INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

3 - INTROD. À ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1) Arranjos e Combinações

3.2) O Princípio do Pombal

3.3) Relações de Recorrência

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- Consiste em outra técnica de prova
  - que frequentemente usa algum método de contagem.

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Teorema:** Se n pombos ocupam m cubículos de um pombal, e $m < n$, então pelo menos um cubículo contém 2 ou mais pombos.

  Prova:

  - suponha que cada cubículo contém no máximo um pombo
  - então no máximo m pombos ocupam cubículos
  - mas, uma vez que $m < n$, nem todos os pombos ocupam cubículos no pombal $\Rightarrow$ contradição!
  - ou seja, pelo menos um cubículo contém 2 ou mais pombos $\square$

- Quase trivial, muito fácil de usar, e inesperadamente poderoso em situações muito interessantes...

O Princípio do Pombal

- **Exemplo 1:** se 8 pessoas forem escolhidas de qualquer modo de algum grupo, pelo menos duas delas terão nascido no mesmo dia da semana.
  - Aqui cada pessoa (pombo) é associada ao dia da semana (cubículo) em que nasceu.
  - Como há 8 pessoas e 7 dias da semana, o princípio leva ao resultado.

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- Nota 1: note que o princípio provê uma prova de existência:
  - “deve haver um objeto (ou objetos) com uma certa característica”.
  - No exemplo anterior, o princípio garante que deve haver duas pessoas com uma característica
    - mas não ajuda a identificá-las.

- Nota 2: para poder aplicar o princípio, temos que identificar pombos (objetos) e cubículos (categorias da característica desejada).
  - E temos que ser capazes de contar o número de pombos e o número de cubículos...

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 2:** mostre que, se escolhermos 5 números quaisquer de 1 a 8, então existirão dois deles cuja soma será igual a 9.

  Solução:

  - construa 4 conjuntos diferentes com dois números cuja soma é 9:
    $$A_1 = \{1, 8\}, \quad A_2 = \{2, 7\}, \quad A_3 = \{3, 6\}, \quad A_1 = \{4, 5\}$$
  - cada um dos 5 números tem que pertencer a um destes conjuntos
  - uma vez que existem apenas 4 conjuntos, o princípio do pombal mostra que dois dos números escolhidos devem pertencer ao mesmo conjunto
    - a soma destes números é 9 $\square$

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 3 (1/3):** mostre que, se escolhermos 11 números quaisquer em $\{1, 2, \ldots, 20\}$, então algum deles será um múltiplo de algum outro.

  Solução:

  - Chave para a solução: criar 10 ou menos "cubículos de pombo"
    - de modo que cada número escolhido seja associado a apenas um cubículo
    - e também que, quando x e y sejam associados ao mesmo cubículo, nós tenhamos certeza de que $x|y$ ou $y|x$
  - Fatores são uma característica natural para explorar:
    - existem 8 números primos entre 1 e 20
    - só que: saber que x e y são múltiplos do mesmo primo não garante que $x|y$ ou $y|x$...

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 3 (2/3):** se escolhermos 11 números quaisquer em $\{1, 2, \ldots, 20\}$, algum deles será um múltiplo de algum outro.

  Solução:

  - Outra tentativa: existem 10 ímpares entre 1 e 20
    - todo inteiro positivo pode ser escrito como $n = 2^k m$, onde m é ímpar e $k \geq 0$
      - (basta fatorar todas as potências de 2 em n)
      - m é "a parte ímpar de n"
    - se dois números são escolhidos de $\{1, 2, \ldots, 20\}$, então dois deles deverão ter a mesma parte ímpar
      - isto decorre do princípio: existem 11 nros (pombos) mas apenas 10 nros ímpares entre 1 e 20 (cubículos)
      - (apenas 10 "candidatos a partes ímpares" dos 11)

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 3 (3/3):** se escolhermos 11 números quaisquer em $\{1, 2, \ldots, 20\}$, algum deles será um múltiplo de algum outro.

  Solução:

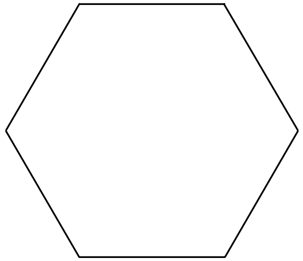
  - Outra tentativa: 10 ímpares entre 1 e 20 (continuação)
    - sejam n_1 e n_2 dois nros escolhidos com mesma parte ímpar
    - então devemos ter, para algum k_1 e algum k_2:

      $$n_1 = 2^{k_1} m \quad \text{e} \quad n_2 = 2^{k_2} m$$

      - se $k_1 \geq k_2$, então n_1 é um múltiplo de n_2
      - caso contrário, n_2 é um múltiplo de n_1 $\square$

O Princípio do Pombal

- **Exemplo 4 (1/2):** considere a região abaixo, limitada por um hexágono cujos lados têm comprimento de 1 unidade.



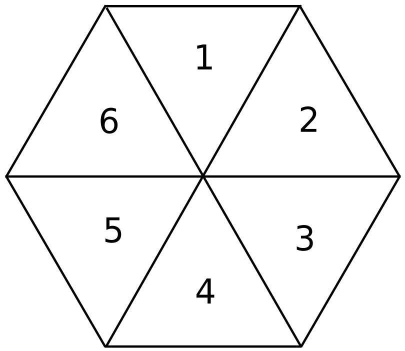
Mostre que, se quaisquer 7 pontos são escolhidos nesta região, então deve haver dois destes que não estão distantes mais do que uma unidade.

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 4 (2/2):** 7 pontos em um hexágono

Solução:

- Divida a região em 6 triângulos equiláteros:



- Se 7 pontos são escolhidos na região, podemos associar cada um deles ao triângulo que o contém.
  - (Se o ponto pertencer a mais de um triângulo, associe-o a um deles.)
- Assim, são 7 pontos em 6 regiões:
  - pelo princípio do pombal, pelo menos 2 pontos pertencerão à mesma região
  - estes dois não podem estar afastados mais do que uma unidade. □

O PRINCÍPIO DO POMBAL

- **Exemplo 5:** Camisetas numeradas consecutivamente de 1 a 20 são usadas por 20 alunos candidatos a formar equipe para a maratona de programação da SBC. O treinador propõe que cada equipe de 3 alunos seja identificada por um “número código” igual à soma dos números das camisetas. Mostre que, se forem selecionados 8 (para 2 equipes de 3 + 2 reservas) entre os 20, pode-se formar pelo menos dois times diferentes com o mesmo número código.

  Solução:

  - os 8 selecionados permitem formar um total de ${}_8C_3 = 56$ times diferentes (=pombos)
  - maior número-código possível: $18 + 19 + 20 = 57$
    - menor: $1 + 2 + 3 = 6$
    - portanto, apenas os números-código de 6 a 57 estão disponíveis para os 56 possíveis times
  - pelo princípio, pelo menos dois times terão o mesmo número-código
  - o treinador terá que escolher uma outra forma de atribuir números às equipes...

O Princípio do Pombal Estendido

- Note que, se existem m cubículos e mais do que $2m$ pombos:
  - 3 ou mais pombos terão que acomodados em, pelo menos, um dos cubículos
  - (considere a dsitribuição mais uniforme possível para os pombos)

- Em geral, se o número de pombos é muito maior do que o de o de cubículos, podemos reescrever o princípio do pombal, de modo a obter uma conclusão mais forte.

- Nota: se n e m são inteiros positivos:
  - $\lfloor n/m \rfloor$ significa: "o maior inteiro $\leq n/m$"
  - exemplos: $\lfloor 3/2 \rfloor = 1$, $\lfloor 9/4 \rfloor = 2$, $\lfloor 6/3 \rfloor = 2$

O PRINCÍPIO DO POMBAL ESTENDIDO

- **Teorema:** Se n pombos são acomodados em m cubículos de um pombal, então um dos cubículos deve conter pelo menos $\lfloor (n-1)/m \rfloor + 1$ pombos.
- **Prova (por contradição):**
  - se cada cubículo não contém mais do que $\lfloor (n-1)/m \rfloor$ pombos, então o total de pombos é, no máximo:

$$m \cdot \lfloor (n-1)/m \rfloor \;\leq\; m \cdot (n-1)/m \;=\; n-1$$

  - isto contradiz a hipótese, de modo que um dos cubículos deve conter pelo menos $\lfloor (n-1)/m \rfloor + 1$ pombos. $\square$

O Princípio do Pombal Estendido

- **Exemplo 6:** (extensão do exemplo 1) Mostre que, se 30 pessoas quaisquer são selecionadas, então é possível escolher um subconjunto de 5 de modo que todas as 5 tenham nascido no mesmo dia da semana.

  Solução:

  - associe cada pessoa ao dia da semana em que nasceu
  - ou seja: 30 pombos estão sendo associados a 7 cubículos
  - então, pelo P.P.E., com $n = 30$ e $m - 7$:
    - pelo menos $\lfloor (30 - 1)/7 \rfloor + 1 = 5$ destas pessoas devem ter nascido no mesmo dia da semana. $\square$

O PRINCÍPIO DO POMBAL ESTENDIDO

- **Exemplo 7:** Mostre que, se 30 dicionários em uma biblioteca contêm um total de 61327 páginas, então um dos dicionários deve ter, pelo menos, 2045 páginas.

  Solução:

  - as páginas são os pombos e os dicionários são os cubículos
  - atribua cada página ao dicionário em que aparece
  - então, pelo P.P.E.:
    - um dicionário deve conter pelo menos:
      $\lfloor 61326/30 \rfloor + 1 \; = \; 2045$ páginas. $\square$