10)

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Cerrado bajo la suma: $p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

y $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$

$\Rightarrow p_1(x) + p_2(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1}) x^{n-1}$

Conmutativa: $p_1(x) + p_2(x) = p_2(x) + p_1(x) \in p_n$

como $p_2(x) + p_1(x) = b_0 + a_0 + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \dots + (b_{n-1} + a_{n-1}) x^{n-1}$

esto es equivalente a $p_1(x) + p_2(x) \rightarrow$ se cumple

Asociativa: Sean $p_1(x)$, $p_2(x)$ y $p_3(x) \in p_n$

$\Rightarrow (p_1(x) + p_2(x)) + p_3(x) = p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x))$

$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$

$\hookrightarrow (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \dots + (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) x^{n-1} = (p_1(x) + p_2(x)) + p_3(x)$

y $p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x)) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x +$
$(b_{n-1} + c_{n-1}) x^{n-1})$

$\Rightarrow p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x)) = (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)x + \dots (a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) x^{n-1}$

$\Rightarrow (p_1(x) + p_2(x)) + p_3(x) = p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x))$

Elemento neutro: Sea $p_0(x) = 0 \Rightarrow p_0(x) + p_1(x) = p_1(x) \in p_n$

Elemento simetrico: Sea $p_1(x) \Rightarrow -p_1(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{n-1} x^{n-1}$

$\Rightarrow p_1(x) + (-p_1(x)) = 0$

$p_1(x) - p_1(x) = \overset{0}{\cancel{a_0 - a_0}} + \overset{0}{\cancel{(a_1 - a_1)}}x + \dots + \overset{0}{\cancel{(a_{n-1} - a_{n-1})}} x^{n-1} = 0$

Cerrado bajo el producto por un número: $\forall \alpha \in K$ y

$p_1(x) \in P_n \Rightarrow \alpha p_1(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1} \in P_n$

sea α y $\beta \in K \Rightarrow \alpha(\beta p_1(x)) = (\alpha\beta) p_1(x)$

*) $(\alpha+\beta) p_1(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_1(x)$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \beta a_0 + \beta a_1 x + \dots + \beta a_{n-1} x^{n-1}$

$(\alpha+\beta) p_1(x) = (\alpha+\beta) a_0 + (\alpha+\beta) a_1 x + \dots + (\alpha+\beta) a_{n-1} x^{n-1}$

*) $\alpha(p_1(x) + p_2(x)) = \alpha p_1(x) + \alpha p_2(x)$

$= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \alpha b_0 + \alpha b_1 x + \dots + \alpha b_{n-1} x^{n-1}$

$= \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1) x + \dots + \alpha(a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1}$

$= \alpha(p_1(x) + p_2(x))$

α) Sea $p_0(x) = 1 \Rightarrow p_0(x) p_i(x) = p_1(x) \ \forall p_i(x) \in P_n \ ; \ i = 1, 2, \dots, n-1$

b) Si $a_i \in \mathbb{Z}$, P_n no sería un espacio vectorial ya que no cumpliría las propiedades para el producto por un número, es decir,

$\alpha \in \mathbb{R} = K \Rightarrow \alpha p_1(x) \notin V$ porque α no necesariamente sería un $\mathbb{Z}$

c) 1) Siendo $G = \{a_0, a_{n-1} x^{n-1}\}$ si es un subespacio vectorial de P_n ya que cumple todas las propiedades para formar un espacio vectorial

2) Siendo $V = \{a_0, a_2 x^2, a_4 x^4, \dots, a_{n-1} x^{n-1}\}$ también es un subespacio de P_n, cumple todas las propiedades
(siempre y cuando n sea impar y el grado de los polinomios sea $< n-1$)

3) todos los polinomios que tienen a x como factor (grado $n > 1$)
No es un subespacio vectorial, ya que no posee elemento neutro

4) todos los polinomios que tienen $x-1$ como un factor
No es un subespacio vectorial de P_n, entendiendo que $(x-1)$ es factor de todo el polinomio, por lo tanto, al hacer la última multiplicación $(x-1) a_{n-1} x^{n-1} = a_{n-1} x^n - a_{n-1} x^{n-1}$, no entra en el espacio.