Ejercicio 5 - clase 3:

a) y b) $\sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forman una base si son linealmente independientes

Dado que $\sigma_0 \cdot \sigma_1 = tr(\sigma_0^T \cdot \sigma_1) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\sigma_0 \cdot \sigma_2 = tr\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\sigma_0 \cdot \sigma_3 = tr(\sigma_0^T \cdot \sigma_3) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

por lo tanto, son ortogonales y también base una base para ese espacio vectorial

c) Si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras, por ejemplo:

Sea $V = M_{2x2}(\mathbb{R})$ y $W = \{A \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : A \text{ es simetrica}\}$

$W \subseteq V$, por inspección W es cerrada y demás propiedades para la suma y también cumple las propiedades para el producto por un escalar

6) Dado $\{\pi_i\} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ y $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, f(x) g(x) \sqrt{1-x^2}$

Ortogonalización por Gram-schmidt:

$\Rightarrow \quad |p_0\rangle = |\pi_0\rangle = 1 \quad ; \quad |p_1\rangle = \pi_1 - \frac{\langle \pi_1|p_0\rangle}{\langle p_0|p_0\rangle}|p_0\rangle \quad ; \quad \pi_1 = t$

$\langle \pi_1|p_0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle p_0|p_0\rangle = \pi/2 \quad \Rightarrow |p_1\rangle = t$

$\Rightarrow \quad |p_2\rangle = \pi_2 - \frac{\langle \pi_2|p_1\rangle}{\langle p_1|p_1\rangle}|p_1\rangle - \frac{\langle \pi_2|p_0\rangle}{\langle p_0|p_0\rangle}|p_0\rangle \quad ; \quad \pi_2 = t^2$

$\langle \pi_2|p_1\rangle = 0 \quad ; \quad \langle p_1|p_1\rangle = \frac{\pi}{8} = \langle \pi_2|p_0\rangle \quad \Rightarrow |p_2\rangle = t^2 - 1/4$

$|p_3\rangle = \pi_3 - \frac{\langle \pi_3|p_2\rangle}{\langle p_2|p_2\rangle}|p_2\rangle - \frac{\langle \pi_3|p_1\rangle}{\langle p_1|p_1\rangle}|p_1\rangle - \frac{\langle \pi_3|p_0\rangle}{\langle p_0|p_0\rangle}|p_0\rangle \quad ; \quad \pi_3 = t^3$

$\Rightarrow \langle \pi_3|p_2\rangle = 0 \quad ; \quad \langle p_2|p_2\rangle = \frac{\pi}{32} \quad ; \quad \langle \pi_3|p_1\rangle = \frac{\pi}{16} \quad ; \quad \langle \pi_3|p_0\rangle = 0$

$\Rightarrow \quad |p_3\rangle = t^3 - \frac{1}{2}t$

$|p_4\rangle = \pi_4 - \frac{\langle \pi_4|p_3\rangle}{\langle p_3|p_3\rangle}|p_3\rangle - \frac{\langle \pi_4|p_2\rangle}{\langle p_2|p_2\rangle}|p_2\rangle - \frac{\langle \pi_4|p_1\rangle}{\langle p_1|p_1\rangle}|p_1\rangle - \frac{\langle \pi_4|p_0\rangle}{\langle p_0|p_0\rangle}|p_0\rangle$

$\langle \pi_4|p_3\rangle = 0 \quad ; \quad \langle p_3|p_3\rangle = \frac{\pi}{128} \quad ; \quad \langle \pi_4|p_2\rangle = \frac{3\pi}{128} \quad , \quad \langle \pi_4|p_1\rangle = 0$

$\langle \pi_4|p_0\rangle = \pi/16$

polinomios de chebychev de segunda especie $\rightarrow$

$|p_0\rangle = 1$

$|p_1\rangle = t$

$|p_2\rangle = t^2 - 1/4$

$|p_3\rangle = t^3 - \frac{1}{2}t$

$|p_4\rangle = t^4 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{16}$

$\vdots \qquad \vdots$