INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

3 - INTROD. À ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1) Arranjos e Combinações

3.2) O Princípio do Pombal

3.3) Relações de Recorrência

ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Técnicas para a contagem de conjuntos são importantes na Ciência da Computação.
  - Especialmente na análise de algoritmos.

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- Resultado auxiliar:
- **Teorema 1 ("Princípio da Multiplicação para a Contagem"):**

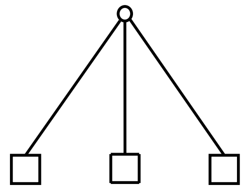
  Suponha que duas tarefas devem ser executadas em seqüência:
  - se há n_1 modos de executar a tarefa T_1
  - e se, para um destes modos, T_2 pode ser realizada de n_2 maneiras

  então a seqüência T_1T_2 pode ser realizada de n_1n_2 formas diferentes.

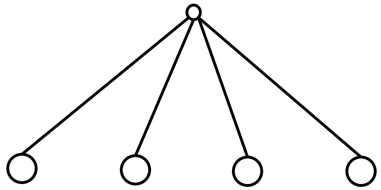
- **Prova:**
  - cada escolha de método para T_1 resulta em um caminho diferente para a seqüência
    - existem n_1 destes métodos
    - para cada um deles, podemos escolher n_2 maneiras de realizar T_2
  - logo, no todo, serão n_1n_2 opções para a seqüência T_1T_2. $\square$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

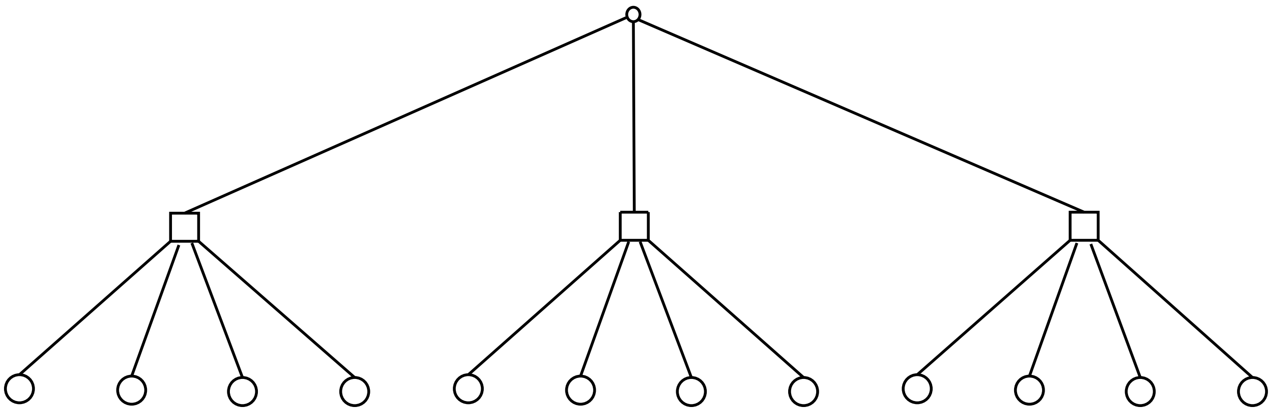
- Ilustração ($n_1 = 3$ e $n_2 = 4$):



modos possíveis para a tarefa 1



modos possíveis para a tarefa 2



modos possíveis para realizar a tarefa 1 e depois a tarefa 2

Revisão sobre Arranjos

- Este teorema pode ser facilmente estendido...
- **Teorema 2:** suponha que as tarefas $T_1, T_2, \ldots, T_k$ devem ser realizadas em seqüência:
  - se T_1 pode ser realizada de n_1 maneiras,
  - e para cada uma destas maneiras, T_2 pode ser realizada de n_2 maneiras,
  - e para cada um dos $n_1 n_2$ modos de realizar $T_1 T_2$ em seqüência, T_3 pode ser realizada de n_3 maneiras,
  - e assim por diante,

  então a seqüência $T_1 T_2 \cdots T_k$ pode ser realizada de exatamente $n_1 n_2 \cdots n_k$ modos.
- **Prova:** indução sobre k.

Revisão sobre Arranjos

- **Exemplo:** Um certo esquema de rotulagem para identificação de equipamentos consiste de uma letra seguida por 3 dígitos. Quantos identificadores distintos são possíveis, se for permitido que haja repetição?
- **Solução:**
  - pelo princípio da multiplicação estendido, existem:

    $26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26000$ possibilidades $\square$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- **Exemplo:** Seja A um conjunto com n elementos. Quantos subconjuntos A possui?

- **Solução:**
  - cada subconjunto é formado por alguns dos n elementos de A
  - a participação de cada elemento em um dado subconjunto pode ser representada como um "0" ou um "1" em um vetor de comprimento n
  - ora, pelo princípio visto, existem:

    $$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{n\ fatores} = 2^n$$

    modos de preencher o vetor
  - e, portanto, 2^n subconjuntos de A. $\square$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- **Questão:**
  - Seja A qualquer conjunto com n elementos e $1 \leq r \leq n$.
  - Quantas seqüências diferentes de comprimento r podem ser formadas usando elementos de A se:

    (a) elementos na seqüência podem ser repetidos?

    (b) todos os elementos na seqüência devem ser distintos?

- Nota: qualquer seqüência de comprimento r pode ser formada pelo preenchimento de r "caixas", em ordem, da esquerda para a direita:

			$\dots$		
caixa 1	caixa 2	caixa 3		caixa $r-1$	caixa r

  - Seja T_i a tarefa: "preencha a caixa i".
  - Então, $T_1 T_2 \cdots T_r$ representa a formação da seqüência.

Questão (continuação)

- Caso **(a)**:
  - para cada posição "i", podemos copiar qualquer elemento de A
  - ou seja, há sempre n modos de realizar cada tarefa
  - então, pelo princípio da multiplicação estendido, o número de seqüências que podem ser formadas é:

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{r\ fatores} = n^r$$

- **Teorema 3:**
  - Seja A um conjunto com n elementos e seja $1 \leq r \leq n$.
  - Então o número de seqüências de comprimento r que podem ser formadas com elementos de A, permitindo repetições, é n^r.

- **Exemplo:** Quantas "palavras" de 3 letras podem ser formadas com letras do conjunto $\{a, b, y, z\}$, se for permitido repetição?

QUESTÃO (CONTINUAÇÃO)

- Caso **(b)**:
  - T_1 ainda pode ser realizada de n modos
  - mas aí, qualquer que seja o escolhido, restam só $(n-1)$ opções
    - ou seja: há apenas $(n-1)$ maneiras de realizar T_2
  - isto continua até vermos que T_r pode ser realizada de $(n-(r-1)) = (n-r+1)$ modos
  - portanto, pelo princípio da multiplicação, uma seqüência de r elementos distintos de A pode ser montada de $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ modos

- Uma seqüência de r elementos distintos de A é chamada de "arranjo (ou permutação) de A tomado r a r".
  - Note que a quantidade destas seqüências depende apenas de n.

QUESTÃO (CONTINUAÇÃO)

- **Teorema 4:** Se $1 \leq r \leq n$, então o número de arranjos de n objetos tomados r a r é dado por:

$$_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  - Nota: na verdade, está fórmula vale para $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$

- **Exemplo:** Seja A dado por $\{1, 2, 3, 4\}$.
  - Alguns arranjos de A tomados 3 a 3: 124,421,341,243,...
  - Nro total de arranjos de A tomados 3 a 3:

$$_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

  - Alguns arranjos de A tomados 2 a 2: 12,43,31,24,21,...
  - Nro total de arranjos de A tomados 2 a 2:

$$_4P_2 = 4 \cdot 3 = 12$$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- Quando $r = n$, estamos contando todos os distintos arranjos de A em seqüências de comprimento n.
  - Estas seqüências são chamadas de **permutações**.
  - Número de permutações de A:

    $${}_nP_n = n!$$

- **Exemplo:** As possíveis permutações de $A = \{a, b, c\}$ são:

  abc, acb, bac, bca, cab e cba.

  - Note que o número destas permutações é $3! = 6$.

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- **Exemplo:** A consiste de todas as 52 cartas de um baralho.
  - Assuma que elas foram embaralhadas e que foi distribuída uma "mão" de 5 cartas.
  - Uma lista de cartas nesta "mão", na ordem em que foram dadas, é um arranjo de A 5 a 5.
  - Exemplos de mãos:
    - $A\heartsuit,\ 3\diamondsuit,\ 5\clubsuit,\ 2\heartsuit,\ J\spadesuit$
    - $2\spadesuit,\ 3\spadesuit,\ 5\spadesuit,\ Q\spadesuit,\ K\diamondsuit$
    - $J\heartsuit,\ J\diamondsuit,\ J\spadesuit,\ 4\heartsuit,\ 4\clubsuit$
    - $3\diamondsuit,\ 2\heartsuit,\ A\heartsuit,\ J\spadesuit,\ 5\clubsuit$

    - Note que a 1^a e a última mãos são arranjos diferentes.
  - Quantidade destes arranjos:

$$_{52}P_5 = \frac{52!}{47!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311875200$$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- **Exemplo:** Quantas “palavras” com 3 letras distintas podem ser formadas das letras da palavra $CASO$?

  Solução:

  - O número é ${}_4P_3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ $\square$

REVISÃO SOBRE ARRANJOS

- **Exemplo:** E se a palavra chave do exemplo anterior tivesse sido $CASA$?

  Solução:

  - ${}_4P_3$ contaria como distntos alguns arranjos que não podem ser distinguidos:
    - se rotularmos os dois As como A_1 e A_2: A_1SA_2 e A_2SA_1 são dois dos arranjos que seriam contados
    - mas, sem os rótulos, são a mesma palavra...

  - Isto leva a um último exemplo a considerar: permutações com repetições limitadas...

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES LIMITADAS

- **Exemplo (1/2):** Quantos permutações distinguíveis existem com as letras da palavra $BANANA$?

  Solução:

  - Começar rotulando os A's e os N's.
  - Para $B, A_1, N_1, A_2, N_2, A_3$ existem $6! = 720$ permutações.
  - Só que algumas destas permutações são idênticas, exceto pela ordem em que os N's aparecem:
    - exemplo: $A_1A_2A_3BN_1N_2$ e $A_1A_2A_3BN_2N_1$
    - de fato, as 720 podem ser listadas em pares que diferem apenas na ordem dos dois N's
    - isto significa que, tirando os rótulos dos N's, restam apenas $\frac{720}{2} = 360$ permutações distinguíveis

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES LIMITADAS

- **Exemplo (2/2):** Quantos permutações distinguíveis existem com as letras da palavra $BANANA$?

  Solução:

  - De modo similar, notamos que estas 360 podem ser agrupadas em grupos de $3! = 6$ que diferem apenas na ordem dos 3 A's
    - um destes grupos de 6 seria:
      $BNNA_1A_2A_3, BNNA_1A_3A_2, BNNA_2A_1A_3,$
      $BNNA_2A_3A_1, BNNA_3A_1A_2, BNNA_3A_2A_1$
    - tirando os rótulos, estas 6 ficam, simplesmente: $BNNAAA$
  - Portanto, existem $\frac{360}{6} = 60$ permutações distinguíveis das letras de $BANANA$. $\square$

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES LIMITADAS

- **Teorema:** O números de permutações distintas que pode ser formado com uma coleção de n objetos, aonde:
  - o 1^o objeto aparece k_1 vezes
  - o 2^o objeto aparece k_2 vezes
  - etc...

  é dado por:

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_t!}$$

  - aonde: $k_1 + k_2 + \cdots + k_t = n$

PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÕES LIMITADAS

- **Exemplo:** O número de “palavras” distintas que podem ser formadas a partir das letras de $MISSISSIPPI$ é:

$$\frac{11!}{1!.4!.4!.2!} = 34650$$

Revisão sobre Combinações

- O princípio da multiplicação e os métodos de contagem para permutações são todos aplicáveis a situações aonde a ordem é importante.
- Combinações estão relacionadas a alguns problemas de contagem aonde a ordem não importa.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Questão:**
  - Seja A qualquer conjunto com n elementos e $0 \leq r \leq n$.
  - Quantos subconjuntos diferentes de A existem com r elementos?
  - Os subconjuntos com r elementos de um conjunto A com n elementos são chamados de **combinações** de A tomado r a r.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
  - Combinações 3 a 3 distintas de A:

    $A_1 = \{1, 2, 3\},\ A_2 = \{1, 2, 4\},\ A_3 = \{1, 3, 4\},\ A_4 = \{2, 3, 4\}$
  - Note que se trata de subconjutos e não de seqüências.
  - Portanto:

    $A_1 = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}$
  - Ou seja: neste caso, a ordem é irrelevante.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Seja A o conjunto de todas as 52 cartas em um baralho comum.
  - Então uma combinação 5 a 5 de A é simplesmente uma “mão” de 5 cartas.
    - Sem importar o modo como as cartas foram distribuídas.

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- Agora queremos contar o número de subconjuntos com r elementos para um conjunto A com n elementos:
  - (partindo do que já sabemos sobre arranjos)
  - Note que todo arranjo ${}_nA_r$ pode ser produzido pela seqüência:

    Tarefa 1: escolha um subconjunto B de A contendo r elementos

    Tarefa 2: escolha uma permutação em particular de B
  - Estamos tentando computar o número de modos de escolher B:
    - vamos chamar este número de C
    - a tarefa 1 pode ser realizada de C modos
    - a tarefa 2 pode ser realizada de $r!$ modos
    - portanto, pelo princípio da multiplicação, o número de modos de realizar ambas as tarefas é dado por: $C \cdot r!$

Revisão sobre Combinações

- Número de subconjuntos com r elementos de um conjunto A com n elementos:
  - mas isto também é ${}_nP_r$, logo:

$$C \cdot r! \; = \; {}_nP_r \; = \; \frac{n!}{(n-r)!}$$

  - de onde tiramos que:

$$C \; = \; \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Com isto, chegamos ao resultado a seguir...

Revisão sobre Combinações

- **Teorema:** Seja A um conjunto com $|A| = n$ e seja $0 \leq r \leq n$.
  - O número de combinações dos elementos de A tomados r a r é:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

    - (que também é o nro de subconjuntos de A com r elementos)

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- Observe novamente que o número de combinações r a r de A não depende de A:
  - depende apenas de n e r.
- Este número é chamado de ${}_nC_r$:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

REVISÃO SOBRE COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Compute o número de "mãos" de 5 cartas distintas que podem ser distribuídas a partir de um baralho de 52 cartas.
- **Solução:**

$$_{52}C_5 = \frac{52!}{5!.47!} = 2598960$$

  - pois a ordem em que as cartas são dadas é irrelevante
  - compare isto com 311875200 (mesmo problema com arranjo).

- A seguir, consideraremos casos em que a repetição é permitida...

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- Considere a seguinte situação (1/3):
  - Uma estação de rádio oferece um prêmio de 3 CDs da lista dos 10 melhores.
  - A escolha dos CDs é deixada para o ganhador:
    - e é permitido repetir
    - a ordem em que as escolhas são feitas é irrelevante.
  - Queremos determinar o número de modos em que os ganhadores dos prêmios podem fazer suas escolhas.
  - Usaremos a técnica básica: reduzir o problema a um que já sabemos resolver...

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- Escolha de 3 CDs da lista dos 10 melhores (com repetição) (2/3):
  - suponha que as escolhas são gravadas pelo sistema de correio de voz da estação
  - depois de se identificar, um ganhador é solicitado a pressionar 1 se quer o CD nro n e 2 se não o quer:
    - se o 1 é pressionado, o sistema pergunta de novo sobre o CD n
    - quando o 2 é pressionado, o sistema pergunta sobre o próximo CD da lista
    - quando três 1's forem registrados, o sistema comunica a quem está na linha que os CDs selecionados serão enviados
  - um registro tem que ser criado para cada uma destas chamadas:
    - será uma seqüência de 1's e 2's
    - é claro que esta seqüência conterá três 1s
    - uma seqüência poderá chegar a conter nove 2's
      - (por exemplo: 1^{os} 9 CDs recusados + 3 cópias do CD nro 10)

Combinações com repetição

- Escolha de 3 CDs da lista dos 10 melhores (com repetição) (3/3):
  - O nosso modelo para contar o número de modos em que um ganhador do prêmio pode escolher os seus 3 CDs é o seguinte:
    - cada seleção de 3 CDs pode ser representada por um vetor contendo três 1's e nove 2's ou brancos
    - total de 12 células, como, por exemplo:
      - 222122122221 (seleção dos números 4, 6 e 10)
      - $1211bbbbbbbb$ (número 1 e duas cópias do número 2)
      - 222222222111 (três cópias do número 10)
  - O número de modos de selecionar 3 células do vetor para conter 1's é ${}_{12}C_3$
    - pois o vetor contém $3 + 9 = 12$ células e a ordem na qual esta seleção é feita não importa
- O teorema a seguir generaliza esta discussão...

Combinações com repetição

- **Teorema:** Suponha que k seleções têm que ser feitas a partir de n ítens, sem ligar para ordem e permitindo repetições
  - (assumindo que pelo menos k cópias de cada um dos n ítens estão disponíveis).

Então:

  - O número de modos em que estas seleções podem ser feitas é dado por:

$$_{n+k-1}C_k$$

COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

- **Exemplo:** de quantos modos o ganhador do prêmio pode escolher três CDs da lista dos 10 melhores se forem permitidas repetições?
- **Solução:**
  - temos $n = 10$ e $k = 3$
  - pelo teorema, são ${}_{10+3-1}C_3 \; = \; {}_{12}C_3$ modos de fazer as seleções
  - ou seja, o ganhador pode fazer a sua seleção de 220 maneiras diferentes. $\Box$

COMBINAÇÕES

- Alguns problemas requerem que a contagem de combinações seja suplementada pelo princípio da multiplicação (ou pelo da adição).
- **Exemplo:** Suponha que uma senha válida consista de 7 caracteres:
  - o 1^o é uma letra escolhida do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$
  - cada um dos outros seis é uma letra qualquer ou um dígito

  Quantas senhas diferentes são possíveis?

- **Solução:**
  - Uma senha pode ser construída pela execução em seqüência das tarefas:

    Tarefa 1: escolha uma letra inicial do conjunto dado.

    Tarefa 2: escolha uma seqüência de letras e dígitos (pode repetir).
  - A tarefa 1 pode ser realizada de ${}_7C_1 = 7$ modos.
  - A tarefa 2 pode ser realizada de $36^6 = 2176782336$ modos
  - Daí, pelo Princípio da Multiplicação, existem:

    $7 \cdot 2176782336 = 15237476352$ senhas diferentes. □

COMBINAÇÕES

- **Exemplo:** Quantos comitês diferentes de 7 pessoas podem ser formado se cada comitê contém:
  - 3 mulheres de um conjunto de 20
  - 4 homens de um conjunto de 30 ?

- **Solução:**
  - Um comitê pode ser formado pela execução das seguintes tarefas em sucessão:

    Tarefa 1: escolha 3 mulheres do conjunto de 20

    Tarefa 2: escolha 4 homens do conjunto de 30
    - Note que a ordem das escolhas não importa.
  - A tarefa 1 pode ser realizada de ${}_{20}C_3 = 1140$ modos.
  - A tarefa 2 pode ser realizada de ${}_{30}C_4 = 27405$ modos.
  - Logo, pelo Princípio da Multiplicação, existem:

    $(1140)(27405) = 31241700$ comitês diferentes. $\square$