inteiro é uma cota inferior de {3,9,12} se 3,9, e 12 forem divisíveis por este inteiro
    - $\rightarrow$ os únicos inteiros deste tipo são 1 e 3
    - $\rightarrow$ então, como 1|3, 3 é a *maior cota inferior* de {3,9,12}
  - a única cota inferior do conjunto {1,2,4,5,10} é o 1
    - $\rightarrow$ portanto, 1 é a *maior cota inferior* para {1,2,4,5,10}

Menor cota superior / Maior cota inferior

Exemplo (cont.): Encontre a menor cota superior e a maior cota inferior dos conjuntos {3,9,12} e {1,2,4,5,10}, se elas existirem, no poset ($\mathbf{Z}^+$,|).

- LUBs (menores cotas superiores):
  - um inteiro é uma cota superior de {3,9,12} sse ele for divisível por 3, 9 e 12.
    $\rightarrow$ os inteiros com esta propriedade são aqueles divisíveis pelo mmc de 3, 9 e 12, que é 36.
    $\rightarrow$ então, 36 é a *menor cota superior* de {3,9,12}

  - um inteiro é uma cota superior para o conjunto {1,2,4,5,10} sse ele for divisível por 1,2,4,5,10
    $\rightarrow$ os inteiros com esta propriedade são aqueles divisíveis pelo mmc de 1,2,4,5,10, que é 20.
    $\rightarrow$ então, 20 é a *menor cota superior* de {1,2,4,5,10}

Elementos extremos de posets

Teorema: Seja $(A,\leq)$ um poset. Então um subconjunto B qualquer de A tem no máximo um LUB e um GLB.

Teorema: Suponha que $(A,\leq)$ e $(A',\leq')$ são posets isomorfos sob o isomorfismo $f:A\rightarrow A'$. Então tem-se que:

a) se a é um elemento maximal (minimal) de $(A,\leq)$, então f(a) é um elemento maximal (minimal) de $(A',\leq')$;

b) se a é o maior (menor) elemento de $(A,\leq)$, então f(a) é o maior (menor) elemento de $(A',\leq')$;

c) se a é uma cota superior (inferior) de um subconjunto B de A, então f(a) é uma cota superior (inferior) do subconjunto f(B) de A′

d) se todo subconjunto de $(A,\leq)$ tem LUB (GLB), então todo subconjunto de $(A',\leq')$ tem um LUB (GLB).

Elementos extremos de posets

Exemplo: Mostre que os posets $(A,\leq)$ e $(A',\leq')$, cujos diagramas de Hasse estão mostrados abaixo, *não são isomórficos*.

Solução: Os 2 posets não são isomórficos porque $(A,\leq)$ possui um maior elemento a, enquanto que $(A',\leq')$ não possui um maior elemento.

– Também se pode argumentar que eles não são isomórficos porque $(A,\leq)$ não tem um menor elemento enquanto que $(A',\leq')$ tem.