INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

0) Apresentação

0.1) Conjuntos e Subconjuntos

0.2) Seqüências e Somas

Seqüências

- Uma seqüência é uma estrutura ordenada usada para representar lista ordenada de elementos.

Def.: uma **seqüência** é uma função de um subconjunto dos inteiros, {0,1,2,...} ou {1,2,3,...} para um conjunto S.

  - a_n é a imagem do inteiro n
  - a_n é um termo da seqüência

- Usamos a notação $\{a_n\}$ para denotar a seqüência
- Note que a_n representa um termo da seqüência $\{a_n\}$

Seqüências

- Descrevemos seqüências listando os seus termos em ordem crescente do índice.
- <u>Exemplo</u>: considere a seqüência $\{a_n\}$, onde:

  $a_n = 1/n$

  – A lista dos termos desta seqüência, ou seja:

  $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

  – Começa com:

  $1, ½, 1/3, ¼, \ldots$

Seqüências

- Exemplo: uma progressão aritmética é uma seqüência da forma:
  - $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd$
  - Ex.: $\{s_n\}$, onde $s_n=-1+4n$
    - a lista de termos $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ começa com:

      $-1,3,7,11,\ldots$

Seqüências

- Exemplo: uma progressão geométrica é uma seqüência da forma:
  - $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n$
  - Ex.: $\{c_n\}$, onde c_n=343
    - a lista de termos $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ começa com:

      10,50,250,1250,...

Seqüências

- Seqüências finitas do tipo $a_1,a_2,\ldots,a_n$ são muito usadas na Ciência da Computação
  - Também são chamadas de **strings**
  - O comprimento de uma string é o seu nro de termos

- Exemplo: a seqüência abcd é uma string de comprimento 4.

Seqüências especiais

- Problema: encontrar uma fórmula (regra geral) para a construção dos termos de uma seqüência.
  - Às vezes, apenas alguns termos são conhecidos (são solução de algum problema).
  - Como identificar a seqüência?

- Os primeiros termos não definem a seqüência inteira:
  - existem infinitas seqüências que começam com os mesmos termos iniciais
  - mas eles podem ajudar a montar uma conjectura sobre a identidade da seqüência

Seqüências especiais

- Ao tentar deduzir uma regra de formação, busca-se um padrão nos primeiros termos.

- Pode-se também tentar determinar como um termo é produzido a partir dos que o precedem.

Seqüências especiais

- Algumas questões úteis:
  - O mesmo valor reaparece?
  - Há termos obtidos a partir dos anteriores pela adição de uma qtde fixa?
    - ou de uma qtde que dependa da posição?
  - Há termos obtidos a partir dos anteriores pela multiplicação por um valor fixo?
  - Há termos obtidos a partir de uma combinação dos anteriores?
  - Há algum termo que se repete?

Seqüências especiais

- **Exemplo**: encontre fórmulas para a seqüência cujos 1ros termos são dados por: 1,1/2,1/4,1/8,1/16

- **Resposta**:
  - os denominadores são potências de 2
  - opção possível: $a_n=1/2^{n-1}$
  - ou: PG com a=1 e r=1/2

Seqüências especiais

- **Exemplo**: encontre fórmulas para as seqüências cujos 1ros termos são dados por: 1,3,5,7,9

- **Resposta**:
  - cada termo obtido pela adição de 2 ao anterior
  - opção possível: $a_n=2n-1$
  - ou: PA com a=1 e d=2

Seqüências especiais

- **Exemplo**: encontre fórmulas para as seqüências cujos 1ros termos são dados por: 1,-1,1,-1,1

- **Resposta:**
  - os termos alternam entre 1 e -1
  - opção possível: $a_n=(-1)^{n+1}$
  - ou: PG com a=1 e r=-1

Formas de construção

- **Exemplo**: como se pode produzir uma seqüência cujos 10 primeiros termos são dados por 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4?
  - o 1 aparece uma vez
  - o 2 aparece duas vezes,…
  - Possível regra de formação: “o inteiro n aparece exatamente n vezes”

Formas de construção

- **Exemplo**: como se pode produzir uma seqüência cujos 10 primeiros termos são dados por 5,11,17,23,29,35,41,47,53,59?

- **Resposta**:
  - cada um dos 10 primeiros termos é obtido pela adição de 6 ao anterior
  - possível regra de formação: "o n-ésimo termo pode ser produzido começando-se com 5 e adicionando-se 6 por n-1 vezes"
  - ou seja: o n-ésimo termo é $5+6(n-1)=6n-1$

Formas de construção

- Outra técnica: comparar os termos da seqüência de interesse com os termos de uma seqüência bem conhecida, como:
  - termos de uma PA, PG
  - quadrados perfeitos
  - cubos perfeitos

Seqüências úteis

n-ésimo termo	primeiros 10 termos
n^2	1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,…
n^3	1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000,…
n^4	1,16,81,256,625,1296,2401,4096,6561,10000,…
2^n	2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,…
3^n	3,9,27,81,243,729,2187,6561,19683,59049,…
$n!$	1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,3628800...

Formas de construção

- **Exemplo**: Deduza uma fórmula simples para a_n se os 10 1ros termos da seqüência $\{a_n\}$ são 1,7,25,79,241,727,2185,6559,19681,59047.

- **Resposta:** as diferenças entre termos consecutivos não indicam nenhum padrão...
  - Razão entre termos consecutivos:
    - embora variável, fica próxima de 3
    - suspeita: fórmula envolvendo 3^n
    - comparando com a seqüência $\{3^n\}$:
      - n-ésimo termo = 2 a menos do correspondente
      - ou seja: $a_n = 3^n - 2$

Formas de construção

- Neil Sloane:
  - Enciclopédia da Seqüências de inteiros
  - Coleção de mais de 8000 seqüências na Internet
  - Também tem um programa que busca na enciclopédia quais as seqüências que combinam com termos iniciais fornecidos..

Seqüências

- **Exercício** (seleção para a google): encontre a próxima linha da seqüência abaixo:

1

1 1

2 1

1 2 1 1

Somas

- Notação usada para expressar a soma dos termos:

  $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$

  – a partir da seqüência $\{a_n\}$:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

- Note que a escolha da letra "j" como índice é arbitrária

Somas

- Exemplo: A soma dos 100 primeiros termos da seqüência $\{a_n\}$, onde $a_n=1/n$, para $n=1,2,3,\ldots.$ é dada por:

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

Somas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{j=1}^{5} j^2$?

  – Solução: temos

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

Deslocamento do índice

- Útil quando duas somas precisam ser adicionadas, mas os seus índices não combinam.
- Importante fazer as mudanças apropriadas no somando.
- **Exemplo**: Suponha que tenhamos a soma: $\sum_{j=1}^{5} j^2$
  - mas precisamos que o índice vá de 0 a 4, em vez de 1 a 5
  - para isto, fazemos k=j-1
  - o termo j^2 se torna $(k+1)^2$

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2 = 55$$

Somas duplas

- Aparecem em muitos contextos.
  - Por exemplo: na análise de loops "aninhados" em programas
- Exemplo: $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$

- Para avaliar a soma dupla, expanda a soma interna e então compute a externa:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} 6i =$$

$$= 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

Somas completas

- Pode-se usar esta notação para adicionar todos os valores de uma função ou termos de um conjunto indexado.
- Ou seja, escreve-se:

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

  - para representar a soma dos valores f(s), para todos os membros s de S.

Somas completas

- Exemplo: qual o valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$?
  - Solução:

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0+2+4 = 6$$

Somas conhecidas

- Certas somas aparecem repetidamente ao longo da matemática discreta.
- Útil ter uma coleção de fórmulas para estas somas.
- Há muitas maneiras de provar/obter estas somas.
  - Mas note que todas elas podem ser provadas por indução matemática.

Algumas fórmulas de somas úteis

Soma	Forma fechada
$\sum_{k=0}^{n} ar^k, (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Uso das somas conhecidas

- Exemplo: Encontre $\sum_{k=50}^{100} k^2$

- Solução:
  - primeiro note que: $\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$
  - então, usando a fórmula para Σ (k^2) da tabela, obtemos:

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 297925$$

Uso das somas conhecidas

- Exemplo: Seja x um nro real com |x|<1. Ache $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
- Solução: pela primeira fórmula da tabela, com a=1 e r=x, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$$

- Então, já que |x|<1, x^{k+1} se aproxima de zero quando k tende a infinito.
  – portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$$