INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

3 - INDUÇÃO E RECURSÃO

1.1) Elementos de Lógica Proposicional

1.2) Elementos de Lógica de Primeira Ordem

1.3) Métodos de Prova

1.4) Indução Matemática

1.5) Definições Recursivas

INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo:** Provar que $n! \geq 2^{n-1}$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

  Prova: usar a técnica de prova por casos:

  1. $n = 1$: $\quad 1! = 1 \geq 2^{1-1} = 1$
  2. $n = 2$: $\quad 2! = 2 \geq 2^{2-1} = 2$
  3. $n = 3$: $\quad 3! = 6 \geq 2^{3-1} = 4$
  4. $n = 4$: $\quad 4! = 24 \geq 2^{4-1} = 8$
  5. $n = 5$: $\quad 5! = 120 \geq 2^{5-1} = 16$

  - Assim, como $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, concluímos que esta proposição é verdadeira.

- **Questão**: provar que $n! \geq 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1 \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$

Indução Matemática

- **Exemplo:** Qual é a fórmula para a soma dos primeiros n inteiros positivos ímpares?

  Solução:

  - Note que:

    $$1 = 1$$
    $$1 + 3 = 4$$
    $$1 + 3 + 5 = 9$$
    $$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
    $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

  - Ou seja, aparentemente a soma dos n primeiros inteiros positivos ímpares é dada por n^2.
  - Como ter certeza de que isto vale para qualquer n?
    - ou seja: como provar esta suposição?

Método da Indução Matemática

- Técnica de demonstração de conjecturas.
- **Ilustração:** imagine que você deseja subir em uma escada sem fim.
  - Como saber se você será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?

Método da Indução Matemática

- Agora suponha que sejam verdadeiras as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:
  1. você pode alcançar o primeiro degrau
  2. ao chegar a um degrau qualquer, você sempre sempre pode passar ao degrau seguinte (uma implicação).

- Pela sentença 1, você tem garantia de chegar ao primeiro degrau
  - pela 2, você garante que chega ao segundo
  - novamente pela 2, você garante que chega ao segundo
  - novamente pela 2, você garante que chega ao terceiro
  - assim por diante

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- Técnica de prova de teoremas que estabelece que uma propriedade $P(n)$ é V para todo n inteiro e positivo.
- A prova por indução matemática consiste de 2 passos:
  1. Passo básico: $P(1)$ é V
  2. Passo indutivo: para um k genérico fixo é verdadeiro o condicional:

$$P(k) \rightarrow P(k+1)$$

- Observações:
  1. Assumir que $P(k)$ é V não é o mesmo que assumir o que queremos provar.
  2. Esta é uma técnica de raciocínio dedutivo, usada para provar alguma idéia obtida com um raciocínio indutivo.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 1:** Mostre que, se n é um inteiro positivo:

$$1 + 2 + \cdots + n = n.(n+1)/2$$

Solução:

- Passo básico: $P(1)$ é V, pois:

$$1 = 1.(1+1)/2$$

- Passo indutivo: vamos assumir que $P(k)$ vale, de modo que:

$$1 + 2 + \cdots + k = k.(k+1)/2$$

  - Com base nisto, queremos mostrar que vale:

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = (k+1).[(k+1)+1]/2 \quad \text{(??)}$$

  - Ora, adicionando-se $(k+1)$ a ambos os lados de $P(k)$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= k.(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1).(k+2)/2 \qquad \square \end{aligned}$$

Princípio da Indução Matemática

- **Exemplo 2:** Use a indução matemática para provar que a soma dos primeiros inteiros positivos ímpares é n^2.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "A soma dos primeiros ímpares é n^2"
    - ou: "$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$"
  - Passo básico: comprovar $P(1)$
    - $P(1)$ estabelece que $1 = 1^2$, o que é V
  - Passo indutivo: mostrar que $P(k) \to P(k+1)$ é V
    - Suponha que $P(k)$ é V para um k fixo, ou seja:

      $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

    - A partir disto, queremos provar que $P(k+1)$ é V, ou seja:

      $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2 \quad \text{(??)}$$

Princípio da Indução Matemática

- **Exemplo 2 (cont.):** (Provar que a soma dos primeiros ímpares é n^2)

  Solução:

  - Passo indutivo: mostrar que é V a proposição:

    $$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

    - Uma vez que $P(k)$ é V, o lado esquerdo acima fica:

    $$\begin{aligned} k^2 + [2(k+1)-1] &= k^2 + (2k+2-1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

    - Isto mostra que, efetivamente, $P(k+1)$ segue de $P(k)$.

  - Assim, uma vez que $P(1)$ e $P(k) \to P(k+1)$ são V, independente da escolha de k, concluímos que é V a proposição:

    $$\forall n\, P(n)$$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 3:** Prove que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$

  Solução:

  - Passo básico: comprovar $P(1)$
    - $P(1)$ estabelece que $2^1 > 1$, o que é V
  - Passo indutivo: mostrar que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V
    - Suponha que $P(k)$ é V para um k fixo, ou seja:

      $$2^k > k$$
    - Multiplicando os dois lados por 2, temos:

      $$2.2^k > 2.k$$
      $$2^{k+1} > k + k \geq k + 1$$
      $$2^{k+1} > k + 1$$
    - e $P(k+1)$ é V $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 4:** Prove que $n^2 > 3.n$, para $n \geq 4$.

  Solução:

  - Passo básico: neste caso,o passo inicial é $P(4)$:
    - $4^2 > 3.4$, é, efetivamente, V
  - Passo indutivo:
    - Hipótese de indução: $k^2 > 3.k$, para $k \geq 4$
    - Queremos mostrar que $(k+1)^2 > 3.(k+1)$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2.k + 1 & \\
&> 3.k + 2.k + 1 & \text{(pela hipótese de indução)} \\
&\geq 3.k + 8 + 1 & \text{(já que } k \geq 4\text{)} \\
&> 3.k + 3 = 3(k+1) & \text{(já que } k \geq 4\text{)}
\end{aligned}
$$

    - Isto mostra que $P(k+1)$ é V sempre que $P(k)$ é V. $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 5:** Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer. Prove por indução que:

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

  - (versão estendida das leis de De Morgan)

Solução:

- Seja $P(n)$: "vale a igualdade para quaisquer n conjuntos"
- Passo básico:

  $P(1)$ é $\overline{A_1} = \overline{A_1}$, o que é V

- Passo indutivo: usar $P(k)$ para provar $P(k+1)$ ($\Rightarrow$)

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 5 (cont.):** Prove que: $\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

Solução:

- Passo indutivo:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i)} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}}$$

$$= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}} \quad \text{(associatividade de } \cup\text{)}$$

$$= \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)} \cap \overline{A_{k+1}} \quad \text{(De Morgan para 2 conjs)}$$

$$= (\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i}) \cap \overline{A_{k+1}} \quad \text{(usando } P(k)\text{)}$$

$$= (\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{A_i})$$

- Portanto, a implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é uma tautologia.
  - Logo, pelo princípio da indução, $P(n)$ é V, $\forall n \geq 1$. $\square$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 6:** Mostre que todo conjunto finito não-vazio é contável, ou seja, pode ser arranjado em uma lista.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "se A é qualquer conjunto com $|A| = n \geq 1$, então A é contável."
  - Passo básico:
    - Seja $A = \{x\}$ um conjunto com um elemento.
    - x forma uma sequência cujo conjunto correspondente é A.
    - Então $P(1)$ é V.
  - Passo indutivo: usar $P(k)$ para provar $P(k+1)$ $\quad (\Rightarrow)$

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

- **Exemplo 6 (cont.):** “Todo conjunto finito não-vazio é contável.”

  Solução:

  - Passo indutivo:
    - $P(k)$ é “se A é qualquer conjunto com k elementos, então A é contável”
    - Agora escolha qualquer conjunto B com $k+1$ elementos.
    - Escolha um elemento qualquer x em B:
      - $B - \{x\}$ é um conjunto com k elementos
      - $P(k)$ garante que existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_k$ que tem $B - \{x\}$ por seu conjunto correspondente
      - ora, $x_1, x_2, \ldots, x_k, x$ tem B por seu conjunto correspondente
      - então B é contável
    - Já que B pode ser qualquer conjunto com $k+1$ elementos, $P(k+1)$ é V se $P(k)$ é V.
    - Conclusão: $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq 1$. $\square$

Princípio da Indução Matemática

- **Observação:** Ao utilizar a indução para provar resultados, tome cuidado para não assumir que “$P(k)$ é V” para forçar o resultado esperado.
- Esta aplicação incorreta do princípio da indução matemática é um erro bastante comum.

Por que a indução é válida? (1/3)

- Por que o método da indução matemática é uma técnica de prova válida?
- Em consequência do “Axioma do bom ordenamento” para os inteiros positivos:
  - “Todo sub-conjunto não-vazio do conjunto dos inteiros positivos tem um elemento mínimo.”

POR QUE A INDUÇÃO É VÁLIDA? (2/3)

- Axioma do bom ordenamento: “Todo sub-conjunto não-vazio do conjunto dos inteiros positivos tem um elemento mínimo.”
- Argumento:
  - Suponha que sabemos que $P(1)$ é V e que a proposição $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é V, independente do k escolhido.
  - Agora assuma que existe pelo menos um inteiro positivo para o qual $P(n)$ é F.
  - Então o conjunto S dos “inteiros positivos para os quais $P(n)$ é F” é não-vazio.

POR QUE A INDUÇÃO É VÁLIDA? (3/3)

- Argumento:
  - O conjunto S dos "inteiros positivos para os quais $P(n)$ é F" é não-vazio.
  - Logo, pelo bom ordenamento, S tem um elemento mínimo (m):
    - sabemos que $m \neq 1$, pois assumimos que $P(1)$ é V
    - uma vez que m é positivo e > 1, temos que:
      $m - 1$ é um inteiro positivo
    - mas $m - 1$ não pode estar em S, já que $m - 1 < m$
    - então $P(m-1)$ deve ser V
  - Daí, uma vez que $P(k) \rightarrow P(k+1)$ também é V, devemos ter:
    $P(m)$ é V (contradição!)
  - Portanto, $P(n)$ deve ser V para todo inteiro positivo n. $\square$

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- Em toda prova usando indução matemática, devemos executar de forma correta e completa tanto o passo básico como o passo indutivo.
- Devemos ter cuidado porque algumas vezes é difícil localizar o erro em uma prova por indução defeituosa.

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (1/4):** Encontre o erro na falsa prova abaixo de que todo conjunto de linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum.
- **“Prova”:**
  - Seja $P(n)$: “Todo conjunto de n linhas não-paralelas aos pares no plano se encontra em um ponto comum”.
  - Vamos “provar” que $P(n)$ é V para todo inteiro positivo $n \geq 2$.
    - Passo básico: $P(2)$ é V, pois quaisquer duas linhas não-paralelas no plano se encontram em um ponto comum.
    - Passo indutivo: $(\Rightarrow)$

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (2/4):** “Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum.”
- **“Prova”:**
  - Passo indutivo: $(\Rightarrow)$
    - Hipótese: $P(k)$ é V (“k linhas não-paralelas aos pares no plano se encontram em um ponto”)
    - Agora considere $k+1$ linhas distintas no plano:
      - pela hipótese: as primeiras k se encotram em um ponto p_1
      - também: as últimas k se encontram em um ponto p_2
      - agora se fosse $p_1 \neq p_2$, todas as linhas que os contêm deveriam ser uma só (2 pontos determinam uma reta)
      - portanto: p_1 e p_2 são o mesmo ponto
      - e o ponto $p_1 = p_2$ está em todas as $k+1$ linhas

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (3/4):** “Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum.”
- **“Prova”:**
  - Acabamos de mostrar que $P(k+1)$ é V, assumindo que $P(k)$ é V:
    - ou seja, mostramos que, se assumirmos que todo conjunto de k ($k \geq 2$) linhas distintas não-paralelas se encontram em um ponto, isto valerá também para $k+1$ linhas.
  - Completamos o passo básico e o passo indutivo de uma prova por indução que parece correta...

ERROS EM PROVAS USANDO INDUÇÃO

- **Exemplo (4/4):** Mostre que há na prova por indução para: "Todo conjunto de n linhas no plano não-paralelas aos pares se encontra em um ponto comum."
- **"Solução":**
  - Note que o passo indutivo requer que $k \geq 3$ (!!)
    - Ocorre que não podemos mostrar que $P(2)$ implica em $P(3)$!
  - Quando $k = 2$, o nosso objetivo é mostrar que quaisquer 3 linhas distintas não-paralelas aos pares se encontram em um ponto.
  - As duas primeiras linhas se encontram mesmo em um ponto p_1 e as duas últimas em um ponto p_2.
  - Mas, neste caso, p_1 e p_2 não precisam ser o mesmo ponto
    - pois apenas a 2a linha é comum a ambos os conjuntos... $\square$

INDUÇÃO FORTE

- Outra forma para o princípio da indução matemática.
- Também consiste de 2 passos:
  1. Passo básico: provar que $P(1)$ é V
  2. Passo indutivo: provar que:

$$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \;\Rightarrow\; P(k+1)$$

- Forma equivalente à primeira.
  - Escolha depende da conveniência.

Indução Forte

- A validade de ambos os princípios de indução segue do princípio do bom ordenamento.
  - De fato, os 3 princípios são equivalentes.
  - Ou seja, qualquer prova que utilize um destes princípios pode ser reescrita utilizando qualquer um dos outros dois.
  - Dependendo do caso a ser provado, pode ser mais conveniente usar um ou outro princípio...

INDUÇÃO FORTE

- Uma vez que a hipótese indutiva pode assumir $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ para provar $P(k+1)$, a indução forte é uma técnica mais flexível do que a indução simples.
- Pode-se mostrar que qualquer uma é uma técnica válida assumindo que a outra é válida.

INDUÇÃO FORTE

- Note que toda prova que usa indução simples pode ser considerada uma prova por indução forte, pois:
  - a hipótese indutiva de uma prova por indução simples é parte da hipótese indutiva de uma prova por indução forte
  - ou seja, se podemos completar o passo indutivo de uma indução simples mostrando que $P(k+1)$ decorre de $P(k)$:
    - $P(k+1)$ também decorre de todos os $P(1), P(2), \ldots, P(k)$
    - neste caso, temos garantia de que "mais do que" $P(k)$ é V
- Mas é bem mais trabalhoso converter uma prova por indução forte em uma prova por indução simples.

A INDUÇÃO FORTE & A ESCADA

- A indução forte também permite uma analogia com a escada infinita.
- Ela diz que podemos alcançar todos os degraus se:
  - pudermos alcançar o primeiro degrau
  - para todo inteiro k, se pudermos alcançar todos os primeiros k degraus, então poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
- O exemplo a seguir ilustra o uso da indução forte em um caso que não pode ser provado facilmente utilizando indução simples.

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo:** Suponha que:
  - podemos alcançar o 1^o e o 2^o degraus de uma escada infinita
  - sabemos que, uma vez estando em um degrau, podemos alcançar dois degraus acima

Prove que podemos alcançar qualquer degrau da escada usando:

(a) o princípio da indução matemática

(b) indução forte

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (a):** usando indução simples:

  Solução:

  - Passo básico: vale, pois podemos alcançar o primeiro degrau
  - Passo indutivo (tentativa):
    - hipótese indutiva: podemos alcançar o k-ésimo degrau da escada
    - precisamos mostrar que, se assumirmos esta hipótese, então poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
    - mas não existe modo evidente de completar este passo, pois:
      - não sabemos, a partir da informação dada, que podemos alcançar o degrau $(k+1)$ a partir do k-ésimo
      - só o que sabemos é: se podemos alcançar um degrau, então poderemos alcançar o degrau dois níveis acima...

Indução Forte

- **Exemplo (b):** usando indução forte:

  Solução:

  - Passo básico: vale, pois podemos alcançar o primeiro degrau
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: podemos alcançar cada um dos 1^{os} k degraus
    - Precisamos mostrar que, assumindo esta hipótese, poderemos alcançar o $(k+1)$-ésimo degrau
    - Já sabemos que podemos alcançar o segundo degrau:
      - à medida em que $k > 2$, sempre poderemos alcançar o degrau $(k+1)$ a partir do degrau $(k-1)$
      - pois sabemos que podemos escalar dois degraus a partir de um degrau que já tenhamos atingido
    - Isto completa a prova por indução forte. □

Indução Forte

- **Exemplo:** Prove que todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$, onde os p_i são primos e $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$.

  Solução:

  - Passo básico:
    - $P(2)$ é V, uma vez que 2 é primo.
  - Passo indutivo:
    - vamos usar $P(2)$,$P(3)$,...,$P(k)$ para mostrar $P(k+1)$ "$k+1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$"

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (cont.):** Todo inteiro positivo $n > 1$ pode ser escrito unicamente como $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$.

  Solução:

  - Passo indutivo: há dois casos a considerar:
    - $k+1$ é primo: então $P(k+1)$ é V.
    - $k+1$ não é primo:
      - então $k+1 = l.m$, aonde: $2 \leq l \leq k$ e $2 \leq m \leq k$
      - usando $P(l)$ e $P(m)$, temos:
        $k = l.m = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_t^{b_t} . r_1^{c_1} r_2^{c_2} \cdots r_v^{c_v} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$
      - onde cada $p_i = (q_j$ ou $r_k)$ e $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$
      - além disto, se $q_j = r_k = p_i$, então $a_i = b_j + c_k$
      - caso contrário: $p_i = q_j$ e $a_i = b_j$ ou $p_i = r_k$ e $a_i = c_k$
      - já que a fatoração de l e m são únicas, a fatoração de $k+1$ também o é.

Indução Forte

- **Exemplo:** Mostre que se n é um inteiro > 1, ele pode ser escrito como o produto de números primos.

  Solução:

  - Seja $P(n)$: "n pode ser escrito como o produto de números primos"
  - Passo básico: $P(2)$ é verdade, pois 2 pode ser escrito como um primo (ele mesmo).
  - Passo Indutivo:
    - Vamos assumir que $P(r)$ é verdade para todo $r \leq k$
    - Devemos mostrar que, com esta hipótese, $P(k+1)$ é V
    - Há dois casos a considerar:

      1) $k+1$ é primo: neste caso, $P(k+1)$ é imediatamente V

      2) $k+1$ é um número composto $(\Rightarrow)$

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (cont.):** Todo inteiro $n > 1$ pode ser escrito como o produto de primos.

  Solução:

  - Se $k+1$ é composto, ele pode ser escrito como:

    $$k+1 = a.b, \quad \text{onde} \quad 2 \leq a \leq b \leq k$$

  - Daí, pela hipótese de indução, tanto a como b podem ser escritos como o produto de primos
  - Portanto, se $k+1$ é composto, ele pode ser escrito como o produto de alguns primos.
    - (aqueles da fatoração de a e de b) $\square$

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (1/3):** Considere um jogo em que dois jogadores se revezam removendo um nro qualquer que desejem de palitos de uma de duas pilhas. O jogador que remover o último palito ganha o jogo. Mostre que, se as duas pilhas contiverem o mesmo número de palitos inicialmente, o segundo jogador sempre pode garantir uma vitória.

  Solução:

  - Seja n o número de palitos em cada pilha.
  - Usaremos indução forte para provar $P(n)$: "o 2^o pode ganhar quando houver, inicialmente, n palitos em cada pilha"
  - Passo básico:
    - quando $n = 1$, o 1^o jogador só pode remover um palito de uma das pilhas
    - e sobra uma única pilha com um único palito...

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (2/3):** Mostre que, se o jogo começar com o mesmo número de palitos na pilha, o 2^o jogador sempre pode vencer.

  Solução:

  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(j)$ é V, $\forall j$, com $1 \leq j \leq k$
      - "o 2^o jogador sempre pode ganhar se há inicialmente j palitos em cada pilha"
    - Precisamos provar que $P(k+1)$ ("o 2^o jogador pode ganhar se o jogo começar com $(k+1)$ palitos em cada pilha") é V

INDUÇÃO FORTE

- **Exemplo (3/3):** Mostre que, se o jogo começar com o mesmo número de palitos na pilha, o 2^o jogador sempre pode vencer.

  Solução: Continuação do passo indutivo:

  - Suponha que há $(k+1)$ palitos em cada uma das pilhas e que o 1^o jogador remove r palitos ($1 \leq j \leq k$) de uma das pilhas
    - deixando $(k+1-r)$ palitos nesta pilha
  - Ao remover o mesmo nro da outra pilha, o 2^o jogador cria a situação onde há duas pilhas com $(k+1-r)$ palitos
    - uma vez que $1 \leq k+1-r \leq k$, o 2^o jogador pode ganhar pela hipótese indutiva.
  - Note que o 1^o jogador sempre perde se remover todos os $(k+1)$ palitos de uma das pilhas. $\square$

Indução Forte X Simples

- O exemplo a seguir mostra que alguns resultados podem ser prontamente provados utilizando-se tanto indução simples como indução forte.
- **Exemplo:** Prove que todo valor de postagem de 12 centavos ou mais pode ser formada usando-se somente selos de 4 e de 5 centavos.
- **Solução:** Usando indução simples:
  - Passo básico: 12 centavos = 3 X 4 centavos
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(k)$ é V ("valores de k centavos podem ser formados com selos de 4 e 5")

INDUÇÃO FORTE X SIMPLES

- **Exemplo:** “Todo valor $\geq$ 12 centavos pode ser formado com selos de 4 e de 5 centavos”.
- **Solução:** Usando indução simples (cont.):
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(k)$ é V (“valores de k centavos podem ser formados com selos de 4 e 5”)
    - Suponha que pelo menos um selo=4 foi usado para formar k:
      - basta substituir este selo por um de 5 para obter $k+1$ centavos
    - Agora, se nenhum selo de 4 foi usado, k é formado só de 5s:
      - foram necessários pelo menos 3 selos de 5 para formar k (pois $k \geq 12$)
      - daí, substituindo-se 3 selos de 5 centavos por 4 selos de 4 centavos, pode-se formar $(k+1)$. $\square$

Indução Forte X Simples

- **Exemplo:** "Todo valor $\geq$ 12 centavos pode ser formado com selos de 4 e de 5 centavos".
- **Solução:** Usando indução forte:
  - Passo básico: $P(12),\ P(13),\ P(14)\ e\ P(15)$ são V
  - Passo indutivo:
    - Hipótese: $P(j)$ é V para $12 \leq j \leq k$
    - Por esta hipótese, podemos assumir que $P(k-3)$ é V, pois $k - 3 \geq 12$
      - ou seja, podemos formar valores de $(k-3)$ centavos utilizando apenas selos de 4 e de 5
    - Para formar $(k+1)$, só precisamos adicionar um selo de 4 aos selos usados para formar $(k-3)$ centavos. $\square$

Indução matemática

- Final deste item.
- **Dica**: fazer exercícios sobre Indução Matemática...