Sección 4.6.6

4) $A|V_0\rangle = \lambda_0 |V_0\rangle$ $\Rightarrow$ mostrar que $|V_0\rangle$ es un autovector de A^2 con un autovalor λ_0^2

$\Rightarrow$ Como $A^2 = AA$ $\Rightarrow$ $A^2|V_0\rangle = AA|V_0\rangle = A\lambda_0|V_0\rangle$

$$= \lambda_0 A|V_0\rangle = \lambda_0\lambda_0|V_0\rangle$$

$$\Rightarrow A^2|V_0\rangle = \lambda_0^2|V_0\rangle$$

5) Mostrar que si A^2 tiene un autovalor $\lambda_0 = \mu^2$, entonces A tiene un autovector. para un $|V_0\rangle$:

$\Rightarrow$ Como $A^2 = A\cdot A$ $\Rightarrow$ $A^2|V_0\rangle = \lambda_0|V_0\rangle$; se debe cumplir

$$A = \lambda|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow A\cdot A|\psi\rangle = A\lambda|\psi\rangle = \lambda A|\psi\rangle = \lambda\lambda|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle$$

por construcción A tiene un autovalor μ, por lo tanto, tiene un autovector

12) $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Mostrar que los matrices forman un grupo respecto a la operación:

$$\sigma_j \odot \sigma_k \equiv i \epsilon_{jkm} \sigma^m + \delta_{jk} \mathbb{I} \equiv \sigma_j \sigma_k \quad ; \quad j, k, m = x, y, z$$

$$\Rightarrow \sigma_x \odot \sigma_y = i \epsilon_{xyz} \sigma^z + \delta_{xy} \mathbb{I} = i \sigma_z + \delta_{xy}$$

$$\sigma_y \odot \sigma_z = i \epsilon_{yzx} \sigma^x + \delta_{yz} \mathbb{I} = i \sigma_x + \delta_{yz}$$

$$\sigma_z \odot \sigma_x = i \epsilon_{zxy} \sigma^y + \delta_{zx} \mathbb{I} = -i \sigma_y + \delta_{zx}$$

para $\sigma_j \odot \sigma_j = \delta_{jj}$

Caen en $\sigma_M \odot \sigma_l$ cerrado bajo la operación

Asociativa: $\sigma_m \odot (\sigma_j \odot \sigma_k) = i\epsilon_{jkm}\sigma^0 + \delta_{mjk}\mathbb{I}$

y $(\sigma_m \odot \sigma_j) \odot \sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^0 + \delta_{mjk}\mathbb{I}$

Elemento neutro $\odot$: $\hat{g} \odot \sigma_k = \sigma_k \odot \hat{g}$ con $\hat{g} = \mathbb{I}$ como $\sigma_k \odot \hat{g} = \sigma_k \hat{g}$

Elemento inverso: Existen ya que cada $\sigma_j = \sigma_j^{+} = \sigma_j^{-1}$

c) sea $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z + c_4 \sigma_0$

$$\Rightarrow \quad 3 = c_1(0) + c_2(0) + c_3(1) + c_4(1)$$

$$i = c_1(1) + c_2(-i)$$

$$5 = c_1 + i c_2$$

$$1 = -c_3 + c_4$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{5+i}{2}, \quad c_2 = \frac{5-i}{2}, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 2$$

d) $[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = i \epsilon_{jkm} \sigma^m + \delta_{jk} \mathbb{I} - (i \epsilon_{kjm} \sigma^m + \delta_{kj} \mathbb{I})$

$$= i \sigma_m + \delta_{jk} \mathbb{I} + i \sigma_m - \delta_{jk} \mathbb{I}$$

$$\Rightarrow \quad [\sigma_j, \sigma_k] = 2 i \sigma_m$$