INE5403

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA DISCRETA PARA A COMPUTAÇÃO

PROF. DANIEL S. FREITAS

UFSC - CTC - INE

3 - INTROD. À ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1) Arranjos e Combinações

3.2) O Princípio do Pombal

3.3) Relações de Recorrência

Relações de Recorrência

- Quando o problema é encontrar uma fórmula para uma seqüência definida recursivamente, esta fórmula recursiva é chamada de **relação de recorrência**.
- As definições recursivas de seqüências, que já vimos, são exemplos de relações de recorrência.
- Lembre que, para definir uma seqüência recursivamente, uma fórmula recursiva deve ser acompanhada por informação sobre o início da seqüência.
  - Esta informação é chamada de **condição inicial** para a seqüência.

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

- **Exemplo 1:**

  (a) A relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ com $a_1 = 4$ recursivamente define a seqüência:

  $4, 7, 10, 13, \ldots$.

  (b) A relação de recorrência $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $f_1 = f_2 = 1$ define recursivamente a **seqüência de Fibonacci**:

  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

- Relações de recorrência aparecem naturalmente em muitos problemas de contagem e na análise de problemas de programação.

- **Exemplo 2 (1/2):** Seja $A = \{0, 1\}$. Forneça uma relação de recorrência para c_n: número de strings de comprimento n em A^* que não contêm 0's adjacentes.

  Solução:

  - 0 e 1 são as únicas strings de comprimento $1 \Rightarrow c_1 = 2$
  - $c_2 = 3$: as únicas strings deste tipo são $01, 10, 11$
  - Em geral, toda string w de comprimento $n - 1$ que não contém 00, se concatenada com 1, forma uma string $1 \cdot w$
    - de comprimento n e não contêm 00

Relações de Recorrência

- **Exemplo 2 (2/2):** Seja $A = \{0, 1\}$. Forneça uma relação de recorrência para c_n: número de strings de comprimento n em A^* que não contêm 0's adjacentes.

Solução:

- Única outra possibilidade de início para uma string "boa" de comprimento n: 01
  - ou seja, pode até começar com 0, desde que seguido por 1
  - estas strings são da forma $01 \cdot v$
  - onde v é uma string "boa" de comprimento $n - 2$
- Portanto: $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$
  - com as condições iniciais: $c_1 = 2$ e $c_2 = 3$ $\square$

Relações de Recorrência

- **Exemplo 3 (1/2):** Suponha que queremos listar todas as seqüências de n elementos sem repetições que podem ser construídas a partir do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Uma abordagem para resolver este problema é proceder recursivamente:
  - **Passo 1**: produza uma lista de todas as seqüências sem repetições que podem feitas a partir de $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$
  - **Passo 2**: Para cada seqüência do passo 1, insira n em cada um dos n locais possíveis:
    - no início, no final e entre cada par de números na seqüência
    - imprima o resultado e remova n

Relações de Recorrência

- **Exemplo 3 (2/2):** Listar seqüências de n elementos sem repetições construídas do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
  - O número de ações do tipo "inserir-imprimir-remover" é o número de seqüências de n elementos.
  - ou: n vezes o número de seqüências produzidas no passo 2
  - logo:

    nro de seqs de n elems = $n\times$(nro de seqs de $(n-1)$ elems)
  - isto fornece uma fórmula recursiva para o número de seqüências de n elementos
  - condição inicial?

RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

- Uma técnica para encontrar uma fórmula explícita para a seqüência definida por uma relação de recorrência é o **backtracking**.
- Ilustrado no exemplo a seguir...

BACKTRACKING

- **Exemplo 4 (1/2):** A relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ com $a_1 = 2$ define a seqüência: $2, 5, 8, \ldots$.
  - Fazemos o “backtracking” de a_n substituindo a definição de $a_{n-1},\ a_{n-2}$ e assim por diante
  - até que um padrão fique claro:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= (a_{n-2} + 3) + 3 \\ &= ((a_{n-3} + 3) + 3) + 3 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3 \\ &= a_{n-2} + 2 \cdot 3 \\ &= a_{n-3} + 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

BACKTRACKING

- **Exemplo 4 (2/2):** A relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 3$ com $a_1 = 2$ define a seqüência: $2, 5, 8, \ldots$.
  - eventualmente, chegaremos a:

$$a_n = a_{n-(n-1)} + (n-1) \cdot 3$$

$$= a_1 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 2 + (n-1) \cdot 3$$

  - logo, uma fórmula explícita para a seqüência é:

$$a_n = 2 + (n-1)3 \qquad \square$$

BACKTRACKING

- **Exemplo 5 (1/2):** Use o backtracking para encontrar uma fórmula explícita para a seqüência definida pela relação de recorrência $b_n = 2.b_{n-1} + 1$ com condição inicial $b_1 = 7$.
- **Solução:**
  - Começamos substituindo a definição do termo anterior na fórmula:

$$\begin{aligned} b_n &= 2b_{n-1} + 1 \\ &= 2(2b_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2[2(2b_{n-3} + 1) + 1] + 1 \\ &= 2^3 b_{n-3} + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^3 b_{n-3} + 2^2 + 2^1 + 1 \end{aligned}$$

Backtracking

- **Exemplo 5 (2/2):** Use o backtracking para encontrar uma fórmula explícita para a seqüência definida por $b_n = 2.b_{n-1} + 1$ com condição inicial $b_1 = 7$.

- **Solução:**
  - Note que um padrão está aparecendo com as re-escritas de b_n.
    - Nota: não há regras feitas para esta "re-escrita".
    - Pode ser necessário experimentar um pouco.
  - O backtracking terminará em:

$$
\begin{aligned}
b_n &= 2^{n-1}b_{n-(n-1)} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1 \\
&= 2^{n-1}b_1 + 2^{n-1} - 1 && \text{(ver exerc. de indução)} \\
&= 7 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 && \text{(usando } b_1 = 7\text{)} \\
&= 8 \cdot 2^{n-1} - 1 = 2^{n+2} - 1 && \square
\end{aligned}
$$

Backtracking

- **Nota 1:** duas somas muito úteis, que já foram provadas:

S1) $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$

S2) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Nota 2:** o backtracking pode não revelar um padrão explícito para a seqüência definida por uma relação de recorrência.
  - Em seguida, veremos uma técnica mais geral para resolver uma relação de recorrência...

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- Antes uma definição útil...
- Uma relação de recorrência é uma **relação homogênea linear de grau k** se for da forma:

  $$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \cdots + r_k a_{n-k}$$

  - aonde os r_i's são constantes
- De maneira informal:
  - cada parcela é construída do mesmo ("homogêneo") modo:
  - cada parcela é um múltiplo de um dos k ("grau k") termos que antecedem a_n ("linear")

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Exemplo 6:**

  (a) A relação $c_n = (-2)c_{n-1}$ é uma relação de recorrência homogênea linear de grau 1.

  (b) A relação $a_n = a_{n-1} + 3$ não é uma relação de recorrência homogênea linear.

  (c) A relação $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ é uma relação de recorrência homogênea linear de grau 2.

  (d) A relação $g_n = g_{n-1}^2 + g_{n-2}$ não é uma relação homogênea linear.

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- Seja uma relação de recorrência homogênea linear de grau k:

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \cdots + r_k a_{n-k}$$

- A sua **equação característica** é dada pelo polinômio de grau k a ela associado:

$$x^k = r_1 x^{k-1} + r_2 x^{k-2} + \cdots + r_k$$

  - as raízes desta equação têm um papel chave na fórmula explícita para a seqüência definida pela relação de recorrência e as condições iniciais

- O caso geral pode ser resolvido, mas veremos apenas o grau 2
  - neste caso, é comum escrever a equação característica como:

$$x^2 - r_1 x - r_2 = 0$$

Equações características

- **Teorema 1:**

  (a) Se a equação característica $x^2 - r_1 x - r_2 = 0$, da relação de recorrência $a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2}$, tem duas raízes distintas s_1 e s_2, então a fórmula explícita para a seqüência é dada por:

  $$a_n = u s_1^n + v s_2^n$$

  (b) Se a equação característica $x^2 - r_1 x - r_2 = 0$ tem uma raíz única s, a fórmula explícita é dada por:

  $$a_n = u s^n + v n s^n$$

  - onde u e v dependem das condições iniciais.

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Prova de (a):** (duas raízes distintas: $a_n = us_1^n + vs_2^n$)
  - já que s_1 e s_2 são raízes de $x^2 - r_1x - r_2 = 0$, temos:

    $$s_1^2 - r_1s_1 - r_2 = 0 \quad \text{e} \quad s_2^2 - r_1s_2 - r_2 = 0$$

  - vamos mostrar que: $a_n = us_1^n + vs_2^n, \quad n \geq 1$

    define a mesma seqüência que: $a_n = r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}$

  - primeiro, note que as condições iniciais são satisfeitas, pois u e v vêm de:

    $$a_1 = us_1 + vs_2 \quad \text{e} \quad a_2 = us_1^2 + vs_2^2$$

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Prova de (a):** (duas raízes distintas: $a_n = us_1^n + vs_2^n$)
  - já que s_1 e s_2 são raízes de $x^2 - r_1 x - r_2 = 0$, temos:

    $$s_1^2 - r_1 s_1 - r_2 = 0 \quad \text{e} \quad s_2^2 - r_1 s_2 - r_2 = 0$$

  - vamos mostrar que: $a_n = us_1^n + vs_2^n, \quad n \geq 1$

    define a mesma seqüência que: $a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2}$

  - primeiro, note que as condições iniciais são satisfeitas, pois u e v vêm de:

    $$a_1 = us_1 + vs_2 \quad \text{e} \quad a_2 = us_1^2 + vs_2^2$$

  - então:

    $$\begin{aligned} a_n &= us_1^n + vs_2^n \\ &= us_1^{n-2}s_1^2 + vs_2^{n-2}s_2^2 \\ &= us_1^{n-2}(r_1 s_1 + r_2) + vs_2^{n-2}(r_1 s_2 + r_2) \\ &= r_1 us_1^{n-1} + r_2 us_1^{n-2} + r_1 vs_2^{n-1} + r_2 vs_2^{n-2}) \\ &= r_1(us_1^{n-1} + vs_2^{n-1}) + r_2(us_1^{n-2} + vs_2^{n-2}) \\ &= r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} \qquad \square \end{aligned}$$

- **Prova de (b):** totalmente similar.

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Exemplo 7:** Encontre uma fórmula explícita para a seqüência:
  - $c_n = 3c_{n-1} - 2c_{n-2}$
  - condições iniciais: $c_1 = 5$ e $c_2 = 3$

Solução:

- a relação dada é homogênea linear de grau 2
- equação associada: $x^2 = 3x - 2$
  - ou: $x^2 - 3x + 2 = 0$, raízes: 1 e 2
- o teorema 1 mostra que u e v vêm da solução de:

  $c_1 = u.(1) + v.(2)$ e $c_2 = u.(1)^2 + v.(2)^2$
  - levando a: $u = 7$ e $v = -1$
- daí, pelo teorema 1, temos:

  $$c_n = 7 \cdot 1^n + (-1) \cdot 2^n = 7 - 2^n \qquad \square$$

Equações características

- **Exemplo 8:** Resolva a relação de recorrência $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$, com condições iniciais $d_1 = 1.5$ e $d_2 = 3$.

  Solução:

  - equação associada para esta rel. homog. linear: $x^2 - 2x + 1 = 0$
    - com uma raíz múltipla: 1
  - pelo teorema 1(b): $d_n = u.(1)^n + v.n.(1)^n$
  - usando esta fórmula e as condições iniciais, temos que:

    $d_1 = 1.5 = u + v.(1)$ e $d_2 = 3 = u + v.(2)$
    - cuja solução é: $u = 0$ e $v = 1.5$
  - logo: $d_n = 1.5n$ $\square$

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- Nota: apesar da seqüência de Fibonacci ser bem conhecida, a sua forma explícita levou mais de 200 anos para ser encontrada...

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Exemplo 9:** Encontre uma fórmula explícita para a seqüência de Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, onde $f_1 = f_2 = 1$

  Solução:

  - relação de recorrência homogênea linear de grau 2
  - equação característica: $x^2 - x - 1 = 0$
    - cujas raízes são: $s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - O u e o v do teorema 1 vêm da solução de:

$$\begin{cases} 1 = u.(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + v.(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 = u.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + v.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \end{cases}$$

EQUAÇÕES CARACTERÍSTICAS

- **Exemplo 9:** Encontre uma fórmula explícita para a seqüência de Fibonacci: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, onde $f_1 = f_2 = 1$

  Solução:

  - relação de recorrência homogênea linear de grau 2
  - equação característica: $x^2 - x - 1 = 0$
    - cujas raízes são: $s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
  - O u e o v do teorema 1 vêm da solução de:

    $$\begin{cases} 1 = u.(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \; + \; v.(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \\ 1 = u.(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 \; + \; v.(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 \end{cases}$$

  - o que leva a: $u = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $v = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
  - e a fórmula explícita para a seqüência de Fibonacci fica:

    $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n \; - \; \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \qquad \square$$

Relação de recorrência X Indução

- Algumas vezes é útil conhecer algumas propriedades de uma relação de recorrência com a qual estamos trabalhando.
- Em virtude da forte conexão entre recorrência (recursão) e indução matemática, são comuns as provas para estas propriedades utilizarem indução.

Relação de recorrência X Indução

- **Exemplo:** Uma propriedade dos números de Fibonacci: $f_n \leq (\frac{5}{3})^n$
  - (um limite superior para a rapidez de crescimento dos nros)

Prova (por indução forte):

- Passo básico: $P(1)$ é $1 \leq \frac{5}{3}$, o que, evidentemente, é V.
- Passo indutivo:
  - usar $P(j)$, $j \leq k$, para mostrar $P(k+1)$: "$f_{k+1} \leq (\frac{5}{3})^{k+1}$"
  - $f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq (\frac{5}{3})^k + (\frac{5}{3})^{k-1}$

Relação de recorrência X Indução

- **Exemplo:** Uma propriedade dos números de Fibonacci: $f_n \leq (\frac{5}{3})^n$
  - (um limite superior para a rapidez de crescimento dos nros)

Prova (por indução forte):

- Passo básico: $P(1)$ é $1 \leq \frac{5}{3}$, o que, evidentemente, é V.
- Passo indutivo:
  - usar $P(j)$, $j \leq k$, para mostrar $P(k+1)$: "$f_{k+1} \leq (\frac{5}{3})^{k+1}$"
  - $$\begin{aligned} f_{k+1} = f_k + f_{k-1} &\leq (\tfrac{5}{3})^k + (\tfrac{5}{3})^{k-1} \\ &= (\tfrac{5}{3})^{k-1}(\tfrac{5}{3} + 1) \\ &= (\tfrac{5}{3})^{k-1}(\tfrac{8}{3}) \\ &< (\tfrac{5}{3})^{k-1}(\tfrac{5}{3})^2 \\ &= (\tfrac{5}{3})^{k+1} \qquad \Box \end{aligned}$$