Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

1) Lógica e Métodos de Prova

1.1) Elementos de Lógica Proposicional

1.2) Elementos de Lógica de Primeira Ordem

1.3) Métodos de Prova

****1.4) Indução Matemática****

1.5) Definições Recursivas

Lista de Exercícios

(Kolman5-seção 2.4-exs.1-7) Para os próximos 7 exercícios, prove que a proposição é verdadeira usando indução matemática.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
2. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$
3. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
4. $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$
5. $1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
6. $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a-1}$
7. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ para $r \neq 1$
8. *(Kolman5-seção 2.4-ex.15)* Prove por indução matemática que, se um conjunto A possui n elementos, então $P(A)$ tem 2^n elementos.
9. *(Kolman5-seção 2.4-ex.18)* Mostre por indução matemática que, se $A_1, \ldots, A_n$ e B são subconjuntos quaisquer de um conjunto U, então:

$$(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \cap B = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap B)$$

10. *((Kolman5-seção 2.4-ex.23)* Explique a falha na "prova" a seguir de que:

"Todos os caminhões são da mesma cor".

"Prova":

- Seja $P(n)$: "Todo conjunto de n caminhões consiste de caminhões da mesma cor."
- Passo básico:

- É certo que $P(1)$ é V, pois há apenas um caminhão neste caso.

- Passo indutivo:
  - Vamos usar $P(K)$: "Todo conjunto de k caminhões consiste de caminhões da mesma cor"
    - para mostrar $P(k+1)$: "Todo conjunto de $k+1$ caminhões consiste de caminhões da mesma cor"
  - Escolha um caminhão do conjunto de $k+1$ caminhões e considere o conjunto de k caminhões que resta:
    - de acordo com $P(k)$, todos estes possuem a mesma cor.
  - Agora reponha o caminhão escolhido e pegue um outro:
    - por $P(k)$, os caminhões que restam são todos da mesma cor.
  - Ora, mas os caminhões não mudaram de cor neste procedimento.
  - De modo que todos os $k+1$ caminhões devem ser da mesma cor...

11. *(Rosen6-seção 4.2-ex.5)*

    a) Determine quais os valores postais que podem ser formados usando-se apenas selos de 4 centavos e de 11 centavos.

    b) Prove a sua resposta ao item (a) usando o princípio da indução matemática. Certifique-se de explicitar claramente a sua hipótese indutiva no passo indutivo.

    c) Prove a sua resposta ao item (a) usando o princípio da indução forte. Explique como a hipótese indutiva nesta prova difere daquela que foi usada na prova por indução matemática.

12. *(Rosen6-seção 4.2-ex.7)* Um certo caixa automático possui apenas notas de R$ 2,00 e de R$ 5,00. Determine quais as quantias que esta máquina pode fornecer, asumindo que ela possui um suprimento ilimitado destas duas notas? Prove a sua resposta usando uma forma da indução matemática.

13. *(Rosen6-seção 4.2-ex.29)* O que está errado com esta "prova" por indução forte?

    - "Teorema": Para todo inteiro não-negativo n, $5n = 0$.
    - Passo básico: $5.0 = 0$.
    - Passo indutivo: suponha que $5j = 0$ para todos os inteiros não-negativos j com $0 \leq j \leq k$. Escreva $k+1 = i+j$, onde i e j são números naturais menores do que $k+1$. Pela hipótese de indução, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i+5j = 0+0 = 0$.

14. *(Rosen6-seção 4.2-ex.41)* Mostre que a propriedade do bom ordenamento pode ser provada quando o princípio da indução matemática é tomado como um axioma.