Matemáticas

Wilmer Emiro Castrillón Calderón

7 de agosto de 2022

1. MCD y MCM

MCD (Máximo común divisor)

El máximo común divisor de un conjunto de dos o mas números enteros es el máximo número entero el cual divide a todos los números del conjunto sin dejar residuo, por ejemplo el máximo común divisor de 35 y 15 es 5 porque es el máximo entero el cual los puede dividir a ambos. Como abreviatura se utiliza MCD o en ingles GCD (greatest common divisor).

El calculo del MCD de dos números se puede hacer de manera eficiente utilizando el algoritmo de Euclides el cual se puede realizar en $O(log(n))$ pasos, antes de explicarlo es necesario tener en cuenta las dos siguientes propiedades de la divisibilidad ($x|y$ significa que x divide a y con residuo 0).

$$x|y \rightarrow x|\alpha y \quad \forall \alpha \in Z \tag{1}$$

$$x|y \wedge x|y \pm z \rightarrow x|z \tag{2}$$

El algoritmo consiste en lo siguiente: dado dos números a y b se realiza la división entre ambos, obteniendo un cociente q y un residuo r, entonces $a = b * q_1 + r_1$ con $r_1 < b$, teniendo en cuenta que el MCD divide a a y b entonces también divide $b * q_1$ (propiedad **??**), y también divide a r_1 (propiedad **??**), el proceso se reduce a encontrar el MCD entre b y r_1 entonces se repite el proceso, $r_1 = b * q_2 + r_2$ con $r_2 < r_1$, y así sucesivamente hasta llegar a $r_n = 0$, lo cual indica que r_{n-1} divide a r_{n-1}, r_{n-2}, ..., b y a, entonces r_{n-1} es el MCD.

$$\begin{aligned}
a &= b * q_1 + r_1 & r_1 &< b \\
b &= r_1 * q_2 + r_2 & r_2 &< r_1 \\
r_1 &= r_2 * q_3 + r_3 & r_3 &< r_2 \\
&... \\
r_{n-1} &= r_n * q_{n+1} + 0 & 0 &< r_n
\end{aligned}$$

Por ejemplo, con $a = 35$ y $b = 15$, $a = b*2+5$, $r_1 = 5$, en el siguiente paso $b = 5*3+0$, $r_2 = 0$, como se ha llegado a un residuo 0, el algoritmo finaliza y la respuesta es el ultimo residuo diferente de 0, entonces $MCD(35, 15) = 5$.

MCM (Mínimo común múltiplo)

El mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros es el numero entero mas pequeño el cual es múltiplo de todos los números del conjunto, por ejemplo el mínimo común múltiplo de 35 y 15 es 105, pues es el menor entero tal que $35|105$ y $15|105$. Como abreviatura se usa MCM o en ingles LCM (lowest common multiple).

Para calcular el MCM también se puede utilizar el algoritmo de Euclides, pues existe una relación entre el MCD y el MCM. entonces $MCM(a * b) = (a * b)/MCD(a, b)$, esta formula es equivalente a $a * (b/MCD(a, b))$ como $MCD(a, b)|b$ se puede observar que el resultado sera un entero múltiplo de a, de igual es equivalente a $b*(a/MCD(a, b))$ y el resultado es un entero múltiplo de b, entonces $(a*b)/MCD(a, b)$ es múltiplo común de a y b.

Por ejemplo, con $a = 35$ y $b = 15$ el $MCM(a, b) = 35 * 15/5$ (en el ejemplo anterior se calculo el MCD de a y b), entonces el resultado es 105.

Implementacion

La implementanción del MCD consiste en simplemente aplicar los pasos descritos para el algoritmo de Euclides. La implementanción del MCM consiste en aplicar la formula, se recomienda realizar primero la división para evitar un posible overflow al trabajar con números grandes.

```
int MCD(int a, int b) {
  if(b) return MCD(b, a % b);
  return a;
}
```

MCD

```
int MCM(int a, int b) {
  return a*(b/MCD(b, a % b));
}
```

MCM