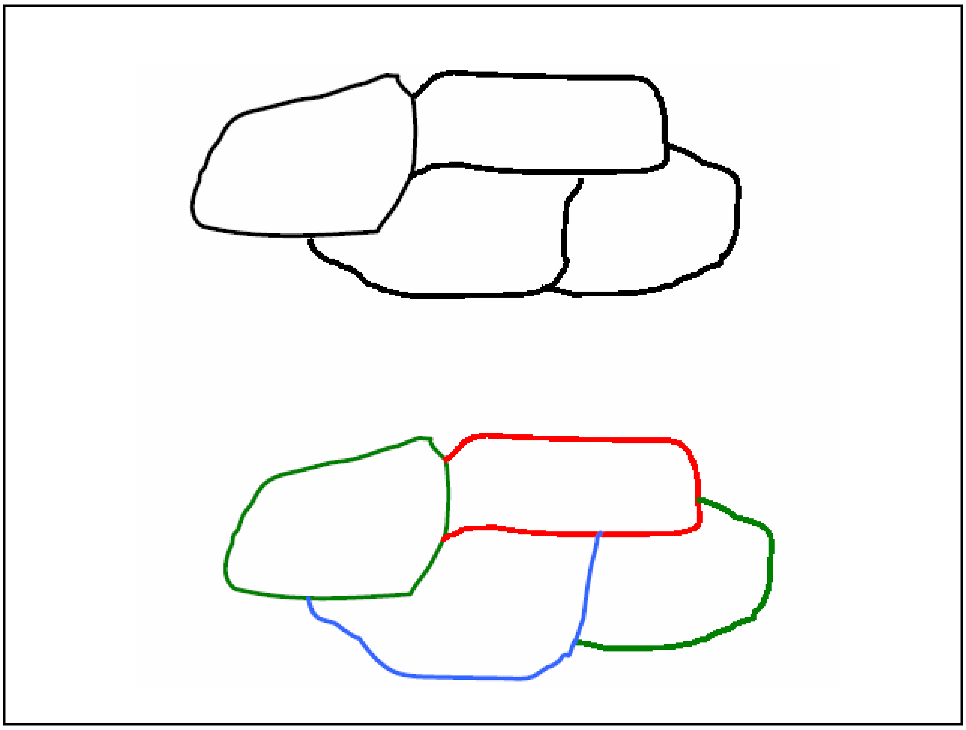
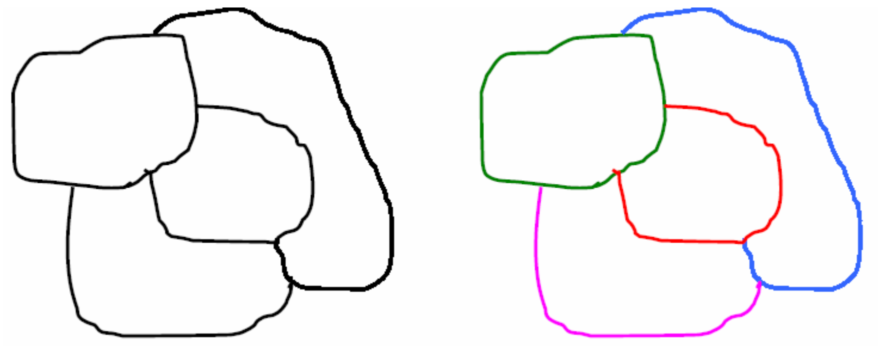
Coloração

Prof. Edson Tadeu Bez, Dr.

Problema de coloração de mapas: Um mapa de vários países desenhado em uma folha de papel, deve ser colorido de modo que, para uma melhor visualização, dois países com uma fronteira em comum devem ter cores distintas. Qual é o número mínimo de cores exigidas para a coloração de qualquer mapa?

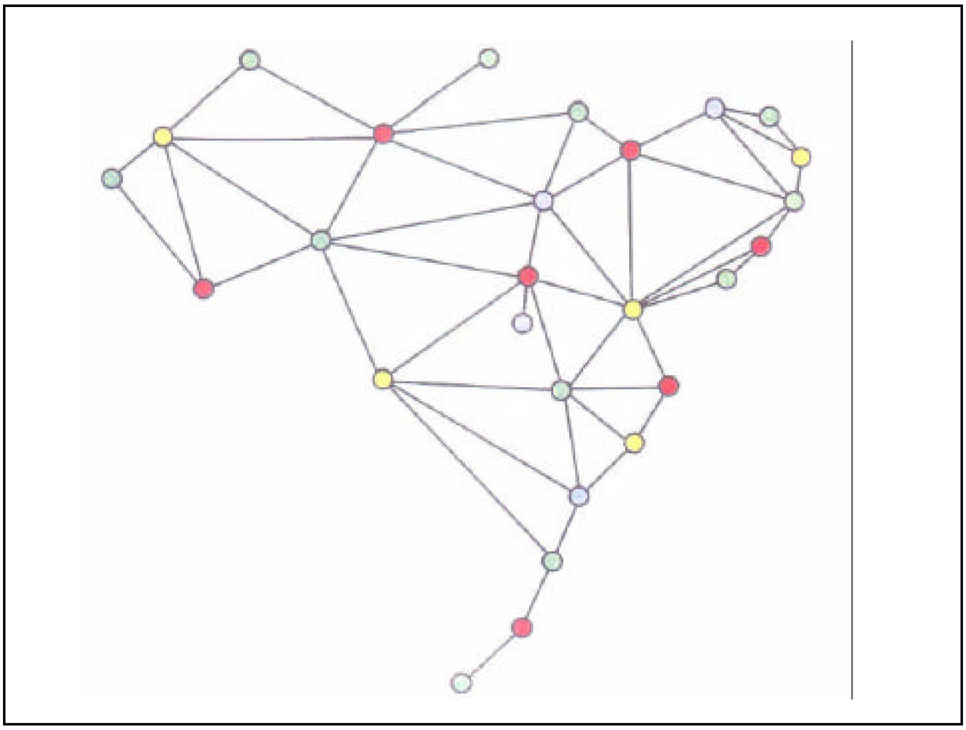


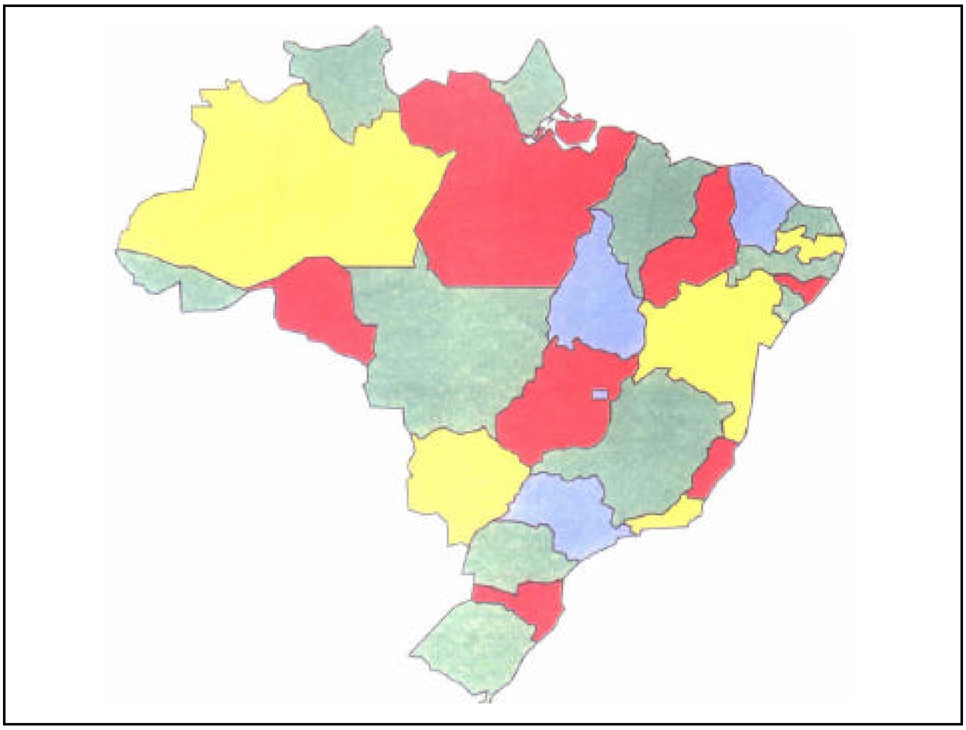


Como não foi possível obter um mapa que exigisse mais de quatro cores, uma conjectura foi formulada: Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa, conhecida como o Problema das Quatro Cores.

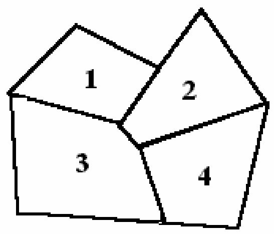
Problema das 4 cores

Este problema permaneceu sem solução por mais de cem anos. Em 1976, dois matemáticos da Universidade de Illinois, Wolfgang Haken e Kenneth Appel, demonstraram o Teorema das Quatro Cores.

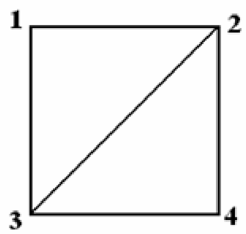




COLORAÇÃO



Mapa



Representação Planar

Grafo da Coloração de um Mapa

Problema de Coloração

O problema de *coloração* consiste em colorir, com um número mínimo de cores, os nós de um grafo de tal modo que dois nós adjacentes não tenham a mesma cor.

Particionamento

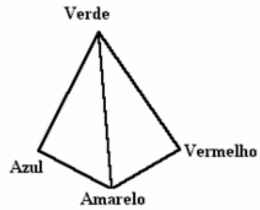
É o agrupamento em diferentes conjuntos dos vértices de cada cor. (todos os vértices de cor *A*, todos os vértices de cor *B* e assim sucessivamente)

Aplicações

- Problemas de horário;
- Armazenamento de mercadorias;
- Transporte de bens.

Número cromático (NC)

NC de um grafo é o menor número de cores que pode ser usado na coloração de vértices de modo que 2 vértices adjacentes não tenham a mesma cor.



3-cromático

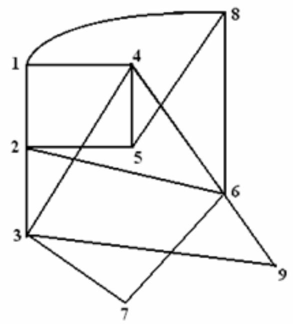
Número cromático de um grafo é o menor número de cores que pode ser utilizado na coloração dos nós de modo que dois nós adjacentes não tenham a mesma cor.

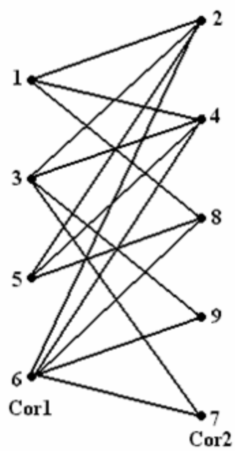
Um grafo G, que exige *k* cores para pintar seus nós, e não menos, é chamado um grafo k-cromático e *k* é chamado número cromático de G

As seguintes observações seguem diretamente da definição:

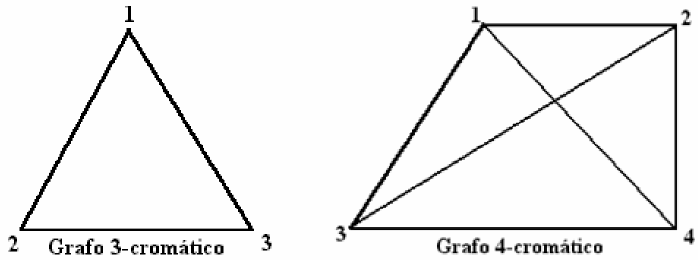
1) Um grafo que consiste somente de nós isolados é dito *1-cromático*.

2) Um grafo bipartite é *2-cromático*

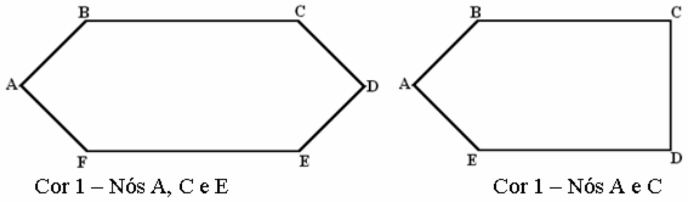




3) Um grafo completo de *n* vértices é *n-cromático*



4) Um grafo que consiste de um ciclo com $n > 2$ vértices é *2-cromático*, se *n* for par; e *3-cromático* se *n* for impar.

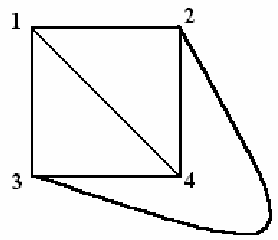


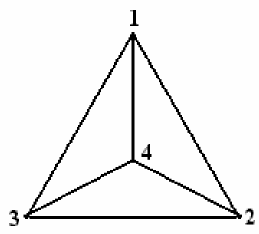
Cor 1 – Nós A, C e E
Cor 2 – Nós B, D e F

Cor 1 – Nós A e C
Cor 2 – Nós B e D
Cor 3 – Nó E

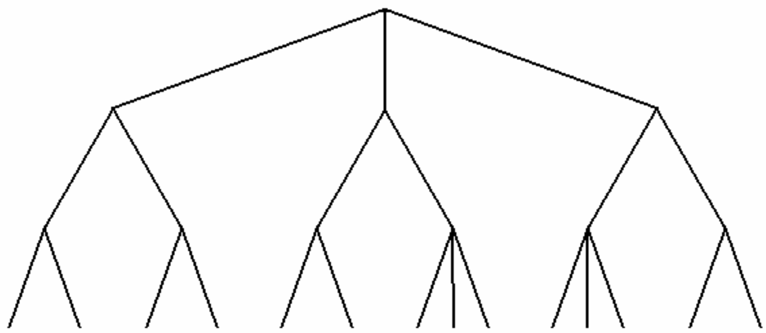
5) Qualquer grafo planar pode ser colorido com no máximo 4 cores.

Exemplo: Grafo completo de 4 nós (K_4).



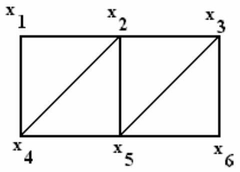


6) Toda árvore com dois ou mais vértices é *2-cromático*.



Método de Enumeração Implícita

Aplicação Prática: Dado o grafo a seguir, atribuir cores aos nós de modo que dois nós adjacentes não tenham a mesma cor.



- ordem natural de numeração (conclusão: 4-cromático):

Nós:	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Recebe cor:	1	1(não)	1	1(não)	1(não)	1(não)
		2		2(não)	2(não)	2
				3	3(não)	
					4	

- método de enumeração implícita (conclusão: 3-cromático):

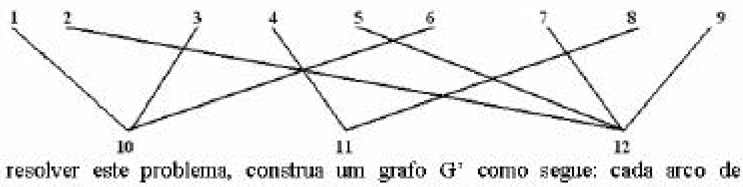
Nós:	x_1	x_2	x_4	x_5	x_3	x_6
Recebe cor:	1	1(não)	1(não)	1	1(não)	1(não)
		2	2(não)		2(não)	2
			3		3	

Observação: Observe que, se seguir o ordem natural de numeração dos nós, chega-se a uma conclusão errada.

Aplicações

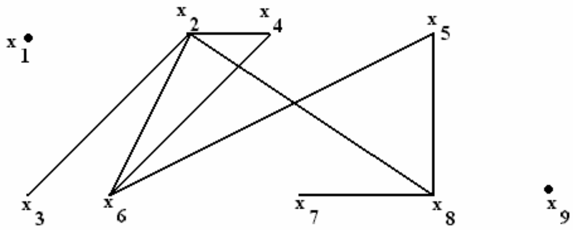
Número ótimo de placas numa ligação elétrica

Considere o grafo G a seguir como sendo um diagrama de ligações elétricas. Para que as ligações sejam fisicamente possíveis, elas não podem cruzar uma com as outras. Deve-se decompor o grafo de tal modo que seja possível ligar os terminais no plano.



Para resolver este problema, construa um grafo G' como segue: cada arco de G corresponde a um nó $x_i \in G'$ e existe o arco $(x_i,x_j) \in G'$ se x_i e x_j se cruzam em G. Sejam, então, os seguintes arcos para o grafo G':

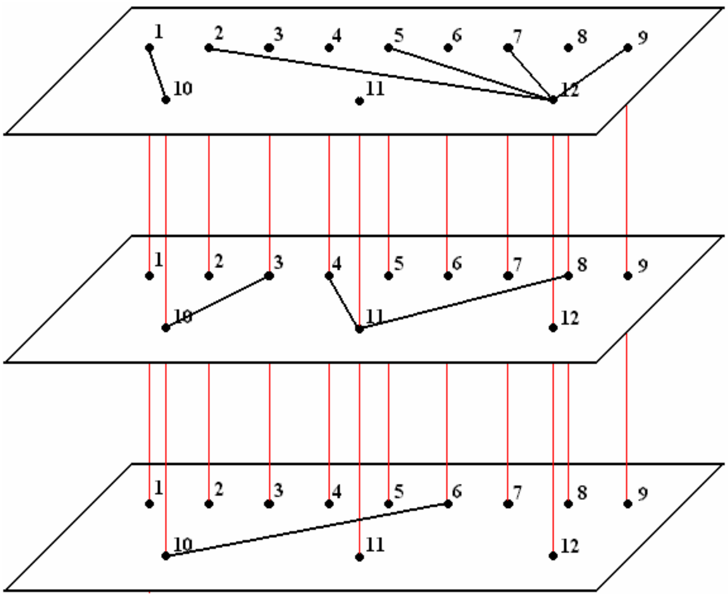
$x_1 = (1,10)$	$x_2 = (2,12)$	$x_3 = (3,10)$
$x_4 = (4,11)$	$x_5 = (5,12)$	$x_6 = (6,10)$
$x_7 = (7,12)$	$x_8 = (8,11)$	$x_9 = (9,12)$



Após isso, "pinte" o grafo G apropriadamente. O número cromático dará o número de placas paralelas necessárias. Uma coloração apropriada deste grafo pode ser:

Cor 1 = { x_1 , x_2 , x_5 , x_7 , x_9 }
Cor 2 = { x_3 , x_4 , x_8 }
Cor 3 = { x_6 }

Logo, serão necessárias três placas, e as ligações serão distribuídas como mostra a figura a seguir.



Conjuntos Independentes

Um conjunto de vértices é dito independente ou conjunto de vértices independentes, se qualquer dois vértices no conjunto não forem adjacentes.

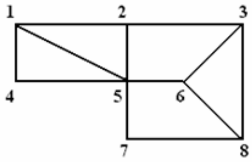
Definição

Em um grafo *G(X,A)* diz-se que um subconjunto $S \subset X$ de nós é independente se *2* nós quaisquer $x_i \in S$ e $x_j \in S$ não são adjacentes, ou seja:

$$S \cap \Gamma(S) = \phi$$

Observação: Alguns autores utilizam a denominação *conjunto internamente estável*.

Exemplo:



Conjuntos Independentes:
{ 1 , 3 }
{ 1 , 3 , 7 }
{ 2 , 4 }
{ 2 , 4 , 6 }
{ 2 , 4 , 6 , 7 }
{ 3 , 4 }
{ 3 , 4 , 7 }
{ 3 , 5 }
etc.

Conjunto Independente Maximal

Um *conjunto independente maximal* é um conjunto independente para o qual nenhum outro nó pode ser adicionado sem que destrua a propriedade de independência. Em outras palavras, um conjunto independente é chamado de maximal quando não há outro conjunto independente que o contenha, isto é, dado um conjunto independente S, e se $H \cap \Gamma(H) \neq \varnothing$, $\forall\ H \supset S$ então S é dito maximal.

Exemplos (Fig.Ant.):
{ 1 , 3 , 7 }
{ 2 , 4 , 6 , 7 }
{ 3 , 4 , 7 }
{ 5 , 8 }
etc.

Note que um grafo qualquer pode possuir muitos conjuntos independentes maximais, de diferentes cardinalidades. Dentre todos os conjuntos independentes maximais de um grafo, aqueles que possuírem maior número de nós são sempre de maior interesse.

Máximo Conjunto Independente

Seja F a família de conjuntos independentes maximais. Então o número $\alpha[G] = \max_{S \in F} |S|$ é chamado de número de independência do grafo G, e o conjunto $S^* \in F$, tal que $|S^*| = \alpha[G]$, é chamado de máximo conjunto independente.

Portanto, o máximo conjunto independente é o conjunto independente de maior cardinalidade de um grafo.

Exemplo (Fig.Ant.): { 2 , 4 , 6 , 7 }
$\alpha[G] = 4$

Observação: Alguns autores denominam $\alpha(G)$ de *coeficiente de estabilidade interna*.

Aplicação

Rotação de tripulações em uma empresa de transporte aéreo. (Problema apresentado por Roy)

Conhece-se o grafo $G(X,A)$ representativo da rede da CIA e quer-se alocar tripulações de modo a atender a uma série de restrições (local da residência, tempo de viagem, repouso entre viagens, etc); o itinerário de cada tripulação deve corresponder a um circuito no qual se considera o nó inicial associado a cidade onde reside a respectiva tripulação.

O conjunto de circuitos viáveis é um dado do problema, fornecido pelo departamento de pessoal da CIA; deseja-se escolher o subconjunto de circuitos que formem uma partição do conjunto A de rotas.

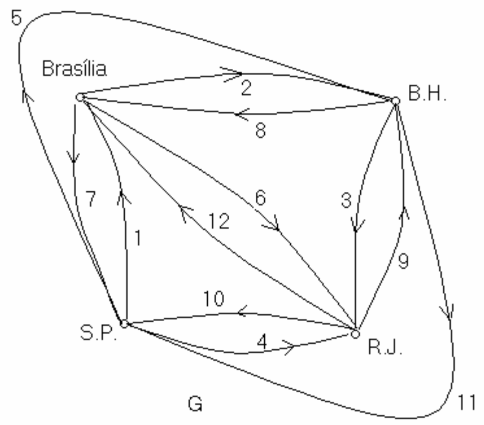
O que fazer?

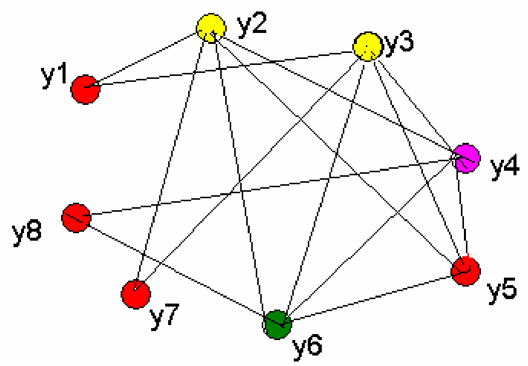
Define-se, então um grafo H(Y,V) no qual $y_i \subset Y$ é um circuito viável e $[y_i, y_j] \in V$ existe, se os circuitos y_i e y_j possuem ao menos uma rota em comum.

A solução será, portanto dado por um conjunto independente $S \subset Y \,/\, \bigcup_{y_i \in S} y_i = A$

Circuitos viáveis: $y_1 = (1,2,11)$, $y_2 = (1,6,10)$, $y_3 = (2,3,12)$, $y_4 = (3,10,5)$, $y_5 = (4,9,3,10)$, $y_6 = (5,3,10)$, $y_7 = (6,12)$, $y_8 = (7,5,8)$

Exemplo: Seja o grafo *G(X,A)* seguinte:



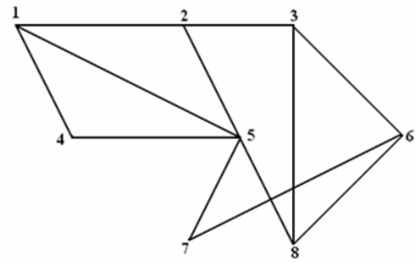


O conjunto independente $\{y_1, y_5, y_7, y_8\}$ é uma solução do problema.
Todas as rotas estão presentes em seus elementos uma vez e apenas uma.

Conjuntos Dominantes

Definição: Em um grafo $G(X,\Gamma)$ diz-se que um conjunto $S \subset X$ de nós é *dominante* (externamente estável ou absorvente) se para todo nó $x_j \notin S$ se tem um arco (x_i, x_j) com $x_i \in S$. Ou seja, $S \cup \Gamma(S) = X$.

Observação: Alguns autores utilizam as denominações *conjunto externamente estável* ou *conjunto absorvente* para designar conjuntos dominantes.



Conjuntos Dominantes:
{ 1 , 2 , 3 , 4 ,5 }
{ 1 , 3 , 7 , 8 }
{ 2 , 4 , 6 , 8 }
{ 3 , 4 , 5 , 6 }
{ 3 , 4 , 7 }
{ 3 , 5 , 7 }
{ 4 , 5 , 6 , 7, 8 }
etc.

Conjunto Dominante Minimal

Um *conjunto dominante minimal* é um conjunto dominante tal que nenhum nó possa ser removido sem destruir sua propriedade de dominância.
Em outras palavras, um conjunto dominante minimal é um conjunto dominante tal que nenhum nó possa ser removido sem destruir sua propriedade de dominância.

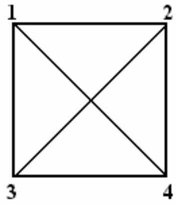
Exemplo (Fig.Ant.):
{ 1 , 6 }
{ 1 , 7 , 8 }
{ 2 , 4 , 6 , 8 }
{ 3 , 5 }
{ 5 , 6 }

Se retirar qualquer nó o conjunto deixa de ter a condição de dominância assegurada.

Note que um grafo qualquer pode ter vários conjuntos dominantes minimais, de diferentes cardinalidades.
Dentre todos os conjuntos dominantes minimais de um grafo, aqueles que possuírem menor número de nós são sempre de maior interesse.

Da definição de conjunto dominante minimal segue que:

1. Qualquer nó em um grafo completo constitui um conjunto dominante minimal.



2. Todo conjunto dominante contém, pelo menos um conjunto dominante minimal.

<u>Exemplo</u>: Conjunto dominante $\Rightarrow \{ 3 , 4 , 5 , 6 \}$
Conjuntos dominantes minimais $\Rightarrow \{ 3 , 5 \}$ e $\{ 5 , 6 \}$

Mínimo Conjunto Dominante

Seja P a família de conjuntos dominantes minimais. Então, $\beta[G] = \min_{S \in P} |S|$ é o número de dominância de G, e o conjunto $S^* \in P$, tal que $|S^*| = \beta[G]$ é chamado de mínimo conjunto dominante.

Portanto, o mínimo conjunto dominante é o conjunto dominante de menor cardinalidade de um grafo.

<u>Observação</u>: Em todo grafo G tem-se o número de dominância menor ou, no máximo, igual ao número de independência.

Aplicações

De modo geral, a noção de dominância está diretamente relacionada, do ponto de vista conceitual, à idéia de vigilância ou de autoridade. Um problema-tipo importante é exatamente chamado "problema de vigilância", onde o menor conjunto dominante corresponderá ao menor número de pontos de controle necessários à vigilância de todos os nós.

Exemplos:

- Colocação de torres de vigia em uma instalação industrial;
- Colocação de radares para controle de pontos estratégicos;
- Localização de transmissores de rádio e TV para garantir a recepção em uma determinada área;
- Localização de postos de saúde, postos policiais, etc. para atendimento a uma região;
- Localização de bases de apoio para viajantes.

Bibliografia

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo – Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1979.

CAMPELO, Ruy Eduardo ; MACULAN, Nelson – Algoritmos e Heurísticas: Desenvolvimento e Avaliação de Performance. Niterói: Editora da Universidade Federal Fluminense, 1994.

CHRISTOFIDES, Nicos – Graph Theory – An Algorithmic Approach. Londres: Academic Press, 1975.

MAYERLE, Sérgio Fernando – (Notas de Aula – Florianópolis: UFSC, 1985)

RABUSKE, Márcia Aguiar – Introdução à Teoria dos Grafos. Florianópolis: Editora da UFSC, 1992.

SCHWARZ, Gaston Adair - Apostila de Coloração , 2001.