INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

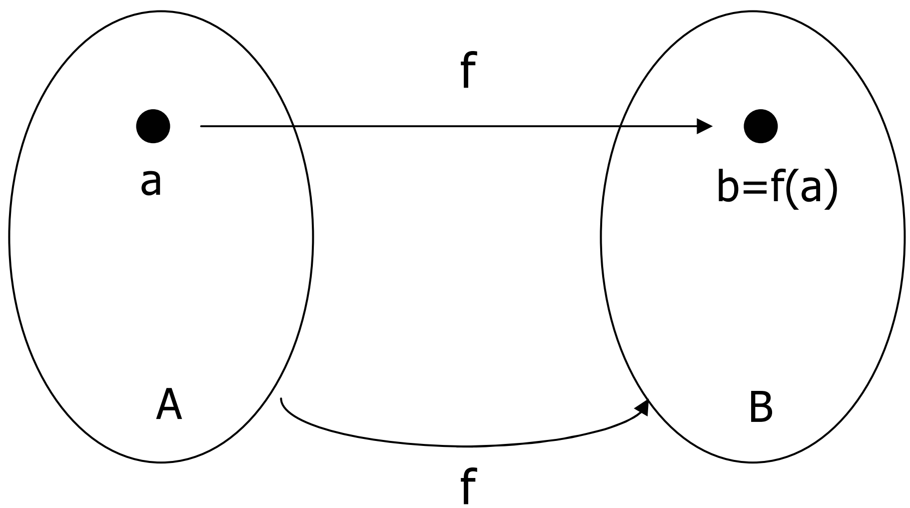
5) Funções

5.1) Definições e Tipos

5.2) Crescimento de Funções

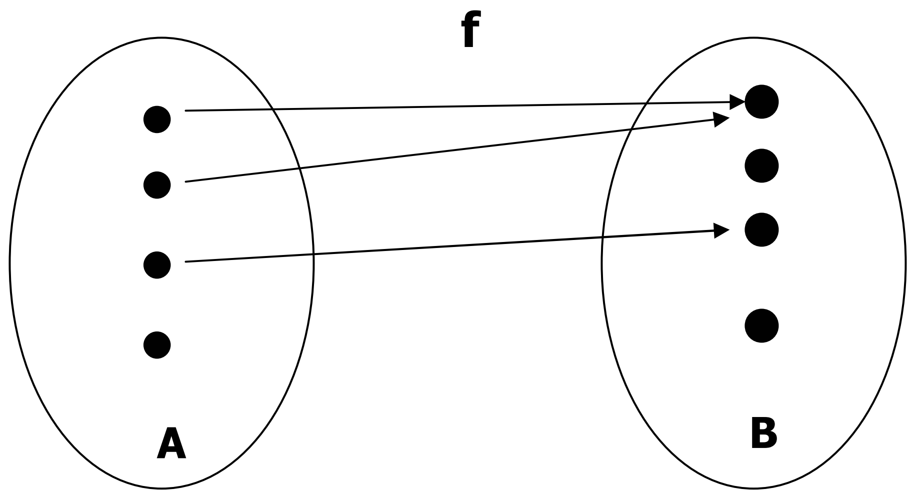
Funções

- Sejam A e B conjuntos não-vazios. Uma **função** f de A em B, denotada por $f:A\rightarrow B$, é uma *relação* de A em B tal que:
  - para todo $a \in Dom(f)$, f(a) contém *apenas um elemento*.

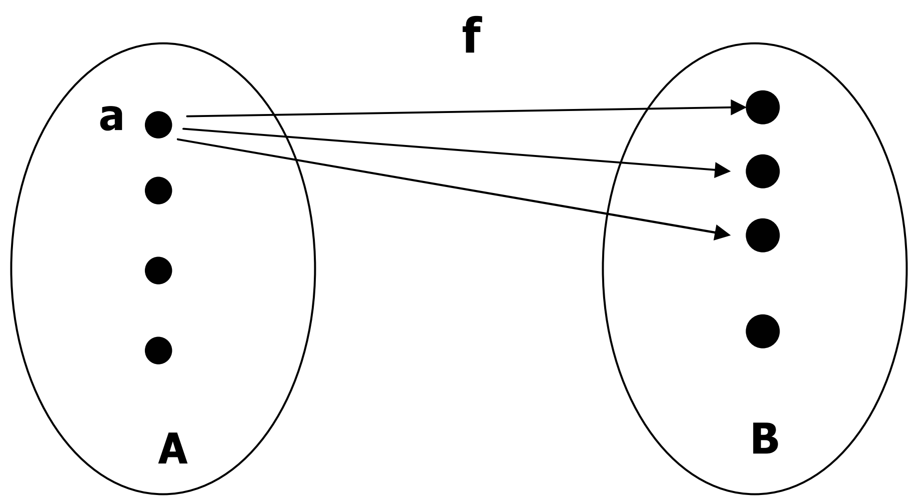


Funções

Exemplo de função:



<u>NÃO</u> é função:



Funções

- Observações:
  - Se $a \notin Dom(f)$, então $f(a)=\emptyset$
  - Se $f(a)=\{b\}$, escreve-se $f(a)=b$
  - A relação f como definida acima pode ser escrita como o conjunto dos pares:

    $$\{(a,f(a)) \mid a \in Dom(f)\}$$
  - o elemento a é chamado de **argumento** da função
  - f(a) é chamado de **valor** de f para o argumento a
    - também designado por **imagem** de a sob f

Funções

- Exemplo1: Sejam A={1,2,3,4} e B={a,b,c,d} e seja

  $$f=\{(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)\}$$

  - Assim, os valores de f de x, para cada $x \in A$ são:

    $f(1)=\{a\}$, $f(2)=\{b\}$, $f(3)=\{d\}$, $f(4)=\{c\}$

  - como cada conjunto f(x), para $x \in A$, tem um único valor, então *f é uma função*.

Funções

- Exemplo2: Sejam A={1,2,3} e B={x,y,z} e considere as relações

  R={(1,x),(2,x)}   e   S={(1,x),(1,y),(2,z),(3,y)}

  Então:

  – R é uma função com Dom(R)={1,2} e Im(R)={x}

  – S *não é uma função* pois S(1)={x,y}

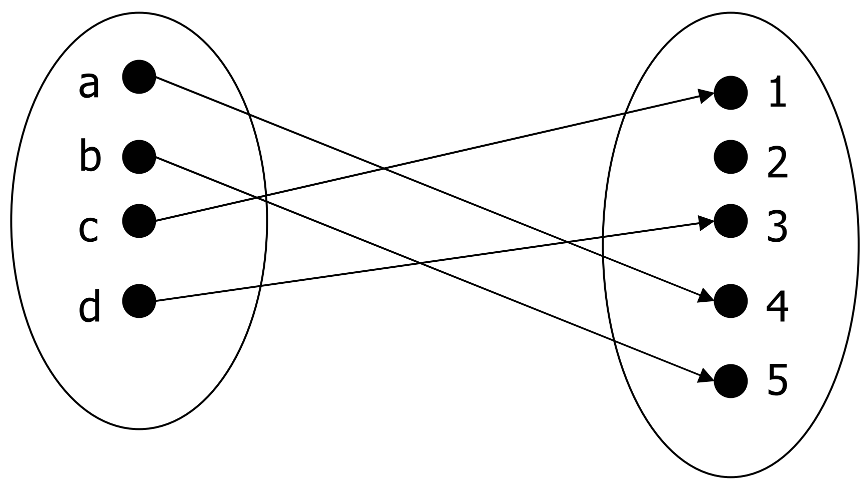
- Exemplo3: Seja A um conjunto arbitrário não-vazio. A função **identidade de A**, denotada por $\mathbf{1}_A$, é definida por

  $$1_A(a)=a$$

Tipos especiais de funções

- Uma função f de A em B é dita "um-para-um" ou **injetora** se e somente se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$.
  - Também: se $f(a)=f(a')$ então $a=a'$

- Exemplo1: Determine se a função f de {a,b,c,d} em {1,2,3,4,5}, com $f(a)=4$, $f(b)=5$, $f(c)=1$ e $f(d)=3$ é injetora.



Funções injetoras

- Exemplo2: Determine se a função $f(x)=x^2$, dos inteiros para os inteiros, é injetora.

  Solução: A função $f(x)=x^2$ *não é injetora*

  – pois, por exemplo, $f(1)=f(-1)=1$, mas $1 \neq -1$.

- Exemplo3: Determine se a função $f(x)=x+1$ é injetora.

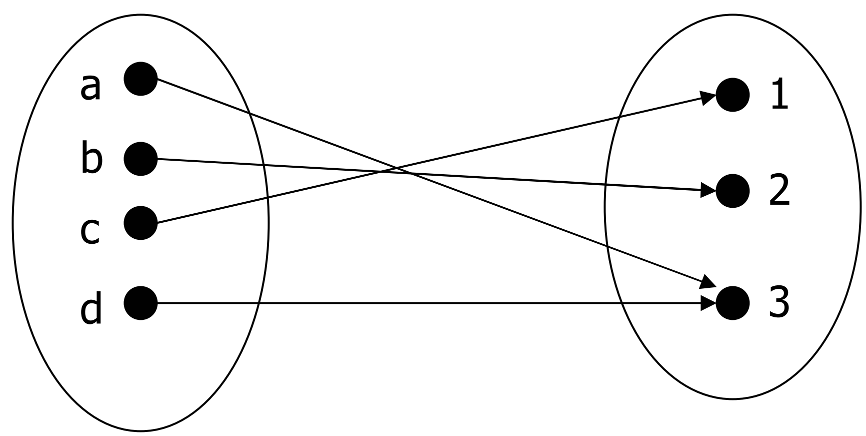
  Solução: A função $f(x)=x+1$ *é injetora*.

  – Para provar isto, note que $x+1 \neq y+1$ quando $x \neq y$.

Tipos especiais de funções

- Uma função f de A em B é chamada de **sobrejetora** sse para todo elemento $b \in B$ há um elemento $a \in A$ com $f(a)=b$.
  - Equivalentemente, f é sobrejetora se $Im(f)=B$ (inteiro)

- Exemplo1: Seja f a função de {a,b,c,d} em {1,2,3}, definida por $f(a)=3$, $f(b)=2$, $f(c)=1$ e $f(d)=3$. Esta função é sobrejetora?



Funções sobrejetoras

- Exemplo2: A função $f(x) = x^2$, *dos inteiros para os inteiros*, é sobrejetora?

  Solução: A função f *não é sobrejetora*

  - pois, por exemplo, não há inteiro x que forneça $x^2 = -1$.

- Exemplo3: Determine se a função $f(x)=x+1$, dos inteiros para os inteiros, é sobrejetora.

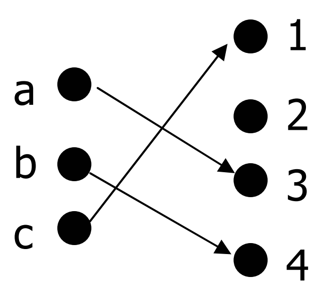
  Solução: Esta função *é sobrejetora*, pois:

  - para todo inteiro y, sempre há um inteiro x tal que $f(x)=y$.

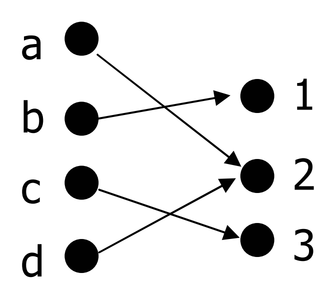
Tipos especiais de funções

- Uma função f é uma correspondência de um-para-um, ou uma *função* **bijetora**, se ela for *injetora* e *sobrejetora*.
- <u>Resumindo</u>: Exemplos de diferentes tipos de correspondências:

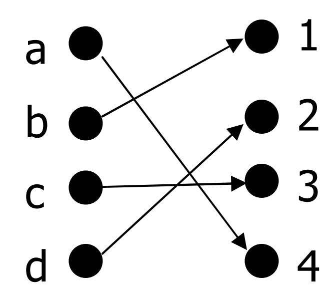
a) Injetora, mas não sobrejetora:



b) Sobrejetora, mas não injetora:



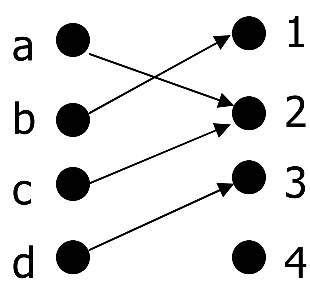
c) Injetora e sobrejetora:



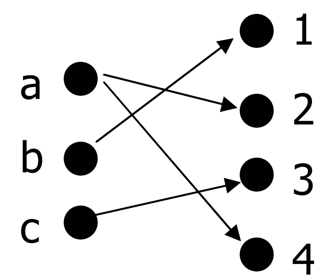
Tipos especiais de funções

- Resumindo: diferentes tipos de correspondências (continuação):

d) Nem injetora, nem sobrejetora:



e) Não é função:



Tipos especiais de funções

- Def.: Seja $f:A \rightarrow B$ uma função bijetora. A **função inversa de f** é a função que associa a um elemento $b \in B$ o elemento único *a* em A tal que $f(a)=b$.
  - A função inversa de f é denotada por f^{-1}.
  - Portanto, $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a)=b$.
  - Uma função bijetora é chamada de inversível.

Funções inversas

- Exemplo1: Seja f a função de {a,b,c} para {1,2,3} tal que f(a)=2, f(b)=3 e f(c)=1. Verifique se a função f é inversível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

- Solução: A função f é inversível, pois é bijetora. A função f^{-1} é dada por:

  $f^{-1}(1)=c$, $f^{-1}(2)=a$ e $f^{-1}(3)=b$.

Funções inversas

- Exemplo2: Seja f a função de Z para Z com $f(x)=x^2$. Esta função é inversível?

- Solução:
  - Como $f(-1)=f(1)=1$, f não é injetora.
  - Se uma f^{-1} fosse definida, ela teria que associar dois elementos a 1 $\Rightarrow$ f não é inversível.

Composição de funções

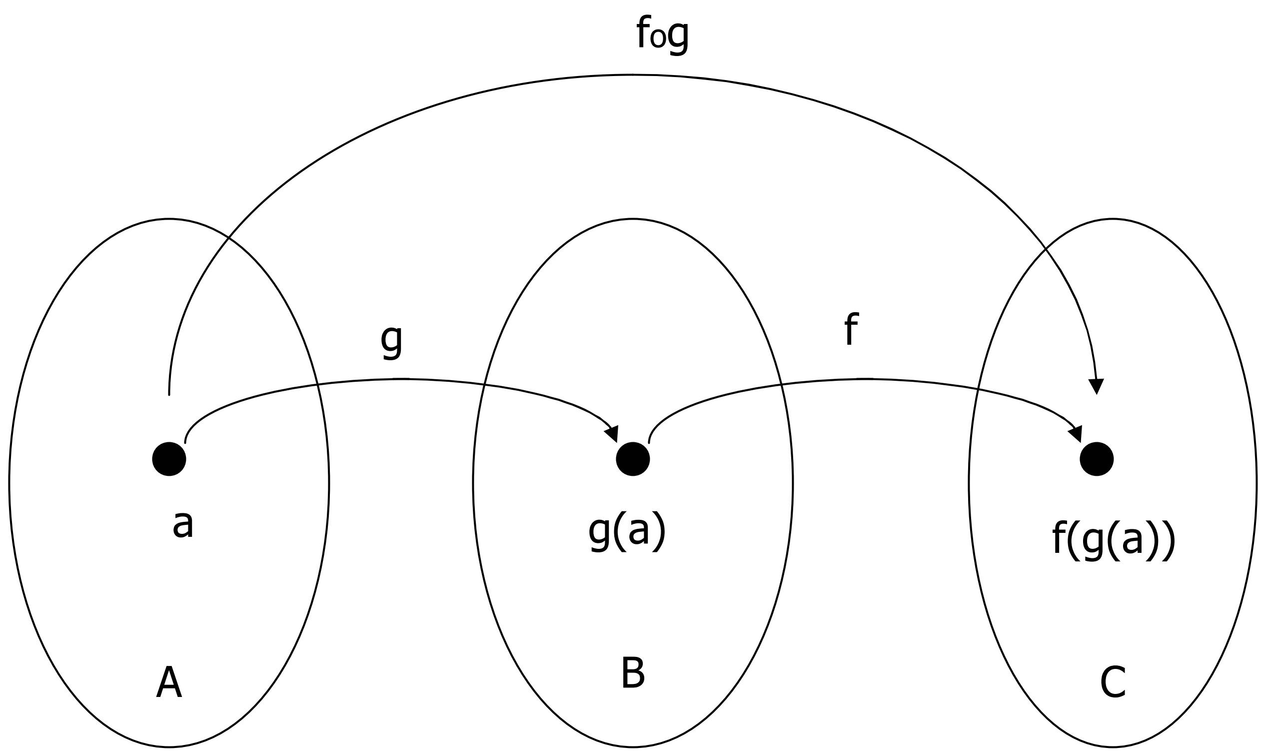
- Sejam:
  - g uma função do conjunto A para o conjunto B e
  - f uma função do conjunto B para o conjunto C.

  A **composição** das funções f e g, denotada por $f \circ g$, é definida por:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

- ou seja, $f \circ g$ é a função que associa ao elemento $a \in A$ o elemento associado por f a g(a)

Composição de funções



Composição de funções

- <u>Exemplo1</u>:
  - Seja g a função do conjunto {a,b,c} para ele mesmo tal que $g(a)=b$, $g(b)=c$ e $g(c)=a$
  - Seja f a função do conjunto {a,b,c} para o conjunto {1,2,3} tal que $f(a)=3$, $f(b)=2$ e $f(c)=1$.
  - Determine a composição de f e g e a composição de g e f.

- <u>Solução</u>:
  - A composição $f \circ g$ é definida por:

    $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b)=2$

    $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c)=1$

    $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a)=3$
  - Note que $g \circ f$ não está definida, pois o contradomínio de f não é um subconjunto do domínio de g.

Composição de funções

- Exemplo2: Sejam f e g as funções do conjunto dos inteiros para o conjunto dos inteiros definidas por:

$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = 3x + 2$$

Determine a composição de f e g e a composição de g e f.

- Solução:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 2.(3x+2) + 3 = 6x+7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3) = 3.(2x+3) + 2 = 6x + 11$$

Funções

- <u>Exemplo3</u>: Seja A=Z, B=Z e C o conjunto dos inteiros pares. Seja $f:A \rightarrow B$ e $g:B \rightarrow C$ definida por

  $f(a)=a+1,$ para $a \in A$
  $g(b)=2.b,$ para $b \in B$

  Encontre $g \circ f$.

  <u>Solução</u>: $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(a+1) = 2.(a+1)$

  $\Rightarrow \quad g \circ f(a) = 2.(a+1)$

Composição de funções

- Note que a composição de funções *não é comutativa*.
- A composição de uma função e sua inversa, em qualquer ordem, leva à função identidade:
  - Suponha que f é uma função bijetora de A para B
  - A função inversa reverte a correspondência da função original:

    $f^{-1}(b)=a$ quando $f(a)=b$

    $f(a)=b$ quando $f^{-1}(b)=a$

  - Portanto:

    $$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$
    $$(f^{-1} \circ f)(b) = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(a) = b$$

  - Consequentemente,

    $$f^{-1} \circ f = 1_A$$
    $$f \circ f^{-1} = 1_B$$