INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

4) Relações

4.1) Relações e Dígrafos

4.2) Caminhos em Relações e Dígrafos

4.3) Propriedades de Relações

4.4) Relações de Equivalência

4.5) Manipulação e Fecho de Relações

Relações

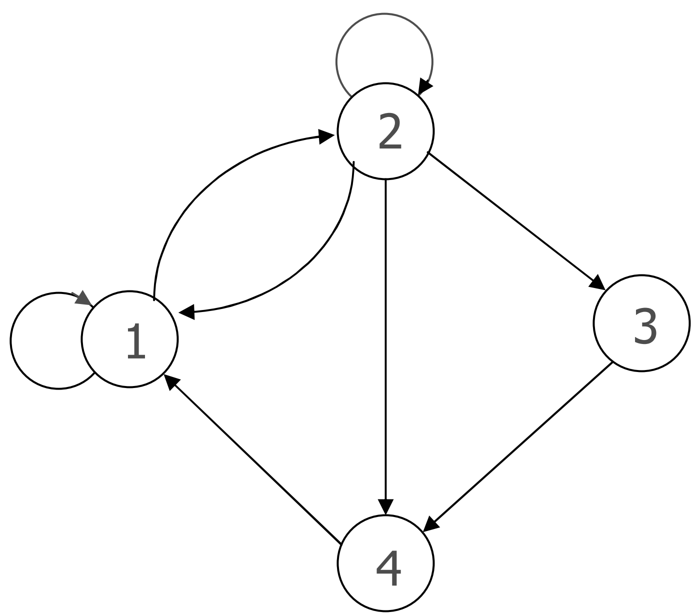
<u>Definição</u>: Sejam A e B conjuntos. Uma *relação binária* R de A em B é um subconjunto de $A \times B$.

- Ou: uma relação binária de A em B é um conjunto R de pares ordenados, onde o 1º elemento de cada par vem de A e o 2º vem de B, ou seja, $R \subseteq A \times B$.
- Quando $(a,b) \in R$, diz-se que *a está relacionado com b* por R.
- Usa-se a notação *a R b* para denotar que $(a,b) \in R$.
- Se a não está relacionado com b por R, escreve-se $a \not{R}\, b$.
- Relações binárias representam ligações entre elementos de 2 conjuntos.
  - veremos também relações n-árias
  - vamos omitir a palavra "binária"

Representação de relações usando dígrafos

Exemplo: Sejam A={1,2,3,4} e
R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1)}

– O dígrafo de R é:



Caminhos em relações e dígrafos

Definição: Seja R uma relação sobre o conjunto A. Um *caminho de comprimento n* em R de a para b é uma seqüência finita $\pi=a,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},b$ tal que:

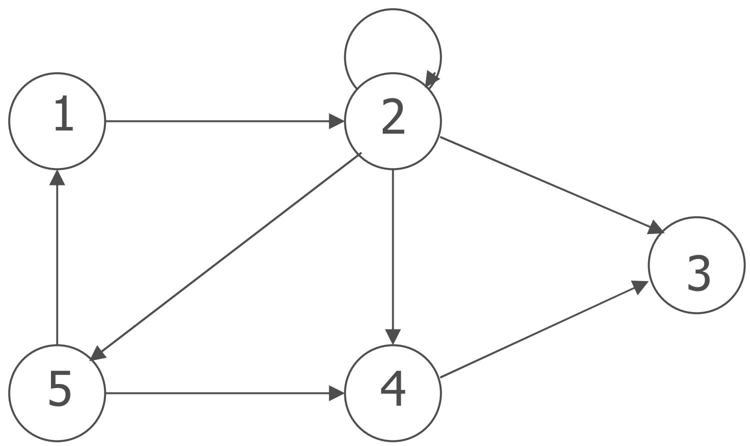
$$a\ R\ x_1,\ x_1\ R\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{n-1}\ R\ b$$

- Note que um caminho de comprimento n envolve n+1 elementos de A (não necessariamente distintos).

- O modo mais fácil de visualizar um caminho é com o dígrafo de uma relação:
  sucessão de arestas, seguindo os sentidos indicados.

Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo: Considere o dígrafo:



Então:

π_1 = 1,2,5,4,3 é um caminho de comprimento 4 de 1 a 3

π_2 = 1,2,5,1 é um caminho de comprimento 3 do vértice 1 para ele mesmo

π_3 = 2,2 é um caminho de comprimento 1 do vértice 2 para ele mesmo

Caminhos em relações e dígrafos

- Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de um *ciclo* (π_2 e π_3 são ciclos).
- Caminhos de comprimento 1 podem ser identificados pelos pares ordenados (x,y) que pertencem a R.
- Caminhos em relações R podem ser usados para definir novas relações bastante úteis.

Definição: (relação R^n sobre A)
x R^n y significa que há um *caminho de comprimento n* de x até y em R.

Definição: (relação R^∞ sobre A)
x R^∞ y significa que há algum caminho em R de x até y.
(R^∞ é chamada de *relação de conectividade* para R)

Caminhos em relações e dígrafos

- Note que $R^n(x)$ consiste de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de x por meio de um caminho em R de comprimento n.

- O conjunto $R^\infty(x)$ consiste de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de x por meio de *algum* caminho em R.

Exemplo1: Seja A o conjunto de todos os seres humanos vivos e seja R a relação "conhecimento mútuo" (a R b significa que a e b se conhecem). Então:

- A R^2 b significa que a e b têm um conhecido em comum.
- Em geral, a R^n b se a conhece alguém (x_1), que conhece x_2, ..., que conhece x_{n-1}, que conhece b.
- Finalmente, a R^∞ b significa que existe alguma lista encadeada de conhecidos que começa em a e termina em b.

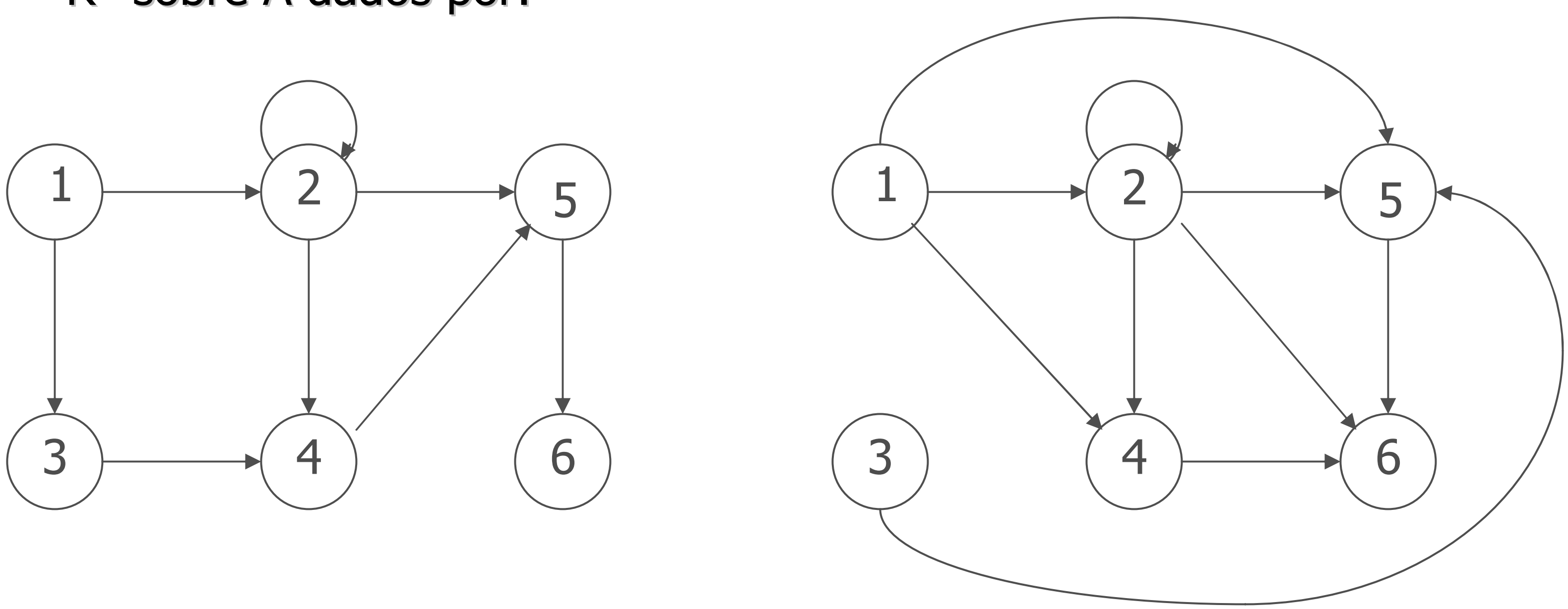
- Questão: será que toda dupla de brasileiros está relacionada por R^∞?

Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo2: Seja A o conjunto de cidades brasileiras, e seja x R y se há algum vôo direto (de alguma cia aérea) de x para y.

- x e y estão relacionados por R^n se for possível agendar um vôo de x para y com exatamente n-1 paradas intermediárias
- x R^∞ y se for possível ir de avião de x para y.

Exemplo3: Seja A={1,2,3,4,5,6} e sejam os dígrafos das relações R e R^2 sobre A dados por:



Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo3 (cont.):

- Uma linha conecta 2 vértices no dígrafo para R_2 somente se existir um caminho de comprimento 2 conectando os mesmos vértices no dígrafo para R_1.

- Portanto:

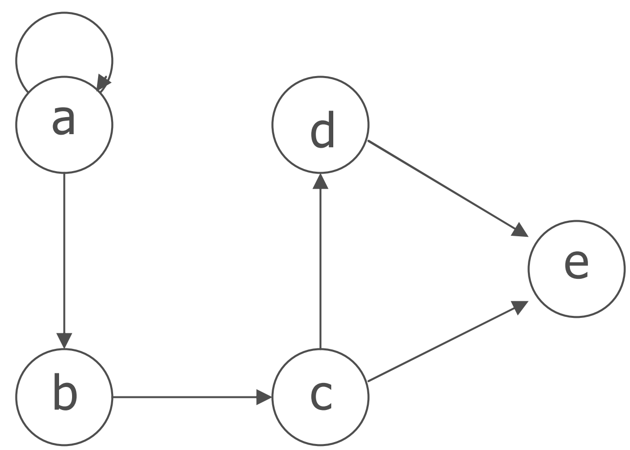
  $1\ R^2\ 2$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 2$
  $1\ R^2\ 4$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 4$
  $1\ R^2\ 5$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 5$
  $2\ R^2\ 2$ porque $2\ R\ 2$ e $2\ R\ 2$
  e assim sucessivamente.

- De um modo similar, podemos construir o dígrafo de R^n para qualquer n.

Caminhos em relações e dígrafos

<u>Exemplo4</u>: Sejam A={a,b,c,d,e} e
R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,e),(c,d),(d,e)}.
Compute (a) R^2 (b) R^∞

<u>Solução</u>: o dígrafo de R é dado por:



(a) Portanto: $R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,e),(b,d),(c,e)\}$

Caminhos em relações e dígrafos

<u>Exemplo4 (cont.)</u>:

(b) R^∞ = “todos os pares ordenados de vértices para os quais há um caminho de qualquer comprimento do primeiro vértice para o segundo”

ou seja:

$R^\infty = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$

- Por exemplo, $(a,d) \in R^\infty$, já que há um caminho de comprimento 3 de a para d: “a,b,c,d”.
- Similarmente, $(a,e) \in R^\infty$, já que há um caminho de comprimento 3 de a para e: “a,b,c,e” (assim como “a,b,c,d,e”)

Produto booleano

Exemplo: Encontre o produto booleano de A e B, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

Caminhos em relações e matrizes

Exemplo: Sejam A e R como no exemplo anterior. Então:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2,4)

$$\Rightarrow M_{R^2} = M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee \boxed{(1 \wedge 1)} \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$$

Caminhos em relações e matrizes

- Seja R uma relação sobre $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ e seja M_R uma matriz $n\times n$ representando R.

Teorema: Se R é uma relação sobre $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ então:

$$M_{R^2} = M_R \otimes M_R$$

Prova:

- Seja $M_R=[m_{ij}]$ and $M_{R^2}=[n_{ij}]$;
- o elemento n_{ij} de $M_R \otimes M_R$ será = 1 se a *linha i* do 1º M_R e a *coluna j* do 2º M_R tiverem um nº 1 na mesma posição relativa (digamos k);
- ou seja, $n_{ij}=1$ se $m_{ik}=1$ e $m_{kj}=1$ para algum k

  $\Rightarrow$ se $n_{ij}=1$, então $a_i \, R \, a_k$ e $a_k \, R \, a_j$
- portanto, $n_{ij}=1 \Rightarrow a_i \, R^2 \, a_j$.

Caminhos em relações e matrizes

- Esta idéia pode ser generalizada:

Teorema: Para n ≥ 2 e para uma relação R sobre A, temos:

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \ldots \otimes M_R \quad \text{(n fatores)}$$

Caminhos em relações e matrizes

- Exercício: Para a relação R cujo dígrafo é dado abaixo,

  a) Desenhe os dígrafos de R^2 e R^∞
  b) Encontre M_{R^2} e M_{R^∞}