INE5403

Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

Prof. Daniel S. Freitas

UFSC - CTC - INE

1 - Lógica e Métodos de Prova

1.1) Elementos de Lógica Proposicional

1.2) Elementos de Lógica de Primeira Ordem

1.3) Métodos de Prova

1.4) Indução Matemática

1.5) Definições Recursivas

PREDICADOS E QUANTIFICADORES

- Servem para declarações da forma:
  - “$x > 3$”
  - “$x = y + 3$”
  - “$x + y = z$”
- Nem V nem F enquanto valores das variáveis não são especificados.
- Discutiremos modos de produzir proposições a partir destas declarações...

PREDICADOS

- A declaração “x é maior do que 3” tem duas partes:
  - a variável x (= “sujeito”)
  - “é maior do que 3” (= “predicado”)
- Predicado: propriedade que o sujeito da declaração pode ter.
- Podemos denotar “x é maior do que 3” por $P(x)$:
  - P é o predicado
  - x é a variável
- Ou: $P(x)$ é o valor da função proposicional P em x.
  - Quando um valor é atribuído a x, $P(x)$ se torna uma proposição e tem valor verdade.

PREDICADOS

- **Exemplo:** seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".

  Quais são os valores verdade de $P(4)$ e $P(2)$?

  - $P(4)$ é V
  - $P(2)$ é F $\square$

PREDICADOS

- Também podemos ter declarações com mais de uma variável.
- **Exemplo**: “$x = y + 3$”.
  - Pode ser denotado por $Q(x, y)$
  - Quando se atribui valores para x e para y, $Q(x, y)$ passa a ter um valor verdade.

PREDICADOS

- **Exemplo**: Seja $Q(x, y)$ a declaração "$x = y + 3$".

  Quais são os valores verdade de $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

- Similarmente, $R(x, y, z)$ pode ser "$x + y = z$".
  - **Exemplo**: quais os valores verdade de $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

PREDICADOS

- Em geral, uma declaração envolvendo as n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser denotada por:

  $$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  - que é o valor da função proposicional P para a tupla: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - P também é chamado de predicado

QUANTIFICADORES

- Atribuindo valores a todas as variáveis em uma função proposicional, o resultado é uma proposição com valor verdade determinado.
- Outra forma de criar uma proposição a partir de uma função proposicional:
  - a quantificação
- Discutiremos quantificação universal e quantificação existencial.

Quantificador Universal

- Muitas declarações afirmam que uma propriedade é V ou F para todos os valores de uma variável em um domínio em particular
  - ou seja, em um **universo de discurso**
- São expressas com um quantificador universal:
  - $P(x)$ é V para todos os valores de x
  - é o universo de discurso que especifica os possíveis valores da variável x.

Quantificador Universal

- A **quantificação universal** de $P(x)$ é a proposição:
  - “$P(x)$ é V para todos os valores de x no universo de discurso.”
- Denotada por: $\forall x\ P(x)$
  - $\forall$ é o quantificador universal
  - “para todo x, $P(x)$”
  - “para todos os x, $P(x)$”

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ dado por "$x + 1 > x$".
  - Qual o valor verdade da quantificação $\forall x\ P(x)$, sendo que o universo de discurso consiste de todos os nros reais?

- **Resposta**:
  - Neste caso, a quantificação $\forall x\ P(x)$ é V $\square$

Quantificador Universal

- **Exemplo:** Seja $Q(x)$ a declaração "$x < 2$".
  - Qual o valor verdade da quantificação $\forall x\ Q(x)$?
  - O universo de discurso consiste de todos os nros reais.

- **Resposta:**
  - $Q(3)$, por exemplo, é F
  - Portanto: $\forall x\ Q(x)$ é F $\square$

Quantificador Universal

- Quando todos os elementos do universo de discurso podem ser listados:
  - por exemplo: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- a quantificação universal fica o mesmo que a conjunção:
  - $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$
  - a qual é V sse:

$$P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n) \text{ são todos V}$$

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** qual o valor verdade de $\forall x\ P(x)$, onde:
  - $P(x)$ é "$x^2 < 10$"
  - o universo de discurso são os inteiros positivos não maiores do que 4?

- **Resposta:**
  - como $P(4)$ é F, segue que $\forall x\ P(x)$ é F $\square$

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** o que significa a declaração $\forall x\ T(x)$, se:
  - $T(x)$ é "x tem pai e mãe"
  - o universo de discurso consiste de todas as pessoas?

- **Resposta:**
  - esta declaração pode ser traduzida por:

    "toda pessoa tem pai e mãe"
  - a qual é V $\square$

Quantificador Universal

- Especificar bem o UD é importante quando se usa quantificadores.
- O valor verdade de uma declaração quantificada frequentemente depende de quais elementos estão neste universo...

Quantificador Universal

- **Exemplo:** Qual é o valor verdade de $\forall x\ (x^2 \geq x)$ se:
  - o universo de discurso consiste de todos os nros reais?
  - o UD consiste de todos os nros inteiros?
- **Resposta:**
  - note que $x^2 \geq x$ sse $x.(x-1) \geq 0$
  - ou seja: sse $x \leq 0$ ou $x \geq 1$
  - logo:
    - $\forall x\ (x^2 \geq x)$ é F se o UD consiste dos reais
    - mas é V se o UD consiste dos inteiros $\square$

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- Para mostrar que uma declaração da forma $\forall x \; P(x)$ é F:
  - só é preciso encontrar um valor de x no UD para o qual $P(x)$ é F
  - este valor é chamado de contra-exemplo da declaração $\forall x \; P(x)$

QUANTIFICADOR UNIVERSAL

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ dado por $x^2 > 0$.
  - Para mostrar que a declaração $\forall x\ P(x)$ é F, onde o UD consiste dos inteiros, é só mostrar um contra-exemplo.
  - Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo, uma vez que $x^2 = 0$ quando $x = 0$.
- Buscar contra-exemplos para declarações quantificadas universalmente é uma atividade importante no estudo da matemática.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- Muitas declarações matemáticas estabelecem que existe um elemento com uma certa propriedade.
- São expressas usando quantificação existencial.
- Forma-se uma proposição que é V se e somente se $P(x)$ é V para pelo menos um valor de x no universo de discurso.

Quantificador Existencial

- A quantificação existencial de $P(x)$ é a proposição:
  - "existe um elemento x no universo de discurso tal que $P(x)$ é V"
  - usa-se a notação: $\exists x\ P(x)$

- $\exists$ é o quantificador existencial
  - significa:
    - "existe um x tal que $P(x)$"
    - "existe pelo menos um x tal que $P(x)$"
    - "para algum x, $P(x)$"

Quantificador Existencial

- **Exemplo:** Seja $P(x)$ a declaração "$x > 3$".
  - Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\ P(x)$?
  - O UD consiste de todos os números reais.

- **Resposta:**
  - "$x > 3$" para, por exemplo, $x = 4$
  - logo: $\exists x\ P(x)$ é V $\square$

Quantificador Existencial

- **Exemplo:** Seja $Q(x)$ a declaração "$x = x + 1$".
  - Qual é o valor verdade da quantificação $\exists x\, Q(x)$?
  - O UD consiste de todos os números reais.

- **Resposta:**
  - $Q(x)$ é F para todos os nros reais
  - logo: a quantificação existencial $\exists x\, Q(x)$ é F $\square$

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- Se todos os elementos do universo de discurso podem ser listados:
  - por exemplo: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- segue que a quantificação existencial é o mesmo que a disjunção:
  - $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$
  - a qual é V sse pelo menos um entre $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ for V

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

- **Exemplo:** Qual o valor verdade de $\exists x\ P(x)$, onde:
  - $P(x)$ é a declaração "$x^2 > 10$"
  - o UD consiste dos inteiros positivos não maiores do que 4?

- **Resposta:**
  - Como o UD é $\{1, 2, 3, 4\}$, $\exists x\ P(x)$ é o mesmo que a disjunção:

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

  - Como $P(4)$ é V, segue que $\exists x\ P(x)$ é V $\square$

QUANTIFICADORES - RESUMO

Declaração	Quando é V?	Quando é F?
$\forall x\ P(x)$	$P(x)$ é V para todo x	Existe um x para o qual $P(x)$ é F
$\exists x\ P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é V	$P(x)$ é F para todo x

“LIGANDO” VARIÁVEIS

- Quando:
  - um quantificador é usado sobre a variável x
  - ou: quando atribuímos um valor a esta variável

  dizemos que esta ocorrência da variável está ligada (ou “amarrada”).

- Uma ocorrência de variável que não está ligada a um quantificador ou fixa em um valor particular é chamada de livre.

LIGANDO VARIÁVEIS

- Todas as variáveis que ocorrem em uma função proposicional devem estar ligadas, para que ela seja considerada uma proposição.
  - Isto pode ser feito com uma combinação de:
    - quantificadores universais
    - quantificadores existenciais
    - atribuições de valores

Ligando variáveis

- A parte de uma expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é o seu escopo.
- Uma variável é livre se estiver fora do escopo de todos os quantificadores na fórmula que a especifica.
- **Exemplo:** na declaração $\exists x\ Q(x, y)$:
  - a variável x está ligada à quantificação $\exists x$
  - mas a variável y está livre:
    - não está ligada a nenhum quantificador
    - nenhum valor lhe está sendo atribuído.

LIGANDO VARIÁVEIS

- **Exemplo:** na declaração $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \vee\ \forall x\ R(x)$:
  - Todas as variáveis estão ligadas.
  - O escopo de $\exists x$ é a expressão:
    $$P(x) \wedge Q(x)$$
  - O escopo do quantificador "$\forall x$" é $R(x)$
  - Note que esta expressão pode ser escrita como:
    $$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))\ \vee\ \forall y\ R(y)$$

LIGANDO VARIÁVEIS

- Observe que é comum usar a mesma letra para representar variáveis ligadas a diferentes quantificadores
  - desde que os seus escopos não se sobreponham.

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Considere a sentença:
  - "Todo aluno nesta sala já fez um curso de Cálculo"
- Quantificação universal: $\forall x \ P(x)$
  - onde $P(x)$ é "x já cursou Cálculo"
- A negação desta sentença é:
  - "Não é verdade que todo aluno nesta sala já tenha feito Cálculo"
  - Note que isto é equivalente a:
    - "Existe algum estudante em sala que não cursou Cálculo"
    - ou seja: $\exists x \ \neg P(x)$

NEGAÇÕES

- Este exemplo ilustra a seguinte equivalência:

$$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$$

- Isto pode ser provado generalizando a lei de De Morgan:

$$\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n))) \Leftrightarrow (\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)))$$

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Agora queremos negar:
  - “Existe um estudante nesta sala que já cursou Cálculo”
- Trata-se de uma quantificação existencial: $\exists x\ Q(x)$
  - onde $Q(x)$ é “x já cursou Cálculo”
- A negação desta declaração é:
  - “Não é verdade que exista nesta sala um estudante que já tenha cursado Cálculo”
  - O que é equivalente a:
    - “Todo estudante desta sala ainda não cursou Cálculo”
    - ou seja: $\forall x\ \neg Q(x)$

NEGAÇÕES

- Este exemplo ilustra a seguinte equivalência:

$$\neg \exists x\ Q(x) \ \equiv\ \forall x\ \neg Q(x)$$

- Isto pode ser provado generalizando a outra lei de De Morgan:

$$\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n))) \ \Leftrightarrow\ (\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)))$$

NEGAÇÕES - RESUMO

Negação	Declaração Equivalente	Quando é V?	Quando é F?
$\neg\exists x\ P(x)$	$\forall x\ \neg P(x)$	Para todo x, $P(x)$ é F	Existe um x para o qual $P(x)$ é V
$\neg\forall x\ P(x)$	$\exists x\ \neg P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é F	Para todo x, $P(x)$ é V

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Qual é a negação de: “Existe um político honesto”?
  - Seja $H(x)$: “x é honesto”
  - Então a declaração acima é: $\exists x\ H(x)$
    - onde o UD consiste de todos os políticos
  - A negação disto é: $\neg\exists x\ H(x)$
    - a qual é equivalente a: $\forall x\ \neg H(x)$
    - a qual pode ser expressa como:
      - “Todos os políticos não são honestos”
      - ou: “Todos os políticos são desonestos” $\square$

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** Qual é a negação de: "Todos os americanos comem hambúrguers"?
  - Seja $C(x)$: "x come hambúrguers"
  - Então a declaração acima é: $\forall x\ C(x)$
    - onde o UD consiste de todos os americanos
  - A negação disto é: $\neg\forall x\ C(x)$
    - que é equivalente a: $\exists x\ \neg C(x)$
    - que pode ser expressa como:
      - "Alguns americanos não comem hambúrguers"
      - ou: "Existe pelo menos um americano que não come hambúrguers" $\square$

NEGAÇÕES

- **Exemplo:** A negação de "$\forall x\ (x^2 > x)$"
  - é a declaração: $\neg\forall x\ (x^2 > x)$
  - que é equivalente a: $\exists x\ \neg(x^2 > x)$
  - a qual pode ser reescrita como: $\exists x\ (x^2 \leq x)$

- *Note que o valor-verdade desta declaração depende do UD.*

Negações

- **Exemplo:** A negação de "$\exists x\ (x^2 = 2)$"
  - é a declaração: $\neg\exists x\ (x^2 = 2)$
  - que é equivalente a: $\forall x\ \neg(x^2 = 2)$
  - a qual pode ser reescrita como: $\forall x\ (x^2 \neq 2)$

- *Note que o valor-verdade desta declaração depende do UD.*

TRADUZINDO LINGUAGEM PARA LÓGICA

- Tarefa crucial em matemática, programação em lógica, IA, engenharia de software e outros.
- Esta tarefa é mais complexa quando envolve predicados e quantificadores:
  - pode haver mais de um modo de traduzir uma dada sentença.
- Não há “receita”: veremos exemplos para ilustrar o método.
  - Objetivo: produzir expressões simples e úteis.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 1 (1/3):** Use lógica de predicados para expressar:

  "Todo estudante nesta turma já estudou Cálculo".

- **Solução:**

  1. reescrever para facilitar identificação dos quantificadores:

     "Para cada estudante nesta turma, este estudante já estudou Cálculo"

  2. introduzir uma variável x:

     "Para cada estudante x nesta turma, x já estudou Cálculo"

  3. incluir o predicado $C(x)$: "x já estudou Cálculo"

  4. assim, assumindo que o UD consiste dos estudantes na turma:

     $$\forall x \; C(x)$$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- Porém, existem outras abordagens corretas:
  - pode-se usar UDs diferentes e outros predicados
  - a abordagem escolhida vai depender do raciocínio que queremos desenvolver.

Sentenças para lógica (um quantificador)

- **Exemplo 1 (2/3):** podemos estar interessados em focar em um grupo de pessoas maior do que a turma.
- Se o UD passar a ser "todas as pessoas", teremos:

  "Para cada pessoa x, se a pessoa x é um estudante desta turma, então x já estudou Cálculo"
- Então, definindo:

  $E(x)$: "a pessoa x está nesta turma"
- A sentença anterior fica:

  $\forall x \ (E(x) \rightarrow C(x))$
- **Nota**: neste caso, a sentença não pode ser expressa como:

  $\forall x \ (E(x) \wedge C(x))$
  - pois isto significaria: "todas as pessoas são estudantes nesta turma e já estudaram Cálculo" (!!)

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 1 (3/3):** podemos estar interessados na formação da turma em outros assuntos além do Cálculo.
- Neste caso, pode ser mais adequado usar o predicado:

  $Q(x, y)$: "o estudante x já estudou a matéria y"
- Teríamos que substituir $C(x)$ por $Q(x, calculo)$ nas abordagens anteriores:

  $\forall x \; Q(x, calculo)$

  $\forall x \; (E(x) \rightarrow Q(x, calculo))$

Sentenças para lógica (um quantificador)

- Note que existem diferentes abordagens.
- Devemos sempre adotar a mais simples, mas que seja adequada para o raciocínio subseqüente.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 2 (1/2):** Use predicados e quantificadores para expressar:

  "Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.".

- **Solução:**
  - Esta sentença significa:

    "Existe um estudante nesta sala com a propriedade de que este estudante já visitou SP."
  - Introduzindo uma variável x:

    "Existe um estudante x nesta sala que possui a propriedade 'x já visitou SP'."

Sentenças para lógica (um quantificador)

- **Exemplo 2 (2/2):** ("Algum estudante nesta sala já foi a São Paulo.").
- Supondo UD = "estudantes nesta sala", obtemos: $\exists x \; S(x)$
- Se o UD passar para "todas as pessoas", a sentença fica:

  "Existe uma pessoa x tendo a propriedade de que x é um estudante nesta sala e x já foi a SP."

  - Definindo $E(x)$ como "x é um estudante nesta sala", obtemos:

    $$\exists x \; (E(x) \wedge S(x))$$

  - Note que não pode ser: $\exists x \; (E(x) \rightarrow S(x))$
    - Para isto ser V, bastaria ter alguém fora da sala. (!!)

Sentenças para lógica (um quantificador)

- **Exemplo 3 (1/3):** Use predicados e quantificadores para expressar:

  "Todo estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.".

- **Solução:**
  - Reescrevendo:

    "Para todo x nesta sala, x tem a propriedade:

    x já visitou SP ou x já visitou o Rio."
    - nota: ou-inclusivo
  - Daí, se UD="estudantes em sala", isto é expresso como:

    $\forall x \ (S(x) \lor R(x))$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 3 (2/3):** ("Todo estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.")
- **Solução:**
  - Porém, se UD="todas as pessoas", isto fica:

    "Para toda pessoa x, se x é um estudante nesta sala, então x já visitou SP ou x já visitou o RJ."
  - O que pode ser expresso como:

    $\forall x\ (E(x) \rightarrow (S(x) \vee R(x)))$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplo 3 (3/3):** ("Todo estudante nesta sala já foi a SP ou ao Rio.")
- **Solução:**
  - Podemos ainda usar um predicado duplo $V(x, y)$ representando "x já visitou o estado y"
  - Neste caso:
    - $V(x, SP)$ seria o mesmo que $S(x)$
    - $V(x, RJ)$ seria o mesmo que $R(x)$
  - Abordagem útil se estivéssemos trabalhando com muitas declarações envolvendo pessoas visitando diferentes estados.
    - Caso contrário, é melhor a forma mais simples...

Sentenças para lógica (um quantificador)

- **Exemplos extras (Lewis Carroll) 1 (1/2):**
- Considere as declarações ("argumento"):
  - "Todos os leões são ferozes." ("premissa")
  - "Alguns leões não tomam café." ("premissa")
  - "Algumas criaturas ferozes não tomam café." ("conclusão")
- Defina:
  - $P(x)$ significa "x é um leão"
  - $Q(x)$ significa "x é feroz"
  - $R(x)$ significa "x toma café"
- Questão: assumindo que o UD é "o conjunto de todas as criaturas", expresse o argumento em lógica de predicados.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplos extras (Lewis Carroll) 1 (2/2):**
- Podemos expressar as declarações como:

  $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ (“Todos os leões são ferozes.”)

  $\exists x\ (P(x) \wedge \neg R(x))$ (“Alguns leões não tomam café.”)

  $\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$ (“Algumas criaturas ferozes não tomam café”)

- Notas:
  - a 2a declaração não pode ser:

    $\exists x\ (P(x) \rightarrow \neg R(x))$
  - a 3a declaração não pode ser:

    $\exists x\ (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplos extras (Lewis Carroll) 2 (1/2):**
- Considere o *argumento*:
  - “Todos os beija-flores são muito coloridos” (“premissa”)
  - “Nenhum pássaro grande vive no mel” (“premissa”)
  - “Pássaros que não vivem no mel são pobres em cores” (“premissa”)
  - “Beija-flores são pequenos” (“conclusão”)
- Defina:
  - $P(x)$ significa “x é um beija-flor”
  - $Q(x)$ significa “x é grande”
  - $R(x)$ significa “x vive no mel”
  - $S(x)$ significa “x é muito colorido”
- Questão: assumindo que o UD é “o conjunto de todos os pássaros”, expresse o argumento em lógica de predicados.

SENTENÇAS PARA LÓGICA (UM QUANTIFICADOR)

- **Exemplos extras (Lewis Carroll) 2 (2/2):**
- Podemos expressar as declarações como:

  $\forall x \ (P(x) \rightarrow S(x))$ (“Todos os beija-flores são muito coloridos”)

  $\neg\exists x \ (Q(x) \wedge R(x))$ (“Nenhum pássaro grande vive no mel”)

  $\forall x \ (\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$ (“Pássaros que não vivem no mel são pobres em cores”)

  $\forall x \ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ (“Beija-flores são pequenos”)

- Nota: estamos assumindo que:
  - “pequeno” é o mesmo que “não grande”
  - “pobre em cores” é o mesmo que “não muito coloridos”

PROGRAMAÇÃO EM LÓGICA

- Existem linguagens de programação projetadas para “raciocinar” utilizando as regras da Lógica de predicados.
- Exemplo: Prolog (“Programação em Lógica”)
  - Desenvolvido na França, na década de 70, por cientistas da computação que trabalhavam na área de Inteligência Artificial.

LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM

- Final deste item.

- **Dica**: fazer exercícios sobre Lógica de Primeira Ordem (predicados e quantificadores)...