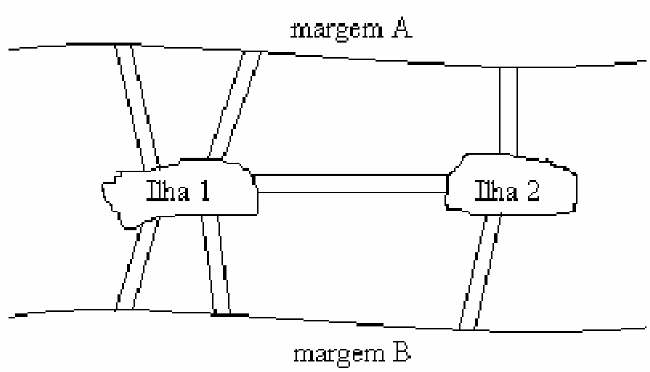
Problemas envolvendo cobertura de vias

Este tipo de problema está presente em diversas aplicações logísticas. Envolve problemas como o dimensionamento de serviços de coleta de lixo, serviços de limpeza urbana, serviços de entrega postal entre outros, em que os veículos ou pessoas devem cobrir todas as ruas que formam a rede urbana.

O problema clássico de cobertura de vias surgiu da formulação do problema conhecido como "problema das sete pontes de Königsberg", analisado pelo físico e matemático Leonhard Euler (séc. XVIII).

O problema consistia em representar uma rota possível para que uma procissão pudesse percorrer as sete pontes, passando por cada uma delas apenas uma vez.



Problema das sete pontes de Königsberg

Euler demonstrou que não era possível representar um roteiro com esta característica, e ao demonstrar conseguiu desenvolver uma metodologia e uma série de propriedades que nos permitem atacar problemas mais complexos dos dias atuais.

Mais recentemente um artigo foi publicado no jornal "Chinese Mathematics", artigo este que deu origem ao problema atualmente conhecido como "problema do carteiro chinês".

Sua formulação é a seguinte:

Seja um grafo não orientado $G(N, A)$, com extensões dos arcos dadas por $l(i, j)$, todas positivas. O problema do carteiro chinês se resume em encontrar um percurso que cubra todos os arcos do grafo G pelo menos uma vez, e para o qual a extensão total:

$$L = \sum_{\substack{todos\ os \\ arcos\ \in\ A}} n(i, j).l(i, j)$$

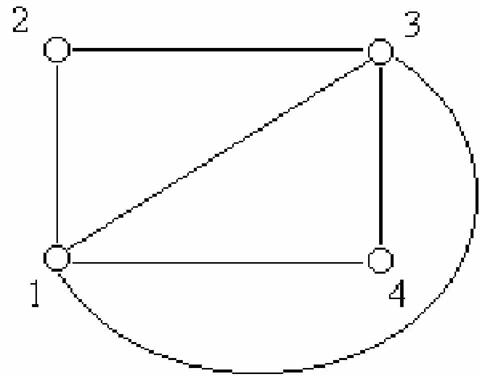
seja mínima, sendo $n(i, j)$ o número de vezes que o arco (i, j) é percorrido

Propriedades básicas (Roteiro da trilha de Euler)

1. Um roteiro de Euler é um circuito que atravessa todos os arcos de um grafo somente uma vez.
2. Uma trilha de Euler é uma trilha que cobre todos os arcos de um grafo somente uma vez.
3. O grau de um nó é igual ao número de arcos que incidem sobre ele.

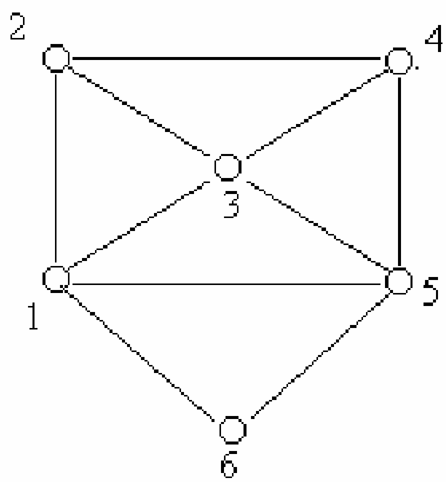
Teoremas sobre roteiros e trilhas de Euler

1. Um grafo conexo G (não orientado) possui um roteiro de Euler se e somente se G não contiver nenhum nó de grau ímpar.



Roteiro de Euler $2-3-4-1-3-1-2$

2. Um grafo conexo G possui uma trilha de Euler se e somente se G contiver exatamente dois nós de grau ímpar.



Trilha de Euler $2-1-6-5-3-2-4-3-1-5-4$
(início e fim nos nós de grau ímpar)

3. Num grafo não orientado, o número de nós de ordem ímpar, é sempre par.

Esta propriedade pode ser demonstrada, lembrando que a soma dos graus de todos os nós será obrigatoriamente um número par, visto que cada arco incide sempre em dois nós. Assim, se houvesse um número ímpar de nós de ordem ímpar, a soma total de todos os graus seria também ímpar, o que não é possível.

Solução do problema do carteiro chinês

Este problema consiste em um veículo ou indivíduo sair de um determinado ponto i cobrir toda a rede de forma a minimizar a extensão total e retornar ao mesmo ponto i.

Entretanto, já sabemos (por propriedades) que nem sempre é possível determinar um roteiro de Euler num grafo $G(N,A)$, de modo a percorrer por todas as vias passando por cada uma delas apenas uma vez. Em alguns grafos deveremos passar por uma via mais de uma vez de modo a cobrir todo o percurso.

Para sanar este problema acrescentamos arcos artificiais ao grafo original, obtendo um novo grafo $G'(N,A')$, tornando os nós de grau ímpar em nós de grau par, possibilitando assim a criação de um roteiro de Euler.

Estes arcos artificiais correspondem a percursos duplos. A colocação destes arcos artificiais deve ser feita de modo a minimizar a extensão total a ser percorrida.

Processo para solução do carteiro chinês

1º passo:
Identificar todos os nós de ordem ímpar no grafo $G(N, A)$.

2º passo:
Determinar as combinações possíveis de nós de grau ímpar, interligando-os com arcos artificiais de maneira a formar grafos expandidos, contendo somente nós de grau par.
O número de combinações possíveis dos nós de grau ímpar é dado por:

$$N_C = \prod_{i=1}^{m/2} (2i - 1)$$

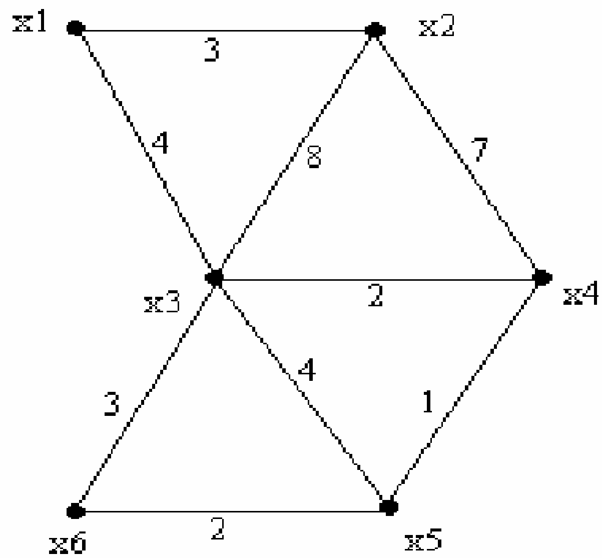
onde m é o número de nós de ordem ímpar.

3º passo:
Selecionar, entre os grafos expandidos determinados no passo dois, o grafo $G'(N, A')$ que apresentar menor extensão total dos arcos artificiais.

4º passo:
Determinar um roteiro de Euler para o grafo $G'(N, A')$.
O roteiro determinado será a solução otimizada do problema do carteiro chinês.
Para determinar a extensão total a ser percorrida no roteiro de Euler, basta somar as extensões dos arcos de $G(N, A)$ com as extensões dos arcos artificiais do grafo $G'(N, A')$.

Exemplo 1:

Na figura seguinte vamos determinar um roteiro de Euler, utilizando o processo para solução do problema do carteiro chinês.



Solução:

- Nós ímpares de $G(6,9) = 4$, são eles: $x2,\ x3,\ x4,\ x5$.

- Determinar o número de combinações dos nós ímpares

$$N_C = \prod_{i=1}^{4/2} (2i-1) = (2.1-1).(2.1-1) = 3 \ \ combinações$$

Combinações possíveis:

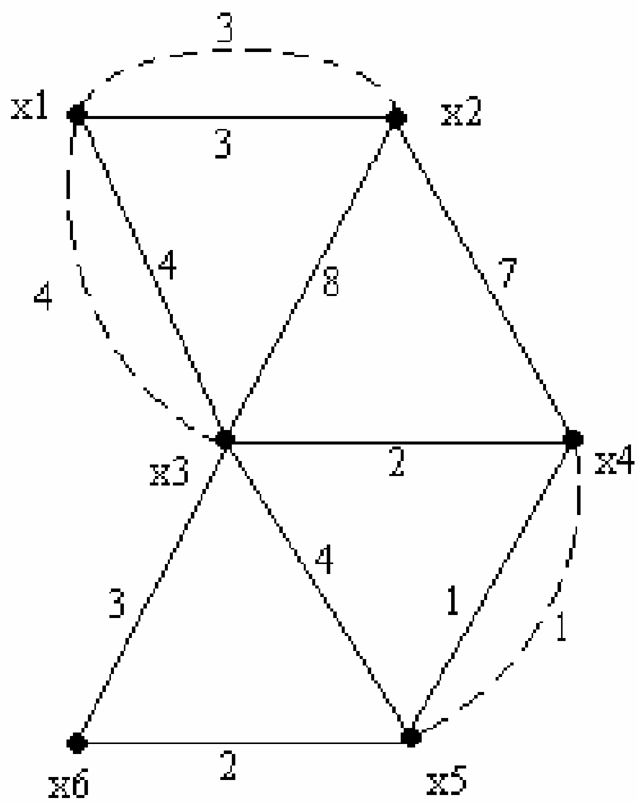
combinando $x2$ com $x3$ e $x4$ com $x5$, obtemos $d(x2,x3)+d(x4,x5)=7+1=8$

combinando $x2$ com $x4$ e $x3$ com $x5$, obtemos $d(x2,x4)+d(x3,x5)=7+3=10$

combinando $x2$ com $x5$ e $x3$ com $x4$, obtemos $d(x2,x5)+d(x3,x4)=8+2=10$

- Verificamos que a melhor situação para acrescentarmos os nós artificiais é se combinarmos $x2$ com $x3$ e $x4$ com $x5$.

Assim, representamos *G'* da seguinte maneira:



- Determinar um roteiro de Euler (solução otimizada do problema)

Roteiro:
$x1 - x2 - x3 - x5 - x4 - x5 - x6 - x3 - x4 - x2 - x1 - x3 - x1$

Extensão total percorrida = soma das extensões do grafo $G(6,9)$ + soma das extensões dos arcos artificiais de G' $= 34 + 8 = 42$.

Problemas envolvendo cobertura de nós

Este tipo de problema busca o trajeto de percurso mínimo para cobrir todos os nós de uma rede.

O problema do caixeiro viajante é típico de problemas envolvendo cobertura de nós e originalmente foi formulado da seguinte maneira: existem N pontos (nós) numa rede; o caixeiro viajante deve partir de um dado ponto (base) e visitar os N pontos da rede pelo menos uma vez, retornando, ao fim, para o ponto de partida.

Problemas práticos logísticos se enquadram no problema do caixeiro viajante, tais como:

- serviços de conserto;
- ligações de telefone, luz;
- distribuição física de produtos (as zonas contém um certo número de pontos para coleta e/ou entrega)

Existem diversas formulações do problema do caixeiro viajante e vários métodos para resolvê-lo. No entanto estes métodos não são computacionalmente eficientes, o que tem levado os pesquisadores a utilizarem processos aproximados (heurísticos), que geram soluções satisfatórias.

Pontos que devem ser salientados para que se tenha a formulação geral do problema do caixeiro viajante, que atende a maioria dos problemas práticos de roteirização:

1. A pessoa deve sair de sua sede e visitar $N-1$ pontos. Após efetuar as visitas deverá retornar a base.

2. Tem-se assim uma rede com N pontos, formada pelo ponto que é a base e os $N-1$ pontos a serem visitados. Admite-se então que a rede é completamente conexa, ou seja, é possível ir de um nó a um outro qualquer sem ser necessário passar por qualquer um dos outros nós da rede. Com isso têm-se que para todo arco (i,j) está associado uma extensão $l(i,j)$.

3. Admite-se a desigualdade triangular, onde temos que a extensão de um dos lados de um triângulo é sempre menor ou igual a soma dos outros dois lados:

$$l(i,j) \leq l(i,k) + l(k,j)$$

4. A matriz de distância entre os nós é admitida simétrica, ou seja, $l(i,j) = l(j,i)$, para todo para (i,j).

Obs.: os itens 2 e 3 garantem uma solução ótima em que os N pontos sejam visitados somente uma vez.

Processo para solução do caixeiro viajante

Apresentaremos a seguir um método heurístico para solução sub-ótima do problema do caixeiro viajante (Larson e Odini).

Cabe salienta que, segundo Larson e Odini, se tivermos um grande número de pontos, o método apresenta uma solução raramente superior a 10% da solução ótima. Entretanto se tivermos um número pequeno de pontos, podemos melhorar a solução através de inspeção.

1º passo:
Determinar a árvore T de extensão mínima que cobre todos os nós do grafo $G(N, A)$ em questão.

2º passo:
Separar os nós de ordem ímpar da árvore T, de acordo com as definições e propriedades de Euler. Calculamos as combinações possíveis e determinamos as possíveis combinações dos nós de ordem ímpar e determinamos a de menor extensão.
Denominamos de M o grafo formado pelos nós e arcos assim determinados.

3º passo:
Denominamos de H o grafo resultante da união de T e M, onde H admite um roteiro de Euler.

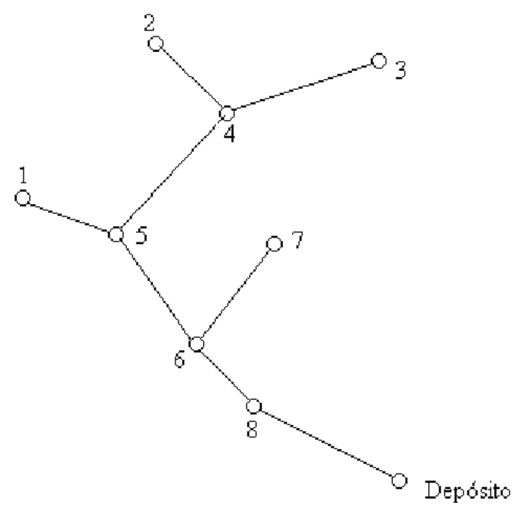
4º passo:
Determinar um roteiro de Euler com início e fim no nó base, sendo este a solução aproximada para o problema.

5º passo:
Verificar o roteiro obtido no passo 4, observando os nós que são visitados mais de uma vez analisando a substituição de percursos triangulares por ligações diretas, de maneira a obter ganhos gerados pela desigualdade triangular.

Exemplo 2:

Definir um roteiro otimizado para um veículo de distribuição que, partindo do depósito *D*, deve efetuar entregas de produtos em 8 cidades conforme figura seguinte.

O objetivo deste problema é minimizar a distância total percorrida no percurso. No Quadro 1, é apresentado a matriz de distâncias entre os pontos, e entre esses e o depósito.



Quadro 1 – Matriz de distâncias (em Km)

	1	2	3	4	5	6	7	8	D
1	--	65	102	61.5	30.7	67.9	73.5	95.6	136.2
2	--	--	54.9	34.1	62.8	99.5	77.9	125.5	154.3
3	--	--	--	40.7	82.5	99.3	64.8	116.7	130.5
4	--	--	--	--	43.3	70.5	44.3	94.3	120.5
5	--	--	--	--	--	42.1	42.9	70.3	108.2
6	--	--	--	--	--	--	35.6	28.3	68.6
7	--	--	--	--	--	--	--	52.5	76.5
8	--	--	--	--	--	--	--	--	43.5

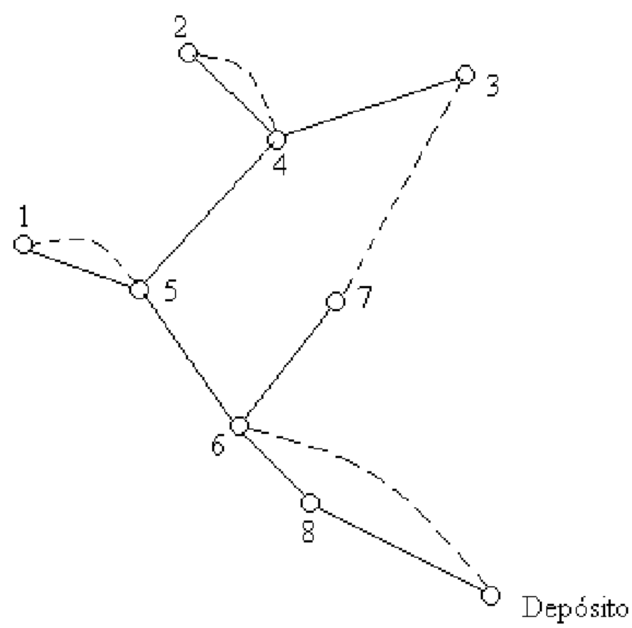
Solução:

- Primeiramente devemos apresentar a árvore de extensão mínima, a qual já está representada pela figura anterior.

- Determinar os nós de ordem ímpar da árvore de extensão mínima.
  São eles: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, D

  Calculamos o número de combinações e passamos a analisar as possíveis combinações.

  Das análises observadas a melhor combinação a qual obtém extensão mínima dos arcos artificiais (L=198.2 Km), proporcionou o seguinte grafo:

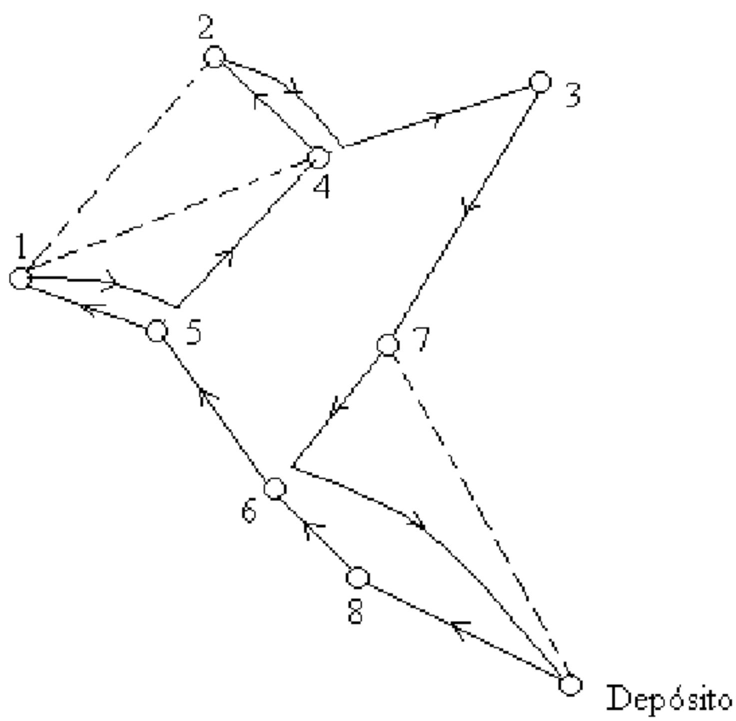


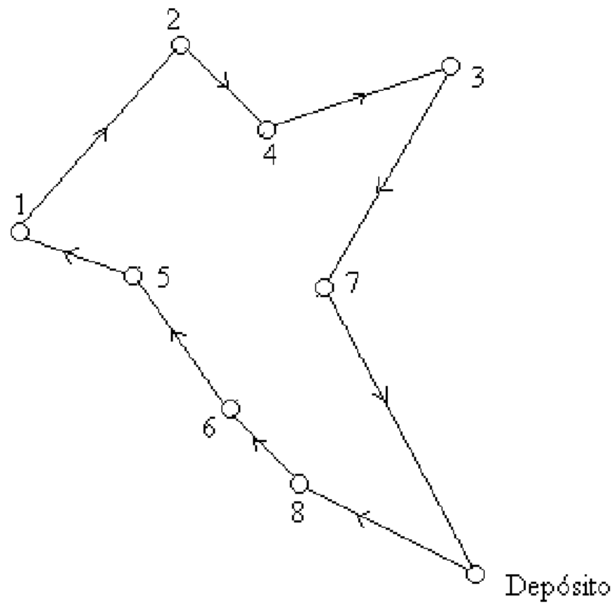
- Determinar um roteiro de Euler (solução aproximada)

$$D-8-6-5-1-5-4-2-4-3-7-6-D$$

- Analisar os nós que são visitados mais de uma vez e aplicar a desigualdade triangular de modo melhorar nossa solução.

Vamos inicialmente olhar a seqüência $5-1-5-4$
Notamos que $l_{14} < l_{15} + l_{54}$, assim, a seqüência $5-1-5-4$ pode ser substituída pela seqüência $5-1-4$.
Olhando a seqüência $1-4-2$, percebemos que $l_{12} < l_{14} + l_{42}$, assim, substituímos por $1-2$.
Finalmente a seqüência $7-6-D$, percebemos que $l_{7D} < l_{76} + l_{6D}$, assim, substituímos por $7-D$.





Assim, o roteiro otimizado ficou da seguinte forma:

$$D - 8 - 6 - 5 - 1 - 2 - 4 - 3 - 7 - D$$

Extensão total do roteiro = $425{,}7\ Km$

Roteirização com restrições múltiplas

Como vimos anteriormente o problema do caixeiro viajante não restringe o roteiro que um indivíduo deve percorrer com fatores como tempo, capacidade, etc. Entretanto na prática estes fatores estão presentes.

Para que possamos resolver problemas de roteirização a partir de um único depósito com restrições múltiplas vamos utilizar o método de Clarke e Wright, bastante eficaz. Este método baseia-se no conceito de *ganho* que pode ser obtido ligando-se dois nós de forma sucessiva num roteiro.

Devemos inicialmente, obter uma solução (a pior) consistindo em servir cada nó exclusivamente por uma rota. (rota = $D-i-D$).
Se supormos que existem n nós, e n veículos onde cada veículo visita um ponto e retorna ao depósito, o percurso total da frota será dado pela expressão:

$$L = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} l(D,i)$$

Suponhamos que o veículo ao visitar o ponto i, visite o ponto j, assim, o ganho em termos de percurso será dado por: $S(i,j) = d(D,i) + d(D,j) - d(i,j)$, onde $S(i,j)$ é o valor do ganho a escolha de dois pontos para constituir a seqüência de um roteiro, é obtida através do par que tiver o maior valor em $S(i,j)$.

Entretanto quando trabalhamos com restrições, determinadas combinações não poderão ser feitas. O método de Clarke e Wright trabalha com problemas como este.

Método de Clarke e Wright

1º passo:
Calcular os ganhos $S(i, j)$, para todos os pares i, j ($i \neq j$, $i \neq D$ e $j \neq D$).

2º passo:
Ordenar os pares i, j na ordem decrescente dos valores do ganho $S(i, j)$.

3º passo:
Começar a análise com o par i, j com maior ganho e proceder na seqüência obtida no passo 2.

4º passo:
Para um par i, j, correspondente ao $k^{ésimo}$ elemento da seqüência do passo 2 verificar se os elementos i e j estão incluídos em algum roteiro já existentes.
Procedimentos a serem adotados:

a) caso os nós i e j não estejam incluídos em nenhum roteiro já aberto, então deve-se criar um novo roteiro com esses nós;
b) Se exatamente um dos pontos i ou j já pertencem a algum roteiro aberto, verificar se ele é o primeiro ou o último ponto deste roteiro. Em caso afirmativo, acrescenta-se o arco i, j ao roteiro. Caso contrário descarta-se o par, passando para a próxima etapa;

c) No caso de ambos os nós *i* e *j* pertencerem a roteiros diferentes, verificar se ambos são extremos desses roteiros. Em caso afirmativo devemos fundir os roteiros. Roteiro. Caso contrário descarta-se o par, passando para a próxima etapa;

d) No caso de ambos os nós *i* e *j* pertencerem a um mesmo roteiro, descarta-se o par, passando para a próxima etapa;

e) Continua-se o processo até que não haja mais nenhum par a ser analisado. No caso de algum nó ficar fora do(s) roteiros(s) formado(s), devemos criar roteiros individuais ligando o nó que sobrou ao depósito.

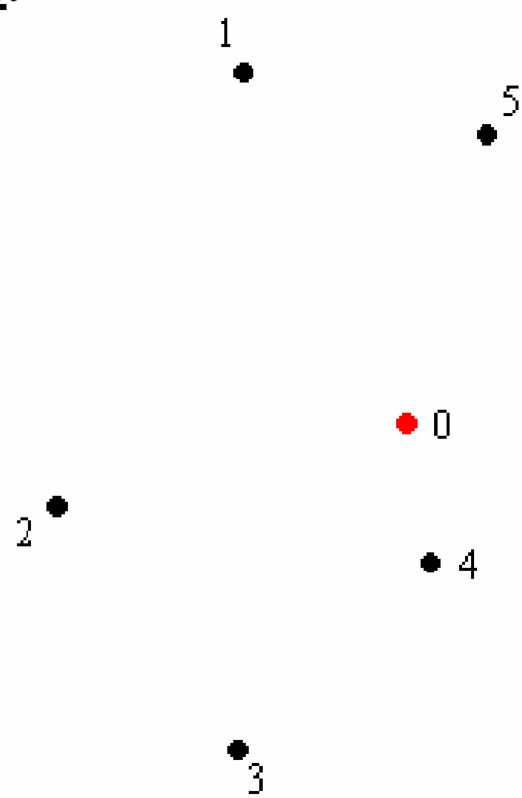
Exemplo 3:

Seja o problema de roteirização de nós, a partir de um depósito, nó 0, que possui 2 veículos, de capacidade 3 unidades cada um, considerando que cada nó possua a demanda de 1 unidade.

Nó	Coordenadas
0	(80,80)
1	(60,130)
2	(30,60)
3	(60,20)
4	(90,50)
5	(100,120)

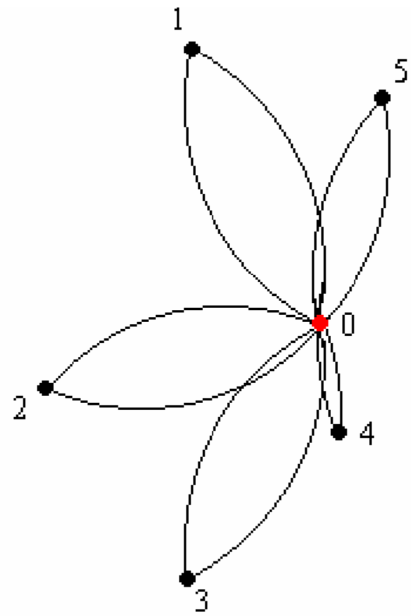
Quadro 2- Coordenadas dos nós

Solução:



- Cálculo das distâncias entre os nós

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 53.85 & 53.85 & 63.24 & 31.62 & 44.72 \\ 53.85 & 0 & 76.15 & 110 & 85.44 & 41.23 \\ 53.85 & 76.15 & 0 & 50 & 60.82 & 92.19 \\ 63.24 & 110 & 50 & 0 & 42.42 & 107.70 \\ 31.62 & 85.44 & 60.82 & 42.42 & 0 & 70.71 \\ 44.72 & 41.23 & 92.19 & 107.70 & 70.71 & 0 \end{bmatrix}$$



Solução inicial (a pior)

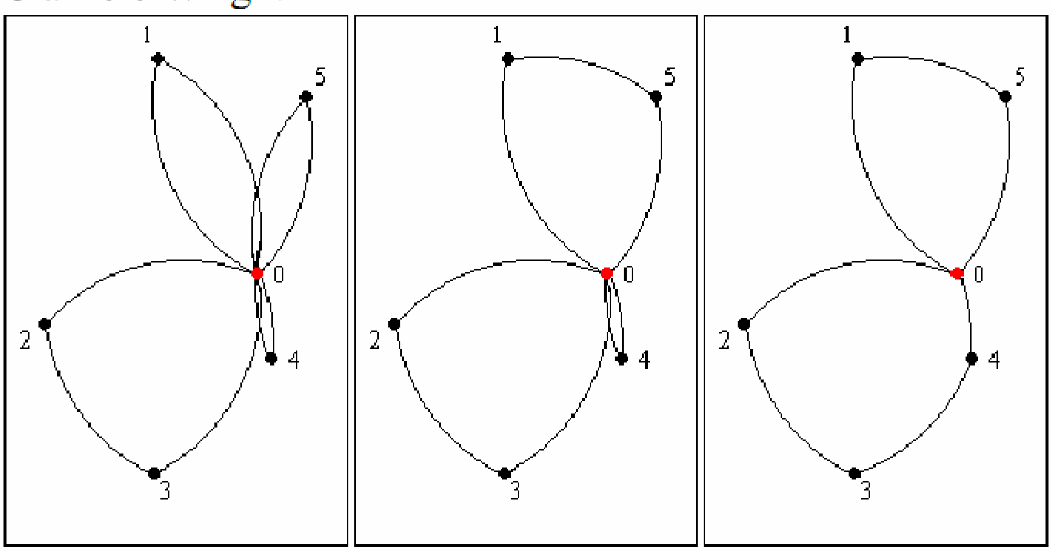
- Matriz de ganhos (savings)

$$S(i,j)=\begin{bmatrix} 0 & 31.54 & 7.09 & 0.034 & 57.34 \\ 31.54 & 0 & 67.09 & 24.64 & 6.37 \\ 7.09 & 67.09 & 0 & 52.44 & 0.26 \\ 0.034 & 24.64 & 52.44 & 0 & 5.63 \\ 57.34 & 6.37 & 0.26 & 5.63 & 0 \end{bmatrix}$$

Ordenação dos pares em ordem decrescente de ganhos:

Arco	*Ganho*
2 – 3	67.09
1 – 5	57.34
3 – 4	52.44
1 – 2	31.54
2 – 4	24.64
1 – 3	7.09
2 – 5	6.37
4 – 5	5.63
3 – 5	0.26
1 – 4	0.034

A análise foi feita baseando-se no passo 4, do método de Clarke e Wright



par 2 – 3 par 1 – 5 par 3 – 4

Os demais pares foram descartados.

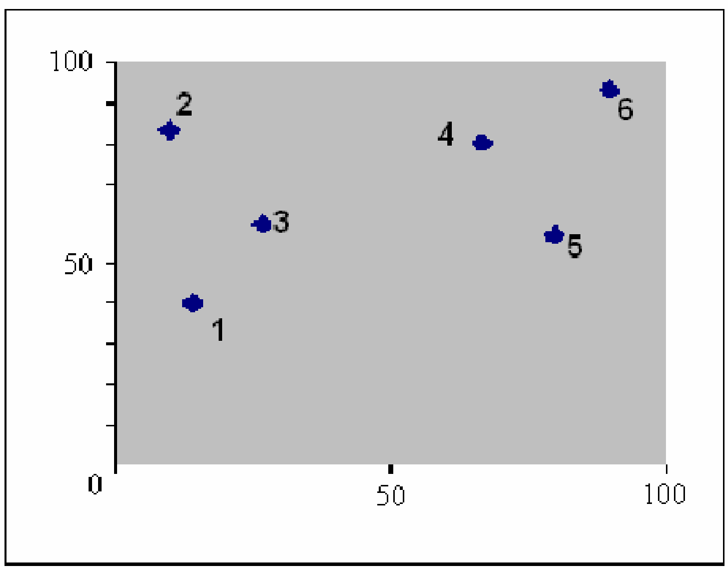
Percebe-se que o roteiro $0-2-3-4-0$ já não suporta mais nenhum ponto tendo em vista que a capacidade de cada veículo é de 3 unidades. Assim a configuração final dos roteiros para este problema é dado por:

$$Roteiro\ 1 = 0-2-3-4-0$$

$$Roteiro\ 2 = 0-1-5-0$$

Exemplo 4:

Determinar os roteiros otimizados de uma frota de distribuição que atende os 6 pontos apresentados na figura, a partir do depósito D. No quadro 3 são fornecidos os dados necessários para a resolução do problema.



Quadro 3 – Coordenadas e peso médio por entrega nos pontos

Nó	Coordenadas (Km)	Peso médio por entrega (ton)
1	(14,40)	3,0
2	(10,83)	2,7
3	(27,60)	0,9
4	(67,80)	1,2
5	(80,57)	0,8
6	(90,93)	2,6

- Capacidade do veículo: 6 ton
- Fator de correção da distância em relação à distância euclidiana: 1,20
- Templo de ciclo: 12 horas
- Tempo médio de parada para descarga: 1,5 horas
- Velocidade média: 60 Km/h
- Coordenadas do depósito: (0,0)

Solução:

O procedimento é idêntico ao exemplo anterior.

- Inicialmente calculamos a matriz de distâncias, em seguida apresentamos a solução inicial (a pior);
- Calculamos a matriz de ganhos e ordenamos os pares em ordem decrescentes dos ganhos;

Por exemplo, no cálculo do ganho no arco $4-6$, fizemos:

$$S(4,6) = (d(D,4) + d(D,6) - d(4,6)) \cdot 1.20$$
$$S(4,6) = (104.35 + 129.41 - 26.41) \cdot 1.20$$

$S(4,6) = 207.35 \cdot 1.20 = 248.8$, onde 1,20 é o fator de correção.

Arco	*Ganho*
4 – 6	248.8
5 – 6	228.3
4 – 5	211.4
2 – 6	158.9
2 – 4	157.0
3 – 4	150.5
3 – 6	148.9
2 – 3	144.9
3 – 5	133.1
2 – 5	128.6
1 – 3	101.2
1 – 2	99.3
1 – 4	96.4
1 – 6	95.0
1 – 5	86.9

- Inicio a análise da tabela de ganhos, levando em consideração as restrições de carga e tempo.

Chegando aos seguintes roteiros:

$roteiro\ 1 = 4 - 6$

$roteiro\ 1 = 4 - 6 - 5 \quad tempo\ \ do\ \ ciclo = 9{,}8\ horas \quad c\arg a\ transportada = 4{,}6\ ton$

$roteiro\ 1 = 3 - 4 - 6 - 5 \quad tempo\ \ do\ \ ciclo = 11{,}5\ horas \quad c\arg a\ transportada = 5{,}5\ ton$

$roteiro\ 2 = 1 - 2 \quad tempo\ \ do\ \ ciclo = 6{,}4\ horas \quad c\arg a\ transportada = 5{,}7\ ton$

- exemplo de cálculo do tempo do ciclo no roteiro 2:

Arco	**Distância Eucl. (Km)**
D – 1	42.37
D – 2	83.60
1 – 2	43.18
TOTAL	169.15

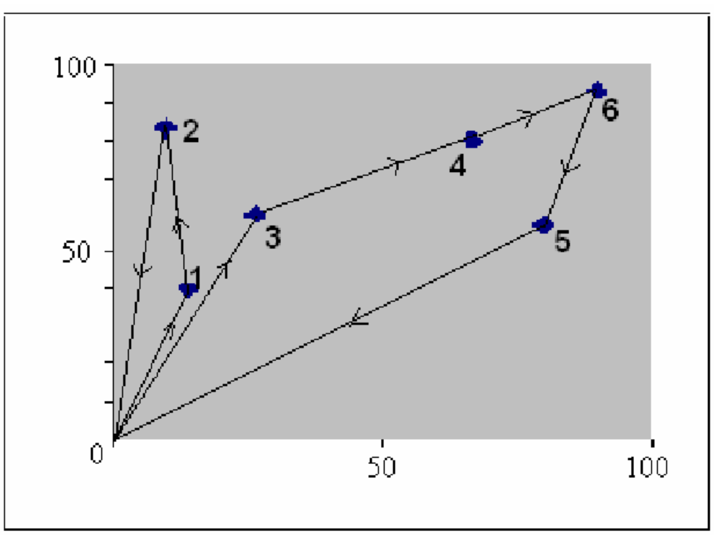
Faço a correção da distância euclidiana, multiplicando por 1.20, assim,

$$169.15 * 1.20 = 202.98\ Km$$

$$tempo\ gasto\ em\ movimento = \frac{202.98}{60} = 3{,}4\ horas$$

Agora, adiciono ao tempo gasto em movimento, o tempo médio de parada para descarga, assim,

$$tempo\ \ total = 3{,}4 + 3{,}0 = 6{,}4\ \ horas$$



Bibliografia

NOVAES, Antônio Galvão. *Sistemas Logísticos: Transporte, Armazenagem e Distribuição Física de Produtos*. São Paulo:Edgard Blücher Ltda.,1989.

COSTA, D. M. B. *Aplicação de algumas técnicas da pesquisa operacional na otimização dos serviços postais.* Dissertação de mestrado. Curitiba, 1997.