Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Ciências Aplicadas

Wilmer Dario Urango Narvaez

UM MODELO LINEAR DE DEMANDA COMPORTAMENTAL PARA MAXIMIZAR A RECEITA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE FERROVIÁRIO DE PASSAGEIROS

A LINEAR BEHAVIORAL DEMAND MODEL TO MAXIMIZE REVENUE FROM THE RAIL PASSENGER TRANSPORTATION PROBLEM

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências Aplicadas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestrado em Engenharia de Produção e de Manufatura. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Gestão de Processos.

Orientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto
Co-orientador: Dr. Karim Perez

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Wilmer Dario Urango Narvaez, e orientado pelo Prof. Diego Jacinto Fiorotto.

Limeira
2024

CAPÍTULO 1

Revisão da literatura

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente.

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento precioso que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo.

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas.

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturem de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o deslocamento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?"Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo [1].

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management.

CAPÍTULO 2

Modelagem matemática

2.1 Modelagem matemática

Dentro da pesquisa, foram realizadas duas modelagens distintas, ambas, diferentemente da literatura clássica, foram elaboradas com base nas estações de origem e destino, e não nos legs do percurso.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura 2.1, onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade máxima de assentos.
- Há apenas um tipo de classe comercial.
- Existe apenas um período no horizonte de reserva.
- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos.
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

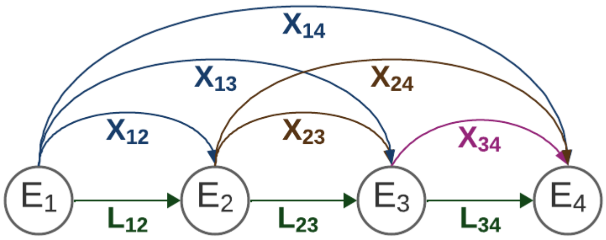

Figura 2.1: Versão gráfica simples

2.2 Primeira modelagem matemática

Agora, para a primeira proposta de modelagem, temos o seguinte

x_{ij}: Quantidade de assentos que serão seguradas no trecho com origem em i e destino em j, onde $j > i$

A_i: Disponibilidade do trem na estação i

P_{ij}: Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j

Q: Capacidade do trem

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto i, j, matematicamente seria:

$FO : max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$

s.a.

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1 \quad onde \quad A_1 = Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq A_2 \quad onde \quad A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$

Estação 3: $x_{34} \leq A_3 \quad onde \quad A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações, E1, E2 e E3, já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação, E4, é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 2.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja, $A_1 = 100$, e que a soma das variáveis seria $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$. Portanto, teríamos

		DESTINOS				
		E2	E3	E4	Disponibilidade (A)	Não Atribuidos
ORIGENES	E1	X_{12} 10	X_{13} 5	X_{14} 15	100	70
	E2	----	X_{23} 40	X_{24} 20	70 + 10	20
	E3	----	----	X_{34} 60	20 + 5 + 40	5

Figura 2.2: Solução factível para o problema simplificado

$30 \leq 100$, ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$. Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso $x_{12} = 10$. Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja, $60 \leq 80$. Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3, $x_{13} = 5$ e $x_{23} = 40$, assim teríamos $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$, e no final teríamos $60 \leq 65$.

Dada a lógica anterior, vejamos agora o modelo proposto completo:

Definição	Notação	Domínio
Conjuntos		
OD	Conjunto de Trechos com itinerario	
NAD	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerario	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho (o,d) NÃO Adjacente	
V	Conjunto de Cabines do trem	
K_v	Conjunto de Classes de Control de cada cabine em V	
T	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
Parâmetros		
Q	Capacidade do trem	
P_{ijvk}	Preços das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
D_{ijvkt}	Demanda das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variáveis de decisão		
A_i	Disponibilidade de passagens para vendas na estação i	$i \in I$
X_{ijvkt}	Quantidade de passagem atribuídos no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagem autorizados no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
BNA_{ijvkt}	É uma variavel binaria que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario, aplica-se apenas a trechos que não são adjacentes	$(i,j) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 2.1: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \tag{2.1}$$

s.a.

$$A_i = A_{i-1} - \sum_{(i,j)\in OD/j\geq i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j)\in OD/j<i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in OD \tag{2.2}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{ijvkt} \leq A_i, \quad \forall i \in OD/i < j, i < n \tag{2.3}$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j, k < \|K_v\|, P_{ijvk} \geq P_{i,j,v,k+1} \tag{2.4}$$

$$X_{ijvkt} \leq D_{ijvkt}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j \tag{2.5}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{t\in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q, \quad k = min\{K_v\}, \forall i \in OD \tag{2.6}$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t}, \quad k = max\{K_v\}, \forall (i,j), v, t \tag{2.7}$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \forall (i,j), v, k, t / k < \|K_v\| \tag{2.8}$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{o,d,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, v, k, t \tag{2.9}$$

Na equação 2.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos atribuídos a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada vagone, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe, observe que queremos maximizar os ingressos em função dos asientos que estão atribuídos, que é o mais próximo que se tem da realidade em função da demanda conhecida.

A restrição 2.2 é utilizada para calcular a disponibilidade de assentos de cada estação de origem, em cada período de tempo para cada classe em cada vagone e é a generalização do exemplo simplificado para calcular a variável de decisão A_i.

A restrição 2.3 garante que todas as autorizações habilitadas a partir de cada estação de origem para cada período e cada classe de cada vagão não excedam a disponibilidade da sua estação de origem correspondente (a disponibilidades é calculada na restrição 2.2).

A restrição 2.4 é uma restrição de hierarquia e garante que as quantidades de autorizações para as classes de maior preço sejam sempre maiores do que as quantidades de autorizações de menor preço em cada vagone, em cada trecho, e em cada período do horizonte de reserva.

A restrição 2.5 garante que a quantidade de atribuições não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe em cada vagoen e em cada período no horizonte de reserva.

A restrição 2.6 garanta que a soma de autorizações da classe mais costosa de cada vagone, de cada estação de origem, de tudos os periodos, não ultrapase a capacidade do trem, note que apenas estamos considerando a classe mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização é por isso que o valor de k é o mínimo das classes de cada vagão, pois a ordem do nome das classes é crescente mas o seu valor é decrescente. Para melhor compreensão, suponhamos uma solução para um problema de dois vagones V1 e V2, 8 classes para V1 e 6 classes para V2, 10 trechos, um período e uma capacidade para 100 cadeiras, conforme mostra a figura 2.3.

Observe que os nomes das classes são números ordenados em ordem crescente [1, 2, 3, ...] também o valor da classe 1 é mais caro que o valor da classe 2 e este é maior que o valor da classe 3 e assim por diante. Alem disso, a soma que não ultrapassará a capacidade do trem é a soma das classes 1 de cada vagone ou seja 81 + 13 que é menor a 100. Enquanto a soma total geral não teria sentido, uma vez que cada classe mais à direita conterá todas as classes à esquerda.

Até ao momento foi referido que a variável Y tem um carácter cumulativo e são as restrições 2.7 e 2.8 que controlam este comportamento. A restrição 2.7 é um caso particular da restrição 2.8,

	V1								V2						Total Geral
Trechos	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	4	5	6	8	
1-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-6	2	2	1	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	9
1-7	5	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
1-8	7	6	2	1	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	24
1-9	7	5	1	0	0	0	0	0	4	4	2	1	0	0	24
1-10	5	5	3	0	0	0	0	0	2	1	1	1	0	0	18
1-11	55	43	30	19	4	2	0	0	3	3	3	1	0	0	163
Total Geral	81	65	40	20	4	2	0	0	13	12	8	5	0	0	250

Figura 2.3: Solução factível para a variavel de desição Autorização

aplicada apenas à última classe, ou classe mais barata, segurada para cada vagão, ($k = max\{K_v\}$) e garante que a soma de todos os períodos, de cada trecho da classe mais barata da variável "autorização "é maior ou igual à variável de decisão "segurada"nas mesmas condições. Por outro lado, a restrição 2.7 garante que cada classe autorizada mais à esquerda seja sempre maior ou igual à classe autorizada imediatamente à sua direita mais a quantidade segurada da mesma classe, isto pela soma de todos os períodos, cada trecho e cada classe. Para melhor compreensão, assuma as mesmas suposições que foram feitas na restrição 2.6

	V1								V2						Total Geral
Trechos	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	4	5	6	8	
1-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-6	2	2	1	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	9
1-7	5	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
1-8	7	6	2	1	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	24
1-9	7	5	1	0	0	0	0	0	4	4	2	1	0	0	24
1-10	5	5	3	0	0	0	0	0	2	1	1	1	0	0	18
1-11	55	43	30	19	4	2	0	0	3	3	3	1	0	0	163
Total Geral	81	65	40	20	4	2	0	0	13	12	8	5	0	0	250

(a) Autorização [Variavel Y]

	V1								V2						Total Geral
Trechos	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	4	5	6	8	
1-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	4
1-7	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
1-8	1	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	9
1-9	2	4	1	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	11
1-10	0	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	7
1-11	12	13	11	15	2	2	0	0	0	0	2	1	0	0	58
Total Geral	16	25	20	16	2	2	0	0	1	4	3	5	0	0	94

(b) Atribução [Variavel X]

Figura 2.4: Solução factível para as variaveis de desição Autorização e Atribução

Observe a linha correspondente ao trecho 1-11 do vagão V2 na tabela 2.4b, veja que a classe segurada mais barata foi a classe 5 com valor 1, por este motivo na tabela 2.4a na mesma posição o valor deverá ser igual ou maior que 1, que neste caso é o mesmo valor; Agora observe para o mesmo trecho para o vagão v1 classe 6 em ambas as tabelas acontece a mesma coisa, esse comportamento é garantido pela restrição 6. Agora não vamos olhar para a classe mais barata, vamos olhar para qualquer outra, por exemplo, para o mesmo trecho veja a classe 4 do vagão v1 da tabela 2.4b com valor 15, se quiséssemos saber o valor correspondente na tabela 2.4a deveríamos adicionar a classe imediata à direita da classe 4 na tabela 2.4a, neste caso seria a classe 5 com valor 4, e some o valor da classe 4 da tabela 2.4b, que já sabemos que é 15, assim, o valor buscado será maior ou igual a $4+15=19$, como visto em tabela 2.4a, lembre-se que nessa posição o valor mínimo será o calculado, mas poderá assumir um valor superior. Esta última situação é controlada pela restrição 2.8.

Existem trechos que contêm trechos menores, por exemplo, na figura 2.1 o trecho X_{13} contém os trechos X_{12} e X_{23}. Para esta situação, a classe mais barata ativada no trecho maior deverá ser a classe mais barata ativada nos trechos menores. Isso é feito com o objetivo de que as combinações dos preços dos bilhetes por trechos não sejam mais econômicos do que o preço de um bilhete direto. Para alcançar isso, é criada uma variável binária para cada trecho maior (BNA), que será ativada, ou tomará o valor de 1, quando as atribuições ”Y” (ou assentos a serem disponibilizados para venda) de uma classe desse trecho, de um vagão e de um período, forem diferentes de zero e tomará o valor de zero caso contrário. Esse comportamento será controlado pela restrição 2.9.

Uma vez ativadas as variáveis BNA dos trechos maiores, a restrição 2.10 fará com que as autorizações dos trechos menores, onde a classe maior tenha $BNA=1$, tomem no mínimo o valor de 1 e aquelas com BNA=0 sejam convertidas em 0.

Para um melhor entendimento, suponha um trem com 1 vagão que passa por 3 estações, $E1$, $E2$ e $E3$, e tem um horizonte de reserva de um único período. Sob esta situação, o trecho maior seria ”$E1-E3$” e os trechos menores seriam ”$E1-E2$” e”$E2-E3$”. Agora imagine que cada trecho tem 6 classes diferentes ($c1,c2,c3,c4,c5,c6$), onde $c1$ é a classe mais cara e $c6$ é a classe mais barata, e que as autorizações (variavel Y) tomam os valores mostrados na tabela 2.5:

	E1-E3		E1-E2	E2-E3
Classe	Y	BNA	Y	Y
c1	10	1	>1 & <M	>1 & <M
c2	9	1	>1 & <M	>1 & <M
c3	5	1	>1 & <M	>1 & <M
c4	5	1	>1 & <M	>1 & <M
c5	0	0	>0 & <0	>0 & <0
c6	0	0	>0 & <0	>0 & <0

Figura 2.5: Exemplo simples

Para o trecho ”$E1-E3$”, note que quando $Y \neq 0$, $BNA=1$ e quando $Y=0$, $BNA=0$ (controlado pela restrição 2.9). Agora observe que, quando$BNA=1$ para uma certa classe, os trechos

$E1-E2$ e $E2-E3$ assumem valores entre 1 e um número suficientemente grande ($1 \leq Y \leq M$), o que indica que os assentos a serem disponibilizados para essa classe nesses trechos não podem ser zero. Por outro lado, quando $BNA = 0$, os trechos menores devem zerar a classe correspondente com ($0 \leq Y \leq 0$), ou seja, não se deve disponibilizar assentos com essa classe (controlado pela restrição 2.10). Deve-se esclarecer que os trechos menores apenas imitam o comportamento da classe maior e não os valores que esta assume.

As restrições de 2.11 e 2.12 são usadas para inicializar a restrição 2.2 quando $i = 1$. E as restrições de 2.13 a 2.16 representam o domínio das variáveis.

2.3 Segunda modelagem matemática

Vamos considerar novamente uma versão simplificada do problema. Na verdade, para esta modelagem, serão levadas em conta as mesmas variáveis do primeiro modelo, exceto a variável de disponibilidade A, conforme mostrado a seguir:

x_{ij}: Quantidade de assentos que será disponibilizada para venda no trecho com origem em i e destino em j, onde $j > i$

P_{ij}: Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j

Q: Capacidade do trem

Assim, a função objetivo e as restrições são como segue:

$FO : max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$

s.a.

Restrições para estações de origem

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq Q$

Estação 3: $x_{34} \leq Q$

Restrições para estações de destino

Estação 2: $x_{12} \leq Q$

Estação 3: $x_{13} + x_{23} \leq Q$

Estação 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq Q$

Observe que esta formulação é baseada nos modelos de transporte, onde as estações de origem seriam os depósitos e estão restritas por sua capacidade (capacidade do trem), e as estações de destino seriam os destinos e estão restritas, neste caso, pela mesma capacidade do trem e não pela demanda de cada destino.

Esta formulação garante que sempre será disponibilizada, no máximo, a capacidade do trem tanto para cada saída quanto para cada chegada do trem. Imagine uma solução viável como a mostrada na figura 2.2.

		Destinos			
		E2	E3	E4	Cap.
Origens	E1	X_{12} 10	X_{13} 5	X_{14} 15	100
	E2	---	X_{23} 40	X_{24} 20	100
	E3	---	---	X_{34} 60	100
	Cap.	100	100	100	

Figura 2.6: Solução factível para o problema simplificado

Observe que os valores das variáveis são os mesmos que foram mostrados na figura 2.6. E ainda todas as restrições, tanto por linha quanto por coluna (por origens e por destinos), continuam sendo atendidas.

Definição	Notação	Domínio
Conjuntos		
OD	Conjunto de Trechos com itinerario	
NAD	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerario	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho (o,d) NÃO Adjacente	
V	Conjunto de Cabines do trem	
K_v	Conjunto de Classes de Control de cada cabine em V	
T	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
Parâmetros		
Q	Capacidade do trem	
P_{ijvk}	Preços das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
D_{ijvkt}	Demanda das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variáveis de decisão		
X_{ijvkt}	Quantidade de passagem atribuídos no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagem autorizados no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
BNA_{ijvkt}	É uma variavel binaria que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario, aplica-se apenas a trechos que não são adjacentes	$(i,j) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 2.2: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \tag{2.17}$$

s.a.

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{ijvkt} \leq Q, \quad \forall j/j > 1, i < j \tag{2.18}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{ijvkt} \leq Q, \quad \forall i/i < n, j > i \tag{2.19}$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j, k < \|K_v\|, P_{ijvk} \geq P_{i,j,v,k+1} \tag{2.20}$$

$$X_{ijvkt} \leq D_{ijvkt}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j \tag{2.21}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{t\in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q, \quad k = min\{K_v\}, \forall i \in OD \tag{2.22}$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t}, \quad k = max\{K_v\}, \forall (i,j), v, t \tag{2.23}$$

$$Y_{i,j,v,k,t} \geq X_{i,j,v,k,t} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \forall (i,j), v, k, t / k < \|K_v\| \tag{2.24}$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{o,d,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, v, k, t \tag{2.25}$$

$$BNA_{o,d,v,k,t} \leq Y_{i,j,v,k,t} \leq BNA_{o,d,v,k,t} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, (i,j) \in BRI_{(o,d)}, v, k, t \tag{2.26}$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^{+} \tag{2.28}$$

$$BNA_{ijvkt} \in \{0,1\} \tag{2.29}$$

Como já foi mencionado, nesta formulação modificamos as restrições que controlam as variáveis asseguradas X, ou seja, mudamos as restrições 1 e 2 do primeiro modelo e eliminamos a variável de decisão Ai.

Para este caso, as restrições 2.18 e 2.19 representam a generalização do problema simplificado, onde a primeira garante que a quantidade de assentos autorizados para venda não viole a capacidade do trem ao chegar a cada estação de destino; e a segunda garante que a quantidade de assentos autorizados respeite a capacidade do trem no momento de sair de cada estação de origem. O restante das restrições foi explicado na formulação 1.

Bibliografia

[1] Fred Glover et al. «The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines». Em: *Interfaces* 12.3 (1982), pp. 73–80. ISSN: 00922102, 1526551X. URL: http://www.jstor.org/stable/25060268 (acedido em 07/08/2024).