INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

7 - ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

ÁLGEBRA ABSTRATA

- Noção familiar: Álgebra Elementar.
  - Exemplo: adição e multiplicação sobre os inteiros.
  - Essência: “operação binária” sobre “um conjunto de elementos”.
- Abstração: recurso poderoso.
  - Consiste em isolar a essência do problema.
  - Conexão entre problemas aparentemente não relacionados.
  - Problemas complexos viram simples casos particulares de esquema mais geral.
  - Uma vez identificada a “classe” de um problema, pode-se aproveitar resultados prontos.
- Ponto de vista de modelagem em Ciência da Computação:
  - interessa justamente mais o “esquema geral” do que os detalhes
  - abstração permite focar apenas no que interessa

Operações Binárias

- Precisamos de uma definição precisa desta idéia familiar.
- **Operação Binária** sobre um conjunto A:
  - função $f : A \times A \to A$
  - definida para todo par ordenado de elementos de A
  - apenas um elemento de A é atribuído a cada par de $A \times A$
- Ou seja: regra que atribui um único elemento de A a cada par ordenado de elementos de A.

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Notação:
  - como se trata de uma função, o normal seria denotar o elemento atribuído a (a, b) por $*(a, b)$
  - mas o usual é $a * b$
- Importante: lembrar que $a * b \in A$
  - também se diz que A é **fechado** sob a operação $*$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo 1(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.
  - Defina $a * b$ como $a + b$.
  - Então $*$ é uma operação binária sobre $\mathbb{Z}$ $\square$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo 2(/6):** Seja $A = \mathbb{R}$.
  - Defina $a * b$ como a/b.
  - Então $*$ não é uma operação binária
    - pois não é definida para todo par ordenado de $A \times A$
    - por exemplo, $3 * 0$ não é definida $\square$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo 3(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}^{+}$.
  - Defina $a * b$ como $a - b$.
  - Então $*$ não é uma operação binária:
    - não atribui um elemento de A para todo par de $A \times A$
    - por exemplo, $2 * 5 \notin A$ $\square$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo 4(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.
  - Defina $a * b$ como um número menor do que a e do que b.
  - Então $*$ não é uma operação binária:
    - não atribui um elemento único de A para todo par de $A \times A$
    - por exemplo, $8 * 6$ poderia ser 5, 4, 3, 2, 1, etc.
  - Neste caso, $*$ seria uma relação de $A \times A$ para A
    - mas não uma função $\square$

Operações Binárias

- **Exemplo 5(/6):** Seja $A = \mathbb{Z}$.
  - Defina $a * b$ como $\max\{a, b\}$.
  - Então $*$ é uma operação binária:
    - $2 * 4 = 4$
    - $-3 * (-5) = -3$ $\square$

Operações Binárias

- **Exemplo 6(/6):** Seja $A = P(S)$, para algum conjunto S.
  - Sejam V e W dois subconjuntos de S.
  - $V * W$ definida como $V \cup W$ é uma operação binária sobre A.
  - Mas: $V * W$ definida como $V \cap W$ também. $\square$

OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Note que é possível definir muitas operações binárias sobre o mesmo conjunto.

- **Exemplo:** Seja M o conjunto de todas as matrizes Booleanas.
  - São operações binárias:
    - $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ definido como $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
    - $\mathbf{A} * \mathbf{B}$ definido como $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ $\square$

- **Exemplo:** Seja L um reticulado.
  - São operações binárias sobre L:
    - $a * b$ definido como $a \wedge b$ (“GLB” de a e b)
    - $a * b$ definido como $a \vee b$ (“LUB” de a e b) $\square$

Operações Binárias & Tabelas

- Pode-se definir uma operação binária sobre um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ por meio de uma tabela:

$*$	a_1	a_2	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_n
a_1						
a_2						
$\ldots$						
a_i				$a_i * a_j$		
$\ldots$						
a_n						

- Elemento na posição i, j denota $a_i * a_j$

Operações Binárias & Tabelas

- **Exemplo:** Operações $\vee$ e $\wedge$ sobre $A = \{0, 1\}$:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

NÚMERO DE OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Seja $A = \{a, b\}$.
- O número de operações binárias que podem ser definidas sobre A é:
  - toda operação binária sobre A pode ser descrita pela tabela:

$*$	a	b
a		
b		

  - como cada espaço vazio pode ser preenchido com a ou b:
    - há $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ modos de completar a tabela
  - Logo, existem 16 operações binárias possíveis sobre A. $\square$

Propriedades das Operações Binárias

- **Prop1:** Uma operação binária é **comutativa** se:

$$a * b = b * a \qquad \forall a, b \in A$$

- **Exemplo:** $a + b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ é comutativa.

- **Exemplo:** $a - b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ não é comutativa, pois:
  - $2 - 3 \neq 3 - 2$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- Uma operação binária definida por uma tabela é simétrica se e somente se a tabela é simétrica.

- **Exemplo:** Sejam as operações binárias sobre A:

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	b	c	b	a
c	c	d	b	c
d	a	a	b	b

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	d	b	a
c	b	b	a	c
d	d	a	c	d

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Prop2:** Uma operação binária é **associativa** se:

$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall a, b, c \in A$$

- **Exemplo:** $a + b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ é associativa.

- **Exemplo:** $a - b$ sobre $A = \mathbb{Z}$ não é associativa, pois:
  - $2 - (3 - 5) \neq (2 - 3) - 5$

Propriedades das Operações Binárias

- **Exemplo:** Seja L um reticulado. A operação binária definida por $a * b = a \wedge b$ é comutativa e associativa.
  - Também é **idempotente**: $a \wedge a = a$.
  - *"Seja $(A, \leq)$ um reticulado e seja uma operação binária definida por $a * b = a \wedge b$. Então $a * b$ é comutativa, associativa e idempotente sobre A."*
- Uma parte do converso deste exemplo também é verdadeira. $(\Rightarrow)$

Propriedades das Operações Binárias

- **Exemplo:**
  - Seja uma operação binária $*$ sobre A que satisfaz:
    - $a = a * a$ (idempotência)
    - $a * b = b * a$ (comutatividade)
    - $a * (b * c) = (a * b) * c$ (associatividade)
  - E seja uma relação $\leq$ sobre A definida por:
    - $a \leq b$ se e somente se $a = a * b$
  - Então, pode-se mostrar que:

    1) $(A, \leq)$ é um poset

    2) $GLB(a, b) = a * b, \quad \forall a, b \in A$

PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES BINÁRIAS

- **Exemplo (cont.):**

  1) Mostrando que $(A, \leq)$ é um poset:

  - reflexiva: como $a = a * a$, temos que
    - $a \leq a, \ \forall a \in A$
  - antissimétrica: se $a \leq b$ e $b \leq a$, então:
    - $a = a * b = b * a = b$
  - transitiva: se $a \leq b$ e $b \leq c$, então:
    - $a = a * b = a * (b * c) = (a * b) * c = a * c$

Propriedades das Operações Binárias

- **Exemplo (cont.):**

  2) Mostrando que $a * b = a \wedge b$:

  - temos que: $a * b = a * (b * b) = (a * b) * b$
    - de modo que: $a * b \leq b$
    - similarmente: $a * b \leq a$
    - conclusão: $a * b$ é uma cota inferior para a e b
  - agora, se $c \leq a$ e $c \leq b$:
    - $c = c * a$ e $c = c * b$
    - portanto: $c = (c * a) * b = c * (a * b)$
    - de modo que: $c \leq a * b$
    - conclusão: $a * b$ é a maior cota superior de a e b. $\square$