Determinação da trilha mais curta

(Trilha: Num grafo não orientado, uma trilha é uma seqüência de nós e de arcos adjacentes. No caso do grafo ser orientado, a trilha também será orientada)

Este é um problema que aparece com muita freqüência, em processos de otimização associados a redes de transporte.

Existem vários métodos para resolução de problemas de determinação da trilha mais curta entre dois nós. Entretanto vamos apresentar neste trabalho, o método de Floyd, por ser um dos mais eficientes, entre os métodos existentes.

Método de Floyd

1º passo:

Numerar todos os nós do grafo $G(N, A)$ com números inteiros em seqüência: $1,2,3,\ldots,n$.

2º passo:

Determinar as seguintes matrizes auxiliares:

✓ $D^{(0)}$ - matriz que representa a extensão da trilha

determinamos $D^{(0)}$ inicialmente, da seguinte maneira:

$$d_0(i, j) = \begin{bmatrix} elemento \\ i, j \;\; da \;\; matriz \\ D^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{cases} l(i, j) & se \; o \; arco \; (i, j) \; existe \\ 0 & se \; i = j \\ \infty & se \; o \; arco \; (i, j) \; não \; existe \end{cases}$$

✓ $P^{(0)}$ - matriz que fornece a seqüência de nós predecessores

determinamos $P^{(0)}$ inicialmente, da seguinte maneira:

$$P_0(i, j) = \begin{bmatrix} elemento \\ i, j \;\; da \;\; matriz \\ P^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{cases} i & para \;\; i \neq j \\ 0 & para \;\; i = j \end{cases}$$

3º passo:

Fazer numa primeira rodada $k=1$.

4º passo:

Atualizar todos os elementos da matriz $D^{(K)}$ através da relação:

$$d_k(i,j) = Min\{d_{k-1}(i,j), d_{k-1}(i,k) + d_{k-1}(k,j)\} \text{ , variando } i \text{ e } j$$

5º passo:

Atualizar todos os elementos da matriz de nós predecessores $P^{(K)}$ através da relação:

$$P_k(i,j) = \begin{cases} P_{k-1}(k,j) & se\ d_k(i,j) \neq d_{k-1}(i,j) \\ P_{k-1}(i,j) & em\ caso\ contrário \end{cases}$$

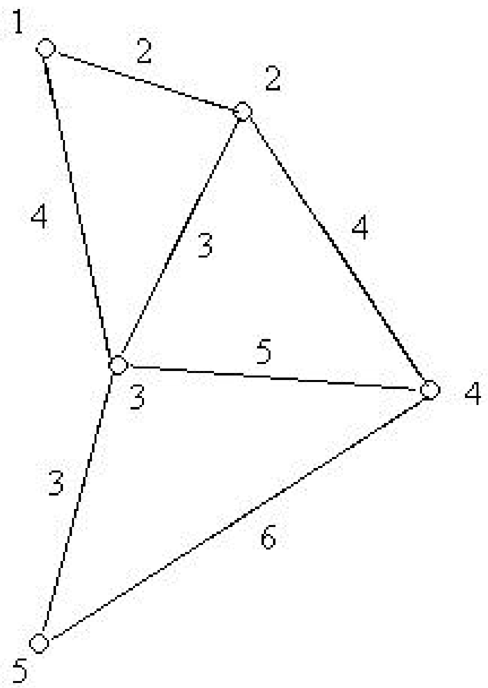
6º passo:

Se $k=n$ o processo termina. Se $k<n$, acrescentar uma unidade a k, reciclando o processo a partir do *4º passo*.

No momento em que o processo terminar, podemos determinar a extensão e a seqüência de arcos que formam a trilha mais curta entre *i* e *j*. Para encontrar a extensão mais curta entre *i* e *j* basta procurar na matriz $D^{(n)}$ o elemento $d_n(i,j)$. A matriz $P^{(n)}$, por sua vez permite determinar a seqüência de arcos que forma a trilha entre o par de nós (i,j).

Exemplo:

Determinar as trilhas mais curtas entre os 5 nós da rede abaixo.



Solução:

$$D^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 4 & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ \infty & 4 & 5 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Faço $k = 1$

$$d_1(i,j) = Min\{d_0(i,j), d_0(i,1) + d_0(1,j)\}$$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 4 & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ \infty & 4 & 5 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Como não houve alteração na matriz $D^{(1)}$, a matriz de nós predecessores não será alterada.

Faço $k = 2$
$$d_2(i,j) = Min\{d_1(i,j), d_1(i,2) + d_1(2,j)\}$$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & \infty \\ 2 & 0 & 3 & 4 & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ \infty & \infty & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que houve alteração na nova matriz de distâncias, assim devemos atualizar a matriz de predecessores.

Faço $k = 3$
$$d_3(i,j) = Min\{d_2(i,j), d_2(i,3) + d_2(3,j)\}$$

$$D^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que houve alteração na nova matriz de distâncias, assim devemos atualizar a matriz de predecessores.

Faço $k = 4$

$$d_4(i,j) = Min\{d_3(i,j), d_3(i,4) + d_3(4,j)\}$$

$$D^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Como não houve alteração na matriz $D^{(4)}$, a matriz de nós predecessores não será alterada.

Faço $k = 5$

$$d_5(i,j) = Min\{d_4(i,j), d_4(i,5) + d_4(5,j)\}$$

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Como não houve alteração na matriz $D^{(5)}$, a matriz de nós predecessores não será alterada.

Como $n = 5$ chegamos ao final do processo.

$$D^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinarmos a trilha mais curta entre pares de nós, basta olharmos para a matriz de predecessores $P^{(5)}$. A pesquisa se processa de trás para diante da seguinte maneira, por exemplo, se quisermos verificar a trilha mais curta entre os nós *1* e *5*:

Verificamos o elemento contido na posição $P(1,5) = 3$, assim temos que o último nó da trilha é o nó *5* e o penúltimo nó é o *3* . Agora verificamos o elemento que aparece na posição $P(1,3) = 1$. Como o elemento encontrado é o nó de origem, a pesquisa termina.. A seqüência neste caso é $5-3-1$, ou inversamente $1-3-5$ (trilha procurada).

A distância mínima será dada pelo elemento contido na matriz $D^{(5)}$, na posição $D(1,5) = 7$.