Introdução
Lógica de Predicados

Márcia Islabão Franco

19 de outubro de 2005

Linguagem

Sintaxe

Sistema (formal) de regras que determina como as expressões da linguagem podem ser formadas a partir de conjuntos de caracteres básicos.

Linguagem

Sintaxe

Sistema (formal) de regras que determina como as expressões da linguagem podem ser formadas a partir de conjuntos de caracteres básicos.

Semântica

Teoria baseada em regras de relacionamento entre as expressões da linguagem e determinados objetivos (significado das fórmulas).

Limitações da lógica Proposicional

Expressa bem:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$

if ...then

Limitações da lógica Proposicional

Expressa bem:

$$\neg, \wedge, \vee$$

if ...then

Mas não consegue expressar sentenças como:

existe, todos, alguns, somente

Limitações da lógica Proposicional

Expressa bem:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$

if ...*then*

Mas não consegue expressar sentenças como:

existe, todos, alguns, somente

Neste caso a **Lógica Proposicional** mostra claramente suas limitações e a necessidade de expressar **sentenças declarativas**.

Exemplo 1

"Todos estudantes são mais jovens do que alguns professores"

Exemplo 1

“Todos estudantes são mais jovens do que alguns professores”

$S(\text{ana})$
$P(\text{joão})$
$J(\text{ana,joão})$

Especificação formal

- Para realizar uma especificação formal precisamos primeiramente definir:

Especificação formal

- Para realizar uma especificação formal precisamos primeiramente definir:
  - Conceito de variáveis

$$x, y, z$$
$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

Especificação formal

$$S(x) : x \text{ é um estudante}$$
$$P(y) : y \text{ é um professor}$$
$$J(x, y) : x \text{ é mais jovem do que } Y$$

O que ainda falta???

Precisamos expressar

Todo e **Algum**

O que ainda falta???

Precisamos expressar

Todo e **Algum**

Precisamos introduzir os **quantificadores** da Lógica de Predicados

Motivação

- Poder de expressão maior que o da Lógica Proposicional.
- Verificam-se argumentos sobre propriedades e relações entre indivíduos ou elementos.
- Relações lógicas geradas pelos quantificadores todo e algum.
- Proposições têm estrutura interna composta por relações entre atributos que denotam classes ou conjuntos.

Objetivos

- Motivar extensão da Lógica Proposicional para a de Predicados através da necessidade de descrever a estrutura interna de sentenças.
- Introduzir os conceitos da sintaxe (fórmulas com e sem quantificadores) da lógica de predicados.
- Definir formalmente os componentes sintáticos e semânticos da linguagem.

Vantagens

- A Lógica de Predicados pode ser vista como uma linguagem formal com recursos para formalizar qualquer situação em teoria dos conjuntos, isto é, funções, relações, e elementos de conjuntos.
- A noção de interpretação e satisfação na linguagem de primeira ordem nos fornece uma ferramenta sofisticada e poderosa com a qual temos condições de determinar precisamente o significado de qualquer objeto sintático nesta linguagem.

Proposições Categóricas

Alguns mamíferos são leões

Todos os leões são carnívoros

Logo, alguns mamíferos são carnívoros

Proposições Categóricas

Alguns mamíferos são leões

Todos os leões são carnívoros

Logo, alguns mamíferos são carnívoros

Algum M é L
Todo L é C
Logo, algum M é C

Proposições Categóricas

- As proposições do exemplo não envolvem conectivos, mas constituem uma forma de argumento válida.
- As letras M, L, C não são sentenças, mas classes ou conjuntos de atributos.
- Qualquer substituição coerente de classes de atributos continua sendo um argumento válido.

Conceitos importantes

Proposição

Sentença declarativa
Pode ser avaliada (V ou F)

Conceitos importantes

Proposição

Sentença declarativa
Pode ser avaliada (V ou F)

Constante

Nome de um elemento fixo ($a, b, c, ...$)

Conceitos importantes

Proposição

Sentença declarativa
Pode ser avaliada (V ou F)

Constante

Nome de um elemento fixo ($a, b, c, ...$)

Variável

Nome de um elemento não determinado ($..., x, y, z$)

Conceitos importantes

Predicado

Propriedade ou relação entre elementos $(A, B, C, ..., Z)$

Conceitos importantes

Predicado

Propriedade ou relação entre elementos $(A, B, C, ..., Z)$

Aridade

Número de elementos do predicado
$P(x)$ unário, $P(x, y)$ binário, $P(x, y, z)$ ternário...

Exemplo 1

"**Todos** estudantes são mais jovens do que **alguns** professores"

Quantificadores

$\forall$ - Quantificador Universal

para todo, qualquer que seja

Quantificadores

$\forall$ - Quantificador Universal

para todo, qualquer que seja

$\exists$ - Quantificador Existencial

existe, para pelo menos um

Quantificadores

$\forall x$

$\exists y$

Quantificadores

$\forall x$

$\exists y$

eles estão sempre acompanhados de uma variável

Com esses quantificadores podemos escrever...

“ **Todos** estudantes são mais jovens do que **alguns** professores”

Com esses quantificadores podemos escrever...

“ **Todos** estudantes são mais jovens do que **alguns** professores”

$$\forall_x (S(x) \rightarrow (\exists_y (P(y) \wedge J(x,y))))$$

Exemplo 2

“Nem todos passaros podem voar”

Exemplo 2

“Nem todos passaros podem voar”

predicados

P e V

esses predicados tem 1 argumento

argumentos

$P(x)$: x é um passaro

$V(x)$: x pode voar

Exemplo 2

A sentença

"Nem todos passaros podem voar"

Exemplo 2

A sentença

“Nem todos passaros podem voar”

$$\neg(\forall_x(P(x) \rightarrow V(x)))$$

Exemplo 2

A sentença

“Nem todos passaros podem voar”

$$\neg(\forall_x(P(x) \to V(x)))$$

$$\exists_x(P(x) \wedge \neg V(x))$$

Exemplo 2

A sentença

“Nem todos passaros podem voar”

$$\neg(\forall_x(P(x) \rightarrow V(x)))$$

$$\exists_x(P(x) \land \neg V(x))$$

Essas duas fórmulas são semânticamente equivalentes

Exemplo 3

“Todas as crianças são mais jovens do que as mães”

Exemplo 3

“Todas as crianças são mais jovens do que as mães”

$$\forall_x \forall_y (C(x) \wedge M(y,x) \rightarrow J(x,y))$$

Exemplo 3

“Todas as crianças são mais jovens do que as mães”

$$\forall_x \forall_y (C(x) \wedge M(y,x) \rightarrow J(x,y))$$

Também podemos dizer

$$\forall_x (C(x) \rightarrow J(x, m(x)))$$

Regras de Formação da Linguagem

- Símbolos Lógicos:
  Operadores lógicos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  Quantificadores: $\forall, \exists$
  Parenteses: (,)
- Símbolos não Lógicos:
  Letras nominais: minúsculas de *a* a *t*
  Variáveis: minúsculas de *u* a *z*
  Letras predicativas: maiúsculas
- Fórmula atômica: $P(a), P(a,b), P(a,b,c)$...

Formula Bem Formada - WFF

Regras de formação de WFF:

- Toda formula atômica é uma WFF
- Se ϕ é uma WFF, então $\neg\phi$ também é uma WFF.
- Se ϕ e ψ são WFF, então $(\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ também são WFF.
- Se ϕ é uma WFF contendo uma letra nominal α, então qualquer fórmula da forma $\forall_\beta \phi^{\beta/\alpha}$ ou $\exists_\beta \phi^{\beta/\alpha}$ é uma WFF. ($\phi^{\beta/\alpha}$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α por β em ϕ)

Proposições Categóricas

Todo S é P

$$\forall_x (S(x) \rightarrow P(x))$$

Nenhum S é P

$$\forall_x (S(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Proposições Categóricas

Todo S é P

$$\forall_x (S(x) \rightarrow P(x))$$

Nenhum S é P

$$\forall_x (S(x) \rightarrow \neg P(x))$$

Algum S é P

$$\exists_x (S(x) \wedge P(x))$$

Algum S não é P

$$\exists_x (S(x) \wedge \neg P(x))$$

Formalização

- Variáveis diferentes não designam necessariamente objetos diferentes.
- Escolha de variáveis não faz diferença para o significado.
- A mesma variável usada com vários quantificadores não designa necessariamente o mesmo elemento em cada caso.
- As sentenças que misturam quantificadores universal e existencial são geralmente ambíguas
- A ordem dos quantificadores consecutivos afeta o significado quando quantificadores universal e existencial são misturados.

Exercício 1

Interpretando pela letra “C” a sentença “Está chovendo” e pelas letras “R”, “V”, “S” e “I” os predicados “é uma rã”, “é verde”, “é saltitante” e “é iridescente”, respectivamente, formalize as seguintes sentenças:

1. Todas as rãs são verdes
2. Nenhuma rã é verde
3. Algumas rãs são verdes
4. Algumas rãs não são verdes
5. Toda coisa é uma rã
6. Nada é uma rã
7. Existem rãs verdes
8. Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente

Exercício 1 - respostas

1. Todas as rãs são verdes
   $\forall_x (R(x) \rightarrow V(x))$
2. Nenhuma rã é verde
   $\forall_x (R(x) \rightarrow \neg V(x))$
3. Algumas rãs são verdes
   $\exists_x (R(x) \wedge V(x))$
4. Algumas rãs não são verdes
   $\exists_x (R(x) \wedge \neg V(x))$

Exercício 1 - respostas

1. Toda coisa é uma rã
   $\forall_x (R(x))$
2. Nada é uma rã
   $\exists_x (R(x))$
3. Existem rãs verdes
   $\exists_x (V(x) \wedge R(x))$
4. Qualquer coisa ou é rã ou é iridescente
   $\forall_x (V(x) \vee I(x))$

Exercício 1 - continuação

1. Está chovendo e algumas rãs estão saltitantes
2. Se está chovendo, então todas as rãs estão saltitantes
3. Ou qualquer coisa é uma rã ou nada é uma rã
4. Qualquer coisa ou é uma rã ou não é nada
5. Algumas rãs verdes não estão saltitantes
6. Não é verdade que algumas rãs verdes estão saltitantes
7. Se nada é verde, então não existem rãs verdes
8. Rãs verdes saltam se e somente se não está chovendo

Exercício 1 - respostas

1. Está chovendo e algumas rãs estão saltitantes
   $C \wedge \exists_x (R(x) \wedge S(x))$
2. Se está chovendo, então todas as rãs estão saltitantes
   $C \rightarrow \forall_x (R(x) \rightarrow S(x))$
3. Ou qualquer coisa é uma rã ou nada é uma rã
   $\forall_x R(x) \vee \forall_x \neg R(x)$
4. Qualquer coisa ou é uma rã ou não é nada
   $\forall_x (R(x) \vee \neg R(x))$

Exercício 1 - respostas

1. Algumas rãs verdes não estão saltitantes
   $\exists_x((V(x) \land R(x)) \land \neg S(x))$
2. Não é verdade que algumas rãs verdes estão saltitantes
   $\neg\exists_x((V(x) \land R(x)) \land S(x))$
3. Se nada é verde, então não existem rãs verdes
   $\forall_x \neg V(x) \rightarrow \neg\exists_x(V(x) \land R(x))$
4. Rãs verdes saltam se e somente se não está chovendo
   $\forall_x((V(x) \land R(x)) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow \neg C))$