

# Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Juan Diego Duarte, Wilmar Alejandro Sotelo \*

*Universidad Industrial de Santander*

*Calle 9 con cra 27*

Versión 1 - 30 de Noviembre del 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>5</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>7</b>

## Resumen

En este documento se presenta la formulación matemática para el modelado de la presión en objetos autogravitantes considerando variación en parámetros propios de dichos modelos. Se muestran las ecuaciones utilizadas para los modelos anisótropos tanto newtoniano como relativista y una propuesta de anisotropía para su respectiva simplificación.

Para la integración numérica, se presenta el camino para adimensionalizar los parámetros del sistema. En el caso de estudio se considera un perfil de densidad particular. Luego se presentan las gráficas de los resultados obtenidos y las conclusiones del trabajo.

## 1. Introducción

El modelado de objetos autogravitantes se realiza mediante ecuaciones diferenciales. Estas pueden ser básicas o muy complejas, para determinar la presión interna y masa de los objetos se hacen consideraciones como lo son el perfil de densidad y la variación de los parámetros  $\mu$ ,  $\kappa$  y  $\eta$ , que son los que contienen la física de cómo es el cuerpo estelar. Los estudios realizados por Pascal muestran un modo de calcular la presión interna considerando que las presiones tangencial y radial son iguales, diferente a lo propuesto por la teoría relativista, la cual considera un cambio importante. Las diferencias entre los modelados hacen que la presión interna varíe y que estos objetos sean mejor entendidos o no.

---

\*e-mail: Juandduartec@gmail.com, wilmar2218418@correo.uis.edu.co

## 2. Metodología

Un objeto autogravitante es un cuerpo material donde la gravitación es la fuerza que lo cohesiona, existen modelos simplificados para estos objetos como los que se usan para planetas, estrellas o cualquier cuerpo que se forme con el campo gravitacional generado por su propia masa.

Un posible modelado para este tipo objetos (modelados esféricamente) se construye a partir de la suposición que esos cuerpos están formados por un fluido donde la gravedad es la única fuerza que los mantiene en equilibrio. En el estado del arte se encuentran las ecuaciones de estructura, dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

- Una ecuación relaciona el gradiente de presión radial con el resto de las variables de estado y se conoce como la ecuación de equilibrio hidrostático.

$$\frac{dP(r)}{dr} = \mathcal{F}(m(r), \rho(r), P(r), P_{\perp}(r), r) \quad (1)$$

donde  $P(r)$  es presión radial;  $P_{\perp}(r)$  representan a las presiones tangenciales;  $\rho(r)$ , la de densidad de masa y  $m(r)$  la masa contenida en una esfera de radio  $r$ .

- La segunda ecuación relaciona el gradiente de masa con su densidad.

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2)$$

Para completar el sistema de ecuaciones y hallar una solución al modelado necesitamos dos ecuaciones adicionales que serán las ecuaciones de estado para la presión radial y tangencial:

$$P(r) = \mathcal{W}(\rho(r), r) \quad y \quad P_{\perp}(r) = \mathcal{V}(\rho(r), P(r), r) \quad (3)$$

respectivamente.

Es decir, estas dos ecuaciones relacionan las variables de estado del sistema y describen las propiedades físicas de los fluidos. En general, siempre pensamos en fluidos pascalianos en los cuales todas las presiones son iguales (caso isotrópico):  $P(r) = P_{\perp}(r)$ . En el caso más general podemos imaginar fluidos que permita una descripción más rica donde  $P(r) \neq P_{\perp}(r)$ .

### ▪ La integración y condiciones de aceptabilidad física

La integración de las ecuaciones se realiza numéricamente, considerando condiciones iniciales en el centro como  $P(0) = P_{\perp}(0) = P_0$  y  $\rho(0) = \rho_0$ , y se integra hasta que la presión radial sea cero ( $P(R) = 0$ ). Para el valor de  $r = R$  donde se anula la presión se considera el borde la distribución y por lo tanto se define la masa  $m(R) = M$ . Así los modelos quedan parametrizados por las presiones, densidades centrales y masas totales  $M$  y los radios  $R$  de las distribuciones.

Adicionalmente, para que los modelos sean consistentes, se debe cumplir que  $P(r) > 0$  y  $\rho(r) > 0$  y sus gradientes:

$$\frac{dP(r)}{dr} \leq 0 \quad y \quad \frac{d\rho(r)}{dr} \leq 0 \quad (4)$$

### ■ Newton y Einstein

A continuación se presentan los modelos para las intensidades de campo de gravitatorio y considerando los casos newtonianos y relativistas.

#### - Modelando objetos autogravitantes newtonianos anisótropos (MNA).

Las ecuaciones diferenciales que describen el equilibrio hidrostático para esferas autogravitantes newtonianas son:

$$\begin{aligned}\frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} + 2\frac{P(r) - P_{\perp}(r)}{r} \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r)\end{aligned}\quad (5)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal. Las ecuaciones (5), conjuntamente con las ecuaciones de estado (3) que proveen de las características físicas del fluido cierran el sistema de ecuaciones de equilibrio para este tipo de objetos.

#### - Modelando objetos autogravitantes relativistas anisótropos (MRA).

Para el caso de fluidos relativistas, anisótropos, las ecuaciones diferenciales para el equilibrio hidrostático serán:

$$\begin{aligned}\frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right) \left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} + 2\frac{P(r) - P_{\perp}(r)}{r} \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r)\end{aligned}\quad (6)$$

de igual manera que el caso anterior con las ecuaciones (3) que describen las características físicas del fluido. Las definiciones de masa son las mismas en ambos sistemas. Es de notar que la incorporación de la anisotropía es equivalente para ambas ecuaciones de equilibrio.

### ■ Propuesta de Anisotropía

Esta estrategia permite integrar el sistema (1), (2) y (3) imponiendo una expresión para la diferencia de presiones radiales y tangenciales,  $\Delta = P(r) - P_{\perp}(r)$ , de esta manera se propone dar una funcionalidad a  $\Delta$  tal que:

$$\Delta = C \frac{m(r)\rho(r)}{r} \quad (7)$$

Donde  $C$  representa la intensidad de la anisotropía y, obviamente  $C = 0$  recupera el caso isótropo de los fluidos pascalianos. Con esta suposición de anisotropía, la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana (5) se transforma en:

$$\frac{dP(r)}{dr} = h \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \quad (8)$$

Del mismo modo, para el caso relativista se propone:

$$\Delta = \frac{C}{r} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right) \left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \quad (9)$$

Con lo cual, la ecuación (6) se convierte en:

$$\frac{dP(r)}{dr} = h \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)}\right) \left(1 - 2\frac{m(r)}{rc}\right)^{-1} \quad (10)$$

con  $h = 2C - 1$  es una constante que mide la diferencia de presiones y, por consiguiente la anisotropía. En ambos casos las ecuaciones (3) completan cada sistema, respectivamente.

### ■ Adimensionalizando los sistemas de ecuaciones diferenciales

Para integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales se impone adimensionalizarlas. Para ello realizamos los siguientes cambios de variables con los parámetros característicos del sistema:

$$\frac{P}{P_0} \longrightarrow \tilde{P}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \longrightarrow \tilde{\rho}, \quad \frac{m}{M} \longrightarrow \tilde{m}, \quad \frac{r}{R} \longrightarrow \tilde{r} \quad (11)$$

Donde  $M$  y  $R$ , como la masa total y el radio de la configuración material, respectivamente, y  $P_0$  y  $\rho_0$  como la presión y la densidad central, respectivamente. Entonces al adimensionalizar las ecuaciones tenemos:

- $\mu = \frac{M}{R} \frac{G}{c^2}$  representa la relación masa/radio de la configuración
- $\kappa = \frac{P_0}{\rho_0 c^2}$  representa la relación presión central/densidad central y, finalmente
- $\eta = \frac{\rho_0}{\rho_d} \longrightarrow \rho_d = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$  la relación entre la densidad central y la densidad promedio calculada a partir de los valores del radio y la masa total de la distribución.

Los valores de estos parámetros estará la física. Note que cada uno de esos parámetros interviene en la corrección relativista a la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniana. Esto es:

$$\frac{P(r)}{\rho(r)c^2} \longrightarrow \kappa \frac{\tilde{P}(r)}{\tilde{\rho}(r)}, \quad \frac{Gm(r)}{rc^2} \longrightarrow \mu \frac{\tilde{m}(r)}{\tilde{r}}, \quad y \quad \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2} \longrightarrow 3\eta\kappa \frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}(r)} \quad (12)$$

Como son correcciones y están comparadas con la unidad, los valores de  $\mu$ ,  $\kappa$  y  $\eta$  serán pequeños.

### ■ Caso de Estudio

Con esta propuesta de anisotropía y con la adimensionalización se propone una ecuación para integrar los sistemas newtoniano y relativista. Para simplificar la integración se tiene un perfil de densidades del tipo Gokhroo-Mehra<sup>1</sup>

$$\rho(r) = \rho_0(1 - B\tilde{r}^2) \quad (13)$$

Donde, la constante B es:

$$B = \frac{5}{3} \left( 1 - \frac{3}{\eta} \right) \quad (14)$$

### 3. Resultados

En esta sección se presentan los resultados de integración de las ecuaciones diferenciales para diferentes valores de los parámetros  $\mu$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$  y finalmente observar la diferencia cuando se presenta isotropía y anisotropía para ambos modelos.

Valores que pueden tomar los parámetros:

- $0 \leq \mu \leq 0,5$  de acuerdo con [1].
- $0 \leq \kappa \leq 0,5$  de acuerdo con [2]
- $0 \leq \eta \leq 1$
- $0 \leq C \leq 0,5$

En la figura 1 se visualizan los resultados de integración para el modelo newtoniano anisótropo (*MNA*), modelo newtoniano isótropo (*MNI*), modelo relativista anisótropo (*MRA*) y modelo relativista isótropo (*MRI*) con los parámetros  $\mu = 0,1$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $\eta = 0,5$ ,  $C = 1/10$  en el caso de anisotropía, los resultados para la masa y radio se presenta en la tabla 1 donde  $R$  y  $M$  representan el radio y masa total, respectivamente.

Modelo	$R$	$M$
<i>MNA</i>	0,9250	0,6963
<i>MNI</i>	0,8750	0,5391
<i>MRA</i>	0,8700	0,5391
<i>MRI</i>	0,8500	0,4721

Cuadro 1: Resultados para masa y radio total en cada modelo

Para entender el comportamiento de estos modelos se cambian sólo los valores de  $\mu = 0,3$ ,  $\mu = 0,5$ , de esa manera como se puede observar en la figura (3a) y (3b) se obtiene una menor masa para un determinado radio cada vez que variamos el parámetro  $\mu$ , adicionalmente se empieza a acercar los modelos *MRA* y *MRI* para su presión radial  $P(r)$ .

<sup>1</sup>Gokhroo, M. K., y A. L. Mehra. "Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity". General relativity and gravitation 26, no. 1 (1994): 75-84.

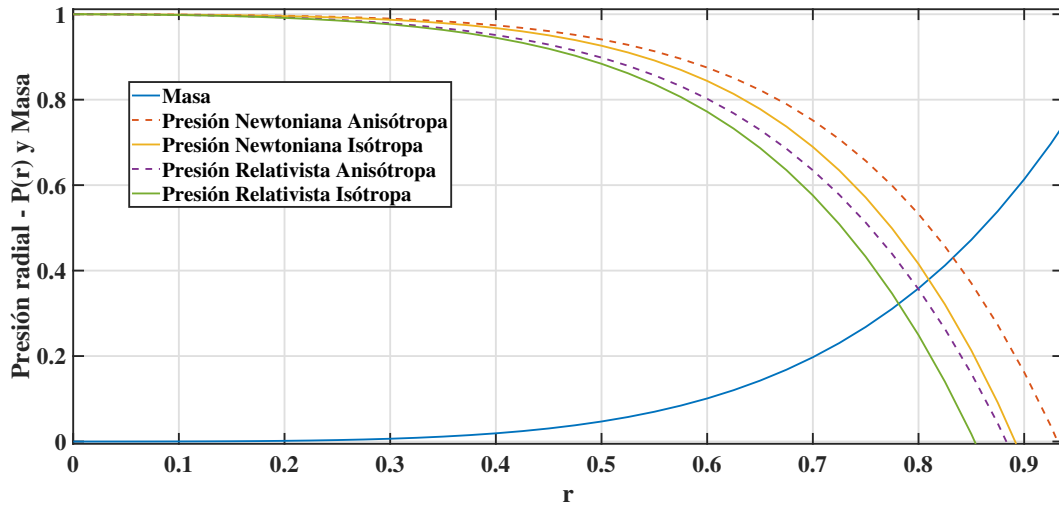


Figura 1: Presiones radiales

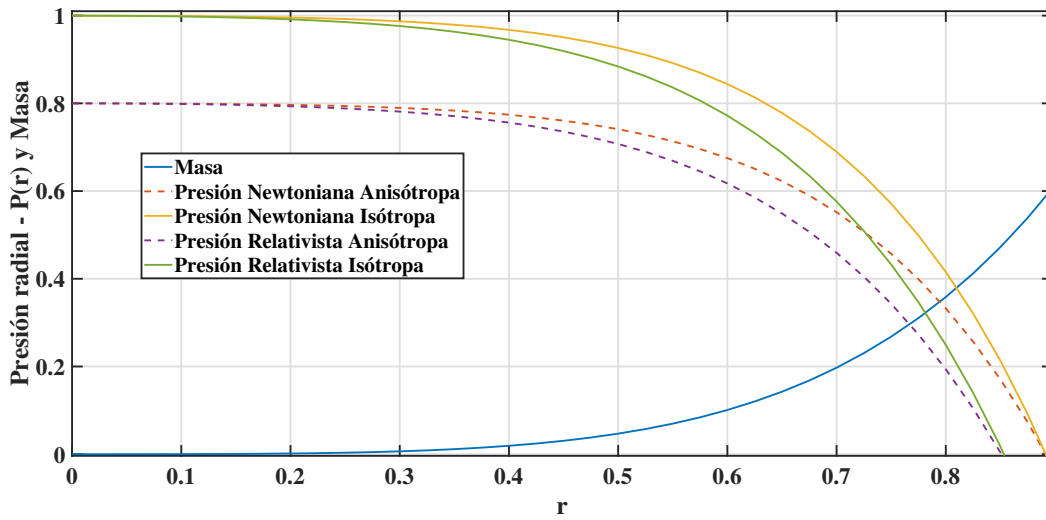
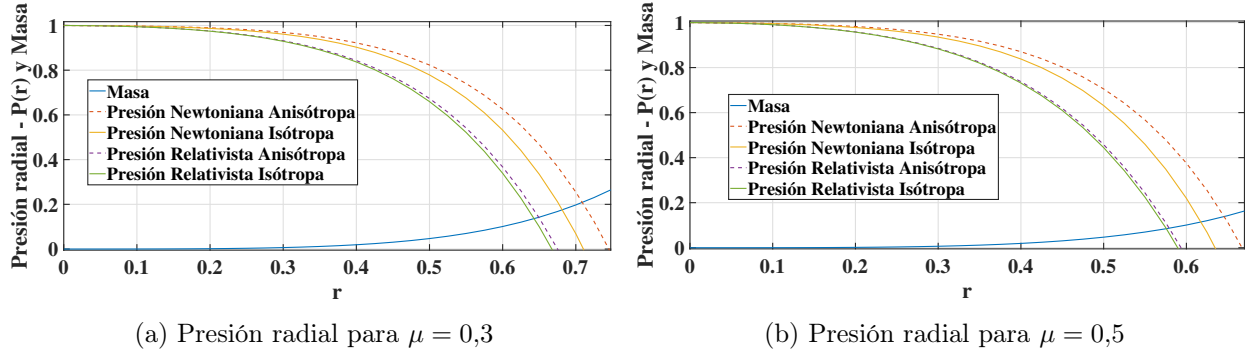
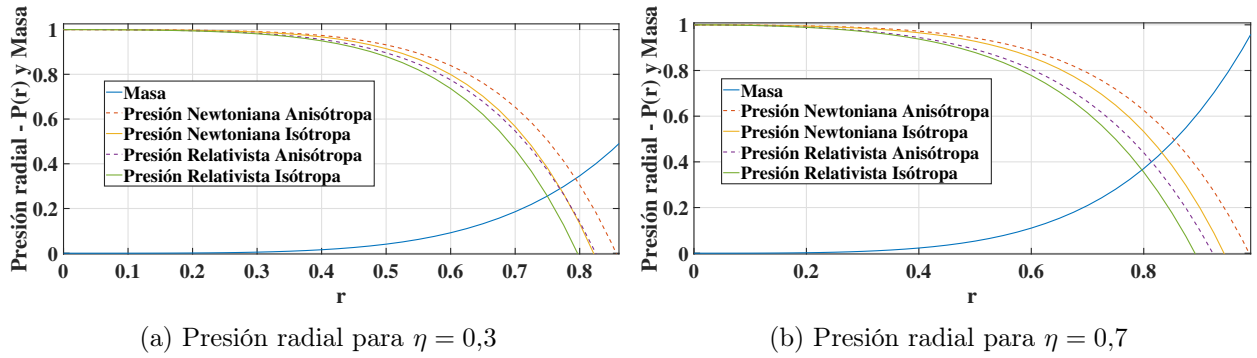


Figura 2: Presiones radiales

A continuación, se muestran los resultados para la variación de  $\eta = 0,3$  y  $\eta = 0,7$  manteniendo los parametros  $\mu = 0,1$  y  $\kappa = 0,1$  constantes. En la figura (4a) y (4b) se puede observar un contraste para valores de  $\eta \leq 0,5$ , lo cual corresponde con objetos menos masivos que para una relación de  $\eta > 0,5$  con la cual se obtiene una mayor masa total.

Figura 3: Presión radial con  $\kappa$  y  $\eta$  constanteFigura 4: Presión radial con  $\kappa$  y  $\mu$  constante

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

En la figura 2 se presenta el efecto de la anisotropía en los modelos estelares, aquí se evidencia que para un mismo cuerpo (con la misma masa y radio) la presión interna calculada considerando el caso anisotrópico es menor que para el caso isotrópico; se reduce un 20 %, específicamente, para el caso de estudio presentado.

Debido al uso del método Runge-Kutta, la condición inicial de la masa no debe ser un valor estrictamente de cero (muy cercano a 0) para evitar problemas de convergencia.

El aumento de  $\mu$  (relación masa/radio) implica que para el mismo radio, se aumenta la presión interna.

## Referencias

- [1] Br Adriana Carolina Vásquez Ramirez. *Índice de compresibilidad para esferas anisótropas en Relatividad General*. PhD thesis, Universidad de Los Andes Mérida, Venezuela, 2015.

- [2] Daniel Suárez-Urango, J Ospino, Héctor Hernández, and Luis A Núñez. Acceptability conditions and relativistic anisotropic generalized polytropes. *arXiv preprint arXiv:2104.08923*, 2021.