Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Depto de Informática e Estatística

INE5403-Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação
Prof. Daniel S. Freitas

7 - Estruturas Algébricas

7.1) Operações Binárias

7.2) Semigrupos

7.3) Produtos e Quocientes de Semigrupos

7.4) Grupos

7.5) Produtos e Quocientes de Grupos

Lista de Exercícios

1. *(Kolman5-seção 9.2-ex.1)* Seja $A = \{a, b\}$. Qual das tabelas a seguir define um semigrupo sobre A? E qual define um monóide sobre A?

(a)

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

(b)

$*$	a	b
a	a	b
b	a	a

2. *(Kolman5-seção 9.2-ex.3)* Seja $A = \{a, b\}$. Qual das tabelas a seguir define um semigrupo sobre A? E qual define um monóide sobre A?

(a)

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

(b)

$*$	a	b
a	b	b
b	a	a

3. *(Kolman5-seção 9.2-exs.5-15)* Em cada exercício a seguir, determine se o conjunto com a operação binária mostrada é um semigrupo, um monóide ou nenhum deles. Se for um monóide, especifique a identidade. Se for um semigrupo ou um monóide, determine se é comutativo.

- (5) $\mathbb{Z}^+$, aonde $a * b$ é definido como $\max\{a, b\}$
- (7) $\mathbb{Z}^+$, aonde $a * b$ é definido como a
- (9) $P(S)$, aonde S é um conjunto e $*$ é definida como intersecção.
- (11) $S = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, aonde $a * b$ é definido como $\text{MDC}(a, b)$
- (13) $\mathbb{Z}$, aonde $a * b = a + b - ab$
- (15) O conjunto das matrizes 2×1, aonde: $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d + 1 \end{bmatrix}$

4. *(Kolman5-seção 9.2-ex.17)* Determine se a tabela a seguir define um semigrupo ou um monóide:

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	c	b
c	a	b	c

5. *(Kolman5-seção 9.2-ex.19)* Complete a tabela a seguir de maneira a obter um semigrupo.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c			a

6. *(Kolman5-seção 9.2-ex.21)* Seja $S = \{a, b\}$. Escreva a tabela de operações para o semigrupo S^S. Este semigrupo é comutativo?

7. *(Kolman5-seção 9.2-ex.29)* Seja $A = \{a, b\}$. Determine se existem dois *semigrupos* $(A, *)$ e $(A, *')$ que *não são* isomórficos.

8. *(Kolman5-seção 9.2-ex.31)* Seja $(S_1, *_1)$, $(S_2, *_2)$ e $(S_3, *_3)$ semigrupos e sejam $f : S_1 \to S_2$ e $g : S_2 \to S_3$ homomorfismos. Prove que $g \circ f$ é um homomorfismo de S_1 para S_3.

9. *(Kolman5-seção 9.2-ex.35)* Seja R^+ o conjunto de todos os números reais positivos. Mostre que a função $f : R^+ \to R$ definida por $f(x) = ln(x)$ é um isomorfismo do semigrupo $(R^+, \times)$ para o semigrupo $(R, +)$, aonde $\times$ e $+$ são a multiplicação comum e a adição comum.