INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

1 - LÓGICA E MÉTODOS DE PROVA

1.1) Elementos de Lógica Proposicional

1.2) Elementos de Lógica de Primeira Ordem

1.3) Métodos de Prova

1.4) Indução Matemática

1.5) Definições Recursivas

Lógica Formal

- Lógica: lida com métodos de raciocínio.
  - Regras e técnicas para determinar se argumento dado é válido.
- Aplicações diretas:
  - projeto de circuitos computacionais
  - construção e verificação de programas
- Sistemas lógicos formais da Lógica Clássica:
  - Lógica Proposicional
  - Lógica de Predicados

PROPOSIÇÕES LÓGICAS

- **Asserção**: uma declaração (afirmação, sentença declarativa).
- **Proposição**: uma asserção que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.
- **Valor verdade**: resultado da avaliação de uma proposição (V ou F).

Proposições

- **Exemplo:** Quais das seguintes asserções são proposições?

1. $2 + 3 = 5$
2. 3 não é um número par.
3. A Terra é arredondada.
4. $x > 5$
5. Esta declaração é falsa.
6. Você fala francês?
7. Leia o livro texto.

PROPOSIÇÕES

- **Exemplo:** Quais das seguintes asserções são proposições?

1. $2 + 3 = 5$ $\longrightarrow$ proposição, V
2. 3 não é um número par. $\longrightarrow$ proposição, V
3. A Terra é arredondada. $\longrightarrow$ proposição, V
4. $x > 5$ $\longrightarrow$ asserção, mas não proposição
5. Esta declaração é falsa. $\longrightarrow$ asserção, não proposição
6. Você fala francês? $\longrightarrow$ nem asserção, nem proposição
7. Leia o livro texto. $\longrightarrow$ nem asserção, nem proposição

Proposições

- Valor verdade da proposição não é necessariamente conhecido.
- **Exemplo**: “A temperatura na superfície do planeta Vênus é de 400^oC” é uma proposição.

VARIÁVEIS PROPOSICIONAIS

- Proposições podem ser denotadas por símbolos
  - tais como $p, q, r, \ldots$
  - chamados de **variáveis proposicionais**.
- Assim, pode-se escrever:
  - p: o sol está brilhando hoje.
  - q: 2 + 3 = 5

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

- Normalmente, uma argumentação não se limita ao uso de sentenças simples.
- Novas proposições podem ser construídas a partir de proposições existentes
  - com o auxílio de operadores lógicos
  - para obter **proposições compostas**

PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

- A sentença: “Não é verdade que p”
  - é uma outra proposição
  - chamada de “negação de p”
  - notação: $\neg p$, $\sim p$, $not\ p$

- **Exemplos**:
  - $p: \ 2 + 3 > 1$

    $\neg p : 2 + 3$ não é maior do que 1, (ou $2 + 3 \leq 1$)
  - q : “Hoje é quarta-feira”

    $\neg q$: “Não é verdade que hoje é quarta-feira”, ou

    $\neg q$: “Hoje não é quarta-feira”

TABELAS VERDADE

- Da definição de negação segue que:
  - se p é V, então $\neg p$ é F
  - se p é F, então $\neg p$ é V

- Logo, o valor verdade de $\neg p$, relativo a p, é dado por:

  Tabela verdade da negação:

p	$\neg p$
V	F
F	V

TABELA VERDADE

- Valores verdade de uma proposição composta em termos dos valores de suas partes componentes.

- Útil na determinação dos valores verdade de proposições construídas a partir de sentenças mais simples.

CONECTIVOS LÓGICOS

- **Operador negação**: nova proposição a partir de uma única proposição existente.
- **Conectivos**: operadores para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições já existentes.

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- **Conjunção (operação "e")**:
  - Notação: $p \wedge q$, p e q, p and q
  - Definição:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  - (Observe que há 4 possibilidades.)

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- Exemplos de conjunção ($p \wedge q$):
  - p: hoje é terça-feira
    q: está chovendo hoje
    $p \wedge q$: hoje é terça-feira e está chovendo hoje
  - p: $2 < 3$
    q: $-5 > -8$
    $p \wedge q$: $2 < 3$ e $-5 > -8$
  - p: está chovendo hoje
    q: $3 < 5$
    $p \wedge q$: está chovendo hoje e $3 < 5$

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- **Disjunção (operação "ou inclusivo")**:
  - Notação: $p \vee q$, p ou q, p or q
  - Definição:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Principais Conectivos Lógicos

- Exemplos de disjunção ($p \vee q$):
  - p: 2 é um inteiro positivo

    q: $\sqrt{2}$ é um número racional

    $p \vee q$: 2 é um inteiro positivo ou $\sqrt{2}$ é um número racional
  - p: $2 + 3 \neq 5$

    q: Curitiba é a capital de Santa Catarina

    $p \vee q$: $2 + 3 \neq 5$ ou Curitiba é a capital de Santa Catarina

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- O conectivo “ou” pode ser interpretado de duas maneiras distintas:
  - Ou inclusivo (e/ou):
    - “Eu passei em Cálculo ou eu rodei em Álgebra Linear”
      - pelo menos uma das possibilidades ocorre
      - mas ambas podem ocorrer
  - Ou exclusivo:
    - “Eu vim de carro para a UFSC ou eu vim a pé para a UFSC”
      - somente uma das possibilidades pode ocorrer

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- **Disjunção exclusiva (operação “xor”)**:
  - Notação: $p \oplus q$, p xor q, p ou q (mas não ambos)
  - Definição:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

    - V quando exatamente um dos dois é V

Principais Conectivos Lógicos

- **Condicional ou implicação (se p, então q):**
  - Notação: $p \rightarrow q$
  - Definição:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  - V quando:
    - p e q são ambos V
    - p é F (não importando q)

O CONDICIONAL

- Maneiras de expressar $p \rightarrow q$:
  - se p, então q
  - p é condição suficiente para q
  - q é condição necessária para p
  - p somente se q
  - q é conseqüência lógica de p
- Na expressão $p \rightarrow q$:
  - p é chamado de hipótese ou antecedente
  - q é chamado de conclusão ou conseqüente

O CONDICIONAL

- **Exemplo:** “Fogo é uma condição necessária para fumaça”:
  - Esta sentença pode ser reformulada como:

    “Se há fumaça, então há fogo”

  - Logo:
    - o antecedente (lógico) é: “Há fumaça”
    - o conseqüente (lógico) é: “Há fogo”

O CONDICIONAL

- **Exemplo:** Indique o antecedente e o conseqüente em:
  - “Se a chuva continuar, o rio vai transbordar”.
  - “Uma condição suficiente para a falha de uma rede é que a chave geral páre de funcionar”.
  - “Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios”.

OBSERVAÇÃO

- Na linguagem usual, a implicação $p \rightarrow q$ supõe uma relação de causa e efeito entre p e q.
  - **Exemplo:** “Se fizer sol amanhã, eu vou à praia”.
- Em lógica, $p \rightarrow q$ diz apenas que não teremos p verdadeiro e q falso ao mesmo tempo.
  - **Exemplo:** “Se hoje é domingo, então 2+2=5”.

O CONDICIONAL

- Note que se p é F, então:
  - $p \rightarrow q$ é V para qualquer q
  - ou seja: “uma falsa hipótese implica em qualquer conclusão”.

- **Exemplo 1:** “Se 2+2=5, então no Brasil não há corrupção”.

- **Exemplo 2:** Quando é que é Verdadeira a implicação:

  “Se hoje é terça-feira, então 2+3=6”?

O CONDICIONAL

- Se $p \to q$ é uma condicional. então:
  - o **converso** de $p \to q$ é a implicação $q \to p$
  - o **inverso** de $p \to q$ é a implicação $\neg p \to \neg q$
  - a **contrapositiva** de $p \to q$ é a implicação $\neg q \to \neg p$

O CONDICIONAL

- Se $p \to q$ é uma condicional. então:
  - o **converso** de $p \to q$ é a implicação $q \to p$
  - o **inverso** de $p \to q$ é a implicação $\neg p \to \neg q$
  - a **contrapositiva** de $p \to q$ é a implicação $\neg q \to \neg p$

- **Exemplo:** “Se Murilo é catarinense, então Murilo é brasileiro”.
  - $p \to q$: p: “Murilo é catarinense”
    q: “Murilo é brasileiro”
  - $q \to p$: “Se Murilo é brasileiro, então Murilo é catarinense”
  - $\neg p \to \neg q$: “Se Murilo não é catarinense, Murilo não é brasileiro”
  - $\neg q \to \neg p$: “Se Murilo não é brasileiro, Murilo não é catarinense”

PRINCIPAIS CONECTIVOS LÓGICOS

- **Bicondicional ou equivalência (**$p \rightarrow q \ \wedge \ q \rightarrow p$**):**
  - Notação: $p \leftrightarrow q$
  - Definição:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

  - V somente quando:
    - p e q têm o mesmo valor verdade

O BICONDICIONAL

- Maneiras de representar $p \leftrightarrow q$:
  - p se, e somente se, q
  - p é necessário e suficiente para q

- **Exemplo:** a equivalência "$3 > 2$ se e somente se $0 < 3 - 2$" é V?
  - $p: \; 3 > 2$ (V)
  - $q: \; 0 < 3 - 2$ (V)
  - logo: $p \leftrightarrow q$ é Verdadeira $\square$

Proposições Compostas

- Podem ter muitas partes componentes, cada parte sendo uma sentença representada por alguma variável proposicional.
- Construídas com o auxílio dos conectivos lógicos.
- **Exemplos:**

$$s: \ p \rightarrow [q \wedge (p \rightarrow r)]$$

$$s: \ \neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)]$$

$$r: \ [\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

TRADUZINDO SENTENÇAS PARA LÓGICA

- **Exemplo:** Encontrar a proposição que traduz a seguinte sentença:

  "Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1,80m, a não ser que você tenha mais do que 16 anos".

  - Definindo:

    q: "você pode andar de patins"

    r: "você tem menos do que 1,80m"

    s: "você tem mais do que 16 anos"

  - a sentença pode ser traduzida por:

    $p: \ (r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$ $\square$

TABELAS VERDADE DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

- A sentença: $s:\ p \rightarrow [q \wedge (p \rightarrow r)]$
  - envolve 3 proposições independentes
  - logo, há $2^3 = 8$ situações possíveis:

p	q	r	$p \rightarrow [q \wedge (p \rightarrow r)]$
V	V	V	?
V	V	F	?
V	F	V	?
V	F	F	?
F	V	V	?
F	V	F	?
F	F	V	?
F	F	F	?

Construindo Tabelas verdade

- A tabela verdade de uma proposição composta de n variáveis:

1) 1ras n colunas da tabela são rotuladas com as variáveis
   - outras colunas servirão para combinações intermediárias
2) sob as 1ras colunas, lista-se os 2^n possíveis conjuntos de valores verdade das variáveis
3) para cada linha, computa-se os valores verdade restantes

Construindo Tabelas verdade

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$: (1/3)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Construindo Tabelas verdade

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \vee q) \to (r \leftrightarrow p)$: (2/3)

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

CONSTRUINDO TABELAS VERDADE

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$: (3/3)

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

$\square$

Construindo Tabelas verdade

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$: (1/3)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Construindo Tabelas verdade

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \longrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \longrightarrow \neg p)$: (2/3)

p	q	$p \longrightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \longrightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Construindo Tabelas verdade

- **Exemplo:** Tabela verdade de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ (3/3):

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

equivalentes

$\square$

Classificação de Proposições Compostas

- **Tautologia**: proposição sempre V (em todas as possíveis situações).
  - Exemplo: $p \vee \neg p$
- **Contradição** (ou absurdo): sempre F (todas as situações).
  - Exemplo: $p \wedge \neg p$
- **Contingência**: pode ser V ou F
  - “nem tautologia nem contradição”

Equivalência lógica

- Se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, p e q são ditas logicamente equivalentes.
  - Notação: $p \Leftrightarrow q$
- Se $p \Leftrightarrow q$, os dois lados são simplesmente diferentes modos de construir a mesma sentença.
- Um importante recurso da argumentação lógica é a substituição de uma proposição por outra equivalente.

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- Determinação da equivalência: Tabelas Verdade.

- **Exemplo:** Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (1/3)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

EQUIVALÊNCIA LÓGICA

- Determinação da equivalência: Tabelas Verdade.

- **Exemplo:** Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (2/3)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Equivalência Lógica

- Determinação da equivalência: Tabelas Verdade.

- **Exemplo:** Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes. (3/3)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

$\square$

ALGUMAS EQUIVALÊNCIAS IMPORTANTES

Equivalência	*Nome das leis*
$p \vee p \Leftrightarrow p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotência
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Dupla negação
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Comutatividade
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	Associatividade
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributividade
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan

- outras tautologias no livro-texto...

USO DAS EQUIVALÊNCIAS

- **Exemplo:**
  - $p \lor q$: "O rio é raso ou poluído."
  - $\neg(p \lor q)$: **?**

  Solução:

  - pelas leis de De Morgan:

    $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

  - logo:

    $\neg(p \lor q)$: "O rio não é raso E não é poluído."

- Note que $\neg(p \lor q)$ não é equivalente a:

  "O rio não é raso OU não é poluído."

USO DAS EQUIVALÊNCIAS

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes.

Uso das equivalências

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (1/6)

$\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ 2^a lei de De Morgan

Uso das equivalências

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (2/6)

$$
\begin{aligned}
\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && 2^a \text{ lei de De Morgan} \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] && 1^a \text{ lei de De Morgan}
\end{aligned}
$$

USO DAS EQUIVALÊNCIAS

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (3/6)

$$
\begin{aligned}
\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{2}^a \text{ lei de De Morgan} \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] && \text{1}^a \text{ lei de De Morgan} \\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{Dupla negação}
\end{aligned}
$$

Uso das equivalências

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (4/6)

$$
\begin{array}{rcll}
\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] & \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{2}^a \text{ lei de De Morgan} \\
 & \Leftrightarrow & \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] & \text{1}^a \text{ lei de De Morgan} \\
 & \Leftrightarrow & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{Dupla negação} \\
 & \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{Distributividade}
\end{array}
$$

USO DAS EQUIVALÊNCIAS

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (5/6)

$$\begin{array}{rcll}
\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] & \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{2}^a \text{ lei de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow & \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] & \text{1}^a \text{ lei de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{Dupla negação} \\
& \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{Distributividade} \\
& \Leftrightarrow & F \vee (\neg p \wedge \neg q) & \neg p \wedge p \text{ é contradição}
\end{array}$$

Uso das equivalências

- **Exemplo:** Mostre que $\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)]$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes. (6/6)

$$\begin{array}{rcll}
\neg[(p \vee (\neg p \wedge q)] & \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{2}^a \text{ lei de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow & \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q)] & \text{1}^a \text{ lei de De Morgan} \\
& \Leftrightarrow & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{Dupla negação} \\
& \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{Distributividade} \\
& \Leftrightarrow & F \vee (\neg p \wedge \neg q) & \neg p \wedge p \text{ é contradição} \\
& \Leftrightarrow & \neg p \wedge \neg q & p \vee F \Leftrightarrow p \qquad \square
\end{array}$$

LÓGICA PROPOSICIONAL

- Final deste item.

- **Dica**: fazer exercícios sobre Lógica Proposicional...