Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

6 - Relações de Ordenamento

6.1) Conjuntos Parcialmente Ordenados (Posets)

6.2) Extremos de Posets

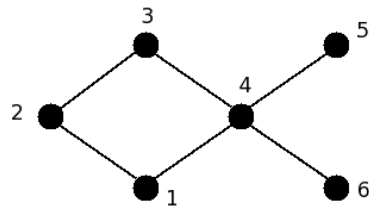
6.3) Reticulados

6.4) Álgebras Booleanas Finitas

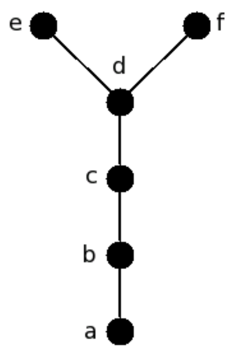
Lista de Exercícios

Nos próximos 4 exercícios, determine todos os elementos maximais e minimais de cada poset.

1. *(Kolman5-seção 6.2-ex.1)*:



2. *(Kolman5-seção 6.2-ex.3)*:

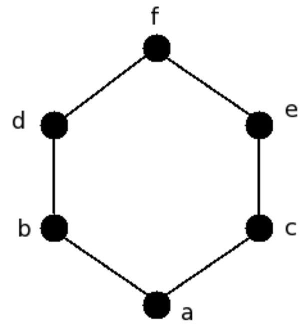


3. *(Kolman5-seção 6.2-ex.5)* $A = \mathbb{R}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

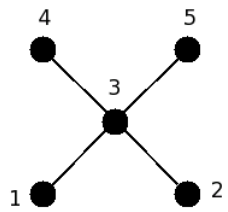
4. *(Kolman5-seção 6.2-ex.7)* $A = \{x \mid x$ é um número real e $0 \leq x \leq 1\}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

Nos próximos 4 exercícios, determine o maior e o menor elementos, se existirem, de cada poset.

5. *(Kolman5-seção 6.2-ex.9)*:



6. *(Kolman5-seção 6.2-ex.11)*:



7. *(Kolman5-seção 6.2-ex.13)* $A = \{x \mid x$ é um número real e $0 < x < 1\}$, com a ordem parcial usual $\leq$.

8. *(Kolman5-seção 6.2-ex.15)* $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 36, 72\}$, com a ordem parcial de divisibilidade.

9. *(Kolman5-seção 6.2-ex.17)* Determine se as declarações a seguir são equivalentes. Justifique sua conclusão.

   (a) Se $a \in A$ é um elemento maximal, então não existe $c \in A$ tal que $a < c$.

   (b) Se $a \in A$ é um elemento maximal, então $\forall b \in A, b \leq a$.

10. *(Kolman5-seção 6.2-ex.19)* Determine se as declarações abaixo são verdadeiras ou falsas, Explique o seu raciocínio.

    (a) Um poset finito não-vazio tem um elemento maximal.

    (b) Um poset finito não-vazio tem um maior elemento.

    (c) Um poset finito não-vazio tem um elemento minimal.

    (d) Um poset finito não-vazio tem um menor elemento.

11. *(Kolman5-seção 6.2-ex.21)* Prove que se $(A, \leq)$ tem um menor elemento, então este menor elemento é único.

Nos próximos 5 exercícios, encontre, se existirem:

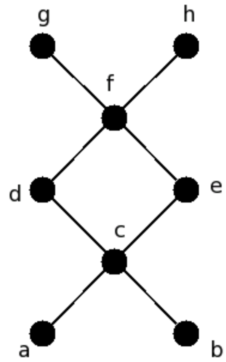
(a) todas as cotas superiores de B

(b) todas as cotas inferiores de B

(c) a menor cota superior de B

(d) a maior cota inferior de B

12. *(Kolman5-seção 6.2-ex.23)*:



13. *(Kolman5-seção 6.2-ex.25)*:

14. *(Kolman5-seção 6.2-ex.27)* $(A, \leq)$ é o poset do exerc. 23 (2 acima); $B = \{b, g, h\}$.

15. *(Kolman5-seção 6.2-ex.29)* $A = \mathbb{R}$ e $\leq$ denota a ordem parcial usual; $B = \{x \mid x$ é um número real e $1 < x < 2\}$

16. *(Kolman5-seção 6.2-ex.31)* A é o conjunto das matrizes Booleanas 2×2 e $\leq$ denota a relação R com $M\ R\ N$ sse $m_{ij} \leq n_{ij}$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq i \leq 2$; B é o conjunto das matrizes em A com exatamente dois uns.

17. *(Kolman5-seção 6.2-ex.33)* Construa o diagrama de Hasse de um ordenamento topológico do poset cujo diagrama de Hasse é mostrado no exercício 23 (5 acima). Use o algoritmo SORT.

18. *(Kolman5-seção 6.2-ex.35)* Seja R um ordenamento topológico sobre um conjunto finito A. Descreva como usar M_R para encontrar o menor e o maior elementos de A, se eles existirem.

19. *(Kolman5-seção 6.2-ex.37)* Seja $A = \{2, 3, 4, \ldots, 100\}$, com a ordem parcial de divisibilidade.

    (a) Quantos elementos maximais $(A, \leq)$ possui?

    (b) Forneça um subconjunto de A que seja uma ordem linear sob divisibilidade e que seja tão grande quanto possível.