Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

7 - Estruturas Algébricas

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.4-exs.1-11)* Em cada exercício abaixo, determine se o conjunto com a operação binária mostrada é um grupo. Se for um grupo, determine se é Abeliano e especifique a identidade e a inversa de um elemento genérico.
   - (1) $\mathbb{Z}$, aonde $*$ é a multiplicação comum.
   - (3) $\mathbb{Q}$, o conjunto de todos os números racionais, sob a operação de adição.
   - (5) $\mathbb{R}$, sob a operação de multiplicação.
   - (7) $\mathbb{Z}^+$, sob a operação de adição.
   - (9) O conjunto dos inteiros ímpares sob a operação de multiplicação.
   - (11) Se S é conjunto não-vazio, o conjunto $P(S)$, aonde $A * B = A \oplus B$.

2. *(Kolman5-seção 9.4-ex.21)* Seja G um grupo finito com identidade e, e seja a um elemento arbitrário de G. Prove que existe um inteiro não-negativo n tal que $a^n = e$.

3. *(Kolman5-seção 9.4-ex.23)* Seja G o grupo dos inteiros sob a operação de adição, e seja $H = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$. Determine se H é um subgrupo de G.

4. *(Kolman5-seção 9.4-ex.25)* Seja G um grupo e seja $H = \{x | x \in G \text{ e } xy = yx, \ \forall y \in G\}$. Prove que H é um subgrupo de G.

5. *(Kolman5-seção 9.4-ex.33)* Seja G um grupo. Mostre que a função $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ é um isomorfismo se e somente se G é Abeliano (comutativo).

6. *(Kolman5-seção 9.4-ex.35)* Seja G um grupo e seja a um elemento fixo de G. Mostre que a função $f_a : G \to G$ definida por $f_a(x) = axa^{-1}$, para $x \in G$, é um isomorfismo.