Tensores, Autovalores y Autovectores

Juan Diego Duarte, Wilmar Alejandro Sotelo *
Universidad Industrial de Santander
Calle 9 con cra 27

Versión 1 - 5 de octubre del 2021

Índice

Resumen

En este documento se estudia la aplicación de los tensores por medio de los momentos de inercia para una distribución discreta de masas en el plano $x - y$, en el espacio cartesiano y para información sobre el gasto en unidades de porcentaje del producto interno bruto (PIB) del país en los últimos 15 años en cuestión de Defensa, Salud, Eduación, Ciencia y Tecnológia. Para realizar el cálculo se utilizan las expresiones discretas para los diferentes momentos de una función en general, adicionalmente se calculan los autovalores y autovectores para construir una matriz de transformación que reorganice de manera más simple la distribución de los datos. Los resultados obtenidos nos dan información sobre, momento de orden cero (masa total), momento de primer orden (centro de masa) y el momento de segundo orden (matriz de covarianza). Por otro lado, se obtiene la matriz de transformación de cambio de base a partir de los autovectores para cada caso. Por último, se escriben algunas conclusiones de acuerdo con los resultados obtenidos, unas en términos generales y particulares.

1. Introducción

Para estudiar la aplicabilidad de los tensores, se plantean 2 problemas para datos reales, el problema 1 corresponde con calcular los 3 primeros momentos de un conjunto de datos los cuales

*e-mail: `Juandduartec@gmail.com, wilmar2218418@correo.uis.edu.co`

corresponden con diferentes masas dispersas en el plano $x - y$ (caso 2D) y en el espacio (x, y, z) caso (3D), los autovectores asociados al momento de inercia de segundo orden, esto para encontrar una matriz de transformación entre los autovectores y la base cartesiana con el objetivo de que esta distribución de masas se organice de manera más simple. El problema 2 inicialmente consiste en calcular el momento de inercia de segundo orden para los datos que representan el gasto en unidades de porcentaje del PIB del país en los últimos 15 años en cuestión de Defensa, Salud, Eduación, Ciencia y Tecnológia. Adicionalmente, se calcula matriz de correlación entre estos parámetros, los autovalores y autovectores para este sistema y por último obtener una matriz de transformación que nos lleve de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

En la Sección 2 se presenta el procedimiento para realizar el calculo de cada uno de los momentos del conjunto de datos, los autovalores y autovectores de la matriz de covarianza, y la matriz de transformación, estos resultados se encuentran en la sección 3. En la sección 4 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Metodología

Los datos para la primera parte de este trabajo fueron proporcionados por el profesor[1], los cuales corresponden con la masa m y la posición (x, y, z) para cada una de las partículas de un conjunto disperso. La información para la segunda parte se adquirió de la base de datos del Banco Mundial[2]; estos datos representan el gasto en unidades de porcentaje del producto interno bruto (PIB) del país para cada uno de los siguientes ítems en los últimos 15 años:

- Defensa
- Salud
- Educación
- Ciencia y Tecnología

Para realizar el cálculo de los momentos de un grupo de datos se utilizan las siguientes expresiones:

- Momento de orden cero: representa el "valor total" de la variable del sistema.

$$\mu_0(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

- Momento de primer orden: corresponde con el promedio pesado de la variable.

$$\mu_1(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)$$

[1] https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/TallerTensores/DatosTensores/datosmasas.csv

[2] https://data.worldbank.org

- Momento de segundo orden: es la matriz de covariancia de la variable que generaliza la noción de varianza a dimensiones múltiples. En general, la base en la cual están expresados $|x\rangle_i$ y $|\bar{x}\rangle$ no son ortogonales los vectores.

$$\mu_2(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2$$

Para calcular los autovalores λ_i del operador lineal μ_2, se utiliza la ecuación (1); estos valores serán las componentes de los autovectores $|\psi\rangle_i$ del sistema.

$$det\,|\mu_2 - \lambda\delta^i_j| = 0 \tag{1}$$

El cambio de base se hace entre la base cartesiana y la conformada por los autovectores; la matriz de cambio de base se encuentra representando cada uno de los vectores de la base canónica en términos de la base de autovectores, el procedimiento consiste en encontrar la forma escalonada reducida por filas de la matriz de autovectores igualada a cada uno de los vectores de la base de partida; al realizar este procedimiento para cada uno de los vectores y ordenarlos en las columnas de la matriz de cambio de base, encontramos que esta matriz de cambio de base ($\mathbb{B}$) corresponde con la inversa de la matriz de autovectores ($\mathbb{A}$).

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1} \tag{2}$$

Este procedimiento se realiza para los casos en dos y tres dimensiones utilizando la distribución de masas de la primera parte de la asignación. En la segunda parte del trabajo se utilizaron las funciones de covariancia y correlación definidas por **MATLAB**; esto porque el momento de segundo orden se calcula sin V_i, que corresponde con el caso en que los pesos son todos unitarios y el uso de la función de correlación aplica para esta aplicación.

3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados de los momentos para la distribución de masas en $2D$, $3D$, y para los datos obtenidos del Banco Mundial.
Primero consideramos el caso 2D: la distribución de masas se encuentran en el plano x-y, esto muestra en la figura 1 a).
Los 3 primeros momentos para la distribución de masas son:

- $\mu_0(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i = 4627$ El cual representa la masa total de la distribución.
- $\mu_1(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle) = (x_c\,,\, y_c) = (825{,}8152\,;\, 776{,}9185)$ Que corresponde con el centro de masa de la distribución.
- $\mu_2(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2 = 1 * 10^8 \begin{pmatrix} 9{,}5860 & 9{,}1177 \\ 9{,}1177 & 9{,}6367 \end{pmatrix}$ Es la matriz de covarianza.

El centro de masa de la distribución, μ_1, se muestra en la figura 1 b) localizado en (825,8152 ; 776,9185), con el centro de masa del sistema podemos trasladar la ubicación de todos los puntos de tal manera que el nuevo centro de coordenadas sea el centro de masa como se observa en la Fig 1 c).

Los ejes principales de inercia para esta distribución de masas corresponden con los autovectores $|\psi\rangle_i$, los cuales son contruidos a partir de los autovalores presentados en la ecuación (1) y calculados a partir de la matriz de covariancia, esto es:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 &= (-0{,}7081 \quad 0{,}7061) \\ |\psi\rangle_2 &= (-0{,}7061 \quad -0{,}7081) \end{aligned} \tag{3}$$

Teniendo los ejes principales de inercia (autovectores) tenemos la matriz de transformación entre la base cartesiana y la base de los autovectores, obteniendo:

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}7081 & 0{,}7061 \\ -0{,}7061 & -0{,}7081 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Con esta matriz de transformación se rotaron los datos iniciales (en azul) de las masas de manera que sus autovectores correspondieran con la base propia; además, se reubicaron los datos para dejar su centro de masa en cero, así, la distribución de masas se organiza de manera más simple (en naranja) como se muestra en la figura 2.

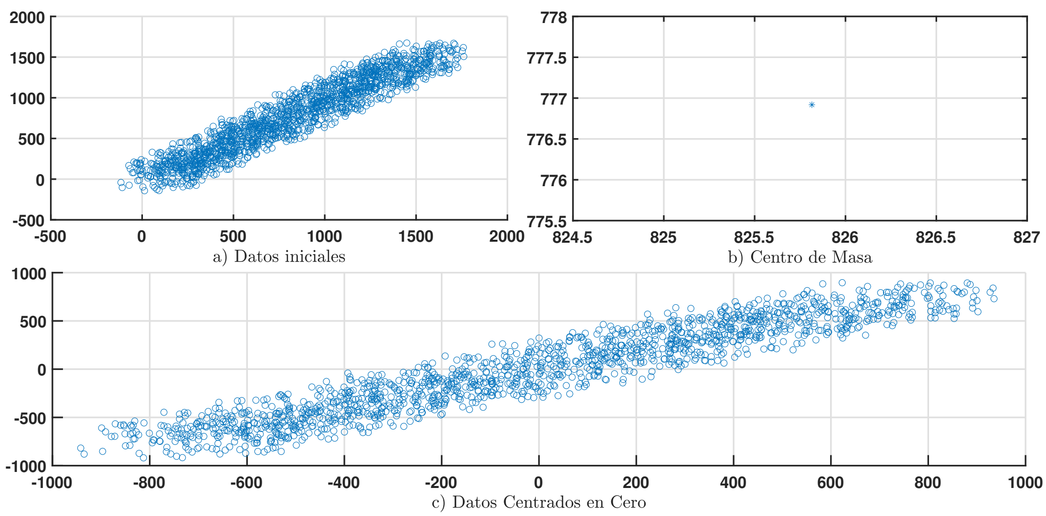

Figura 1: Distribución de masas para el caso 2D

A continuación, se presenta el caso 3D para la distribución ubicada en el espacio x-y-z; para este, se encontraron los 3 primeros momentos para la distribución de masas:

- $\mu_0(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i = 4627$ Representa la masa total de la distribución.

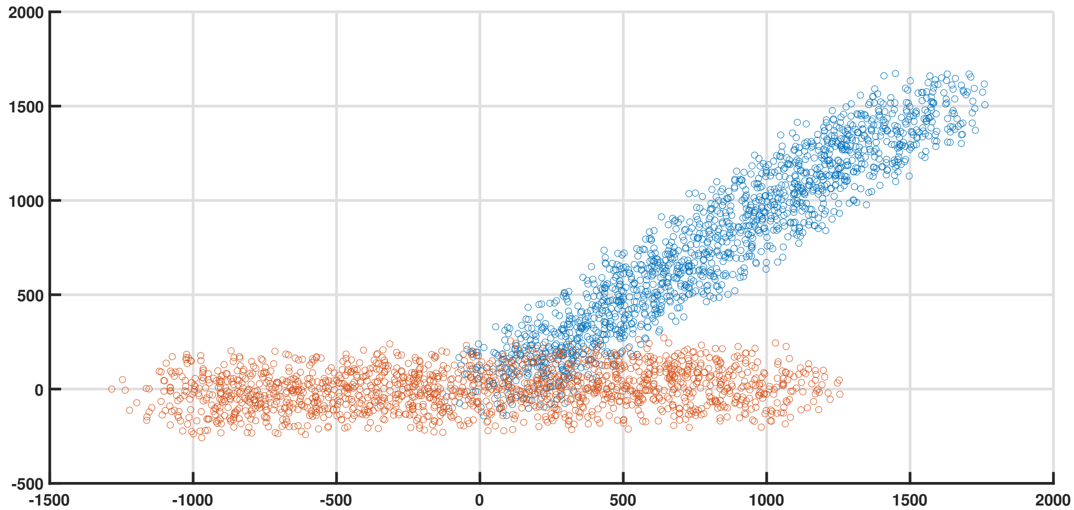

Figura 2: Distribución de masas con la matriz de transformación

- $\mu_1(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle) = (x_c\,,\, y_c,\, z_c) = (825{,}8152\,;\, 776{,}9185;\, 15{,}5033)$ Que corresponde con el centro de masa de la distribución en el espacio.
- $\mu_2(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2 = 1 * 10^8 \begin{pmatrix} 9{,}5860 & 9{,}1177 & -0{,}0713 \\ 9{,}1177 & 9{,}6367 & -0{,}0193 \\ -0{,}0713 & -0{,}0193 & 1{,}0184 \end{pmatrix}$ Corresponde con la matriz de covarianza.

El centro de masa de la distribución (μ_1) es $(825{,}8152\,;\, 776{,}9185;\, 15{,}5033)$; con esto, se trasladaron los puntos de tal manera que el nuevo centro de coordenadas correspondiera con el centro de masa.

Los ejes principales de inercia para esta distribución de masas corresponden con los autovectores, los cuales se construyen con los autovalores obtenidos de la ecuación (1), determinados a partir de la matriz de covarianza, dando como resultado:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_1 &= (\;\;0{,}7061 \qquad 0{,}7081 \qquad -0{,}0036) \\ |\psi\rangle_2 &= (\;\;0{,}7065 \qquad -0{,}7042 \qquad 0{,}0698) \\ |\psi\rangle_3 &= (-0{,}0469 \qquad -0{,}0519 \qquad 0{,}9976) \end{aligned} \tag{5}$$

Teniendo los ejes principales de inercia (autovectores) obtenemos la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de los autovectores, como sigue:

$$\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}7061 & 0{,}7081 & -0{,}0036 \\ 0{,}7065 & -0{,}7042 & 0{,}0698 \\ -0{,}0469 & 0{,}0519 & 0{,}9976 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Con esta matriz de transformación podemos reubicar los datos de las masas de manera que formen una base ortogonal respecto a la cual la distribución de masas se organiza de manera más simple como ocurrió con el caso en *2D*.

Para la segunda parte, el Banco Mundial nos proporciona los datos del porcentaje del PIB de gasto público en salud, defensa, educación y ciencia y tecnología en los últimos 15 años en nuestro país; con estos datos se obtuvieron las matrices de covarianza y correlación entre los diferentes gastos mencionados.

- Matriz de covarianza entre los gastos públicos:
$$\mu_2(n) = \sum_{i=1}^{n} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2 = \begin{pmatrix} 0{,}0675 & -0{,}0007 & -0{,}0064 & -0{,}0323 \\ -0{,}0007 & 0{,}1030 & 0{,}0097 & 0{,}1206 \\ -0{,}0064 & 0{,}0097 & 0{,}0025 & 0{,}0218 \\ -0{,}0323 & 0{,}1206 & 0{,}0218 & 0{,}3321 \end{pmatrix}$$
- Matriz de Correlación $\mathbb{M}_c$:
$$\mathbb{M}_c = \begin{pmatrix} 1{,}0000 & -0{,}0081 & -0{,}4897 & -0{,}2156 \\ -0{,}0081 & 1{,}0000 & 0{,}6073 & 0{,}6520 \\ -0{,}4897 & 0{,}6073 & 1{,}0000 & 0{,}7564 \\ -0{,}2156 & 0{,}6520 & 0{,}7564 & 1{,}0000 \end{pmatrix}$$

Los autovectores y autovalores de la matriz de covariancia se presentan a continuación:

- Autovalores
$$\lambda_i = diag \begin{pmatrix} 0{,}0007 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0443 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0719 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3883 \end{pmatrix} \tag{7}$$
- Autovectores
$$\begin{pmatrix} |\psi\rangle_1 \\ |\psi\rangle_2 \\ |\psi\rangle_3 \\ |\psi\rangle_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7061 & -0{,}0449 & 0{,}9954 & -0{,}0419 \\ -0{,}4976 & 0{,}7753 & 0{,}0558 & -0{,}3849 \\ 0{,}8591 & 0{,}4955 & -0{,}0466 & -0{,}1192 \\ -0{,}0941 & 0{,}3890 & 0{,}0631 & 0{,}9143) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Significado: Los autovalores se refieren al porcentaje de cambio de cada uno de los gastos del país, corresponden con una tendencia de comportamiento individual. Al calcular los autovectores se encuentra una matriz que representa una base sobre la cual se puede realizar un reordenamiento más simple de la información; esto es, encontrar una base en la que los datos no dependan o varíen entre sí, mostrando de manera separada su tendencia (con la dirección del vector).

Para el cálculo de la matriz de cambio de base, se expande cada uno de los vectores de la base cartesiana en la base de autovectores, el resultado es:

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0{,}0741 & -0{,}0449 & 0{,}9954 & -0{,}0419 \\ -0{,}4976 & 0{,}7753 & 0{,}0558 & -0{,}3849 \\ 0{,}8591 & 0{,}4955 & -0{,}0466 & -0{,}1192 \\ -0{,}0941 & 0{,}3890 & 0{,}0631 & 0{,}9143 \end{pmatrix} \tag{9}$$

4. Conclusiones y Recomendaciones

- El enfoque tensiorial del algebra lineal aplicado a sistemas tangibles nos da herramientas para manipular los datos de una forma más sencilla, ahorrando el costo computacional para una gran cantidad de información.
- Mediante las matrices de covarianza, correlación, autovectores y autovalores se pueden visualizar relaciones entre grupos de información que permiten un mejor análisis de datos.
- El cambio de base entre la base canónica y una base diferente se representa matricialmente por la inversa de la base de llegada.

5. Referencias

Referencias