



Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Ciências Aplicadas

Wilmer Dario Urango Narvaez

**UM MODELO LINEAR DE DEMANDA  
COMPORTAMENTAL PARA MAXIMIZAR A RECEITA  
DO PROBLEMA DE TRANSPORTE FERROVIÁRIO DE  
PASSAGEIROS**

**A LINEAR BEHAVIORAL DEMAND MODEL TO  
MAXIMIZE REVENUE FROM THE RAIL PASSENGER  
TRANSPORTATION PROBLEM**

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências Aplicadas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestrado em Engenharia de Produção e de Manufatura. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Gestão de Processos.

**Orientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto**

**Co-orientador: Dr. Karim Perez**

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Wilmer Dario Urango Narvaez, e orientado pelo Prof. Diego Jacinto Fiorotto.

Limeira  
2024

## CAPÍTULO 1

---

### Revisão da literatura

---

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente.

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento precioso que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo.

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas.

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturem de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o deslocamento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?" Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo [1].

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, com a chegada de novos sistemas de informação, regras de controle e outras condições, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management [3].

Según [5], a gestão de receitas (RM) abrange o conjunto de estratégias e táticas que as empresas utilizam para gerenciar de forma científica a demanda por seus produtos e serviços. Além disso, pode-se dizer que, Seu objetivo é vender cada unidade de ações para o cliente certo, no momento e pelo preço corretos [2].

A princípio, os problemas de gestão de RM parecem ser simples; no entanto, nada poderia estar mais longe da realidade. Esses problemas têm uma complexidade esmagadora, e este documento não seria suficiente para detalhar cada um deles, apenas para mencionar alguns, temos modelagem, análise teórica, implementação, previsão, vendas excessivas, controle de estoque de assentos, preços, etc. Então, como sempre acontece, trabalha-se com simplificações de fatores muito complexos e com aproximações em outros casos [4]

## CAPÍTULO 2

---

### Modelagem matemática

---

#### 2.1 Modelagem matemática

Dentro da pesquisa, foram realizadas duas modelagens distintas, ambas, diferentemente da literatura clássica, foram elaboradas com base nas estações de origem e destino, e não nos legs do percurso.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura [2.1](#), onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade máxima de assentos.
- Há apenas um tipo de classe comercial.
- Existe apenas um período no horizonte de reserva.
- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos.
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

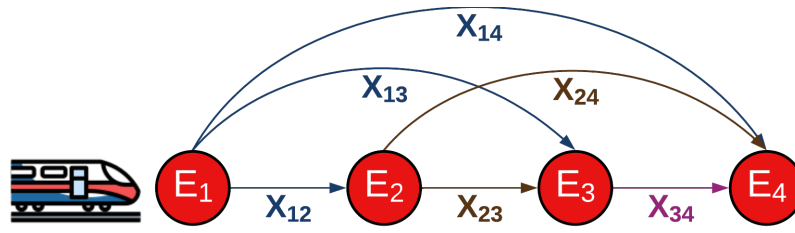


Figura 2.1: Versão gráfica simples

## 2.2 Primeira modelagem matemática

Agora, para a primeira proposta de modelagem, temos o seguinte

$x_{ij}$ : Quantidade de assentos que serão seguradas no trecho com origem em  $i$  e destino em  $j$ , onde  $j > i$  (variável de decisão).

$A_i$ : Quantidade de assentos vagos na estação  $i$ .

$P_{ij}$ : Preço da passagem no trajeto com origem em  $i$  e destino em  $j$ .

$Q$ : Capacidade física do trem.

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto  $i, j$ , matematicamente seria:

$$FO : \max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$$

s.a.

$$\text{Estação 1: } x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1 \quad \text{onde } A_1 = Q$$

$$\text{Estação 2: } x_{23} + x_{24} \leq A_2 \quad \text{onde } A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$$

$$\text{Estação 3: } x_{34} \leq A_3 \quad \text{onde } A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações, E1, E2 e E3, já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação, E4, é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 2.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja,  $A_1 = 100$ , e que a soma das variáveis seria  $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$ . Portanto, teríamos  $30 \leq 100$ , ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse

		DESTINOS			Disponibilidade (A)	Não Atribuídos
		E2	E3	E4		
ORIGENS	E1	X <sub>12</sub> 10	X <sub>13</sub> 5	X <sub>14</sub> 15	100	70
	E2	...	X <sub>23</sub> 40	X <sub>24</sub> 20	70 + 10	20
	E3	...	...	X <sub>34</sub> 60	20 + 5 + 40	5

Figura 2.2: Solução factível para o problema simplificado

sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos  $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$ . Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso  $x_{12} = 10$ . Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja,  $60 \leq 80$ . Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3,  $x_{13} = 5$  e  $x_{23} = 40$ , assim teríamos  $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$ , e no final teríamos  $60 \leq 65$ .

Além da lógica anterior, assume-se que há um trem, com vários vagões ou cabines, que viajará de uma estação  $E_1$  até uma estação  $E_n$  (onde  $n$  é a última estação onde o trem chegará). Esse trem terá um itinerário que conterá o nome do trem, a estação de origem, a estação de destino, a data e hora de partida e de chegada. Além disso, haverá uma lista de preços (para o mesmo tipo de assento) a ser disponibilizada para venda. Cada um dos preços da lista será chamado de classe de controle ou control class. Os bilhetes serão disponibilizados para venda antes da partida do trem, e o tempo entre a disponibilização e a referida partida será chamado de horizonte de reserva. Esse horizonte será dividido em vários períodos, que podem ter diferentes temporalidades. Por exemplo, pode haver períodos em dias, semanas, meses, etc., e combinações entre eles. Cada um desses períodos será chamado de check point.

Cada relação possível entre uma estação e outra será denominada origem-destino ou trecho. Será dito que uma origem-destino é adjacente se, e somente se, não houver estações intermediárias entre elas; caso contrário, serão não adjacentes. Por exemplo, na figura 2.1, os trechos adjacentes seriam: E1-E2, E2-E3, E3-E4, e os trechos não adjacentes seriam: E1-E3, E1-E4 e E2-E4. Além

disso, observe que os trechos não adjacentes podem conter outros trechos, tanto adjacentes quanto não adjacentes. Por exemplo, o trecho E1-E4 da figura 2.1 contém os trechos adjacentes E1-E2, E2-E3, e contém os trechos não adjacentes E1-E3 e E2-E4.

Vejam agora o modelo proposto completo:

Definição	Descrição	Domínio
<b>Conjuntos</b>		
$O$	Conjunto de Estações de origem	
$D$	Conjunto de Estações de Destino	
$OD$	Conjunto de Trechos com itinerario	
$NAD$	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerario	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho $(o,d)$ NÃO Adjacente	
$V$	Conjunto de Cabines do trem	
$T$	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
$K_v$	É o conjunto de classes de controle para cada vagão $v$ . Por exemplo, suponha que há duas cabines $z$ e $p$ , e cada cabine contém três classes de controle $c_1, c_2, c_3$ , então a representação seria $K_z : \{c_1, c_2, c_3\}$ e $K_p : \{c_1, c_2, c_3\}$ . Além disso, considere que os elementos de cada $K_v$ são ordenados, onde sempre se cumpre que a classe de menor índice é a classe mais costosa, ou seja $c_1 > c_2 > c_3$ .	
<b>Parâmetros</b>		
$n$	Quantidade de Estações	
$Q$	Capacidade física do trem	
$P_{ijk}$	Preços das passagem no Trecho $(i, j)$ , Cabine $v$ e Classe de Control $k$	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
$d_{ijkt}$	Demanda no Trecho $(i, j)$ , Cabine $v$ e Classe de Control $k$	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
<b>Variáveis de decisão</b>		
$X_{ijvkt}$	Quantidade de passagem atribuídos no trecho $(i, j)$ , cabine $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$Y_{ijvkt}$	Quantidade de passagem autorizados no trecho $(i, j)$ , cabine $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$BNA_{ijvkt}$	É uma variavel binaria que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario, aplica-se apenas a trechos que não são adjacentes	$(i, j) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
<b>Variável auxiliar</b>		
$A_i$	Armazena a quantidade de assentos vazios disponíveis para venda em cada estação de origem durante todo o horizonte de reserva. Cabe esclarecer que esta não é uma variável de decisão, pois esta variável apenas armazena um cálculo com base na capacidade física do trem e nas variáveis de decisão de atribuições	$i \in O$

Tabela 2.1: Notação matemática



$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (2.1)$$

s.a.

$$A_i = A_{i-1} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O \quad (2.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijvkt} \leq A_i, \quad \forall i \in O / i < j, i < n \quad (2.3)$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\|, t \in T \quad (2.4)$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.5)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O \quad (2.6)$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (2.7)$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\|, t \in T \quad (2.8)$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{o,d,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.9)$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{i,j,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, (i,j) \in BRI_{(o,d)}, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.10)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0, \quad \forall j \in D, k \in K_v, t \in T \quad (2.11)$$

$$A_0 = Q \quad (2.12)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.13)$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.14)$$

$$A_j \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.15)$$

$$BNA_{ijvkt} \in \{0, 1\} \quad (2.16)$$

Na equação 2.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos atribuídos a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada vagão, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe. Observe que queremos maximizar os ingressos em função dos assentos que estão atribuídos, que é o mais próximo que se tem da realidade em função da demanda conhecida.

A restrição 2.2 é utilizada para calcular a disponibilidade de assentos de cada estação de ori-

gem, em cada período de tempo para cada classe em cada vagão e é a generalização do exemplo simplificado para calcular a variável auxiliar  $A_i$ .

A restrição 2.3 garante que todas as autorizações habilitadas a partir de cada estação de origem para cada período e cada classe de cada vagão não excedam a disponibilidade da sua estação de origem correspondente (a disponibilidade é calculada na restrição 2.2).

A restrição 2.4 é uma restrição de hierarquia e garante que as quantidades de autorizações para as classes de maior preço sejam sempre maiores do que as quantidades de autorizações de menor preço em cada vagão, em cada trecho, e em cada período do horizonte de reserva.

A restrição 2.5 garante que a quantidade de atribuições não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe em cada vagão e em cada período no horizonte de reserva.

A restrição 2.6 garante que a soma de autorizações da classe mais costosa de cada vagão, de cada estação de origem, de todos os períodos, não ultrapasse a capacidade do trem, note que apenas estamos considerando a classe mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização é por isso que o valor de  $k$  é o mínimo das classes de cada vagão, pois a ordem do nome das classes é crescente mas o seu valor é decrescente. Para melhor compreensão, suponhamos uma solução para um problema de dois vagões  $V_1$  e  $V_2$ , 3 classes para  $V_1$  e 3 classes para  $V_2$ , 5 estações, 10 trechos, um período e uma capacidade física do trem de 700 cadeiras, conforme mostra a figura 2.3.

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

Figura 2.3: Solução factível para a variável de designação Autorização

Observe que os nomes das classes são números ordenados de forma crescente [1, 2, 3] também o valor da classe 1 é mais caro que o valor da classe 2 e este é maior que o valor da classe 3. Além disso, a soma que não ultrapassará a capacidade do trem é a soma das classes 1 de cada vagão de

cada estação de origem. Por exemplo, para a estação 3 seria  $43 + 85$  para  $V_1$  trecho 3-4 e 3-5, mais,  $105 + 88$  para  $V_2$  nos mesmos trechos, ou seja  $43 + 85 + 105 + 88 = 321 \leq 700$

Até ao momento foi referido que a variável  $Y$  tem um carácter cumulativo e são as restrições 2.7 e 2.8 que controlam este comportamento. A restrição 2.7 é um caso particular da restrição 2.8, aplicada apenas à última classe, ou classe mais barata atribuída para cada vagão ( $k = \max\{K_v\}$ ), e garante que a soma de todos os períodos, de cada estação de origem da classe mais barata da variável "autorização" é maior ou igual à variável de decisão "segurada" nas mesmas condições. Por outro lado, a restrição 2.8 garante que cada classe autorizada seja sempre maior ou igual à classe autorizada imediatamente menor, mais a quantidade segurada da mesma classe, isto para cada período, cada trecho e cada classe diferente da classe mais barata. Para melhor compreensão, assuma as mesmas suposições que foram feitas na restrição 2.6

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

(a) Autorização [Variável Y]

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	29	61	55	75	52	0
1-3	12	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	24	41	63	29	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	59	46	0
3-5	26	59	0	84	4	0
4-5	88	36	0	85	0	0

(b) Atribuição [Variável X]

Figura 2.4: Solução factível para as variáveis de decisão Autorização e Atribuição

Observe a linha correspondente ao trecho 1-2 do vagão  $V_2$  na tabela 2.4b, veja que a classe segurada mais barata foi a classe 2 com valor de 52, por este motivo na tabela 2.4a na mesma posição o valor deverá ser igual ou maior que 52, que neste caso é o mesmo valor; Agora observe para o mesmo trecho para o vagão  $V_1$  classe 3 em ambas as tabelas acontece a mesma coisa, esse comportamento é garantido pela restrição 2.7. Agora não vamos olhar para a classe mais barata, vamos olhar para qualquer outra, por exemplo, para o mesmo trecho veja a classe 1 do vagão  $V_1$  da tabela 2.4b com valor 29, se quiséssemos saber o valor correspondente na tabela 2.4a deveríamos adicionar a classe imediata menor (à direita) da classe 1 na tabela 2.4a, neste caso seria a classe 2 com valor 116, e some o valor da classe 1 da tabela 2.4b, que já sabemos que é 29, assim, o

valor buscado será maior ou igual a  $116 + 29 = 145$ , como visto em tabela 2.4a, lembre-se que nessa posição o valor mínimo será o calculado, mas poderá assumir um valor superior. Esta última situação é controlada pela restrição 2.8.

Suponha que você tem um trecho não adjacente  $E_1-E_3$ , e que esse trecho contém outros trechos  $E_1-E_2$  e  $E_2-E_3$ . Para esta situação, a classe mais barata ativada no trecho  $E_1-E_3$  deverá ser a classe mais barata ativada nos trechos  $E_1-E_2$  e  $E_2-E_3$ . Isso é feito com o objetivo de que as combinações dos preços dos bilhetes por trechos não sejam mais econômicos do que o preço de um bilhete direto. Para alcançar isso, é criada uma variável binária para cada trecho não adjacente ( $BNA$ ), que será ativada, ou tomará o valor de 1, quando as atribuições "Y" (ou assentos a serem disponibilizados para venda) de uma classe desse trecho, de um vagão e de um período, forem diferentes de zero e tomará o valor de zero caso contrário. Esse comportamento será controlado pela restrição 2.9.

Uma vez calculados os valores para  $BNA$  dos trechos não adjacentes, a restrição 2.10 fará com que as classes de controle de todos os trechos contidos em cada trecho não adjacente sejam 0 ou, no mínimo 1. Assim, quando a classe de controle do trecho não adjacente assumir um valor de  $BNA = 0$ , essa classe será 0 para os trechos contidos. Por outro lado, se a classe de controle do trecho não adjacente assumir o valor de  $BNA = 1$ , então essa classe tomará, no mínimo, o valor de 1 para todos os trechos contidos.

Para um melhor entendimento, suponha um trem com 1 vagão que passa por 3 estações,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_3$ , e tem um horizonte de reserva de um único período. Sob esta situação, o trecho não adjacente seria " $E_1 - E_3$ " e os trechos contidos seriam " $E_1 - E_2$ " e " $E_2 - E_3$ ". Agora imagine que cada trecho tem 6 classes diferentes ( $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ ), onde o preço de  $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \geq c_5 \geq c_6$ , e que as autorizações para o trecho não adjacente (variável  $Y$ ) tomam os valores mostrados na tabela 2.5:

	E <sub>1</sub> - E <sub>3</sub>		E <sub>1</sub> - E <sub>2</sub>	E <sub>2</sub> - E <sub>3</sub>
Classe	Y	BNA	Y	Y
c <sub>1</sub>	10	1	$1 \leq Y \leq Q$	$1 \leq Y \leq Q$
c <sub>2</sub>	9	1	$1 \leq Y \leq Q$	$1 \leq Y \leq Q$
c <sub>3</sub>	5	1	$1 \leq Y \leq Q$	$1 \leq Y \leq Q$
c <sub>4</sub>	5	1	$1 \leq Y \leq Q$	$1 \leq Y \leq Q$
c <sub>5</sub>	0	0	$0 \leq Y \leq 0$	$0 \leq Y \leq 0$
c <sub>6</sub>	0	0	$0 \leq Y \leq 0$	$0 \leq Y \leq 0$

Figura 2.5: Exemplo simplificado do funcionamento da restrição 2.10

Para o trecho " $E_1 - E_3$ ", note que quando  $Y \neq 0$ ,  $BNA = 1$  e quando  $Y = 0$ ,  $BNA = 0$  (controlado pela restrição 2.9). Agora observe que, quando  $BNA = 1$  para uma certa classe, os trechos  $E_1 - E_2$  e  $E_2 - E_3$  assumem valores entre 1 e um número suficientemente grande ( $1 \leq Y \leq Q$ ) neste caso a capacidade do trem, o que indica que os assentos a serem disponibilizados para essa classe nesses trechos não podem ser zero. Por outro lado, quando  $BNA = 0$ , os trechos menores devem zerar a classe correspondente com ( $0 \leq Y \leq 0$ ), ou seja, não se deve disponibilizar assentos com essa classe (controlado pela restrição 2.10). Deve-se esclarecer que as classe de controle dos trechos contidos, apenas imitam o comportamento da classe não adjacente correspondente, e não os valores que esta assume.

As restrições de 2.11 e 2.12 são usadas para inicializar a restrição 2.2 quando  $i = 1$ . E as restrições de 2.13 a 2.16 representam o domínio das variáveis.

## 2.3 Segunda modelagem matemática

Vamos considerar novamente uma versão simplificada do problema. Na verdade, para esta modelagem, serão levadas em conta as mesmas variáveis do primeiro modelo, exceto a variável de disponibilidade  $A$ , conforme mostrado a seguir:

$x_{ij}$ : Quantidade de assentos que será disponibilizada para venda no trecho com origem em  $i$  e destino em  $j$ , onde  $j > i$

$P_{ij}$ : Preço da passagem no trajeto com origem em  $i$  e destino em  $j$

$Q$ : Capacidade do trem

Assim, a função objetivo e as restrições são como segue:

$$FO : \max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$$

s.a.

*Restrições para estações de origem*

$$\text{Estação 1: } x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq Q$$

$$\text{Estação 2: } x_{23} + x_{24} \leq Q$$

$$\text{Estação 3: } x_{34} \leq Q$$

*Restrições para estações de destino*

$$\text{Estação 2: } x_{12} \leq Q$$

$$\text{Estação 3: } x_{13} + x_{23} \leq Q$$

Estação 4:  $x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq Q$

Observe que esta formulação é baseada nos modelos de transporte, onde as estações de origem seriam os depósitos e estão restritas por sua capacidade (capacidade do trem), e as estações de destino seriam os destinos e estão restritas, neste caso, pela mesma capacidade do trem e não pela demanda de cada destino.

Esta formulação garante que sempre será disponibilizada, no máximo, a capacidade do trem tanto para cada saída quanto para cada chegada do trem. Imagine uma solução viável como a mostrada na figura 2.2.

		Destinos			
		E2	E3	E4	Cap.
Origens	E1	$X_{12}$ 10	$X_{13}$ 5	$X_{14}$ 15	100
	E2	...	$X_{23}$ 40	$X_{24}$ 20	100
	E3	...	...	$X_{34}$ 60	100
	Cap.	100	100	100	

Figura 2.6: Solução factível para o problema simplificado

Observe que os valores das variáveis são os mesmos que foram mostrados na figura 2.6. E ainda todas as restrições, tanto por linha quanto por coluna (por origens e por destinos), continuam sendo atendidas.

Definição	Notação	Domínio
<b>Conjuntos</b>		
$OD$	Conjunto de Trechos com itinerario	
$NAD$	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerario	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho $(o,d)$ NÃO Adjacente	
$V$	Conjunto de Cabines do trem	
$K_v$	Conjunto de Classes de Control de cada cabine em $V$	
$T$	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
<b>Parâmetros</b>		
$Q$	Capacidade do trem	
$P_{ijk}$	Preços das passagem no Trecho $(i,j)$ , Cabine $v$ e Classe de Control $k$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
$D_{ijk}$	Demanda das passagem no Trecho $(i,j)$ , Cabine $v$ e Classe de Control $k$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
<b>Variáveis de decisão</b>		
$X_{ijk}$	Quantidade de passagem atribuídos no trecho $(i,j)$ , cabine $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$Y_{ijk}$	Quantidade de passagem autorizados no trecho $(i,j)$ , cabine $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$BNA_{ijk}$	É uma variavel binaria que toma o valor de 1 quando $Y_{ijk} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario, aplica-se apenas a trechos que não são adjacentes	$(i,j) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 2.2: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijk} X_{ijk} \quad (2.17)$$

s.a.

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijk} \leq Q, \quad \forall j/j > 1, i < j \quad (2.18)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijk} \leq Q, \quad \forall i/i < n, j > i \quad (2.19)$$

$$Y_{ijk} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j, k < \|K_v\|, P_{ijk} \geq P_{i,j,v,k+1} \quad (2.20)$$

$$X_{ijk} \leq D_{ijk}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j \quad (2.21)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in OD \quad (2.22)$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j), v, t \quad (2.23)$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \forall (i,j), v, k, t / k < \|K_v\| \quad (2.24)$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{o,d,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t}Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, v,k,t \quad (2.25)$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{i,j,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t}Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, (i,j) \in BRI_{(o,d)}, v,k,t \quad (2.26)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.27)$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.28)$$

$$BNA_{ijvkt} \in \{0,1\} \quad (2.29)$$

Como já foi mencionado, nesta formulação modificamos as restrições que controlam as variáveis asseguradas  $X$ , ou seja, mudamos as restrições 1 e 2 do primeiro modelo e eliminamos a variável de decisão  $A_i$ .

Para este caso, as restrições 2.18 e 2.19 representam a generalização do problema simplificado, onde a primeira garante que a quantidade de assentos autorizados para venda não viole a capacidade do trem ao chegar a cada estação de destino; e a segunda garante que a quantidade de assentos autorizados respeite a capacidade do trem no momento de sair de cada estação de origem. O restante das restrições foi explicado na formulação 1.



---

## Bibliografia

---

- [1] Fred Glover et al. «The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines». Em: *Interfaces* 12.3 (1982), pp. 73–80. ISSN: 00922102, 1526551X. URL: <http://www.jstor.org/stable/25060268> (acedido em 07/08/2024).
- [2] Jesús Muñuzuri José Guadix Luis Onieva e Pablo Cortés. «An overview of revenue management in service industries: an application to car parks». Em: *The Service Industries Journal* 31.1 (2011), pp. 91–105. DOI: [10.1080/02642069.2010.491543](https://doi.org/10.1080/02642069.2010.491543).
- [3] Ken Littlewood. «Special Issue Papers: Forecasting and control of passenger bookings». Em: *Journal of Revenue and Pricing Management* 4 (abr. de 2005), pp. 111–123. DOI: [10.1057/palgrave.rpm.5170134](https://doi.org/10.1057/palgrave.rpm.5170134).
- [4] Jeffrey I. McGill e Garrett J. van Ryzin. «Revenue Management: Research Overview and Prospects». Em: *Transportation Science* 33.2 (1999), pp. 233–256. DOI: [10.1287/trsc.33.2.233](https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233). eprint: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>. URL: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>.
- [5] Garrett J. van Ryzin e Kalyan T. Talluri. «An Introduction to Revenue Management». Em: *INFORMS Tutorials in Operations Research* (out. de 2014), pp. 142–194. DOI: <https://doi.org/10.1287/educ.1053.0019>.