# INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

4) Relações

- 4.1) Relações e Dígrafos
- 4.2) Caminhos em Relações e Dígrafos
- 4.3) Propriedades de Relações
- 4.4) Relações de Equivalência
- 4.5) Manipulação e Fecho de Relações

# Combinação de relações

- <u>Exemplo</u>: Seja $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2,3,4\}$. As relações $R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ podem ser combinadas para obter:

$$R_1 \cup R_2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2=\{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2=\{(2,2),(3,3)\}$$

$$R_2 - R_1=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$$

# Manipulação de relações (operações)

- Da mesma forma que nós podemos manipular números usando as regras da álgebra, podemos também definir operações que nos permitam operar com relações.

- Com estas operações nós podemos modificar, combinar e refinar relações existentes para produzir relações novas.

- Note que, uma vez que relações de A para B são subconjuntos de $A \times B$, duas relações de A para B podem ser combinadas de todos os modos em que se puder combinar dois conjuntos.

# Operações entre relações

- Definição: Sejam R e S duas relações de A em B. Então as seguintes relações são definidas:

1) $\overline{R}$: a ***relação complementar*** de R é definida como:

$$(a,b) \in \overline{R} \Leftrightarrow (a,b) \notin R$$

- Nota: A *matriz da relação* $\overline{R}$ é obtida a partir da matriz de R trocando-se todos os 0's por 1's e vice-versa:

$$M_{\overline{R}} = \overline{M_R}$$

# Operações entre relações

2) $R \cap S$: a ***relação*** ***intersecção*** de R com S é definida como:

$$(a,b) \in R \cap S \iff (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S$$

– Nota: $M_{R \cap S} = M_R \wedge M_S$ (operação matricial lógica "$\wedge$" sobre as matrizes booleanas $M_R$ e $M_S$).

3) $R \cup S$: a ***relação*** ***união*** de R com S é definida como:

$$(a,b) \in R \cup S \iff (a,b) \in R \vee (a,b) \in S$$

– Nota: $M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$ (operação matricial lógica "$\vee$" sobre as matrizes booleanas $M_R$ e $M_S$).

# Operações entre relações

4) $R^{-1}$: a ***relação*** ***inversa*** de R é definida por:

$$(a,b) \in R^{-1} \iff (b,a) \in R$$

– Nota: $M_{R^{-1}} = (M_R)^T$ (transposta da matriz $M_R$)

# Operações entre relações

- <u>Exemplo</u>: Sejam A={1,2,3,4}, B={a,b,c} e R e S de A em B definidas por:

  R={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)}
  S={(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)}

  Computar a) R  b) $R \cap S$  c) $R \cup S$  d) $R^{-1}$

- <u>Solução</u>:

  a) $A \times B$={(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c), (4,a),(4,b),(4,c)}
  $\Rightarrow \overline{R}$={(1,c),(2,a),(3,a),(3,c),(4,b),(4,c)}

  b) $R \cap S$={(1,b),(2,c),(3,b)}

  c) $R \cup S$={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a),(4,b)}

  d) $R^{-1}$={(a,1),(b,1),(b,2),(c,2),(b,3),(a,4)}

# Operações entre relações

- <u>Exemplo</u>: Sejam A={1,2,3,4}, B={a,b,c} e R e S de A em B definidas por:

  R={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)}
  S={(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)}

  Calcular: a) $M_R$ b) $M_S$ c) $M_{\overline{R}}$ d) $M_{R^{-1}}$ e) $M_{R \cap S}$ f) $M_{R \cup S}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $\overline{R}$={(1,c),(2,a),(3,a),(3,c),(4,b),(4,c)} $\Rightarrow$ $$M_{\overline{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Operações entre relações

- Exemplo: Sejam A={1,2,3,4}, B={a,b,c} e R e S de A em B definidas por:

  R={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)}
  S={(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)}

  (Continuação):

  d) $R^{-1}$={(a,1),(b,1),(b,2),(c,2),(b,3),(a,4)}

$$\Rightarrow \qquad M_{R^{-1}} = \left(M_R\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  e) $R \cap S$={(1,b),(2,c),(3,b)}

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Operações entre relações

- <u>Exemplo</u>: Sejam A={1,2,3,4}, B={a,b,c} e R e S de A em B definidas por:

  R={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)}
  S={(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)}

  (<u>Continuação</u>):

  f) R∪S={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a),(4,b)}

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Manipulação de relações

**Teorema**: Suponha que R e S são relações de A em B.

(a) Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

(b) Se $R \subseteq S$, então $\overline{S} \subseteq \overline{R}$

(c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ e $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

(d) $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$ e $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$

**Prova**: os itens (b) e (d) são casos particulares de propriedades gerais de conjuntos.

(a) Suponha que $R \subseteq S$ e seja $(a,b) \in R^{-1}$,

- então $(b,a) \in R$ (definição de $R^{-1}$)
- segue que, como $R \subseteq S$, $(b,a) \in S$
- como $(b,a) \in S$, segue que $(a,b) \in S^{-1}$ (definição de $S^{-1}$)
- portanto, $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

# Manipulação de relações

**<u>Prova da 1ra parte do item (c)</u>**:

(c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ $\rightarrow$ temos que provar que:

i) $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$

ii) $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$

i) $(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}$

- suponha que $(a,b) \in (R \cap S)^{-1}$.
- então $(b,a) \in R \cap S$ $\Rightarrow$ $(b,a) \in R$ e $(b,a) \in S$
- isto significa que $(a,b) \in R^{-1}$ e $(a,b) \in S^{-1}$
- de modo que $(a,b) \in R^{-1} \cap S^{-1}$

ii) $R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}$ (converso)

- basta reverter os passos acima.

# Manipulação de relações

- Exercício: Seja A=B={1,2,3} e

  S={(1,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)}
  T={(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)}

  – Verifique o item (c) do teorema com S e T
  – Verifique o item (d) do teorema com S e T
  – NOTA:

    (c) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ e $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

    (d) $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$ e $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$

# Manipulação de relações

- Os teoremas a seguir mostram o efeito que as operações têm sobre algumas das propriedades vistas.

<u>**Teorema**</u>: Sejam R e S relações sobre A. Então:

(a) Se R é reflexiva, então $R^{-1}$ também o é;

(b) R é reflexiva se e somente se $\overline{R}$ é irreflexiva;

(c) Se R e S são reflexivas, então $R \cap S$ e $R \cup S$ também o são.

<u>Exemplo</u>: Seja A={1,2,3} e sejam: R={(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)}
S={(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)}

(a) $R^{-1}$={(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,3)} $\Rightarrow$ R e $R^{-1}$ são ambas reflexivas;

(b) $\overline{R}$={(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)} é irreflexiva enquanto que R é reflexiva;

(c) $R \cap S$={(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)} e
$R \cup S$={(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,2),(3,3)} são ambas reflexivas.

# Manipulação de relações

**<u>Teorema</u>**: Seja R uma relação sobre A. Então:

(a) R é simétrica se e somente se $R=R^{-1}$;

(b) R é antissimétrica se e somente se $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$ ($\Delta$: rel. de igualdade);

(c) R é assimétrica se e somente se $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

**<u>Teorema</u>**: Sejam R e S relações sobre A.

(a) Se R é simétrica, então $R^{-1}$ e $\overline{R}$ também o são;

(b) Se R e S são simétricas, então $R \cap S$ e $R \cup S$ também o são.

# Manipulação de relações

<u>Exemplo</u>: Seja A={1,2,3} e considere as relações simétricas:

$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)\}$
$S=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

(a) $R^{-1}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(1,3)\}$
$\overline{R}=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$
$\rightarrow$ ambas simétricas

(b) $R \cap S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
$R \cup S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$
$\rightarrow$ ambas simétricas

# Manipulação de relações

- Exercício: Seja A={1,2,3,4,5,6} e sejam as relações de equivalência sobre A seguintes:

  R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)}

  S={(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,6),
  (5,5),(6,4),(6,6)}

  Compute a partição correspondente a $R \cap S$.

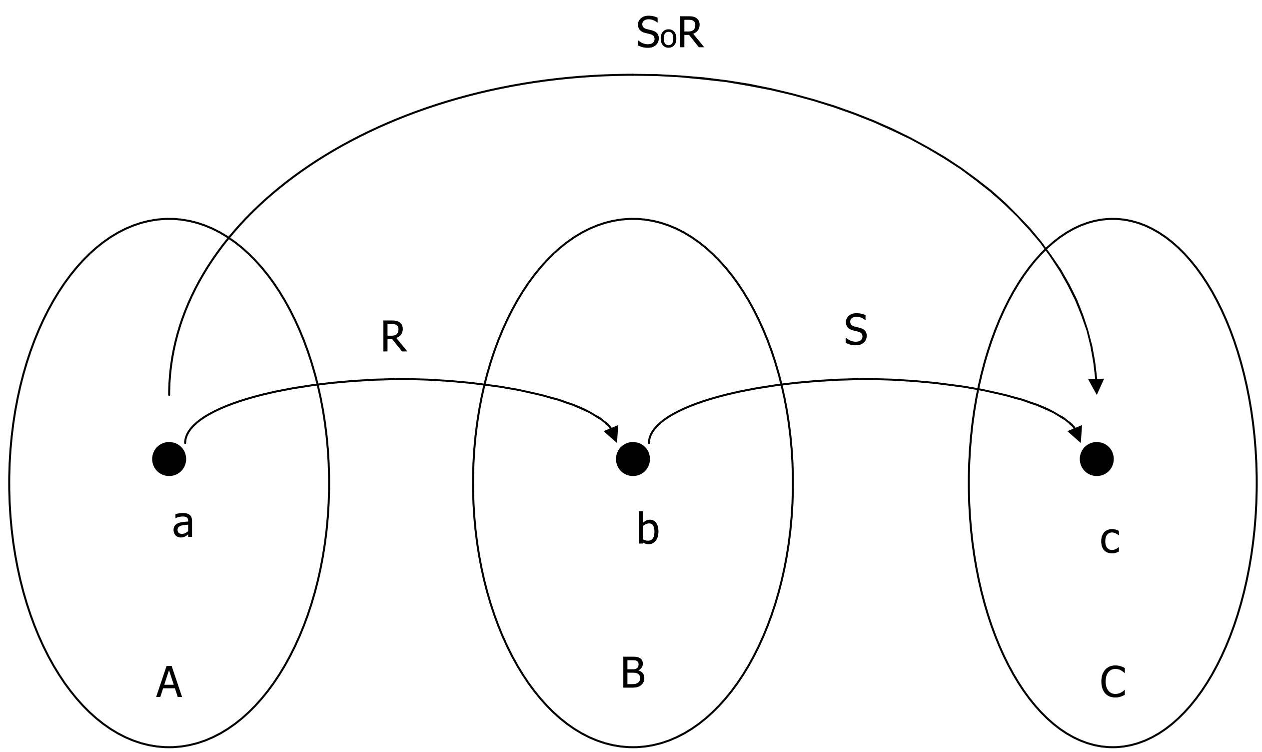
# Composição de relações

**<u>Definição</u>**:

- Suponha que A, B e C são conjuntos, que R é uma relação de A em B e que S é uma relação de B em C.

- Então define-se a relação de *<u>composição</u>* de R e S, escrita como $S \circ R$, como segue:
  - Se $a \in A$ e $c \in C$, então $(a,c) \in S \circ R$ se e somente se existir algum $b \in B$ tal que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$.
  - "S em seguida a R" (primeiro R, depois S).

# Composição de relações



# Composição de relações

- <u>Exemplo</u>: Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por:

  $R=\{(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)\}$
  $S=\{(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)\}$

  – Como $(1,2)\in R$ e $(2,3)\in S$, então temos que $(1,3)\in S \circ R$.
  – Também $(1,1)\in R$ e $(1,4)\in S$, assim $(1,4)\in S \circ R$.
  – Continuando com este processo, encontra-se que:

$$S \circ R=\{(1,4),(1,1),(1,3),(2,1),(3,3)\}$$

# Composição de relações

- O resultado a seguir mostra como computar conjuntos relativos para a composição de duas relações.

- Teorema: Sejam R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Então, se $A_1 \subseteq A$, temos que

$$(S \circ R)(A_1) = S(R(A_1))$$

- Ver prova no livro: teorema 6, pág. 138.

# Composição de relações

- Teorema: Se R é uma relação de A em B e S é uma relação de B em C, então:

$$M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S$$

- Além disto, se $|A|=m$, $|B|=n$ e $|C|=p$:
  - $M_R$ tem ordem mxn
  - $M_S$ tem ordem nxp
  - $M_{S \circ R}$ tem ordem mxp

# Composição de relações

- <u>Exemplo</u>: Seja A={a,b,c} e sejam R e S relações sobre A com matrizes:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ R = {(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b)}

$\Rightarrow$ S = {(a,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)}

$\Rightarrow$ S$\circ$R = {(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)}

  – E a matriz da relação composta S$\circ$R é:

$$M_{S\circ R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_R \otimes M_S$$

# Composição de relações

- Exercício: Refazer com matrizes o exemplo:

  Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por:

  $R=\{(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)\}$

  $S=\{(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)\}$

  o que leva a:

  $$S \circ R=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,1),(3,3)\}$$

# Composição de relações

- Teorema: Sejam A, B, C e D conjuntos e:
  - R uma relação de A em B,
  - S uma relação de B em C, e
  - T uma relação de C em D.

  Então:

  $$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

- Prova no livro: teorema 7, pág. 140, usando matrizes.

# Composição de relações

- Em geral: $S \circ R \neq R \circ S$
- Exemplo: Sejam:

  A={a,b}

  R={(a,a),(b,a),(b,b)}

  S={(a,b),(b,a),(b,b)}

  Então:

  $S \circ R = \{(a,b),(b,a),(b,b)\}$

  enquanto que:

  $R \circ S = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

# Composição de relações

- <u>Teorema</u>: Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Então:

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

- <u>Prova</u>: seja $c \in C$ e $a \in A$.
  - Então $(c,a) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (a,c) \in S \circ R$ ;
  - ou seja, se e somente se existe $b \in B$ com $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$;
  - isto é equivalente a ter $(b,a) \in R^{-1}$ e $(c,b) \in S^{-1}$
  - o que, pela definição de composição, significa que

$$(c,a) \in R^{-1} \circ S^{-1}$$

# Composição de relações

- Exercício: Seja $A=\{1,2,3,4\}$ e sejam

  $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2)\}$

  $S=\{(3,1),(4,4),(2,3),(2,4),(1,1),(1,4)\}$

  - Calcule $R \circ R$.
  - Calcule $S \circ R$.
  - Calcule $R \circ S$.
  - Calcule $S \circ S$.

# Fechos de relações

- Se R é uma relação sobre A, pode acontecer que R não possua algumas propriedades importantes, tais como reflexividade, simetria e transitividade.
- Se R não possui uma propriedade particular, pode-se querer *adicionar* os pares relacionados em R até que ela adquira a propriedade desejada.
- Naturalmente, deseja-se adicionar o menor número de pares possível, de modo a obter *a menor relação $R_1$ sobre A que possui a propriedade desejada*.
- Eventualmente $R_1$ pode não existir $\rightarrow$ se a relação $R_1$ existe, ela é chamada de o "*fecho de R* com respeito à propriedade em questão".

# Fechos de relações

- <u>Exemplo1</u>: Seja $A=\{a,b,c\}$ e R sobre A definida por

  $$R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(c,c)\}$$

  – R não é simétrica pois (b,a) e (c,a) não pertencem a R. Então o *fecho simétrico* de R é a relação $R_1$ a seguir:

  $$R_1 = R \cup \{(b,a),(c,a)\}$$

- <u>Exemplo2 (reflexividade)</u>: Suponha que R é uma relação não-reflexiva sobre um conjunto A.

  – Isto somente pode acontecer quando alguns pares da relação diagonal $\Delta=\{(a,a)|a\in A\}$ não estão em R.

  – Assim, $R_1=R\cup\Delta$ é a menor relação reflexiva sobre A que contém R.

  – Em outras palavras, $R\cup\Delta$ é o *fecho reflexivo* de R.

# Fechos de relações

- Exemplo3 (simetria): Suponha que R é uma relação sobre um conjunto A e que R não é simétrica.
  - Desta forma, deve existir pares $(x,y) \in R$ tais que $(y,x) \notin R$
  - Por outro lado, $(y,x) \in R^{-1}$
  - Portanto, para R se tornar simétrica, deve-se adicionar todos os pares de $R^{-1} \Rightarrow$ R deve ser aumentada para $R \cup R^{-1}$
  - $R \cup R^{-1}$ é a menor relação simétrica que contém R, ou seja, $R \cup R^{-1}$ é o *fecho simétrico* de R.
  - Assim, se $A=\{a,b,c,d\}$ e $R=\{(a,b),(b,c),(a,c),(d,c)\}$
    $\Rightarrow R^{-1}=\{(b,a),(c,b),(c,a),(c,d)\}$
    $\Rightarrow$ o *fecho simétrico* de R é:

    $$R \cup R^{-1}=\{(a,b),(b,c),(a,c),(d,c),(b,a),(c,b),(c,a),(c,d)\}$$

# Fechos de relações

Fecho transitivo:

- Será que o fecho transitivo de uma relação pode ser produzido pela adição de todos os pares da forma (a,c), onde (a,b) e (b,c) já estão na relação?
- Considere a relação R={(1,3),(1,4),(2,1),(3,2)} sobre o conjunto {1,2,3,4}.
  - Ela não é transitiva, pois não contém todos os pares (a,c) onde (a,b) e (b,c) estão em R $\rightarrow$ falta (1,2),(2,3),(2,4),(3,1)
  - Adicionando o que falta: R={(1,3),(1,4),(2,1),(3,2),(1,2),(2,3),(2,4),(3,1)}
  - Relação resultante contém (3,1) e (1,4) mas não (3,4) !
- *Fechos transitivos dependem de algoritmos especiais.*