

# Transformada Análitica y Discreta de Fourier

**Juan Diego Duarte, Wilmar Alejandro Sotelo \***

*Universidad Industrial de Santander*

*Calle 9 con cra 27*

Versión 1 - 24 de octubre del 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>3</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>7</b>
<b>5. Referencias</b>	<b>9</b>

## Resumen

En este documento se presenta la aplicación de la transformada de Fourier analítica y discreta para dos ejercicios teóricos y uno de aplicación en el que se usan medidas de campo eléctrico producidas por descargas atmosféricas. El primer ejercicio consiste en la verificación de la equivalencia entre el resultado obtenido mediante la transformada de Fourier analítica para una función en particular y su transformada de Fourier discreta, implicando que sus espectros son iguales. Para el segundo ejercicio se obtuvo el espectro de potencia de la función y la serie de Fourier de la autocorrelación de la señal; el objetivo de esta última es reducir al mínimo el ruido presente en la señal original. La última parte corresponde con el estudio del espectro de potencia de las medidas realizadas de campo eléctrico con el fin de indentificar una correlación entre los datos tomados por las diferentes antenas para una misma descarga eléctrica; es decir, verificar si los rayos poseen una identidad espectral visto desde diferentes puntos de medición. Por último, se escriben algunas conclusiones de acuerdo con los resultados obtenidos.

## 1. Introducción

Para estudiar la aplicabilidad y versatilidad de la transformada analítica y discreta de Fourier se realiza un trabajo en dos partes. La primera parte corresponde con dos 2 ejercicios, en el primer

---

\* e-mail: Juandduartec@gmail.com, wilmar2218418@correo.uis.edu.co

ejercicio comparamos la transformada de Fourier analítica (TFA) y discreta (TFD) para dos funciones (pueden ser señales) en particular. Mostramos en que caso se recupera una transformada real o imaginaria, el espectro de potencia y los efectos de elegir diferentes valores del tamaño de paso en el muestreo de la señal y de ampliar el periodo de medición. Para el ejercicio 2 dada una señal con ruido de tipo aleatorio, de la cual obtenemos la transformada de Fourier, el espectro de potencia, y su función de autocorrelación  $A(\tau)$ , con esto se compara el espectro de la función de autocorrelación  $A(\omega)$  con el espectro original de la señal con el fin de observar la eficacia de esta técnica en la eliminación de ruido.

La parte final corresponde aplicar de la transformada de Fourier a un caso en particular, específicamente estudiar el espectro de potencias de un DataSet con medidas de campo eléctrico producidas por descargas atmosféricas vistas desde diferentes puntos de medición (antenas), comparando los espectros podríamos observar si existe una correlación entre estas medidas.

En la Sección 2 se presenta el procedimiento para realizar el cálculo de cada una de las transformadas analítica y discreta de Fourier, los coeficientes de la serie exponencial de Fourier y como obtener la función de correlación, estos resultados se encuentran en la sección 3. En la sección 4 se presentan las conclusiones y/o recomendaciones del trabajo.

## 2. Metodología

El primer ejercicio corresponde aplicar las TFA, TFD y compararlas, entonces tenemos que la TFA exponencial compleja es:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (1)$$

La TFD se obtiene a partir de (1) y está dada por:

$$F[n] = \sum_{k=1}^N f(t_k) \cdot e^{-\frac{j2\pi n}{N}(k-1)} \quad (2)$$

Donde  $t_k = nT_s = \frac{1}{f_s}$  con  $f_s$  la frecuencia de muestreo. Ahora el espectro de potencia de Fourier se puede obtener a partir de los coeficientes ( $C_k$ ) de la serie de Fourier exponencial compleja dados por:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cdot e^{-jk\omega t} \cdot dt \quad (3)$$

Así el espectro se puede obtener graficando la  $|C_k|$  para las distintas frecuencias en las que se encuentre cada coeficiente.

La función de autocorrelación  $A(\tau)$  se puede calcular como:

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) \cdot dt \quad (4)$$

Donde  $\tau$  es el retardo. Además esta también puede ser vista desde la transformada de Fourier como:

$$A(\omega) = \sqrt{2\pi}|S(\omega)|^2 \quad (5)$$

Para efectos de este documento la eliminación de ruido en una señal se hace bajo la definición de la correlación entre señales<sup>1</sup>, esto es:

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \quad (6)$$

Así, si las señales  $y(t)$  y  $x(t)$  están altamente correlacionadas la integral de la ecuación (6) tendrá un gran valor comparado con eventos en las que las señales no estén tan correlacionadas.

En la segunda parte se propone la eliminación del ruido de una señal, para lo cual se hace uso de la siguiente expresión:

$$C(\omega) = \sqrt{2\pi}X(\omega)X(\omega)^* \quad (7)$$

En la que se multiplica la función por su conjugada en frecuencia, obteniendo la transformada de Fourier de la autocorrelación.

### 3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados para los ejercicios 1 y 2 propuestos<sup>2</sup> de la primera parte y para el caso particular de aplicación.

El primer ejercicio: Considerando las siguientes señales.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 3\cos(\omega t) + 5\cos(3\omega t) + 8\cos(7\omega t) \\ y_2(t) &= 3\sin(\omega t) + 2\sin(3\omega t) + 3\sin(8\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

Sus TFA son, respectivamente:

$$\begin{aligned} &\pi[3\delta(k+1) + 5\delta(k+3) + 8\delta(k+7) + 3\delta(k-1) + 5\delta(k-3) + 8\delta(k-7)] \\ &j\pi[3\delta(k+1) + 2\delta(k+3) + 3\delta(k+8) - 3\delta(k-1) - 2\delta(k-3) - 3\delta(k-7)] \end{aligned} \quad (9)$$

Para sus TFD, discretizamos las señales de la ecuación (8), y le aplicamos (2). Como se puede observar en la figura 1. Se puede extraer los coeficientes de la serie de Fourier y así reconstruir la transformada de Fourier de las señales. Entonces, sus TFD son:

$$\begin{aligned} &\pi[3\delta(k+1) + 5\delta(k+3) + 8\delta(k+7) + 3\delta(k-1) + 5\delta(k-3) + 8\delta(k-7)] \\ &j\pi[3\delta(k+1) + 2\delta(k+3) + 3\delta(k+8) - 3\delta(k-1) - 2\delta(k-3) - 3\delta(k-7)] \end{aligned} \quad (10)$$

<sup>1</sup><https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/LibrosCapitulos/VolumenDOS.pdf>

<sup>2</sup><https://github.com/nunezluis/MisCursos/blob/main/MisMateriales/Asignaciones/TareaDiscretaFourier/TareaDiscretaFourierV2.pdf>

En la figura 1 a). el eje de las ordenadas es real, es decir, para la señal  $y_1(t)$  que es una función par se obtiene una transformada completamente real y para la figura 1 b) el eje de las ordenadas es imaginario, y como se puede observar  $y_2(t)$  es impar y su transformada es completamente imaginaria, esto concuerda con sus transformadas de Fourier analíticas.

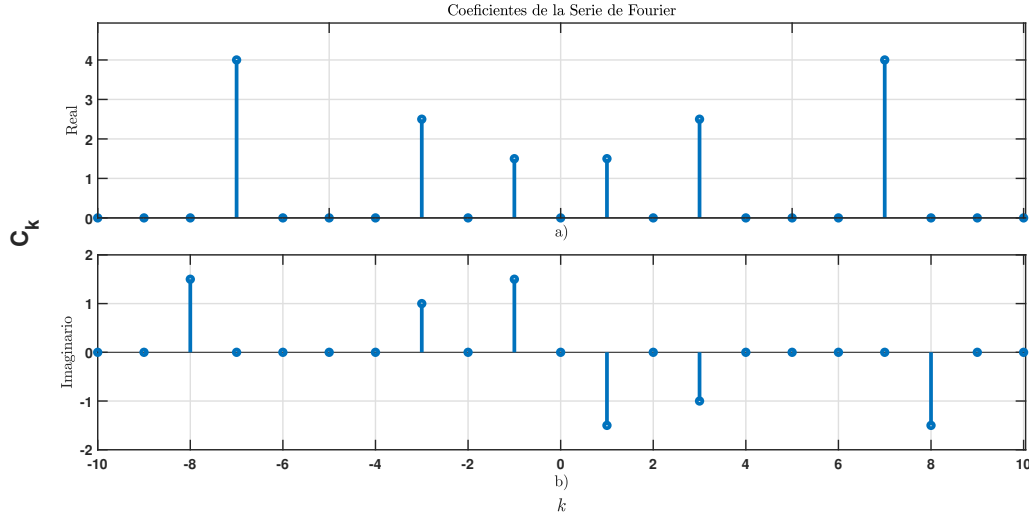


Figura 1: Coeficientes: a) Para  $y_1$  b) Para  $y_2$

En la figura 2 a) se puede observar el espectro de potencia de la señal  $y_1(t)$  el cual corresponde con los  $|C_k|^2$ , de igual forma en la figura 2 b) se presenta el espectro de potencia de la señal  $y_2(t)$ . Por construcción de puede apreciar que las frecuencia en las cuales está el espectro no es cero corresponden con las frecuencia de las señales.

Para la segunda parte se trabaja con la siguiente señal:

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9\sin(t_i)} + \alpha(3 * R_i - 1); \quad 0 \leq R_i \leq 1 \quad (11)$$

En la que  $R_i$  es un número aleatorio y  $\alpha$  un parámetro de control.

En la figura 3 se presenta la señal ruidosa, su transformada de Fourier y su espectro de potencia. Nota: se utilizó el valor arbitrario de  $\alpha = 1$ .

Para dos ciclos, se calcularon las funciones de correlación y transformada de Fourier. Se mantuvo el valor de  $\alpha = 1$ . los resultados se presentan en la figura 4.

La comparación de los espectros de potencia se muestra en la figura 5, aquí se observa que para distorsiones pequeñas, no se presenta una gran variación; sin embargo, como se ve en el siguiente punto, para valores de  $\alpha$  muy grandes, la señal pierde la gran mayoría de su información.

Mediante inspección se determina el valor de  $\alpha$  con el que se pierde toda la información a la entrada; cuando se observa sólo la magnitud de las series de Fourier, con  $\alpha > 2$  se obtiene el doble

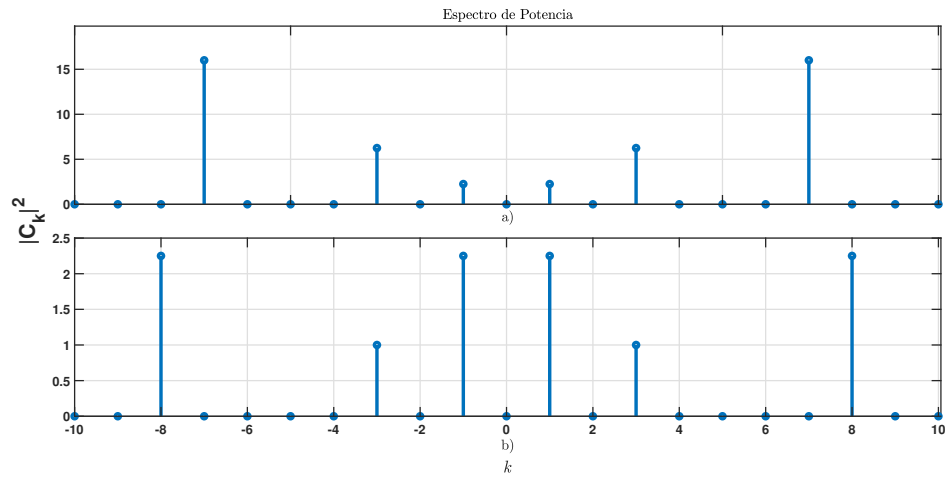


Figura 2: Espectro de potencia: a) Para  $y_1$  b) Para  $y_2$

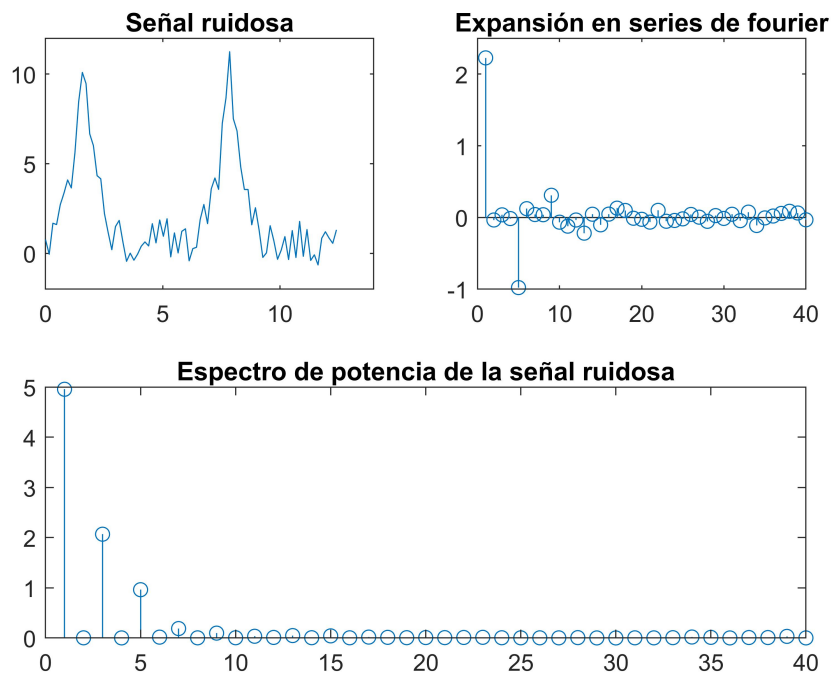


Figura 3: Señal, series de Fourier y espectro de potencia

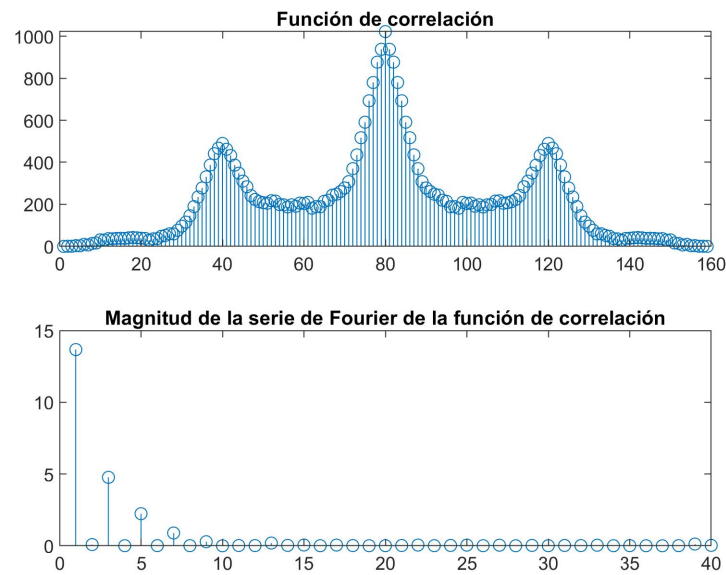


Figura 4: Función de correlación y expansión en series de Fourier

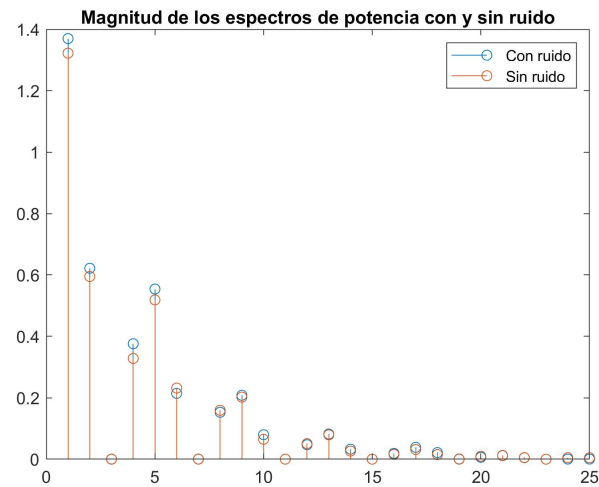


Figura 5: Espectros de potencia de las funciones de correlación con y sin ruido

del valor de continua. La THD no se puede evaluar porque no se parte de una señal sinusoidal; es decir, la transformada de Fourier puede no ser el mejor dominio en el que se pueda analizar este

caso.

Cuando se emplea la función de correlación en frecuencia, se puede recuperar la función con valores de  $\alpha < 3$ , para  $\alpha > 3$  se pierde la señal. Ver figura 6.

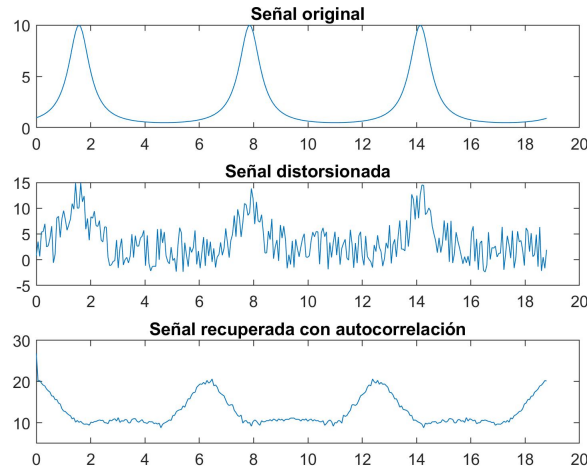


Figura 6: Señal original, distorsionada y recuperada con autocorrelación para  $\alpha = 3$ .

Para el caso de aplicación, en la figura 7. se presenta el espectro de potencia para el mismo rayo captado por 4 antenas diferentes, en términos generales estos poseen frecuencias similares; la magnitud de los coeficientes de la serie tienen un patrón; aunque, en algunas de las frecuencias, no son proporcionales debido principalmente al ruido y a la precisión de las medidas.

Otra forma de visualizar el espectro de la medida de campo eléctrico causado por las descargas atmosféricas, es el espectrograma presentado en la figura 8. En estos espectrogramas está la información de un rayo captado por 4 diferentes antenas, los espectrogramas están en función de las muestras de la medida contra la frecuencia normalizada del fenómeno. La paleta de colores relaciona la potencia/frecuencia por  $dB$ /por muestra. Podemos observar una similitud del espectro en la parte central de las muestras pero esta información es relativa ya que no se ha hecho un estudio del ruido presente en la señal medida o la precisión de la misma.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

El análisis mediante la transformada de Fourier se aplica a cualquier tipo de señal, pero para cuantificar la distorsión no se cuenta con herramientas claras, ya que la THD (distorsión armónica total) se calcula con respecto a una señal sinusoidal pura; que, en el caso mencionado, no corresponde.

Al utilizar análisis mediante espectrograma para los rayos (8), no se identifica claramente un patrón; esto sucede porque ante cualquier pequeña distorsión, el espectrograma presenta mucha variación en frecuencias altas; sin embargo, las bajas frecuencias no se ven afectadas de esa manera.

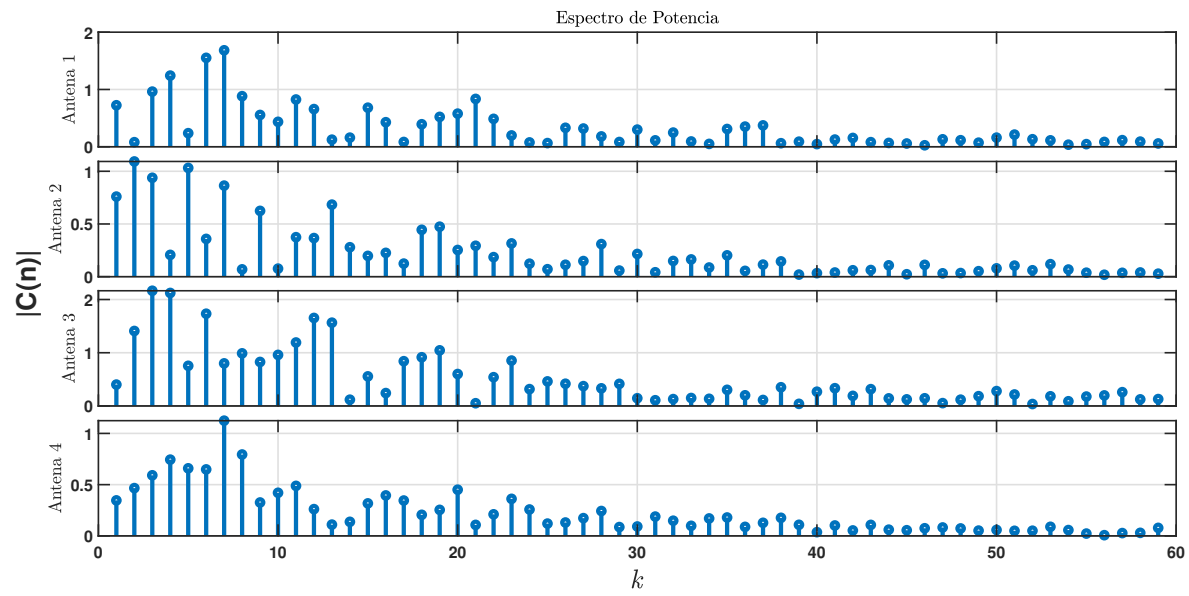


Figura 7: Espectro de potencia

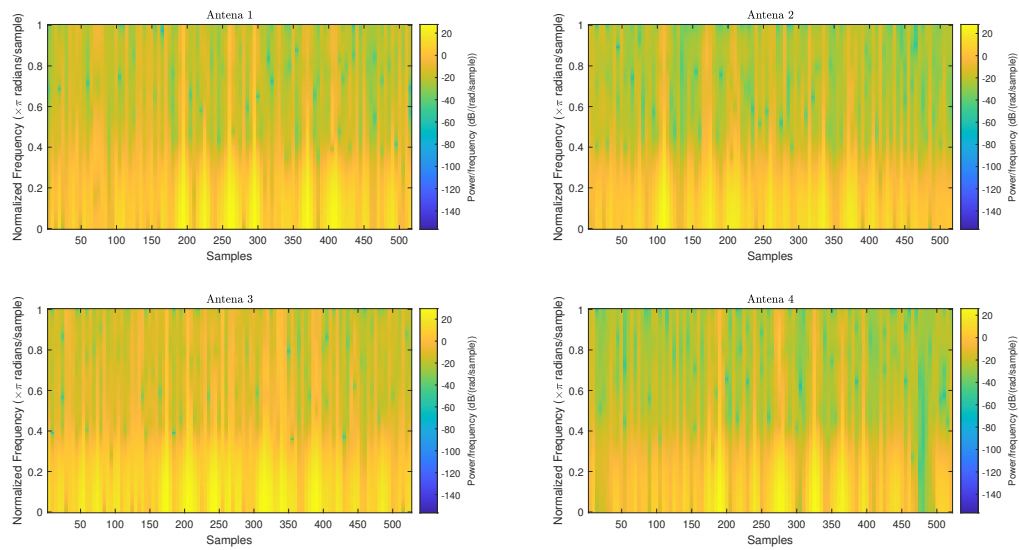


Figura 8: Espectrograma



Se recomienda el filtrado de la señal, utilizando las señales proporcionadas por todas las estaciones, mediante inteligencia artificial y aproximaciones a modelos matemáticos de descargas atmosféricas que permitan ver un espectro con una tendencia clara; así pueden los rayos ser comparados para diferentes zonas del país. Esto mencionado anteriormente puede interpretarse también como una parametrización de los rayos.

## 5. Referencias

### Referencias