

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Conceitos básicos . . . . .	3
1.2	Visão geral da pesquisa . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>10</b>
2.1	Fundamentos de Revenue Management (RM) . . . . .	10
2.1.1	Definição e importância . . . . .	10
2.1.2	Histórico e evolução . . . . .	11
2.2	Transporte Ferroviário de Passageiros . . . . .	14
2.2.1	Áreas de pesquisa . . . . .	14
2.2.2	Controle de inventário . . . . .	16
2.2.3	Modelagem da demanda . . . . .	18
2.3	Aplicação de RM ao transporte ferroviário de passageiros . . . . .	19
2.4	Outras aplicações industriais de RM . . . . .	22
2.4.1	Aviação . . . . .	23
2.4.2	Hotelaria . . . . .	26
2.5	Contextualização desta pesquisa . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>31</b>
3.1	Instâncias . . . . .	31
3.2	Modelos Matemáticos . . . . .	32
3.3	Ferramentas e ambiente computacional . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Modelagem matemática</b>	<b>34</b>
4.1	Descrição do problema . . . . .	34
4.2	Formulação matemática . . . . .	35
4.3	Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente e autorizações estáticas . . . . .	38
4.3.1	Modelo básico independente . . . . .	38
4.3.2	Modelo fulfillments over periods independente . . . . .	41
4.3.3	Modelo skip lagging independente . . . . .	44
4.3.4	Modelo completo independente . . . . .	46
4.4	Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental e autorizações estáticas . . . . .	47
4.4.1	Modelo básico comportamental . . . . .	50

4.4.2	Modelo fulfillments over periods comportamental . . . . .	53
4.4.3	Modelo skip lagging comportamental . . . . .	54
4.4.4	Modelo completo comportamental . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Resultados Computacionais</b>	<b>58</b>
5.1	Experimentos Computacionais . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuro</b>	<b>65</b>
<b>7</b>	<b>Referências</b>	<b>67</b>

# CAPÍTULO 1

## Introdução

### 1.1 Conceitos básicos

Esta seção apresenta alguns dos termos comumente utilizados na gestão de receitas no transporte ferroviário de passageiros, além de aprofundar-se em conceitos específicos que frequentemente geram confusão entre si.

**Viagem:** Um trem programado para uma data específica é denominado "viagem". Uma viagem inclui uma estação de partida (estação de origem) e uma estação de chegada (estação de destino final). Exemplo: O trem #03450-1 de 12 de janeiro de 2024 é uma viagem:



Figura 1.1: Representação de viagem

**Trecho:** Um trecho é uma conexão direta entre duas estações, também pode ser denominado como origem-destino. Além, será dito que um trecho é adjacente se, e somente se, não houver estações intermediárias entre elas; caso contrário, serão não adjacentes. Por exemplo, o trecho AC é não adjacente e os trechos AB e BC são adjacentes. É importante aclarar que os trechos não adjacentes podem conter outros trechos, tanto adjacentes quanto não adjacentes.

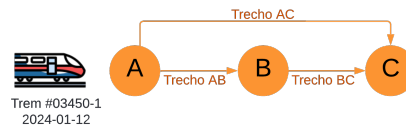


Figura 1.2: Representação de trechos

**Itinerário:** Um itinerário é uma combinação única de origem, destino, horário de partida e trem. Um itinerário pode consistir em um ou mais trechos, e uma viagem pode englobar um ou mais itinerários.

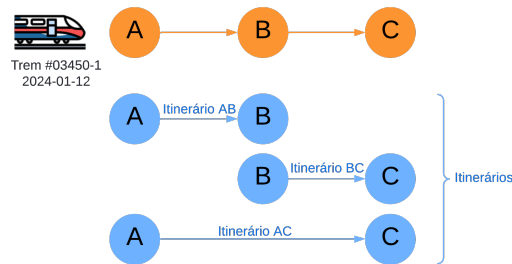


Figura 1.3: Representação de itinerários

**Classes de controle:** Uma classe de controle é um produto oferecido por um operador de transporte a passageiros potenciais por um preço específico. As classes de controle também são conhecidas como classes tarifárias, produtos tarifários ou classes de reservas. Uma classe de controle define os benefícios e/ou restrições que o passageiro terá como resultado do preço pago pelo bilhete.

**Horizonte de reserva:** É o período de tempo entre o momento em que os bilhetes para o trem em questão são disponibilizados para venda pela primeira vez e a data de partida do trem. O horizonte de reserva geralmente é discretizado por dias, de forma que cada período representa um dia específico antes da partida (DBD). Frequentemente, realizamos uma agregação temporal para reduzir o tamanho do horizonte de reserva, selecionando alguns DBD específicos como pontos de controle (CP). Nesse contexto, o horizonte de contabilização é discretizado por períodos, onde o tamanho de cada período corresponde ao intervalo de tempo entre dois CP consecutivos.

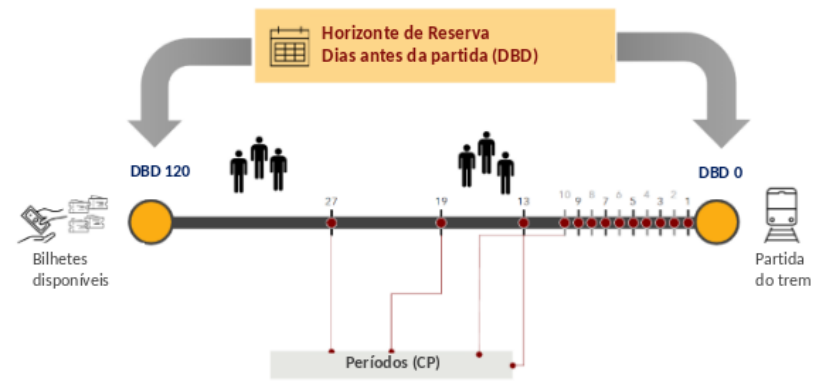


Figura 1.4: Representação do horizonte de reserva

**Reservas:** As reservas representam o número de assentos protegidos para atender à demanda potencial de uma classe de controle específica em um determinado itinerário, durante um período específico do horizonte de reserva. O tamanho da reserva é definido no processo de otimização, considerando a demanda potencial do itinerário e da classe de controle correspondente. As reservas também são conhecidas como níveis de proteção.

**Autorizações:** As autorizações representam o número de assentos disponíveis para venda em um determinado itinerário e classe de controle. Elas podem ser entendidas como a quantidade de bilhetes apresentados aos passageiros como disponíveis para compra. As autorizações têm como objetivo controlar o volume de passageiros ao longo de um itinerário ou trecho.

As Autorizações podem ser classificadas como estáticas ou dinâmicas. As Autorizações estáticas não estão indexadas no tempo, enquanto as dinâmicas estão. Para uma melhor compreensão, observe a Figura 1.5, onde, no caso de uma classe de controle  $A_1$ , ela assume um valor só para todo o horizonte de reserva no caso de autorização estática, e toma valores distintos em função de cada período para as autorizações dinâmicas.

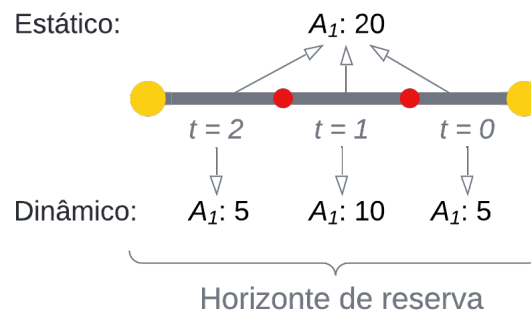


Figura 1.5: Classes de autorização

**Demanda comportamental:** Neste modelo, assume-se que o comportamento de compra dos passageiros é influenciado pelo conjunto de classes de controle disponíveis. Um exemplo desse conceito é ilustrado na Figura 1.6. Considere um cenário em que 4 clientes desejam comprar a tarifa A3, sendo essa sua primeira opção. Caso a tarifa A3 não esteja disponível, um dos clientes desiste da compra, enquanto os outros 3 permanecem no sistema e estão dispostos a adquirir a tarifa A2. Se A2 também não estiver disponível, mais 2 clientes abandonam a compra, restando apenas um cliente que opta por A1 (geralmente, a opção de maior valor).

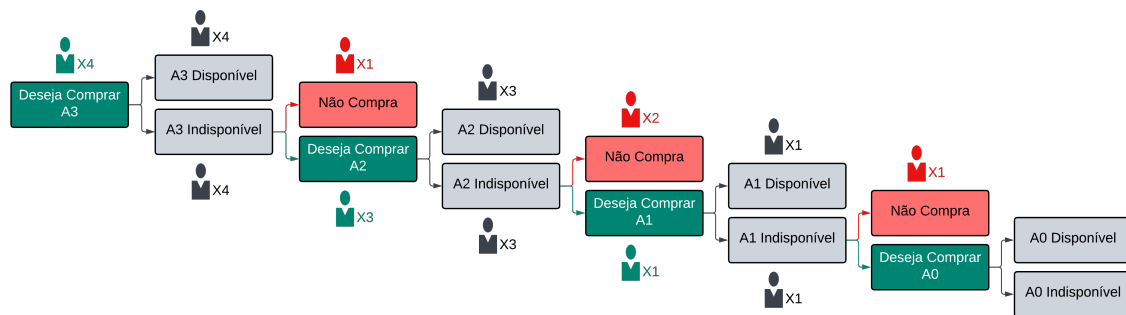


Figura 1.6: Representação de demanda comportamental

**Demanda independente:** Os clientes compram um produto específico, independentemente da oferta disponível no momento. Em um modelo de demanda independente, assume-se que um cliente disposto a pagar R\$100 por um bilhete nunca optaria por um bilhete mais barato (por exemplo, R\$50), mesmo que este estivesse disponível.

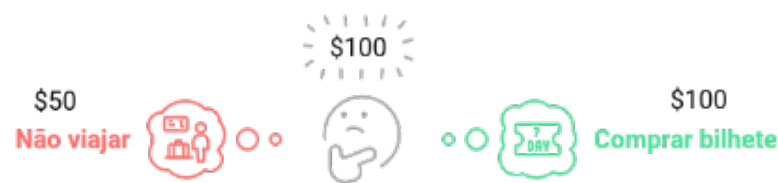


Figura 1.7: Representação de demanda independente

**Skip lagging:** No contexto do transporte ferroviário de passageiros, skip lagging refere-se a uma estratégia de otimização na programação das paradas dos trens, na qual certos serviços omitem paradas intermediárias em determinados trechos. O objetivo é reduzir os tempos de viagem e aumentar a eficiência operacional, garantindo que essa omissão não comprometa a acessibilidade e a qualidade do serviço oferecido aos passageiros. Na seção de modelagem matemática, será apresentado um conjunto de restrições associadas a esse conceito.

**Fulfillments over periods:** No contexto do transporte ferroviário de passageiros, fulfillments over periods refere-se ao cumprimento de determinados níveis de serviço, demanda ou capacidade ao longo de um período de tempo definido. Esse conceito é especialmente relevante na gestão de receitas, planejamento operacional e alocação de recursos, onde é essencial garantir que a oferta de serviços ferroviários atenda a objetivos estratégicos ao longo do tempo, em vez de se concentrar apenas em momentos específicos. Na seção de modelagem matemática, será apresentado um conjunto de restrições associadas a esse conceito.

**Listas de preferência:** Representam uma hierarquia de alternativas de compra que um passageiro está disposto a considerar no momento da aquisição de uma passagem ferroviária, baseando-se, principalmente, nos preços ofertados nesse momento. Essas listas são fundamentais para entender o comportamento do consumidor e otimizar as estratégias de preços e disponibilidade de assentos. Elas podem ser utilizadas para modelar a demanda de forma mais precisa, levando em conta as preferências dos passageiros e suas reações a diferentes ofertas tarifárias.

## 1.2 Visão geral da pesquisa

Os problemas relacionados à gestão de receitas (Revenue Management - RM) podem ser definidos como estratégias que visam maximizar as receitas ajustando-se preços e a disponibilidade de capacidade com base na demanda ([Gallego and van Ryzin, 1994](#)). A área de RM foi inicialmente desenvolvida pela indústria aérea nas décadas de 70 e 80, quando as companhias aéreas começaram a adotar técnicas de otimização para definir os preços dos bilhetes com base na disponibilidade de assentos e na antecedência das reservas ([Glover et al., 1982](#)). O objetivo principal do RM consiste em otimizar a disponibilidade e o preço dos produtos para gerar a maior quantidade de receita possível. Entre suas principais características estão a segmentação de clientes, o controle de capacidade, o ajuste dinâmico de preços e o uso de previsões para estimar a demanda. O sucesso alcançado no setor aeronáutico foi tão expressivo que o RM foi expandido para outros setores com características semelhantes, como hotelaria, restaurantes, varejo, comércio eletrônico e transporte ([Heo and Lee, 2009](#)).

A otimização de receitas no transporte ferroviário de passageiros tornou-se uma área de pesquisa essencial para aumentar a sustentabilidade e a competitividade do setor. Esse tipo de trans-

porte enfrenta desafios específicos na gestão de sua capacidade devido à variabilidade da demanda, à rigidez tarifária e à necessidade crescente de adaptar suas estratégias às dinâmicas de mercado (Guerriero et al., 2021). Nesse contexto, o RM oferece uma estrutura robusta para abordar a alocação ideal de recursos, utilizando técnicas avançadas de modelagem matemática e análise de dados (Ammirato et al., 2020).

O principal objetivo do RM no transporte ferroviário de passageiros pode ser exemplificado da seguinte forma: um operador de transporte define o itinerário de um trem específico, detalhando a origem, o destino e o horário de partida. Os clientes, ou seja, os potenciais passageiros, podem adquirir bilhetes antecipadamente para viajar nesse trem. Chamamos de classes tarifárias ou produtos tarifários os bilhetes disponíveis para venda. O horizonte de reserva é o período de tempo entre a disponibilização inicial dos bilhetes para compra e a partida do trem. Esse horizonte geralmente é dividido em dias, de forma que cada período representa um dia (ou conjunto de dias) antes da partida.

A função do RM, nesse contexto, é controlar a disponibilidade dos produtos tarifários ao longo do horizonte de reserva para maximizar a receita total. Mais especificamente, o processo de otimização busca determinar a quantidade de bilhetes de cada produto que deve estar disponível para venda em cada período, com o objetivo de maximizar os lucros associados a cada partida de trem.

Um elemento fundamental para maximizar as receitas é um modelo preciso da demanda. Alinhar oferta e demanda para otimizar os lucros requer uma compreensão aprofundada do comportamento dos clientes e uma previsão confiável de suas decisões diante de diferentes ofertas de produtos (Zhao and Zhao, 2019).

Uma simplificação comum na modelagem da demanda para gestão de receitas é assumir que os clientes têm um comportamento de compra independente. Isso significa que cada cliente compra um produto específico, desconsiderando a oferta disponível no momento. Na prática, por exemplo, um cliente que desejasse comprar um bilhete de trem por R\$10 não pagaria R\$10,50 se essa fosse a única oferta disponível. Em vez disso, ele optaria por não viajar. Da mesma forma, em um modelo de demanda independente, assumimos que um cliente disposto a pagar R\$100 por um bilhete nunca compraria um bilhete mais barato (por exemplo, R\$50), mesmo que estivesse disponível.

Por outro lado, uma abordagem mais robusta considera o comportamento de compra baseado em faixas ou listas de preferência. Esse modelo assume que os clientes escolhem entre um conjunto



de ofertas com base em suas preferências. Se a opção mais desejada não estiver disponível, eles passam para a próxima opção viável, desde que esta seja mais atrativa do que não realizar a compra.

Para abordar essa problemática, foram desenvolvidos três modelos de Programação Inteira Mista (MIP): O primeiro baseado em demanda independente. O segundo em demandas comportamentais ajustadas por proporções. Y o terceiro em demandas comportamentais ajustadas por hierarquia.

Esses modelos respeitam as restrições operacionais do sistema ferroviário, como capacidade dos trens, estrutura hierárquica dos produtos tarifários, reservas de bilhetes, disponibilidade de vendas dentro do horizonte de reserva e coerência dos preços dos bilhetes ao longo do tempo, entre outras.

O uso de instâncias reais fornecidas por uma empresa especializada permitiu validar a aplicabilidade dos modelos desenvolvidos, destacando tanto sua capacidade de capturar a complexidade do mercado quanto sua eficiência computacional. Os resultados preliminares indicam que os modelos baseados em demandas comportamentais geraram soluções de melhor qualidade em comparação com o modelo de demanda independente. No entanto, em termos do valor da função objetivo, os modelos comportamentais apresentaram os mesmos resultados entre si, que foram ligeiramente diferentes dos obtidos pelo modelo independente.

Essa pesquisa contribui para o corpo de conhecimento em Revenue Management ao combinar técnicas de modelagem baseadas em demandas comportamentais, utilizando listas de preferência, e programação matemática para resolver problemas complexos de alocação de assentos no transporte ferroviário de passageiros.

## CAPÍTULO 2

---

### Revisão da literatura

---

## 2.1 Fundamentos de Revenue Management (RM)

Nesta seção, será apresentada a definição de Revenue Management, suas principais características, um breve histórico da sua evolução e suas aplicações em diferentes setores da indústria.

### 2.1.1 Definição e importância

A gestão de receitas, conhecido como RM, do inglês *Revenue Management*, é uma abordagem estratégica voltada para otimizar a disponibilidade e os preços dos produtos, com o objetivo de maximizar o crescimento da receita procurando os produtos apropriados para os clientes certos, no momento adequado e por um preço conveniente (Cross, 1997). Essa prática envolve a previsão do comportamento do consumidor em nível de micromercado e a gestão científica da demanda por produtos e serviços (Talluri et al., 2008).

O RM evoluiu desde suas origens na indústria aérea até se tornar uma prática amplamente adotada em diversos setores, incluindo hotelaria, energia, manufatura e transporte (Cross, 1995; Cheraghi et al., 2010). A implementação do RM geralmente exige a análise de dados históricos e da atividade atual de pedidos, a fim de prever a demanda com precisão. Isso permite que as empresas definam e atualizem estratégias de preço e disponibilidade de produtos nos diferentes

canais de venda ([Cheraghi et al., 2010](#)).

O RM possibilita que cada unidade de capacidade disponível seja aproveitada ao máximo, segmentando clientes, controlando a disponibilidade de produtos e ajustando preços de forma dinâmica ([Heo and Lee, 2009](#)). Além de elevar a rentabilidade, essa estratégia melhora a previsibilidade da demanda, permitindo que as empresas reajam rapidamente às oscilações do mercado. Em um ambiente altamente competitivo, o gerenciamento de receitas torna-se um diferencial crucial para manter uma posição sólida e, ao mesmo tempo, oferecer soluções mais eficientes e personalizadas para os consumidores ([Gallego and van Ryzin, 1994](#)).

Quando aplicada com êxito, essa abordagem pode gerar impactos econômicos expressivos, com aumentos de receita superiores a 5%, conforme relatado em diversas indústrias ([Cross, 1995](#)). À medida que a área continua a se desenvolver, vem incorporando modelos avançados de previsão e otimização da demanda, baseados em estudos das áreas de ciência da gestão e economia ([Cheraghi et al., 2010](#)).

### **2.1.2 Histórico e evolução**

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente ([Glover et al., 1982](#)).

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas

companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo ([Glover et al., 1982](#)).

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas ([Glover et al., 1982](#)).

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturem de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o deslocamento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?" Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo ([Glover et al., 1982](#)).

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, com a chegada de novos sistemas de informação, regras de controle e outras condições, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management ([Littlewood, 2005](#)).

Subsequentemente, entre os anos de 2013 e 2017, o campo do RM passou por uma evolução significativa, impulsionada pelos avanços nas tecnologias analíticas, pelo acesso a dados em tempo real e pela crescente complexidade dos mercados. Esse processo de transformação foi marcado por uma mudança de perspectiva: as decisões antes centradas exclusivamente na empresa passaram a considerar com mais profundidade o comportamento do consumidor em ambientes competitivos. De acordo com (Mulyani, 2021), o interesse por RM cresceu de forma exponencial, refletindo sua relevância tanto na pesquisa acadêmica quanto na prática empresarial.

Nos primeiros anos do período, a atenção da literatura acadêmica ainda se concentrava nos dois pilares clássicos do RM: as decisões de precificação (pricing) e as de quantidade ou capacidade (quantity-based decisions), conforme discutido por (Talluri and Van Ryzin, 2004). No entanto, uma análise de palavras-chave conduzida por (Mulyani, 2021) mostra que, enquanto o termo resource allocation perdia importância ao longo do tempo, o conceito de pricing ganhava destaque, consolidando-se como o principal foco até o final do período analisado.

A partir de 2014, começaram a ganhar espaço linhas de pesquisa voltadas à análise do comportamento do consumidor. Temas como escolha do consumidor, percepção de preço, sensação de justiça (fairness) e dispersão de preços passaram a ser frequentemente abordados nos estudos, em resposta à necessidade de compreender melhor o processo de decisão de compra em mercados altamente competitivos. Essa mudança de foco para uma abordagem mais orientada ao cliente está em sintonia com as observações de (Noone et al., 2011), que identificaram uma transição do RM de um enfoque centrado na empresa para uma perspectiva mais sensível ao ambiente competitivo e às preferências dos usuários.

Do ponto de vista metodológico, o período foi marcado pela crescente adoção de técnicas quantitativas mais sofisticadas. Métodos tradicionais, como programação dinâmica e estocástica, modelos de otimização e heurísticas, continuaram sendo amplamente utilizados. Entretanto, a partir de 2015 — com maior intensidade entre 2016 e 2017 — abordagens como teoria dos jogos, modelos logit e análise conjunta (conjoint analysis) ganharam destaque. Essas técnicas refletem a necessidade de capturar as respostas estratégicas de consumidores e concorrentes dentro dos modelos de decisão (Mulyani, 2021; Shen and Su, 2007; Strauss et al., 2018).

Por fim, uma das transformações mais relevantes desse período foi a incorporação de tecnologias emergentes, como big data e machine learning, que começaram a ser aplicadas com mais

frequência nos estudos sobre RM nos últimos anos da década. Esse movimento foi favorecido pelo avanço dos sistemas de captura e processamento de dados em tempo real, o que permitiu maior sofisticação na abordagem de problemas dinâmicos e complexos. Essa tendência, destacada por (Gönsch et al., 2013), evidencia a necessidade de métodos empíricos mais robustos e adaptáveis, que complementem os modelos teóricos tradicionais.

## 2.2 Transporte Ferroviário de Passageiros

O problema do transporte ferroviário de passageiros tem sido amplamente explorado na literatura científica, dada sua complexidade operacional e seu papel estratégico na promoção da mobilidade sustentável. De modo geral, esse problema busca maximizar os benefícios econômicos e sociais decorrentes do uso eficiente da infraestrutura ferroviária, levando em consideração, ao mesmo tempo, as restrições de capacidade, a qualidade do serviço prestado e as expectativas dos usuários (Huisman et al., 2005; Shan et al., 2024). O sistema ferroviário possui características específicas que o diferenciam de outros modos de transporte: a oferta é altamente perecível — um assento não vendido em determinado trem representa uma perda definitiva —, a capacidade é limitada pelo número de composições, pela disposição dos assentos e pela configuração da rede, e a demanda apresenta flutuações e segmentações marcantes, variando conforme o horário, o dia da semana, a distância percorrida e o perfil dos usuários (Guan et al., 2023; Besinovi et al., 2022).

Além disso, as decisões operacionais no setor são altamente interdependentes: o planejamento de linhas, a alocação de assentos, a definição de políticas tarifárias e a programação dos trens se influenciam mutuamente, exigindo, portanto, uma abordagem integrada para que os resultados sejam consistentes e sustentáveis (Huisman et al., 2005; Shan et al., 2024). Outro aspecto relevante é a conectividade entre os serviços, que requer estratégias eficientes de gestão de transferências e de atrasos, com o objetivo de minimizar os impactos ao passageiro diante de eventuais interrupções ou imprevistos operacionais (König, 2020).

### 2.2.1 Áreas de pesquisa

A literatura especializada apresenta diversos enfoques para tratar esse problema sob diferentes perspectivas. Um dos mais relevantes é o RM, que adapta técnicas originalmente desenvolvidas

para a aviação comercial, com o intuito de maximizar a receita por meio da gestão dinâmica de preços e da alocação de assentos, considerando a segmentação do mercado e a sensibilidade dos passageiros em relação ao preço ([Ammirato et al., 2020](#); [Guan et al., 2023](#)). Essa abordagem evoluiu significativamente, partindo de modelos estáticos para formulações dinâmicas mais sofisticadas, integrando previsão de demanda, otimização tarifária e controle de inventário, mesmo em contextos com alta incerteza ([Hetrakul and Cirillo, 2014](#); [Shan et al., 2024](#)).

Outro campo amplamente discutido é o da gestão de atrasos (delay management), que tem como foco a tomada de decisões operacionais orientadas a reduzir os impactos de perturbações na rede, sobretudo na coordenação entre trens com conexões interdependentes ([König, 2020](#)). A planificação de linhas e a alocação de recursos operacionais também é tema recorrente, envolvendo decisões relacionadas às rotas, paradas, frequências, capacidades e uso do material rodante, geralmente com base em modelos de programação matemática ([Huisman et al., 2005](#); [Shan et al., 2024](#)).

Por outro lado, pode-se encontrar o planejamento das paradas dos trens e a estratégia de preços as quais estão interligados e impactam tanto as receitas quanto a experiência dos passageiros. Em ([Zhou and Others, 2022](#)) propuseram um modelo de otimização não linear inteiro misto que aborda conjuntamente a estratégia de preços dos bilhetes e o planejamento das paradas. Esse modelo busca maximizar as receitas do transporte ferroviário e minimizar o tempo de viagem dos passageiros, alcançando um equilíbrio eficiente entre oferta e demanda.

A estimação da demanda tem sido tratada, em grande parte, por meio de técnicas baseadas em modelos de escolha discreta, como os modelos logit e os modelos de classes latentes, permitindo capturar a heterogeneidade nas preferências dos usuários quanto a horários, preços e atributos do serviço ofertado ([Hetrakul and Cirillo, 2014](#); [Tang et al., 2022](#)). Mais recentemente, observa-se uma aplicação crescente de inteligência artificial e aprendizado de máquina em diferentes estágios do sistema ferroviário — desde a previsão de demanda e falhas operacionais até a otimização em tempo real, aproveitando-se da ampla disponibilidade de dados gerados por sistemas de bilhetação, sensores embarcados e plataformas digitais ([Besinovi et al., 2022](#); [Tang et al., 2022](#)).

### 2.2.2 Controle de inventário

É importante destacar que esta pesquisa está voltada à aplicação do RM no contexto do transporte ferroviário de passageiros. Dentro desse escopo, a literatura especializada identifica dois grandes eixos de desenvolvimento. O primeiro diz respeito ao controle de inventário, reconhecido como o alicerce operacional do RM ferroviário. Essa área tem como principal objetivo determinar, ao longo do horizonte de reservas, quantos assentos devem ser protegidos para cada tarifa ou classe de controle, considerando mercados origem-destino distintos. A meta é maximizar a receita esperada ao final do ciclo de vendas. Para isso, as políticas de aceitação e rejeição de solicitações devem lidar com um dilema fundamental: rejeitar hoje uma reserva de menor valor que talvez não seja substituída, ou aceitá-la e comprometer a disponibilidade futura para passageiros dispostos a pagar tarifas mais altas.

Diversos trabalhos ao longo das últimas décadas têm aprofundado esse campo sob diferentes enfoques metodológicos. ([Feng and Xiao, 2001](#)), por exemplo, adaptaram pela primeira vez ao transporte ferroviário de longa distância o modelo dinâmico de controle de inventário originalmente desenvolvido para companhias aéreas. Utilizando processos de decisão de Markov com chegadas Poisson independentes por classe tarifária, os autores propuseram uma política ótima baseada no tempo restante até a partida e no número de assentos disponíveis, resultando em uma regra de limiar estacionária de fácil implementação, com ganhos simulados de aproximadamente 6% frente à política tradicional de ordem de chegada. No entanto, a independência entre classes tarifárias pressuposta pelo modelo ignora substituições entre tarifas, o que limita sua aplicabilidade prática.

Em uma linha complementar, ([Bertsimas and de Boer, 2002](#)) abordaram o problema em redes com rotas sobrepostas, propondo um modelo não linear convexo com decomposição aninhada. Seus resultados indicam que proteger assentos em nível de itinerário completo pode gerar ganhos entre 3% e 6% em relação a políticas locais por trecho, embora o modelo trate a demanda como fixa e desconsidere interações com os preços. Posteriormente, ([Walczak and Brumelle, 2007](#)) introduziram um modelo semi-Markov que incorpora o tempo de permanência em cada estado como variável influente sobre a demanda. Através de simulações de Monte Carlo, demonstraram que em cenários com aceleração da demanda próxima à data de partida, é possível obter melhorias de receita entre 5% e 8%, ainda que o modelo se limite a apenas dois níveis tarifários e não tenha



validação empírica.

Em 2009, ([Chew et al., 2009](#)) integraram, pela primeira vez, decisões conjuntas de tarifa e proteção de inventário para produtos perecíveis, com um modelo biestágio resolvido por programação dinâmica. Comparando abordagens simultâneas e sequenciais, evidenciaram ganhos médios de receita de até 18% em um cenário de trem de alta velocidade na Ásia, embora o estudo tenha sido restrito a um único par origem-destino e não considere efeitos de rede. Na mesma direção, ([Cizaire, 2011](#)) estendeu o horizonte de análise para múltiplos períodos com demanda estocástica, aplicando um modelo linear inteiro misto com heurísticas de horizonte rolante. Os ganhos reportados variaram entre 10% e 12% em comparação com políticas fixas, mas a alta sensibilidade aos erros de previsão e os custos computacionais dificultam sua aplicação em tempo real.

No campo da escalabilidade, ([Méndez-Díaz et al., 2014](#)) propuseram uma formulação inteira mista com algoritmo branch-and-price e geração dinâmica de colunas, conseguindo gaps ótimos inferiores a 2% em instâncias reais, dentro de tempos computacionais aceitáveis. Ainda assim, a demanda continua sendo tratada como exógena, e o impacto das tarifas dinâmicas sobre as escolhas dos passageiros não é modelado. Em uma abordagem mais integrada, ([Hetrakul and Cirillo, 2014](#)) combinaram um modelo de classes latentes com uma função log-linear de demanda, permitindo otimização simultânea de preços e proteção de inventário. Os autores demonstraram que incorporar a heterogeneidade de preferências dos passageiros pode gerar ganhos de 14% a 25%, reforçando a relevância de considerar o comportamento individual na modelagem da demanda. No entanto, o estudo foi limitado a um único corredor e não explorou a robustez da solução frente a perturbações operacionais.

Mais recentemente, ([Besinovi et al., 2022](#)) revisaram o papel da inteligência artificial nesse domínio, propondo uma taxonomia de aplicações de aprendizado de máquina ao controle de inventário. Identificaram que algoritmos de aprendizado por reforço oferecem promissoras políticas adaptativas que dispensam pressupostos rígidos sobre a distribuição da demanda. Contudo, destacam que barreiras regulatórias e desafios de interpretabilidade ainda limitam sua adoção em contextos industriais reais.

### 2.2.3 Modelagem da demanda

Além do controle de inventário, outro eixo essencial da literatura é a modelagem da demanda, com destaque para a distinção entre abordagens que assumem demanda independente e aquelas que adotam uma perspectiva comportamental. Nos primeiros modelos, como os propostos por (Dana, 1999; Feng and Xiao, 2001), cada classe tarifária é representada como um fluxo estocástico separado, cuja chegada não é afetada pela disponibilidade de outras tarifas. Essa simplificação facilita a modelagem dinâmica e a aplicação de processos markovianos, mas ignora os efeitos de substituição tarifária observados na prática.

Esse panorama começa a mudar a partir de 2007, com os estudos de (Walczak and Brumelle, 2007), que introduzem uma estrutura semi-Markov em que a probabilidade de chegada de cada segmento passa a depender do estado atual das reservas, capturando assim os primeiros efeitos de desvio entre tarifas. Contudo, o avanço mais significativo ocorre em 2014, quando (Hetrakul and Cirillo, 2014) propõem um modelo de escolha baseado em classes latentes que permite prever com maior precisão quando e qual tarifa será adquirida por cada passageiro, levando em conta preço, tempo de antecipação e atributos do serviço. Ao integrar esse modelo à otimização de inventário, os autores demonstram que considerar a heterogeneidade de preferências pode elevar a receita em até 25% em comparação com estratégias baseadas em demandas independentes.

Nos últimos anos, a gestão de reservas de bilhetes no transporte ferroviário de passageiros evoluiu significativamente graças à aplicação de modelos matemáticos avançados. Esses modelos têm como objetivo otimizar a alocação de assentos, o planejamento de paradas e as estratégias de preços, buscando maximizar as receitas e melhorar a satisfação dos passageiros.

Um dos modelos destacados é o desenvolvido por (Zhou and Others, 2023), que integra a teoria das perspectivas, o modelo logit e um modelo de transferência de fluxo de passageiros para alocar a demanda de maneira eficaz. Esse enfoque permite estabelecer preços diferenciados e distribuir os assentos de forma a maximizar as receitas, considerando as preferências e comportamentos de diferentes segmentos de passageiros.

Além disso, a demanda de passageiros está sujeita a incertezas que tornam a gestão operacional mais desafiadora. Han e Ren em 2020 desenvolveram um modelo que otimiza conjuntamente o planejamento de paradas e a alocação de bilhetes, utilizando a teoria da incerteza. Esse modelo busca maximizar a satisfação dos passageiros e a taxa média de ocupação dos assentos, oferecendo

soluções robustas frente às flutuações na demanda ([Han and Ren, 2020](#)).

Posteriormente, em ([Schöbel and Urban, 2021](#)), investiga-se como a escolha da rota dos passageiros é influenciada pelas estruturas tarifárias e pelos preços dos bilhetes. Sua pesquisa abordou o problema de determinar a tarifa mais econômica em sistemas de transporte público, avaliando diferentes estruturas tarifárias, como aquelas baseadas em distância ou zonas, e propondo algoritmos altamente eficientes para resolver esses problemas.

A evolução da literatura mostra de forma clara que os modelos de demanda comportamental tornaram-se indispensáveis para estimar de forma realista a canibalização entre horários e níveis tarifários, desenvolver estratégias de preços personalizados por meio de canais digitais e avaliar como segmentos mais sensíveis ao preço reagem a metas de sustentabilidade ou justiça tarifária. Apesar desses avanços, revisões recentes como as de ([Ammirato et al., 2020](#)) e ([Besinovi et al., 2022](#)) indicam que grande parte dos estudos sobre RM ferroviário ainda operam sob suposições de demanda independente, o que evidencia a necessidade urgente de aprofundar abordagens comportamentais apoiadas por aprendizado de máquina e dados massivos de transações.

## 2.3 Aplicação de RM ao transporte ferroviário de passageiros

O RM aplicado ao transporte ferroviário de passageiros evoluiu de maneira desigual ao longo dos últimos vinte e cinco anos, passando de modelos conceituais inspirados na aviação para propostas integradas que combinam previsão de demanda, precificação dinâmica e alocação de capacidade com o uso de técnicas de inteligência artificial.

O marco inicial pode ser atribuído ao estudo de [Dana \(1999\)](#), que, embora não tenha foco específico no setor ferroviário, introduz o conceito de dispersão tarifária em mercados com capacidade limitada. Sua abordagem analítica demonstra que, mesmo diante de custos fixos, a diferenciação de preços gera equilíbrios de mercado mais lucrativos que políticas de preços uniformes. Essa conclusão antecipa a lógica de proteção de assentos por classe tarifária, mais tarde adotada amplamente no setor ferroviário. Na mesma época, não se encontram estudos ferroviários diretamente comparáveis, o que evidencia um período de transição e adoção inicial de conceitos oriundos da aviação comercial.

Com o avanço da década, ([Feng and Xiao, 2001](#)) propõem um modelo dinâmico de controle de inventário voltado à gestão de assentos perecíveis, cujo algoritmo determina políticas ótimas

de aceitação e rejeição de reservas. Apesar do caso base estar focado na aviação, a estrutura matemática do modelo — um processo de decisão de Markov — revela-se diretamente aplicável ao transporte ferroviário de longa distância, estabelecendo as bases para os estudos posteriores em redes ferroviárias. Em relação ao trabalho de Dana, Feng e Xiao ampliam o horizonte de análise ao introduzir decisões periódicas no tempo e substituem a estática de preços por regras de controle que incorporam a estocasticidade nas chegadas de demanda, característica alinhada à realidade operacional dos trens.

Nos anos seguintes, a literatura ainda era fortemente marcada por abordagens conceituais e revisões setoriais. Contudo, o trabalho de (Vinod, 2004), traz uma importante contribuição ao introduzir a noção de integração entre o RM e os sistemas de distribuição, enfatizando a necessidade de alinhar previsões de demanda com canais de venda multicanais — uma questão que se tornaria central para o sucesso do RM no setor ferroviário de alta velocidade europeu.

Em paralelo, (Netessine and Shumsky, 2005) modelam a competição tarifária entre operadores utilizando jogos de inventário. Seus resultados indicam que a coordenação horizontal entre empresas pode aumentar os lucros totais do sistema. Embora o estudo se aplique ao setor aéreo, as conclusões são diretamente comparáveis a observações do mercado ferroviário interurbano liberalizado, no qual acordos de compartilhamento de código e redes integradas atuam para mitigar guerras de preços, como já destacado por Ammirato et al. (2020).

Nos anos seguintes, dois estudos ganham destaque. (Walczak and Brumelle, 2007) propõem um modelo de precificação dinâmica com base em informação semi-Markov, otimizando a receita ao considerar a probabilidade de chegada de diferentes classes de demanda heterogêneas. Simultaneamente, (Fröidh, 2008) analisa a viabilidade comercial do trem de alta velocidade na Suécia, alertando que seu êxito econômico dependerá da implementação de estratégias de RM que combinem preços variáveis com ajustes finos nas frequências de operação. Enquanto o modelo de Walczak apresenta rigor matemático, carece de aplicação empírica no contexto ferroviário; por outro lado, Fröidh oferece evidência de campo, mas sem formalização teórica, evidenciando uma lacuna metodológica característica daquele momento.

No biênio seguinte, (Chew et al., 2009) formulam um problema conjunto de precificação e alocação de inventário para produtos perecíveis com dois períodos de vida útil, resolvido via programação dinâmica. Demonstram que alinhar tarifas e capacidade oferece vantagens significativas

sobre políticas sequenciais. Esses achados dialogam diretamente com (Gao et al., 2010), que aplicam um algoritmo de alocação de assentos no contexto ferroviário chinês, considerando elasticidades cruzadas. Enquanto Chew comprova os ganhos em termos de receita (até 20% em simulações), Gao valida a eficácia do modelo no mundo real, com melhorias de ocupação e equilíbrio entre trajetos curtos e longos. A comparação entre ambos os trabalhos evidencia a transição de marcos teóricos para aplicações operacionais concretas.

Prosseguindo, (Guo et al., 2012), abordam a questão da amostragem truncada da demanda — problema recorrente no setor ferroviário, onde os dados de rejeições de reserva nem sempre são observáveis. A solução proposta, baseada em algoritmos de Expectation-Maximization, aprimora as estimativas para alimentar os modelos de controle, complementando o trabalho anterior de (Walczak and Brumelle, 2007) ao fornecer dados mais consistentes.

Em 2014, uma mudança de paradigma é estabelecida com a contribuição de (Hetrakul and Cirillo, 2014). Esses autores introduzem um sistema baseado em modelos de classes latentes que integra a escolha do momento da compra com regressões log-lineares de demanda e otimização conjunta de tarifas e alocação de capacidade em uma rede real. A calibração com dados históricos demonstra aumentos de receita entre 14% e 25% em comparação com políticas fixas, confirmando a importância de adaptar os preços à antecipação da compra. Comparado ao estudo de (Dobson and Piga, 2013), que se concentra na dinâmica de fusões no setor aéreo, a pesquisa de (Hetrakul and Cirillo, 2014) destaca a microsegmentação da demanda como fator crítico, ilustrando a transição do foco em estruturas de mercado para o modelamento comportamental individualizado.

Nos anos seguintes, observa-se uma crescente convergência entre otimização de redes e políticas tarifárias. (Zheng and Geroliminis, 2016) aplicam o RM ao desenho de redes multimodais com estacionamento limitado e tarifas dinâmicas, demonstrando que a coordenação entre trem e automóvel pode reduzir tempos de viagem e aumentar receitas. Em paralelo, (Casey, 2014), embora publicado no final do período anterior, propõe um protótipo industrial que conecta scheduling com RM em ferrovias interurbanas dos Estados Unidos, reforçando a tendência de integração entre planejamento e estratégia tarifária.

subsequentemente, (Tang et al., 2022) revisam o uso da inteligência artificial em diversas subáreas do setor ferroviário, constatando que a aplicação da IA à precificação dinâmica ainda é incipiente. Ao mesmo tempo, (Ammirato et al., 2020) denunciam a carência de estudos que inte-

grem RM com planejamento estratégico. Ambos concordam na necessidade de migrar de modelos isolados para sistemas holísticos de apoio à decisão, baseados em big data.

Já nos anos mais recentes, ([Besinovi et al., 2022](#)) propõem uma taxonomia detalhada sobre IA no setor ferroviário, identificando o RM como uma das áreas com maior potencial para aplicação de técnicas de machine learning, especialmente na definição de preços em tempo real e otimização de inventário. Essa análise complementa a síntese de ([Tang et al., 2022](#)), que quantifica a concentração da literatura em manutenção e evidencia a defasagem na vertente comercial. A convergência dos estudos reforça a popularização do uso de redes neurais profundas na previsão de demanda e a ausência de sua articulação com algoritmos de precificação.

Mais recentemente, [Guan et al. \(2023\)](#) oferecem a primeira revisão dedicada exclusivamente à precificação ferroviária sob a ótica do RM, classificando os métodos em três grupos: sistemas de tarifa base, programação matemática e abordagens orientadas por dados. Os autores observam que os modelos dinâmicos ainda dependem fortemente de suposições de elasticidade linear e que a aplicação de aprendizado de máquina na estimativa de parâmetros ainda está em estágio inicial.

Em paralelo, ([Shan et al., 2024](#)) articulam uma estrutura generalizada de RM, já implementada na operação ferroviária chinesa, que integra previsão, planejamento de oferta, controle de inventário e precificação. Seus resultados reportam ganhos de utilização e rentabilidade decorrentes da segmentação baseada em big data, embora ressaltem o desafio de equilibrar lucro e inclusão social. Assim, enquanto Guan fornece uma síntese teórica robusta, Shan comprova a viabilidade prática do RM em larga escala, evidenciando a transição concreta do plano acadêmico para aplicações industriais.

## 2.4 Outras aplicações industriais de RM

As práticas de RM são mais comuns em setores que apresentam estoques perecíveis, capacidade fixa, altos custos fixos e uma sensibilidade variável ao preço por parte do cliente. Diversas indústrias adotaram essas técnicas para otimizar suas operações e maximizar a lucratividade.

### 2.4.1 Aviação

No setor aéreo, as companhias enfrentam o desafio de administrar um número limitado de assentos por voo, os quais são ofertados com preços variados conforme o perfil do cliente, a antecedência da compra ou a classe da passagem. O foco principal da gestão de receitas na aviação não é simplesmente vender todos os assentos, mas sim maximizar a receita total do voo, priorizando o ganho por assento disponível (conhecido como Revenue per Available Seat Kilometer - RASK).

Para isso, são tomadas decisões estratégicas como: quantos assentos disponibilizar em cada faixa tarifária; quando abrir ou fechar o acesso a determinadas tarifas — por exemplo, bloqueando tarifas promocionais quando há alta demanda —; e quais ações promocionais implementar para estimular a procura em períodos de baixa ocupação.

Entre os pilares desse modelo estão: *A segmentação tarifária*, na qual os mesmos assentos são vendidos por preços diferentes (como tarifas promocionais versus flexíveis); *A previsão de demanda*, que estima o volume de bilhetes que será vendido em cada categoria; *O controle de inventário*, que busca reservar lugares para clientes com maior disposição de pagamento, geralmente mais próximos da data do voo; E por fim, *A gestão de overbooking*, que autoriza vender mais bilhetes do que assentos disponíveis, considerando possíveis cancelamentos ou faltas.

A American Airlines foi pioneira na aplicação do RM na indústria aérea com o desenvolvimento do sistema DINAMO (Dynamic Inventory and Maintenance Optimizer), considerado o primeiro sistema operacional de RM. Esse sistema possibilitou o aumento da rentabilidade ao controlar a disponibilidade de assentos por classes tarifárias, antecipando o comportamento da demanda e segmentando os passageiros com base em sua disposição a pagar (Smith et al., 1992).

Nas suas fases iniciais, o RM baseava-se em modelos estáticos para a alocação ótima de capacidade entre diferentes classes tarifárias. Um dos primeiros modelos formais foi a Regra de Littlewood (Littlewood, 2005), que sugeria aceitar uma reserva de uma classe com tarifa mais baixa apenas se a receita esperada por manter o assento disponível para uma classe superior fosse inferior à tarifa oferecida. Essa regra foi posteriormente estendida por (Belobaba, 1987), que introduziu o modelo EMSR (Expected Marginal Seat Revenue), generalizando o princípio de Littlewood para múltiplas classes tarifárias. O EMSR tornou-se um padrão nos sistemas comerciais de RM e, até hoje, continua sendo utilizado em versões adaptadas.

Com o aumento da complexidade das redes de voos, surgiu a necessidade de otimizar não

apenas cada voo individualmente, mas também a rede como um todo. Essa demanda levou ao desenvolvimento do conceito de Network Revenue Management (NRM), que considera as interdependências entre voos conectados. Pesquisadores como ([Gallego and van Ryzin, 1997](#)) propuseram modelos de controle estocástico baseados em programação dinâmica para maximizar a receita esperada em redes sob incerteza de demanda. ([Williamson, 1992](#)) desenvolveu metodologias de controle de inventário em redes aéreas com múltiplas classes tarifárias.

Um componente crítico do RM no setor aéreo tem sido o gerenciamento de overbooking, ou seja, a prática de aceitar mais reservas do que a capacidade física disponível, com o objetivo de compensar cancelamentos e a ausência de passageiros. ([Brumelle and McGill, 1993](#)) propuseram modelos probabilísticos que determinam níveis ótimos de sobre venda, equilibrando a receita esperada com o risco de incorrer em custos com compensações. Esses modelos têm sido essenciais para aprimorar a eficiência de ocupação sem comprometer a experiência do passageiro.

Durante a segunda metade da década de 1990, a abordagem do RM evoluiu para modelos mais dinâmicos e adaptativos. ([Talluri and van Ryzin, 1998](#)) introduziram os controles por preços sombra (bid-price controls), uma técnica de implementação eficiente para redes, que estabelece limites mínimos de aceitação com base no valor marginal esperado de um assento. Paralelamente, ([Gallego and van Ryzin, 1994](#)) desenvolveram modelos de precificação dinâmica ótima sob demanda estocástica e horizonte finito, integrando a definição de preços ao modelo de alocação de capacidade — um marco importante na transição para uma gestão conjunta de tarifas e recursos.

No final da década de 1990 e início dos anos 2000, a literatura passou a incorporar também o componente comportamental do consumidor. ([McGill and van Ryzin, 1999](#)) realizaram uma revisão crítica da pesquisa em Revenue Management, destacando a necessidade de compreender melhor a percepção dos consumidores diante de políticas tarifárias complexas. Nesse período, começou-se a considerar o comportamento estratégico do passageiro, no qual os consumidores ajustam suas decisões de compra antecipando possíveis alterações nos preços ou na disponibilidade futura. Esse fenômeno introduziu um novo nível de complexidade ao campo, exigindo modelos capazes de prever não apenas a demanda, mas também as reações racionais dos passageiros.

No final dos anos 2000, a pesquisa em Revenue Management passou a se diversificar para cenários com incerteza, substituição de produtos e decisões estruturais. ([Birbil et al., 2009](#)) propuseram modelos robustos de alocação de assentos sob incerteza, enquanto ([Zhang and Cooper, 2009](#)) in-



introduziram processos de decisão de Markov para preços em voos substituíveis, representando uma transição para estratégias de precificação sensíveis ao contexto competitivo. Ambos os estudos expandiram o arcabouço tradicional, incorporando a análise de concorrência direta e decisões de natureza estrutural.

Nos anos seguintes, ([Huang and Liang, 2011](#)) avançaram no desenvolvimento de algoritmos de programação dinâmica para problemas de rede, utilizando aproximações de receitas esperadas. Paralelamente, ([Rusdiansyah et al., 2013](#)) aplicaram modelos de precificação dinâmica que consideram a variação de inventário e o comportamento dos concorrentes. Já ([Aslani et al., 2014](#)) exploraram a percepção de justiça tarifária com o uso de heurísticas e simulações, destacando o conflito entre equidade percebida e maximização de receita.

Entre 2015 e 2018, surgiram modelos que integravam controle de capacidade, sobrevenda e cancelamentos. ([Otero and Akhavan-Tabatabaei, 2015](#)) apresentaram um modelo estocástico de precificação dinâmica em contextos multiclasse, ampliando a literatura ao incorporar estruturas mais realistas de demanda. ([Wang et al., 2018](#)), por sua vez, demonstraram que a alocação dinâmica de capacidade em canais de venda diferenciados aumenta a receita e reduz custos com intermediários, reforçando a importância de decisões simultâneas em ambientes multicanal.

Mais recentemente, observou-se o uso crescente de técnicas de otimização combinatória e modelos de programação estocástica inteira. ([Li et al., 2022](#)) desenvolveram um modelo combinado para alocação de assentos e upgrade de classe sob incerteza. ([Fukushi et al., 2022](#)) integraram simulação com modelos de escolha discreta, capturando o comportamento heterogêneo dos passageiros e permitindo decisões personalizadas de precificação e capacidade. Esses avanços consolidam um arcabouço integrado que une demanda, precificação e disponibilidade em ambientes simulativos.

Paralelamente, o uso de aprendizado profundo tem revolucionado a previsão de demanda. ([He et al., 2023](#)) aplicaram redes do tipo Long Short-Term Memory (LSTM) para prever a demanda aérea, obtendo uma melhora significativa na acurácia das previsões em relação aos métodos tradicionais - com uma redução de 45,1% no erro absoluto médio. Esse tipo de abordagem facilita a tomada de decisão adaptativa em tempo real, fator essencial em mercados altamente voláteis.

Além disso, a aplicação de machine learning permitiu aprimorar estratégias de precificação personalizada. ([Thirumuruganathan et al., 2023](#)) desenvolveram o modelo Price Elasticity Model (PREM), capaz de identificar segmentos com maior propensão a aceitar upgrades de classe. Uti-

lizando uma base com mais de 64 milhões de registros, o modelo previu um aumento de 37,2% na receita proveniente de ofertas aceitas e uma redução de 7,94% no envio de ofertas irrelevantes, evidenciando o valor da segmentação baseada no comportamento do consumidor.

### 2.4.2 Hotelaria

Na indústria hoteleira, o RM é aplicado para maximizar a receita por quarto disponível (RevPAR), considerando a variação de preços e a ocupação dos quartos. Os hotéis utilizam técnicas de previsão de demanda para ajustar suas tarifas em tempo real, levando em conta fatores como sazonalidade, eventos locais e comportamento do consumidor. A segmentação de clientes também desempenha um papel crucial, permitindo que os hotéis ofereçam pacotes personalizados e promoções direcionadas.

Entre 2006 e 2008, os estudos sobre gestão de receitas no setor hoteleiro passaram a sistematizar os fundamentos do RM aplicados ao contexto da hospitalidade. ([Avinal, 2006](#)) apresentou uma análise dos sistemas de gestão de receitas (RMS) sob uma perspectiva estratégica e operacional, destacando seu principal objetivo: maximizar a receita por meio de técnicas de precificação dinâmica e controle da duração da estadia. Ressaltou-se a importância da integração entre os RMS e os sistemas de gestão de propriedades (PMS), bem como da aplicação de regras operacionais — como datas específicas de chegada e estadias mínimas — para segmentar a demanda, especialmente entre os públicos corporativo e de lazer. Esse período também se caracteriza pela identificação de fatores críticos de sucesso, como o comprometimento da liderança, a avaliação contínua do desempenho dos sistemas e a capacitação da equipe para alimentar os algoritmos com dados confiáveis e de alta qualidade.

No intervalo de 2009 a 2012, consolida-se uma abordagem mais estrutural e sistêmica da gestão de receitas na hotelaria. ([Ivanov and Zhechev, 2011](#)) propuseram uma revisão crítica do RM hoteleiro, organizando-o como um sistema composto por centros geradores de receita (quartos, alimentos e bebidas, eventos, spa), ferramentas de precificação (como discriminação de preços e garantias de tarifa mínima), processos operacionais (controle de overbooking e gestão de disponibilidade) e fases sequenciais que abrangem a coleta de dados, análise, previsão, tomada de decisão, implementação e monitoramento. Além disso, os autores introduzem uma discussão inovadora sobre os aspectos éticos do RM, relacionados à percepção de justiça por parte dos clientes,

e reforçam a necessidade de integração entre o RM e os sistemas de gestão de relacionamento com o cliente (CRM), estabelecendo as bases para abordagens mais centradas no consumidor em etapas posteriores.

Durante o triênio de 2013 a 2015, a atenção da literatura se volta à implementação de modelos estatísticos avançados. Observa-se a adoção sistemática de métodos como o modelo ARIMA com sazonalidade (SARIMA), modelos de suavização exponencial com dupla sazonalidade (Holt-Winters) e regressões com variáveis econômicas exógenas. Embora fora do intervalo em questão, o estudo de ([Pereira, 2016](#)) é representativo dessa linha de pesquisa, ao aprofundar o uso de séries temporais de alta frequência (diárias), com múltiplos e complexos padrões de demanda. Esses métodos passam a servir de base para avaliar o desempenho de abordagens mais recentes baseadas em inteligência artificial, estabelecendo métricas comparativas para medir o valor agregado por modelos emergentes.

Entre 2016 e 2018, tem início a incorporação sistemática de modelos de aprendizado de máquina (machine learning, ML) na previsão de demanda hoteleira. ([Henriques and Pereira, 2024](#)) explicam que, nesse período, os estudos passaram a combinar técnicas estatísticas tradicionais com algoritmos de ML, ampliando a capacidade preditiva ao integrar grandes volumes de dados estruturados e não estruturados. Destacam-se modelos como as redes neurais artificiais (ANN), máquinas de vetores de suporte (SVM) e regressões regularizadas (como Ridge e Lasso), aplicados tanto a séries históricas quanto a reservas futuras, com destaque para o uso do modelo pickup. Esta fase também revela uma preocupação crescente com a qualidade dos dados, a seleção de variáveis relevantes e a robustez dos modelos diante de padrões não lineares e oscilações no comportamento do consumidor.

A partir de 2019 e até 2021, observa-se uma expansão significativa das técnicas de deep learning (DL) na previsão de demanda na hotelaria. ([Dowlut and Gobin-Rahimbux, 2023](#)) documentam essa evolução por meio de uma revisão sistemática que contempla 50 artigos publicados entre 2017 e 2022. O estudo identifica as redes neurais LSTM (Long Short-Term Memory) como a arquitetura mais adotada, devido à sua capacidade de capturar dependências temporais de longo alcance e lidar com séries com alta sazonalidade. Além disso, surgem modelos híbridos, como o CNN-LSTM, que combinam a extração de características espaciais das redes convolucionais com o modelamento sequencial das LSTM. Essa etapa também marca o uso de algoritmos como Ran-

dom Forest, XGBoost e técnicas de ensemble dinâmico, como stacking e arbitrating. (Pereira and, 2022), por exemplo, compararam 22 modelos e constataram que o uso de ML pode reduzir o RMSE em até 54% em previsões de curto prazo, quando comparado a abordagens tradicionais.

Entre 2022 e 2024, a literatura passa a adotar soluções ainda mais avançadas, como o aprendizado por reforço (Reinforcement Learning, RL) e a integração da IA a ecossistemas digitais inteligentes. (Chen et al., 2023) apresentam a aplicação de um modelo de RL em uma rede hoteleira na China, totalmente integrado ao sistema ERP corporativo. Por meio de um experimento de campo controlado, o sistema obteve melhorias significativas em métricas-chave, como taxa de ocupação (OR), tarifa média diária (ADR) e RevPAR, superando de forma consistente o grupo de controle. O algoritmo demonstrou capacidade para tomada de decisão automatizada, adaptativa e em tempo real, evidenciando o potencial da IA para substituir intervenções manuais na gestão de receitas diária. Em paralelo, (Henriques and Pereira, 2024) desenvolvem uma revisão sobre a aplicação da IA na hotelaria, na qual destacam a consolidação de modelos híbridos que integram LSTM, SVR, Random Forest e XGBoost com dados internos (reservas, cancelamentos, tarifas) e dados externos (eventos, clima, avaliações de clientes e preços da concorrência). Além disso, propõem um enfoque de “smart hospitality”, voltado à sustentabilidade, personalização, decisões orientadas por feedback digital e à construção de sistemas autônomos e inteligentes.

Por fim, (Shaik, 2024) inaugura uma nova linha de investigação com os chamados LangChain Models, uma arquitetura de IA encadeada que integra previsão de demanda, precificação dinâmica, otimização de inventário e gestão da percepção de justiça em um sistema único e interconectado. Esses modelos são projetados para operar em tempo real dentro de ecossistemas hoteleiros 4.0, os quais incorporam tecnologias como blockchain, robótica e reconhecimento facial. A proposta busca substituir progressivamente as decisões humanas táticas por processos automatizados, inteligentes e sustentáveis em rede.

De forma geral, essa evolução representa uma transformação profunda nas abordagens de previsão de demanda hoteleira, que passaram de metodologias manuais e estáticas para sistemas altamente automatizados, adaptativos e integrados. As contribuições analisadas não apenas aumentam a precisão preditiva, mas também redefinem o papel do gestor de receitas, que passa a atuar como um estrategista de soluções inteligentes, sustentáveis e centradas no cliente. O uso crescente da IA abre caminho para sistemas que não apenas maximizam receitas, mas também promovem uma

gestão ética, personalizada e resiliente frente a ambientes competitivos e em constante mudança.

## 2.5 Contextualização desta pesquisa

Para contextualizar essa pesquisa dentro do estado da arte, a Tabela 2.1 apresenta uma síntese dos estudos mais relevantes sobre o transporte ferroviário de passageiros nos últimos 25 anos.

Tabela 2.1: Resumo dos trabalhos revisados

Autor(es)	Objetivo	Multi-Trem	Indústria	Tipo de função objetivo	Modelagem	Método de solução	Tipo de Demanda	Inteligência artificial
Claessens et al. (1998)	Minimizar os custos operacionais, ao mesmo tempo que designa as rotas	Não	Ferrovária	Objetivo único	MIP	Aproximado	-	-
(Chang et al., 2000)	Minimizar os custos totais e minimizar a perda de tempo de viagem, ao mesmo tempo em que determina o plano ideal de paradas	Não	Ferrovária	Multi-objetivo	Matemática difusa	Exata	Independente	-
(Maged M. Dessouky and Leachman, 2006)	Determinar os tempos ótimos de partidas dos trens	Sim	Ferrovária	-	-	Algoritmo de ramificação	-	-
(Zhang and Adelman, 2009)	Maximizar a receita	-	Aérea	Objetivo único	Programação dinâmica	Algoritmo de geração de colunas	Comportamental	-
(Corman et al., 2011)	Reprogramar trens com diferentes classes prioritárias	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Formulação gráfica	Aproximado	-	-
(Erdelyi Alexander, 2011)	Maximizar a receita, ao mesmo tempo que define os preços	-	Aérea	Objetivo único	Programação linear determinística	Aproximado	-	-
(Hetrukul and Cirillo, 2013)	Maximizar a receita, ao mesmo tempo que encontra a melhor distribuição da demanda	Não	Ferrovária	Objetivo único	Modelos logit multinomial, classe latente e logit misto	Aproximado	Comportamental	-
(Hetrukul and Cirillo, 2014)	Maximizar as receitas, enquanto se realiza a definição de preços e a alocação de assentos	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Estocástica (MNL e LC)	Aproximado	-	-
(Wen and Chen, 2017)	Examinar a relação entre o momento da compra de passagens aéreas e diferentes características do viajante	-	Aérea	Objetivo único	Programação não linear	Exata	-	-
(Qi et al., 2018)	Minimizar o número de assentos vazios e o número total de paradas	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Programação linear de volume duplo de integração mista	Exata	Independente	-
(Xu et al., 2018)	Minimizar os custos de reserva antecipada ao escolher itinerários	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Programação linear usando multiplicadores de Lagrange	Exata	Independente	-
(Sun et al., 2018)	Previsão das escolhas dos passageiros do trem de alta velocidade (HSR) quanto aos horários de compra de passagens, tipos de trem e classes de viagem	-	Ferrovária	Objetivo único	Modelo de aprendizado de máquina não paramétrico	Aproximado	-	Regressão vetorial (SVR); Redes neurais artificiais (ANN)
(Zhao and Zhao, 2019)	Maximizar a receita, ao mesmo tempo que calcula a reserva de assentos	Sim	Ferrovária	Objetivo único	LP	Aproximado	Comportamental	-
(Barbier et al., 2020)	Maximizar a receita, controlando o estoque de assentos homogêneos	-	Aérea	Objetivo único	MIP	Aproximado	Comportamental	-
(Agasucci et al., 2023)	Otimizar o despacho de trens	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Abordagem de aprendizado Q profundo	Aproximado	-	Deep Q-Learning (Descentralizado e Centralizado)
(Sarhani and Voß, 2024)	Melhorar a previsão de atrasos de trens	-	Ferrovária	Objetivo único	Aprendizado de máquina	-	-	Aprendizado de máquina
(Tang et al., 2025)	Reduzir o tempo total de atraso do trem	Sim	Ferrovária	Objetivo único	Modelo de aprendizado por reforço profundo multitarefa	Aproximado	-	Aprendizado por reforço e redes neurais
Esta pesquisa	Maximizar a receita, ao mesmo tempo em que calcula as autorizações e reservas de assentos	Não	Ferrovária	Objetivo único	MIP	Exata	Comportamental	-

É importante destacar que esta pesquisa está fundamentada em características clássicas que são comuns a diversas investigações realizadas até o momento, conforme ilustrado na Tabela 2.1.

Contudo, embora o enfoque metodológico adotado compartilhe semelhanças com os estudos revisados, a proposta apresentada se distingue pela aplicação simultânea de abordagens baseados em problemas de transporte de veículos e fluxos em redes. Embora essas abordagens individuais já tenham sido exploradas de forma separada na literatura, não se encontrou um modelo que integre ambas as perspectivas ao mesmo tempo.

Dessa forma, o trabalho desenvolvido representa uma contribuição relevante ao avaliar e validar a eficiência dessa combinação de abordagens, fornecendo novas perspectivas para a resolução do problema de transporte ferroviário de passageiros do ponto de vista do RM.

## CAPÍTULO 3

## Metodologia

## 3.1 Instâncias

Para verificar as características dos modelos propostos, foram utilizadas 10 instâncias reais fornecidas por uma empresa canadense parceira. As características de cada uma dessas instâncias estão apresentadas na Tabela 3.1.

Instância	Nome Trem	Capacidade Trem	Data Partida	# Trechos	# Períodos	# Classes
Inst1	68	561	2023-11-21	256	120	15
Inst2	13	637	2023-11-26	252	146	15
Inst3	71	563	2023-10-13	250	105	16
Inst4	71	561	2023-11-21	241	124	15
Inst5	8	561	2022-12-04	152	116	17
Inst6	40	565	2023-11-21	149	68	16
Inst7	74	491	2023-07-25	136	70	16
Inst8	72	493	2023-10-25	100	85	16
Inst9	45	563	2023-03-16	90	73	16
Inst10	15	493	2023-08-07	50	60	12

Tabela 3.1: Resumo das instâncias utilizadas no experimento

A coluna "# Trechos" representa a quantidade de trechos que a viagem do trem possui em cada instância. A coluna "# Períodos" indica a quantidade de períodos considerados na programação

desse trajeto dentro do seu horizonte de reserva. Por fim, a coluna "# Classes" mostra o número máximo de classes disponíveis para cada viagem de cada trem; Observe que, para cada trecho, podem estar disponíveis todas as classes indicadas na coluna correspondente ou uma quantidade menor.

Por outro lado, estabeleceu-se que as instâncias compreendidas entre a instância Inst1 e a instância Inst4 foram classificadas como grandes, as instâncias entre a instância Inst5 e a instância Inst7 como médias, e as demais foram classificadas como pequenas.

## 3.2 Modelos Matemáticos

Foram abordados dois enfoques distintos para o desenho dos modelos. O primeiro enfoque, baseado nos tipos de demanda, abrange a demanda independente e a demanda comportamental. O segundo enfoque trata da indexação das passagens autorizadas para venda, sendo classificado em estático e dinâmico. No enfoque estático, a quantidade de assentos a serem autorizados é calculada para todo o horizonte de reserva de uma vez, sem considerar variações temporais. Já no enfoque dinâmico, os assentos autorizados são calculados por períodos dentro do horizonte de reserva, levando em conta a evolução da demanda ao longo do tempo.

Os dois enfoques resultaram em quatro modelos distintos, conforme ilustrado na Figura X. No entanto, os autores desta pesquisa buscaram analisar como a solução de cada modelo variava ao adicionar ou remover os conjuntos de restrições específicos (fulfillment over periods e skip lagging). Para isso, cada modelo foi inicialmente dividido em uma versão básica, à qual foram incorporados, de forma separada, os conjuntos de restrições. Por fim, obteve-se o modelo completo, que inclui todos os conjuntos de restrições. Essa classificação pode ser visualizada na Tabela X.



Tipo de Autorização	Tipo de Demanda	Modelo	Nome do Modelo
Estática	Independente	Modelo Básico	Model_Basic_Independ_Est
		Modelo <i>fulfillments over periods</i>	Model_Fulfill_Independ_Est
		Modelo <i>skip lagging</i>	Model_Skipla_Independ_Est
		Modelo Completo	Model_Comp_Independ_Est
	Comportamental	Modelo Básico	Model_Basic_Comporta_Est
		Modelo <i>fulfillments over periods</i>	Model_Fulfill_Comporta_Est
		Modelo <i>skip lagging</i>	Model_Skipla_Comporta_Est
		Modelo Completo	Model_Comp_Comporta_Est
Dinâmica	Independente	Modelo Básico	Model_Basic_Independ_Din
		Modelo <i>fulfillments over periods</i>	Model_Fulfill_Independ_Din
		Modelo <i>skip lagging</i>	Model_Skipla_Independ_Din
		Modelo Completo	Model_Comp_Independ_Din
	Comportamental	Modelo Básico	Model_Basic_Comporta_Din
		Modelo <i>fulfillments over periods</i>	Model_Fulfill_Comporta_Din
		Modelo <i>skip lagging</i>	Model_Skipla_Comporta_Din
		Modelo Completo	Model_Comp_Comporta_Din

### 3.3 Ferramentas e ambiente computacional

O experimento foi conduzido em um computador ASUS, com sistema operacional Windows 11 Pro de 64 bits. O equipamento conta com um processador Intel(R) Core(TM) i9-13900KF (32 CPUs) de 13ª geração, com frequência de 3.0 GHz e arquitetura x64, 128 GB de memória RAM e tarjeta grafica NVIDIA GeForce RTX 4070 Ti de 16GB de ram.

Para o desenvolvimento e execução do experimento, foi utilizada a linguagem de programação Python na versão 3.12.7, juntamente com o solver Gurobi, versão 12.0.2.

## CAPÍTULO 4

---

### Modelagem matemática

---

#### 4.1 Descrição do problema

O problema em análise considera um trem com diferentes tipos de assentos que realizará uma viagem entre uma estação de origem  $E_1$  e uma estação de destino final  $E_n$  (onde  $n$  representa a última estação da rota). Esse trem terá um itinerário que inclui o nome do trem, a estação de origem, a estação de destino, bem como a data e o horário de partida.

Os assentos disponíveis são classificados conforme suas características — por exemplo, VIP, padrão, entre outros. Para cada tipo de assento, será definida uma lista de preços a ser disponibilizada para venda. Cada preço dessa lista é denominado *classe de controle* (control class). Os bilhetes serão oferecidos ao público antes da partida do trem, sendo o intervalo entre o início das vendas e o momento da partida denominado *horizonte de reserva*. Esse horizonte será segmentado em diversos períodos, que podem adotar diferentes granularidades temporais, como dias, semanas ou meses, inclusive de forma combinada. Os períodos são organizados de forma decrescente, sendo que o valor zero corresponde à data de partida, e o maior valor representa o início da disponibilização dos bilhetes, formando a sequência  $[t, t - 1, t - 2, \dots, 0]$ .

Diante dessas condições, o objetivo é controlar a disponibilidade de assentos — tanto os reservados quanto os autorizados para venda — em cada período do horizonte de reserva, visando à

maximização do lucro total obtido com a comercialização dos assentos reservados.

Para alcançar esse objetivo, o modelo deve considerar restrições que assegurem: a capacidade física do trem, a integridade das variáveis inteiras, a relação entre os assentos reservados e a demanda, bem como a coerência entre os assentos reservados e os efetivamente disponibilizados para venda.

Essas restrições compõem o *modelo básico*. No entanto, esta pesquisa propõe a inserção de dois conjuntos adicionais de restrições, que, segundo os autores, refletem práticas amplamente utilizadas em ambientes reais. Esses conjuntos são: as restrições do tipo *Fulfillments over Periods*, relacionadas a condições temporais; e as restrições do tipo *Skip Lagging*, associadas ao padrão de paradas do trem. Onde, o primeiro conjunto garante que: i) Os preços das classes de controle ofertadas devem aumentar progressivamente à medida que se aproxima a data de partida do trem; ii) Uma determinada classe de controle para um trecho específico só poderá ser reservada se já tiver sido reservada em um período anterior dentro do horizonte de reserva.

Já o segundo conjunto assegura que: i) Os passageiros não possam adquirir bilhetes para estações posteriores com a intenção de desembarcar antes do destino indicado no bilhete. Ou seja, para uma origem dada, os preços das passagens para destinos mais distantes devem ser proporcionais à distância percorrida; ii) Para um par origem-destino, a soma dos preços dos trechos intermediários contínuos não deve ser inferior ao valor de uma passagem direta.

Por fim, é importante destacar um conceito essencial: o tipo de demanda considerado. Neste trabalho, serão utilizadas duas abordagens: a **Demanda independente**: caracterizada por decisões de compra que não consideram a oferta disponível no momento da compra; e a **Demanda comportamental**: baseada em listas de preferência, nas quais os passageiros escolhem entre diferentes preços conforme sua disponibilidade e preferências no momento da compra.

## 4.2 Formulação matemática

Para facilitar a compreensão da proposta, apresenta-se a seguir uma versão simplificada do problema, conforme ilustrado na Figura 4.1, na qual são considerados os seguintes elementos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.

- O trem tem uma capacidade física máxima de assentos;
- Há apenas um tipo de classe de controle;
- Existe apenas um período no horizonte de reserva;
- Considera-se, neste caso, apenas a variável de decisão associada à quantidade de assentos reservados em um trecho com origem e destino específicos;
- Todos os assentos reservados serão vendidos;
- É considerada um tipo de demanda independente;
- É considerada somente a restrição de capacidade física do trem.

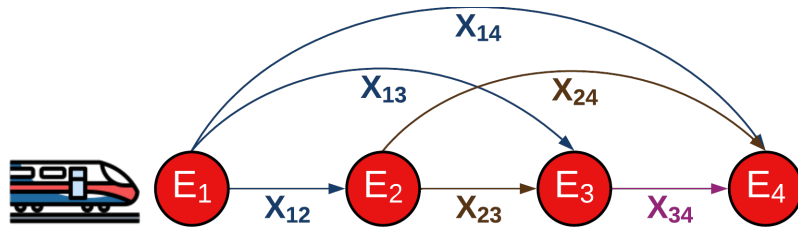


Figura 4.1: Versão gráfica simples do Problema de Transporte Ferroviário de Passageiros

Com base no exposto, é possível definir os seguintes parâmetros e variáveis de decisão:

$x_{ij}$  : Quantidade de assentos que serão reservados no trecho com origem em  $i$  e destino em  $j$ , onde  $j > i$  (variável de decisão);

$A_i$  : Quantidade de assentos vagos na estação  $i$ ;

$P_{ij}$  : Preço da passagem no trecho com origem em  $i$  e destino em  $j$ ;

$Q$  : Capacidade física do trem.

Assim, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível reserva em cada trecho  $(i, j)$ , matematicamente seria:

$$FO : \max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$$

s.a.

$$\text{Estação 1: } x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1 \quad \text{onde } A_1 = Q$$

$$\text{Estação 2: } x_{23} + x_{24} \leq A_2 \quad \text{onde } A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$$

$$\text{Estação 3: } x_{34} \leq A_3 \quad \text{onde } A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$$

Observe que as restrições de capacidade são aplicadas apenas às três primeiras estações —  $E_1, E_2$  e  $E_3$  —, já que são as únicas que possuem pelo menos um destino associado. A estação  $E_4$  é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a quantidade de assentos vagos do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na Figura 4.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

		DESTINOS			Disponibilidade (A)	Não Atribuídos
		E2	E3	E4		
ORIGENS	E1	$X_{12}$ 10	$X_{13}$ 5	$X_{14}$ 15	100	70
	E2	...	$X_{23}$ 40	$X_{24}$ 20	$70 + 10$	20
	E3	...	...	$X_{34}$ 60	$20 + 5 + 40$	5

Figura 4.2: Solução factível para o problema simplificado

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja,  $A_1 = 100$ , e que a soma das variáveis seria  $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$ . Portanto, a restrição é satisfeita com  $30 \leq 100$ , ou seja, foram reservados 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para reservar em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos  $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$ . Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso  $x_{12} = 10$ . Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para reservar, é assim que a restrição é cumprida com  $60 \leq 80$ . Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3,  $x_{13} = 5$  e  $x_{23} = 40$ , assim teríamos  $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$ , e no final, a restrição é satisfeita com  $60 \leq 65$ .

Nas seções seguintes, para cada abordagem, serão apresentados os modelos propostos, iniciando por um modelo base, em seguida, a esse modelo base serão adicionados, de forma separada, tanto os conjuntos de restrições do tipo Fulfillment over periods quanto os conjuntos de restrições do tipo Skip Lagging. Por fim, também será apresentado o modelo completo, no qual todos os conjuntos de restrições são incorporados simultaneamente.

## 4.3 Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente e autorizações estáticas

Nos modelos desta seção, considera-se uma demanda independente, ou seja, assume-se que cada cliente realiza sua decisão de compra de forma isolada em relação à oferta disponível no momento da aquisição. Em termos práticos, isso implica que, se um passageiro estiver disposto a pagar, por exemplo, R\$10 por um determinado assento, ele efetuará a compra apenas se encontrar esse valor específico, mesmo que existam tarifas mais baixas disponíveis. Caso não encontre o preço correspondente à sua disposição de pagamento, optará por não realizar a compra.

### 4.3.1 Modelo básico independente

O modelo base é composto pelas restrições fundamentais que estruturam o problema em estudo. Essas restrições definem os limites operacionais e lógicos essenciais para garantir a viabilidade da solução, refletindo as condições básicas do sistema ferroviário de transporte de passageiros, como a capacidade física do trem, a integridade das variáveis inteiras, a relação entre os assentos reservados e a demanda, bem como a coerência entre os assentos reservados e os efetivamente disponibilizados para venda.

Então, para esta proposta considere os seguintes conjuntos:

$O$  : Conjunto de estações de origem.

$D$  : Conjunto de estações de destino.

$OD$  : Conjunto de trechos com itinerário.

$V$  : Conjunto de tipos de assento do trem.

$T$  : Conjunto de períodos.

$K_v$  : Conjunto das classes de controle para cada tipo de assento  $v$ . Onde os índices de cada  $K_v$  estão em ordem decrescente, enquanto seus valores são crescentes.

Considere os seguintes parâmetros:

$Q_v$  : Capacidade física do trem para cada tipo de assento  $v$ , onde  $v \in V$ .

$P_{ijk}$  : Preços das passagens no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$  e classe de controle  $k$ , onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v$ .

$d_{ijvkt}$  : Demanda independente no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$ , classe de controle  $k$  e período  $t$ , onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

Considere as seguintes variáveis de decisão:

$X_{ijvkt}$  : Quantidade de passagens reservadas no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$  e com classe de controle  $k$  no período  $t$ , onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

$Y_{ijvk}$  : Quantidade de passagens autorizadas em todo o horizonte de reserva, no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$  e com classe de controle  $k$ , onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v$ .

Considere a seguinte variável auxiliar:

$A_{iv}$  : Armazena a quantidade de assentos vazios disponíveis para venda em cada estação de origem  $i$  e cada tipo de assento  $v$  durante todo o horizonte de reserva, onde  $i \in O, v \in V$ . Cabe esclarecer que esta não é uma variável de decisão, pois esta variável apenas armazena um cálculo com base na capacidade física do trem e nas variáveis de decisão de passagens reservadas.

## Modelo

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

Em primeiro lugar, define-se a função objetivo conforme apresentada na equação (4.1). Observa-se que seu propósito é maximizar a receita total, considerando as quantidades de assentos reservados para cada combinação de trechos, tipo de assento, classes de controle e períodos, ponderadas pelos respectivos preços associados.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

A restrição (4.2) tem como finalidade calcular, de forma sistemática, a quantidade de assentos disponíveis em cada estação de origem em todo o horizonte de reserva. Essa formulação representa uma generalização do procedimento apresentado no exemplo simplificado utilizado anteriormente para o cálculo de  $A_i$ , expandindo-o para capturar a dinâmica completa do sistema ao longo do tempo, entre múltiplas classes de controle e considerando cada tipo de assento de forma específica.

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijk,t} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

A variável de decisão  $Y_{ijk}$  adota uma estrutura do tipo nesting, onde cada classe tarifária mais cara (classe “pai”) engloba todas as classes mais baratas (classes “filhas”). Nesse encadeamento, todas as classes possuem um pai e um filho, com exceção da classe mais cara — que não possui pai — e da classe mais barata — que não possui filho. Dessa forma, o valor mínimo da variável  $Y_{ijk}$  para uma determinada classe deve ser igual ou superior à soma das reservas dessa própria classe e das autorizações concedidas à sua classe filha (como visto na Figura 4.3 para as classes 1,2,3). A restrição (4.3) formaliza esse comportamento especificamente para a classe mais barata, enquanto a restrição (4.4) garante essa hierarquia para as demais classes de controle.

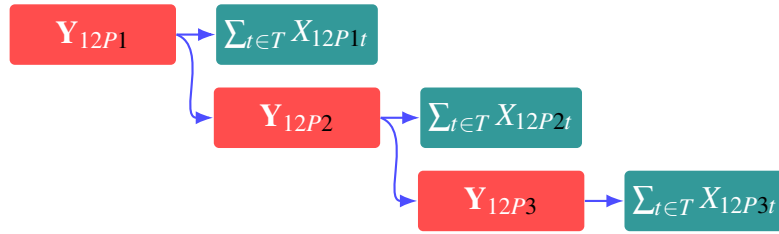


Figura 4.3: Exemplo de nesting para o trecho  $E_1 - E_2$  e tipo de assento  $P$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i,j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

Considerando que a variável  $Y_{ijk}$  é do tipo nesting e levando em conta as duas restrições (4.3) e (4.4), fica evidente que a classe mais cara engloba as quantidades das demais classes; portanto, deve-se assegurar que ela não exceda o número de assentos vazios. Essa condição é garantida pela restrição (4.5).

$$X_{ijk,t} \leq d_{ijk,t}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.6)$$

A restrição (4.6) assegura que, para cada trecho, classe, tipo de assento e período do horizonte de reserva, a quantidade de passagens reservadas não exceda a demanda correspondente.

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijk,t} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$



As restrições (4.7) e (4.8) são usadas para inicializar a restrição (4.2) quando  $i = 1$ . E as restrições de (4.9) a (4.11) representam o domínio das variáveis.

Assim, o modelo **Model\_Basic\_Independ\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i,j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.6)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Modelo fulfillments over periods independente

Lembrando que as restrições do tipo fulfillment over periods referem-se ao atendimento de determinados níveis de serviço, demanda ou capacidade ao longo do horizonte de reservas, este modelo adiciona, ao modelo básico, um conjunto de restrições que definem quando assentos em determinadas classes devem ser reservados ou não. Além disso, deve-se garantir algumas regras para os preços das classes em função do tempo. Para este fim, devem ser adicionadas as seguintes variáveis de decisão:

$\beta_{ijvkt}$  : É uma variável binária que toma o valor de 1 quando a classe  $k$  é a classe mais barata que foi autorizada para venda, no trecho  $(i,j)$ , tipo de assento  $v$  e período  $t$ ; e toma valor de 0 caso contrario, onde  $(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

$\alpha_{ijvkt}$  : É uma variável binária que toma o valor de 1 quando  $X_{ijvkt} \neq 0$  e toma valor de 0 caso contrario, onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

### Restrições:

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$


A restrição (4.12) é utilizada para determinar quando a variável de decisão  $X$  assume valores diferentes de zero e quando não. Assim,  $\alpha$  toma o valor de 1 no primeiro caso e 0 no segundo.

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K/k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

As restrições (4.13) e (4.14) têm como objetivo identificar a classe de assento mais barata reservada em um determinado trecho, tipo de assento e período. A restrição (4.13) é utilizada exclusivamente para as classes mais baratas, enquanto a restrição (4.14) se aplica às demais classes de assento. Assim, a variável  $\beta$  assume o valor de 1 quando a classe  $k$  é a mais barata reservada e 0 caso contrário (veja a Figura 4.4).

	$E_1 - E_2$		
Classe	X	$\alpha$	$\beta$
1	10	1	1 - 1
2	5	1	1 - 0
3	0	0	0



	$E_1 - E_2$		
Classe	X	$\alpha$	$\beta$
1	10	1	0
2	5	1	1
3	0	0	0

Figura 4.4: Exemplo cálculo da variável  $\beta$  para o trecho  $E_1 - E_2$ , um período e um tipo de assento

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T/t \neq \max\{T\} \quad (4.15)$$

Uma condição importante estabelece que uma classe pode ser reservada desde que essa mesma classe já tenha sido reservada em períodos anteriores. Para isso, definem-se a restrição (4.15). Cabe lembrar que o tempo  $t$  representa os  $t$  períodos antes da saída do trem, sendo que a partida do trem ocorre em  $t = 0$ .

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T/t \neq \max\{T\} \quad (4.16)$$

Outra condição especial deste problema está relacionada à disponibilização dos preços dos bilhetes

ao longo do tempo. Esses preços devem seguir uma lógica contínua, sem oscilações. Em outras palavras, os preços dos bilhetes devem sempre aumentar conforme a data de partida do trem se aproxima. A restrição (4.16) é responsável por garantir que essa condição seja atendida.

Assim, o modelo **Model\_Fulfill\_Independ\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i,j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.6)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

#### Restrições fulfillments over periods

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.15)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.16)$$

### 4.3.3 Modelo skip lagging independente

A seguir, apresenta-se um modelo que incorpora restrições de skip lagging. O skip lagging envolve a possibilidade de reservar um assento para um destino intermediário, mas com a intenção de não completar a viagem até o destino final. Este modelo propõe restrições que regulam a viabilidade e as condições em que o skip lagging pode ser aplicado, considerando a gestão de capacidade, as políticas de precificação e os níveis de serviço a serem atendidos ao longo do horizonte de reservas. para esse fim, devem ser adicionadas as seguintes:

Variáveis de decisão (mesmas usadas no modelo de fulfillments over periods):

- $\beta_{ijvkt}$  : É uma variável binária que toma o valor de 1 quando a classe  $k$  é a classe mais barata que foi autorizada para venda, no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$  e período  $t$ ; e toma valor de 0 caso contrario, onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .
- $\alpha_{ijvkt}$  : É uma variável binária que toma o valor de 1 quando  $X_{ijvkt} \neq 0$  e toma valor de 0 caso contrario, onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

Conjuntos:

- $NAD$  : Conjunto de trechos que NÃO são adjacentes e que tem itinerário.
- $CR_{(o,d)}$  : É um conjunto que contém outros subconjuntos, onde cada subconjunto é uma rota possível para ir desde a origem  $o$  até o destino  $d$ , sendo  $(o,d)$  não adjacente.
- $S$  : Representa cada subconjunto dentro de  $CR_{(o,d)}$ .

#### Restrições:

Este modelo também usa as restrições (4.12), (4.13) e (4.14) pertencente ao modelo de fulfillments over periods da seção anterior.

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D/j' > j, v \in V, t \in T \quad (4.17)$$

Dentro do problema, é necessário garantir que, para todos os trechos com a mesma estação de origem, os trechos mais curtos disponibilizados para venda sejam mais baratos que os trechos mais longos. Isso é para evitar que passageiros comprem bilhetes para um trecho maior e desembarquem

em estações anteriores. Essa situação é controlada pela restrição (4.17).

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad (4.18)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d}/S \subset CR_{o,d}$$

Além, deve-se garantir que todas as possíveis combinações dos preços mais baratos dos trechos contidos dentro dos trechos não adjacentes sejam maiores ou iguais ao preço desse trecho não adjacente. Em outras palavras, deve-se evitar que os passageiros comprem bilhetes para trechos intermediários com o objetivo de alcançar seu destino final. Essa situação é controlada pela restrição (4.18).

Assim, o modelo **Model\_Skipla\_Independ\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvkt} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i,j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.6)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

Restrições skip lagging

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvkt} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvkt}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D/j' > j, v \in V, t \in T \quad (4.17)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvkt} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvkt}, \quad \forall (o, d) \in NAD, \quad (4.18)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d}/S \subset CR_{o,d}$$

### 4.3.4 Modelo completo independente

Nesta seção, integra-se o modelo base com os dois conjuntos de restrições: as de skip lagging e as de fulfillment over periods. Assim, o modelo **Model\_Comp\_Independ\_Est** é o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvkt} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD/j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD/j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvkt} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvkt} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvkt} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O/(i, j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD/i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.6)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

Restrições fulfillment over periods

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K/k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T/t \neq \max\{T\} \quad (4.15)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvkt} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T/t \neq \max\{T\} \quad (4.16)$$

Restrições skip lagging

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvkt} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvkt}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D/j' > j, v \in V, t \in T \quad (4.17)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvkt} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvkt}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad (4.18)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d}/S \subset CR_{o,d}$$

## 4.4 Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental e autorizações estáticas

Nesta seção, serão apresentados modelos baseados em demandas comportamentais, os quais buscam capturar o comportamento dos consumidores em contextos de reserva e consumo de serviços. Ao incorporar elementos da teoria comportamental, esses modelos permitem uma melhor compreensão das escolhas dos clientes, levando em consideração fatores psicológicos e contextuais que influenciam suas decisões. Para modelar a demanda comportamental, serão utilizadas listas de preferência, que refletem as preferências individuais dos consumidores em relação a diferentes opções de produtos ou serviços.

Para compreender melhor essa situação, analisa-se o seguinte exemplo: considera-se um trecho  $E_1 - E_2$ , com três classes de controle  $(c_1, c_2, c_3)$ , onde  $c_1 > c_2 > c_3$ . Além disso, existe um único período, um único tipo de assento disponível e cada classe terá uma demanda de 10, 20 e 30, respectivamente.

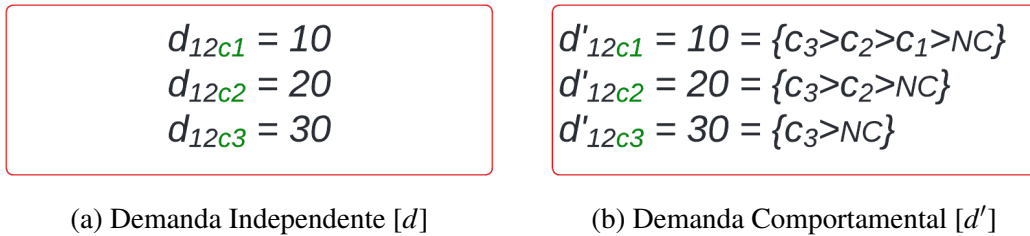


Figura 4.5: Exemplo: Tipos de Demanda

Para interpretar a demanda independente, podemos dizer (segundo a Figura 4.5a) que: existem 10 pessoas dispostas a comprar passagens a um preço de  $c_1$ , 20 pessoas a comprar a um preço

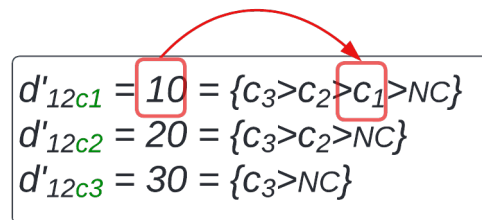
de  $c_2$  e 30 pessoas a comprar **a um preço** de  $c_3$ . No entanto, se as 10 pessoas dispostas a pagar  $c_1$  encontrarem um melhor valor no momento da compra (por exemplo,  $c_3$ ), essas pessoas prefeririam não comprar, situação que, na realidade, não faria sentido.

Por outro lado, temos a demanda comportamental, denotada como  $d'$ , que esta representada com uma lista de preferência, conforme visto na Figura 4.5b. Esta lista significa que, por exemplo, 10 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** com valor  $c_1$  (antes de preferir não comprar (NC)), 20 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de  $c_2$  (antes de preferir não comprar) e 30 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de  $c_3$  (antes de preferir não comprar).

O funcionamento seria o seguinte: imagine que as 10 pessoas dispostas a comprar até um valor de  $c_1$  vão tentar comprar primeiro a um valor mais barato, neste caso  $c_3$ . Se  $c_3$  não estiver disponível, elas procurariam assentos com valor  $c_2$ . Se  $c_2$  também não estiver disponível, subiriam na lista e procurariam passagens com valor de  $c_1$ . Se estes não estiverem disponíveis, então não comprariam. Note que esse comportamento é o que comumente se usa na realidade.

Agora, analisa-se como o modelo interpretaria esse novo comportamento. Para isso, calcula-se a nova demanda potencial:

Para  $c_1$ , analisa-se a lista e verifica-se quem está disposto a pagar por esse valor.

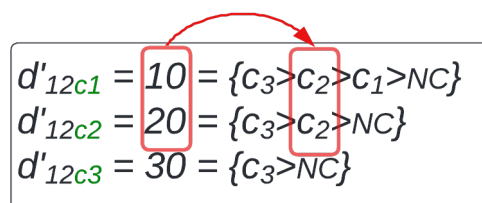


$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 4.6: Exemplo: demanda comportamental para a classe  $c_1$

Segundo a Figura 4.6, apenas 10 possíveis passageiros estão dispostos a pagar esse valor.

Agora, analisa-se quem está disposto a pagar um valor por um bilhete da classe  $c_2$



$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 4.7: Exemplo: demanda comportamental para a classe  $c_2$



Neste caso, 30 possíveis pessoas estariam dispostas a pagar esse valor. Observe que, de esta nova demanda, 10 pessoas correspondentes à demanda de  $c_1$  também estariam dispostas a comprar pelo valor da classe  $c_2$ .

Por último, para a classe mais barata  $c_3$ , veja a Figura 4.8.

$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 4.8: Exemplo: demanda comportamental para a classe  $c_3$

Note que, neste caso, 60 pessoas estariam dispostas a pagar um bilhete da classe  $c_3$ , ou seja, toda a demanda do trecho  $(E_1 - E_2)$  compraria pelo valor mais barato se este estivesse disponível.

Assim, a demanda potencial comportamental para o modelo seria como se apresenta na Figura 4.9.

$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 \\ d'_{12c2} &= 20 + 10 = 30 \\ d'_{12c3} &= 30 + 10 + 20 = 60 \end{aligned}$$

Figura 4.9: Exemplo: demanda comportamental total potencial

No entanto, é importante lembrar que a demanda potencial inicial era de 60 pessoas, mas até este ponto, a demanda poderia ser maior, pois a demanda de cada classe comercial agora é o acúmulo das demandas das classes mais caras. Essa situação precisa ser controlada para não criar uma demanda inexistente; para isso, serão consideradas as seguintes restrições, relacionando neste caso as variáveis de decisão de assentos reservados:

$$X_{12c1} \leq d'_{12c1} = 10 \quad (4.19)$$

$$X_{12c2} \leq d'_{12c2} = 30 \quad (4.20)$$

$$X_{12c3} \leq d'_{12c3} = 60 \quad (4.21)$$

$$X_{12c1} + X_{12c2} \leq d'_{12c2} = 30 \quad (4.22)$$

$$X_{12c1} + X_{12c2} + X_{12c3} \leq d'_{12c3} = 60 \quad (4.23)$$

Observe-se que as restrições de (4.19) até (4.21) são restrições conhecidas que limitam os valores que as passagens reservadas podem assumir, enquanto as restrições (4.22) e (4.23) são as que auxiliarão no controle para que não se ultrapasse a demanda potencial total inicial.

Por exemplo, se  $X_{12c_2}$  assume o valor de 30 (na restrição 4.20), a restrição (4.22) garantiria que  $X_{12c_1}$  seja igual a 0, pois a demanda de 10 pessoas correspondente preferiu comprar ao preço da classe  $c_2$ . A mesma situação ocorreria se  $X_{12c_3}$  assumisse o valor de 60 (na restrição 4.21), então a restrição (4.23) garantiria que a demanda por  $X_{12c_1}$  e  $X_{12c_2}$  fosse igual a zero, já que esses clientes decidiram comprar pelo valor da classe  $c_3$ . Dessa forma, esse conjunto de restrições funcionaria para cada combinação possível das variáveis descritas.

Os modelos desta seção possuem grande semelhança com os modelos do abordaje com demanda independente, razão pela qual serão adotadas as mesmas definições de conjuntos, variáveis de decisão e parâmetros. Serão feitas as devidas anotações sempre que houver algum cambio ou ajuste necessário.

#### 4.4.1 Modelo básico comportamental

Este modelo compartilha as mesmas restrições do modelo básico com demanda independente, exceto pela restrição (4.6), que manterá a mesma estrutura, mas agora utilizando a demanda comportamental em vez da demanda independente.

Considere os seguintes parâmetros:

$d'_{ijvkt}$  : Demanda comportamental no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$  e classe de controle  $k$ , onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

$M$  : É um número suficientemente grande.

$\sigma_{ijvkt}$  : é a probabilidade (baseada na simulação de Monte Carlo) de que um passageiro disposto a pagar o valor do bilhete da classe  $k$  e tipo de assento  $v$  chegue no período  $t$  do trecho  $(i, j)$ . Onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$ .

Considere as seguintes variáveis de decisão:

$\delta_{ijvkt}$  : Delta é uma variável binária que assume o valor de 1 quando o preço da classe mais cara é maior do que a soma dos preços das classes mais baratas, e o valor de 0 em caso contrário., onde  $(i, j) \in OD, v \in V, k = \min\{K_v\}, t \in T$ .

## Modelo

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} \sigma_{ijvkt} P_{ijvkt} X_{ijvkt} \quad (4.24)$$

Agora, a função objetivo (4.24) leva em consideração a probabilidade de chegada de um possível passageiro para cada classe de controle, em cada período, tipo de assento e trecho específico.

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.25)$$

Note-se que a restrição (4.25) está limitando a quantidade de assentos reservados, de forma que estes não ultrapassem o valor da demanda comportamental.

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (4.26)$$

A restrição (4.26) é a generalização da situação explicada pelas restrições (4.22) e (4.23).

Apenas adicionando as duas restrições, (4.25) e (4.26), e eliminando a restrição (4.6) do modelo básico independente, obteríamos, em teoria, um modelo com demanda comportamental. No entanto, essa afirmação não é completamente verdadeira. Embora as novas restrições limitem a demanda do modelo de maneira que seja possível utilizar as listas de preferência, o modelo ainda se comportará como um modelo independente.

Isso ocorre porque a demanda independente é um caso particular de todas as combinações possíveis que podem ser geradas ao usar as listas de preferência. De fato, a demanda independente é o caso que geraria o maior lucro possível entre todas essas combinações. Vale lembrar que as listas de preferência oferecem a flexibilidade de permitir que um cliente disposto a pagar mais caro adquira um produto a um preço mais barato, caso essa possibilidade exista.

Portanto, é necessário, de alguma forma, informar ao modelo que ele deve considerar outras possibilidades "mais realistas" durante a resolução do problema.

$$\alpha_{ijvkt} + \sum_{k' \in K_v / k' > k} \alpha_{i,j,v,k',t} \leq 1 + M(1 - \delta_{ijvkt}), \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ijvkt} P_{ijvkt} X_{ijvkt} + M(1 - \delta_{ijvkt}) \geq \sum_{k' \in K_v / k' > k} \sigma_{ijvkt} P_{i,j,v,k'} X_{i,j,v,k',t}, \quad (4.28)$$

$$k = \min\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \delta_{ijvkt}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.29)$$

Dessa forma, as restrições (4.27), (4.28) e (4.29) atuam de maneira integrada para realizar o ajuste necessário. Esse ajuste consiste em identificar a classe mais cara e verificar se seu preço é superior à soma dos preços das classes mais baratas. Se a condição for verdadeira, as classes mais baratas serão desabilitadas, e apenas a classe mais cara será mantida. Caso contrário, o modelo permanecerá livre para selecionar a opção mais vantajosa, de acordo com as condições estabelecidas.

Assim, o modelo **Model\_Basic\_Comporta\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} \sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i, j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

#### Restrições demanda comportamental

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.25)$$

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (4.26)$$

#### Restrições ajuste da demanda

$$\alpha_{ijvkt} + \sum_{k' \in K_v / k' > k} \alpha_{i,j,v,k',t} \leq 1 + M(1 - \delta_{ijvkt}), \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} + M(1 - \delta_{ijvkt}) \geq \sum_{k' \in K_v / k' > k} \sigma_{ijvk} P_{i,j,v,k'} X_{i,j,v,k',t}, \quad (4.28)$$

$$k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \delta_{ijvkt}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.29)$$

#### 4.4.2 Modelo fulfillment over periods comportamental

Todos os parâmetros, conjuntos, variáveis de decisão e restrições foram detalhadamente explicados nas seções anteriores. Por tanto, nesta seção, somente são adicionadas as restrições de fulfillment, criadas no modelo independente, ao modelo comportamental básico apresentado na seção anterior.

Assim, o modelo **Model\_Fulfill\_Comporta\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} \sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i, j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

##### Restrições demanda comportamental

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.25)$$

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (4.26)$$

### Restrições ajuste da demanda

$$\alpha_{ijvkt} + \sum_{k' \in K_v / k' > k} \alpha_{i,j,v,k',t} \leq 1 + M(1 - \delta_{ijvkt}), \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} + M(1 - \delta_{ijvkt}) \geq \sum_{k' \in K_v / k' > k} \sigma_{ijvk} P_{i,j,v,k'} X_{i,j,v,k',t}, \quad (4.28)$$

$$k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \delta_{ijvkt}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.29)$$

### Restrições fulfillments over periods

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.15)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.16)$$

## 4.4.3 Modelo skip lagging comportamental

De maneira análoga ao modelo fulfillment over periods, nesta seção, são incorporadas as restrições de skip lagging, do modelo independente, ao modelo comportamental básico.

Assim, o modelo **Model\_Skipla\_Comporta\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} \sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i, j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

#### Restrições demanda comportamental

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD/i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.25)$$

$$\sum_{k' \in K_v/k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k > 1, t \in T \quad (4.26)$$

#### Restrições ajuste da demanda

$$\alpha_{ijvkt} + \sum_{k' \in K_v/k' > k} \alpha_{i,j,v,k',t} \leq 1 + M(1 - \delta_{ijvkt}), \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} + M(1 - \delta_{ijvkt}) \geq \sum_{k' \in K_v/k' > k} \sigma_{ijvk} P_{i,j,v,k'} X_{i,j,v,k',t}, \quad (4.28)$$

$$k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \delta_{ijvkt}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.29)$$

#### Restrições skip lagging

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K/k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D/j' > j, v \in V, t \in T \quad (4.17)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o, d) \in NAD, \quad (4.18)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d}/S \subset CR_{o,d}$$

### 4.4.4 Modelo completo comportamental

Nesta seção, integra-se o modelo comportamental base com os conjuntos de restrições de fulfillment over periods e skip lagging, incorporando todos os elementos de forma simultânea.

Assim, o modelo **Model\_Comp\_Comporta\_Est** seria o seguinte:

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} \sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (4.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.2)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V \quad (4.3)$$

$$Y_{ijvk} \geq \sum_{t \in T} X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\| \quad (4.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} Y_{ijvk} \leq A_{iv}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O / (i, j) \in OD, \forall v \in V \quad (4.5)$$

$$A_{0,v} = Q_v \quad \forall v \in V \quad (4.7)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0 \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.8)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.9)$$

$$Y_{ijvk} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v \quad (4.10)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in O, v \in V \quad (4.11)$$

#### Restrições demanda comportamental

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.25)$$

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (4.26)$$

#### Restrições ajuste da demanda

$$\alpha_{ijvkt} + \sum_{k' \in K_v / k' > k} \alpha_{i,j,v,k',t} \leq 1 + M(1 - \delta_{ijvkt}), \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.27)$$

$$\sigma_{ijvk} P_{ijvk} X_{ijvkt} + M(1 - \delta_{ijvkt}) \geq \sum_{k' \in K_v / k' > k} \sigma_{ijvk} P_{i,j,v,k'} X_{i,j,v,k',t}, \quad (4.28)$$

$$k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \delta_{ijvkt}, \quad k = \min\{K_v\}, \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (4.29)$$

#### Restrições fulfillments over periods

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (4.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt} - \alpha_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.13)$$

$$\beta_{ijvkt} = \alpha_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (4.14)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.15)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (4.16)$$

#### Restrições skip lagging



$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D/j' > j, v \in V, t \in T \quad (4.17)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad (4.18)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d}/S \subset CR_{o,d}$$

## CAPÍTULO 5

---

### Resultados Computacionais

---

#### 5.1 Experimentos Computacionais

Para resolver as instâncias utilizando os modelos matemáticos propostos, foi empregado um computador da marca Dell, modelo Precision 3660, equipado com o sistema operacional Windows 11 Pro de 64 bits, processador 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13700 2.10 GHz baseado em arquitetura x64, e memória RAM de 16GB. Além disso, utilizou-se o Python como linguagem de programação na versão 3.10.14, e o solver Gurobi na versão 11.0.3.

Em primeiro lugar, apresentam-se os resultados de cada instância após serem resolvidas por meio de cada um dos modelos propostos. Essa organização busca evidenciar de forma clara e comparativa o desempenho dos modelos em diferentes cenários, destacando as principais diferenças e similaridades nas soluções obtidas para cada instância.

Observe que a primeira coluna indica o nome do modelo utilizado. A segunda coluna, "*T. Criação Modelo (seg.)*", exibe o tempo, em segundos, que o solver levou para construir o modelo. A terceira coluna, "*T. Solução (seg.)*", mostra o tempo necessário para que o solver resolvesse o modelo. A sétima coluna, "*Z Relaxado*", apresenta a relaxação linear do problema no nó raiz. Já a oitava coluna, "*Z*", indica o valor ótimo da função objetivo (máximo lucro encontrado). Por fim, a nona coluna, " *$\Delta Z(\%)$* ", mostra a diferença percentual entre a solução relaxada e a solução ótima.

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorados	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	2,30	0,07	1	0	1	170.485	170.485	0,00
BaseModelFulfillments	3,97	0,07	1	0	1	170.485	170.485	0,00
BaseModelSkiplagging	6,06	0,06	1	0	1	133.237	133.237	0,00
BaseModelFull	6,43	0,05	1	0	1	51.410	51.410	0,00
HierarBehavioralModel	3,17	0,07	1	0	1	170.455	170.455	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	4,87	0,08	1	0	1	170.455	170.455	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	7,09	0,08	1	2	2	132.928	132.928	0,00
HierarBehavioralModelFull	7,48	0,05	1	0	1	51.336	51.336	0,00
PercentBehavioralModel	3,14	0,07	1	0	1	166.345	166.345	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	4,90	0,08	1	0	1	170.455	170.455	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	7,07	0,06	1	2	2	132.928	132.928	0,00
PercentBehavioralModelFull	7,47	0,05	1	0	1	51.336	51.336	0,00

Tabela 5.1: Resultados para a Instância1

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	2,90	0,08	1	0	1	314.883,03	314.883,03	0,00
BaseModelFulfillments	5,22	0,08	1	0	1	314.883,03	314.883,03	0,00
BaseModelSkiplagging	7,47	0,07	1	0	1	303.634,13	303.634,13	0,00
BaseModelFull	8,00	0,07	1	0	1	203.208,98	203.208,98	0,00
HierarBehavioralModel	3,98	0,07	1	0	1	314.599,53	314.599,53	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	6,38	0,10	1	0	3	314.599,53	314.599,53	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	8,58	0,06	1	0	1	303.375,63	303.375,63	0,00
HierarBehavioralModelFull	9,11	0,07	1	0	1	203.276,98	203.276,98	0,00
PercentBehavioralModel	3,98	0,07	1	0	1	313.547,03	313.547,03	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	6,35	0,10	1	0	3	314.599,53	314.599,53	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	8,62	0,06	1	0	1	303.375,63	303.375,63	0,00
PercentBehavioralModelFull	9,20	0,08	1	0	1	203.276,98	203.276,98	0,00

Tabela 5.2: Resultados para a Instância2

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	2,25	0,05	1	33	2	140.788,61	140.788,61	0,00
BaseModelFulfillments	3,75	0,08	1	377	2	140.788,61	140.788,61	0,00
BaseModelSkiplagging	18,62	0,07	1	25	2	95.625,49	95.625,49	0,00
BaseModelFull	19,15	0,05	1	0	1	37.214,03	37.214,03	0,00
<b>HierarBehavioralModel</b>	<b>3,01</b>	<b>0,08</b>	<b>1</b>	<b>97</b>	<b>6</b>	<b>140.179,10</b>	<b>140.167,27</b>	<b>0,01</b>
<b>HierarBehavioralModelFulfillments</b>	<b>4,67</b>	<b>0,12</b>	<b>1</b>	<b>571</b>	<b>10</b>	<b>140.086,16</b>	<b>140.077,33</b>	<b>0,01</b>
HierarBehavioralModelSkiplagging	19,87	0,06	1	55	3	95.101,49	95.101,49	0,00
HierarBehavioralModelFull	20,08	0,05	1	4	4	37.183,03	37.183,03	0,00
PercentBehavioralModel	3,02	0,05	1	35	2	136.487,26	136.487,26	0,00
<b>PercentBehavioralModelFulfillments</b>	<b>4,67</b>	<b>0,12</b>	<b>1</b>	<b>571</b>	<b>10</b>	<b>140.086,16</b>	<b>140.077,33</b>	<b>0,01</b>
PercentBehavioralModelSkiplagging	20,09	0,05	1	55	3	95.101,49	95.101,49	0,00
PercentBehavioralModelFull	20,43	0,05	1	4	4	37.183,03	37.183,03	0,00

Tabela 5.3: Resultados para a Instância3

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	2,20	0,05	1	0	1	166.118,29	166.118,29	0,00
BaseModelFulfillments	3,70	0,08	1	0	1	166.118,29	166.118,29	0,00
BaseModelSkiplagging	4,65	0,07	1	0	1	130.810,41	130.810,41	0,00
BaseModelFull	4,95	0,04	1	0	1	40.602,31	40.602,31	0,00
HierarBehavioralModel	3,02	0,05	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	4,48	0,07	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	5,50	0,05	1	0	2	129.740,41	129.740,41	0,00
HierarBehavioralModelFull	5,84	0,04	1	0	1	40.718,31	40.718,31	0,00
PercentBehavioralModel	3,07	0,05	1	0	1	162.681,09	162.681,09	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	4,52	0,08	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	5,47	0,07	1	0	2	129.740,41	129.740,41	0,00
PercentBehavioralModelFull	5,73	0,05	1	0	1	40.718,31	40.718,31	0,00

Tabela 5.4: Resultados para a Instância4

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	2,20	0,05	1	29	3	127.371,39	127.371,39	0,00
BaseModelFulfillments	3,07	0,07	1	143	4	127.371,39	127.371,39	0,00
BaseModelSkiplagging	3,05	0,07	1	0	1	95.816,84	95.816,84	0,00
BaseModelFull	3,24	0,05	1	0	1	28.647,69	28.647,69	0,00
<b>HierarBehavioralModel</b>	<b>2,72</b>	<b>0,05</b>	<b>1</b>	<b>53</b>	<b>4</b>	<b>127.020,39</b>	<b>127.010,39</b>	<b>0,01</b>
<b>HierarBehavioralModelFulfillments</b>	<b>3,58</b>	<b>0,07</b>	<b>1</b>	<b>170</b>	<b>4</b>	<b>127.020,39</b>	<b>127.010,39</b>	<b>0,01</b>
HierarBehavioralModelSkiplagging	3,58	0,07	1	0	1	95.403,84	95.403,84	0,00
HierarBehavioralModelFull	3,87	0,06	1	0	1	28.460,69	28.460,69	0,00
PercentBehavioralModel	2,68	0,07	1	34	3	124.593,69	124.593,69	0,00
<b>PercentBehavioralModelFulfillments</b>	<b>3,67</b>	<b>0,08</b>	<b>1</b>	<b>170</b>	<b>4</b>	<b>127.020,39</b>	<b>127.010,39</b>	<b>0,01</b>
PercentBehavioralModelSkiplagging	3,62	0,05	1	0	1	95.403,84	95.403,84	0,00
PercentBehavioralModelFull	3,85	0,05	1	0	1	28.460,69	28.460,69	0,00

Tabela 5.5: Resultados para a Instância5

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	1,18	0,03	0	0	1	67.715,07	67.715,07	0,00
BaseModelFulfillments	1,75	0,03	0	0	1	67.715,07	67.715,07	0,00
BaseModelSkiplagging	1,72	0,04	0	0	1	51.708,29	51.708,29	0,00
BaseModelFull	1,83	0,03	0	0	1	24.722,37	24.722,37	0,00
HierarBehavioralModel	1,48	0,03	0	0	1	67.593,22	67.593,22	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	2,15	0,07	0	0	1	67.587,22	67.587,22	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	2,07	0,05	1	0	1	51.589,44	51.589,44	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,27	0,03	0	0	1	24.714,52	24.714,52	0,00
PercentBehavioralModel	1,48	0,03	0	0	1	65.256,64	65.256,64	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	2,10	0,05	0	0	1	67.587,22	67.587,22	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	2,08	0,03	1	0	1	51.589,44	51.589,44	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,22	0,03	0	0	1	24.714,52	24.714,52	0,00

Tabela 5.6: Resultados para a Instância6

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	1,07	0,03	0	0	1	48.719,71	48.719,71	0,00
BaseModelFulfillments	1,72	0,03	0	0	1	48.719,71	48.719,71	0,00
BaseModelSkiplagging	1,81	0,03	0	0	1	20.996,45	20.996,45	0,00
BaseModelFull	1,98	0,03	0	0	1	9.382,95	9.382,95	0,00
HierarBehavioralModel	1,43	0,05	1	60	5	47.990,71	47.990,71	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	2,17	0,05	1	227	6	47.990,71	47.990,71	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	2,25	0,03	0	0	3	20.694,45	20.694,45	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,37	0,05	0	0	1	8.663,95	8.663,95	0,00
<b>PercentBehavioralModel</b>	<b>1,45</b>	<b>0,02</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>Infactível</b>	<b>-</b>
PercentBehavioralModelFulfillments	2,17	0,05	1	227	6	47.990,71	47.990,71	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	2,25	0,03	0	0	3	20.694,45	20.694,45	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,38	0,03	0	0	1	8.663,95	8.663,95	0,00

Tabela 5.7: Resultados para a Instância7

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	0,94	0,03	0	0	1	53.844,31	53.844,31	0,00
BaseModelFulfillments	1,58	0,05	0	0	1	53.844,31	53.844,31	0,00
BaseModelSkiplagging	1,57	0,04	0	0	1	28.675,46	28.675,46	0,00
BaseModelFull	1,70	0,03	0	0	1	13.985,90	13.985,90	0,00
HierarBehavioralModel	1,32	0,03	1	54	5	52.091,71	52.091,71	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	1,98	0,07	1	205	6	52.091,71	52.091,71	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	1,98	0,03	0	0	2	28.506,46	28.506,46	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,12	0,03	0	0	2	11.599,90	11.599,90	0,00
<b>PercentBehavioralModel</b>	<b>1,30</b>	<b>0,02</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>Infactível</b>	<b>-</b>
PercentBehavioralModelFulfillments	1,99	0,05	1	205	6	52.091,71	52.091,71	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	1,97	0,03	0	0	2	28.506,46	28.506,46	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,12	0,03	0	0	2	11.599,90	11.599,90	0,00

Tabela 5.8: Resultados para a Instância8

Modelo	T. Criação Model (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	0,82	0,03	0	0	1	55.282,08	55.282,08	0,00
BaseModelFulfillments	1,33	0,03	0	0	1	55.282,08	55.282,08	0,00
BaseModelSkiplagging	1,37	0,03	0	0	1	33.524,11	33.524,11	0,00
BaseModelFull	1,48	0,03	0	0	1	9.902,35	9.902,35	0,00
HierarBehavioralModel	1,12	0,03	0	0	1	55.230,08	55.230,08	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	1,66	0,05	1	13	5	55.230,08	55.230,08	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	1,71	0,03	1	3	3	33.249,11	33.249,11	0,00
HierarBehavioralModelFull	1,85	0,03	0	0	1	9.726,35	9.726,35	0,00
PercentBehavioralModel	1,12	0,03	0	0	1	50.834,74	50.834,74	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	1,68	0,05	1	13	5	55.230,08	55.230,08	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	1,70	0,03	1	3	3	33.249,11	33.249,11	0,00
PercentBehavioralModelFull	1,82	0,04	0	0	1	9.726,35	9.726,35	0,00

Tabela 5.9: Resultados para a Instância9

Modelo	T. Criação Model (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	$\Delta Z$ (%)
BaseModel	0,39	0,02	0	0	1	21.548,62	21.548,62	0,00
BaseModelFulfillments	0,65	0,02	0	0	1	21.548,62	21.548,62	0,00
BaseModelSkiplagging	0,64	0,00	0	0	1	13.102,66	13.102,66	0,00
BaseModelFull	0,70	0,01	0	0	1	3.637,46	3.637,46	0,00
HierarBehavioralModel	0,56	0,02	1	5	3	22.112,12	22.112,12	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	0,90	0,03	1	0	1	22.112,12	22.112,12	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	0,85	0,01	1	19	2	13.015,16	13.015,16	0,00
HierarBehavioralModelFull	0,94	0,01	0	0	1	3.362,96	3.362,96	0,00
<b>PercentBehavioralModel</b>	<b>0,58</b>	<b>0,00</b>	-	-	-	-	<b>Infactível</b>	-
PercentBehavioralModelFulfillments	0,87	0,02	1	0	1	22.112,12	22.112,12	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	0,88	0,00	1	19	2	13.015,16	13.015,16	0,00
PercentBehavioralModelFull	0,95	0,02	0	0	1	3.362,96	3.362,96	0,00

Tabela 5.10: Resultados para a Instância10

Dentro dos resultados observados, diversos comportamentos interessantes foram identificados:

1. Tempo de solução: O tempo necessário para resolver cada modelo em todas as instâncias foi relativamente baixo. Por exemplo:
  - Para as instâncias grandes, os tempos variaram entre 0,04 e 0,12 segundos;
  - Para as instâncias médias, entre 0,02 e 0,08 segundos;
  - Para as instâncias pequenas, entre 0,00 e 0,07 segundos.
2. Exploração de nós: Os modelos sempre alcançaram a solução ou soluções ótimas explorando, no máximo, um único nó. Isso demonstra que, na maioria dos casos, a solução ótima coincide com a relaxação linear. Quando isso não ocorre, a diferença máxima relativa é de apenas 0,01%.
3. Modelos com demanda independente:
  - Os modelos BaseModel e BaseModelFulfillments produziram exatamente os mesmos resultados em todas as instâncias analisadas;

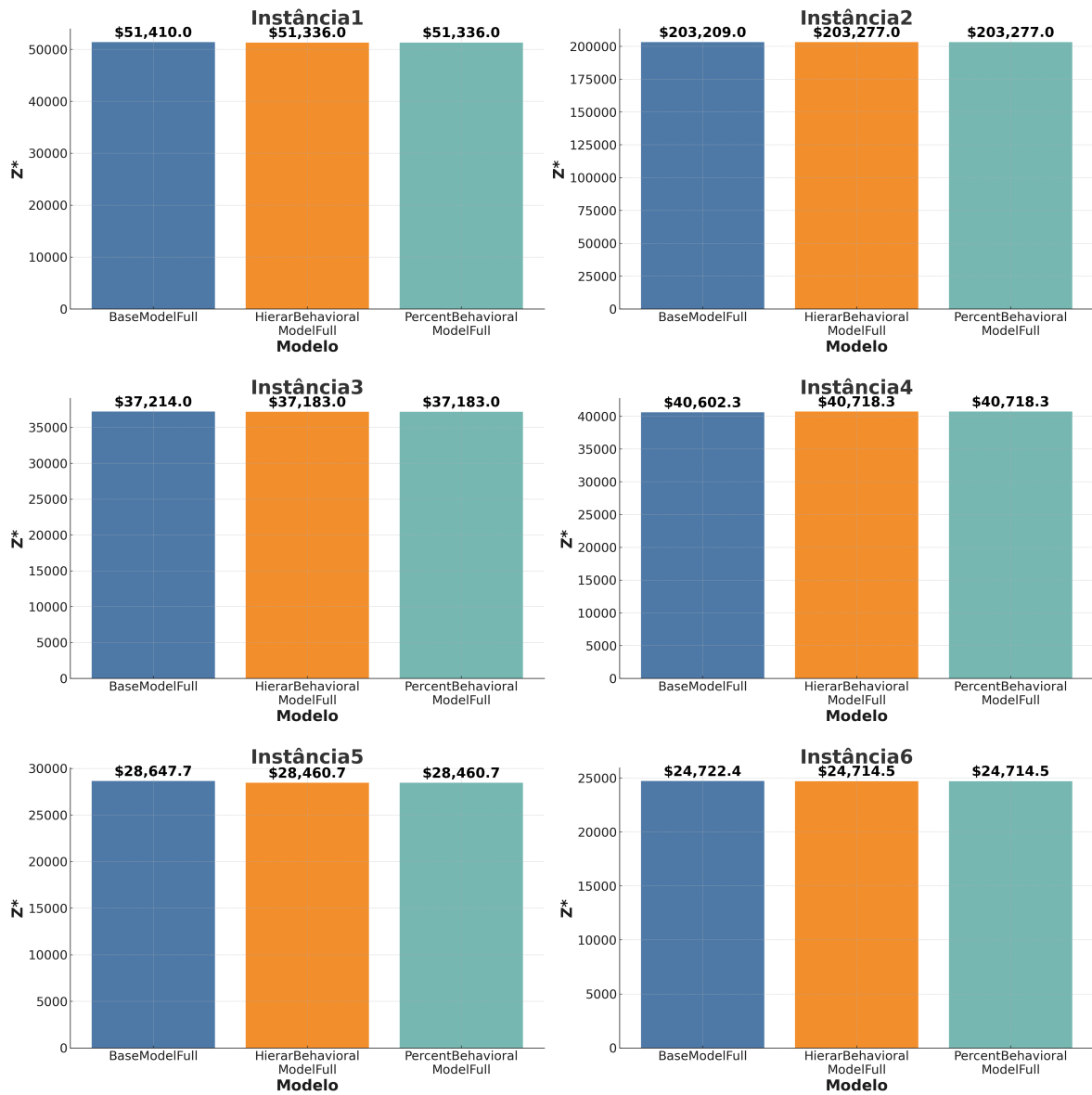


Figura 5.1: Comparação Modelos Full primeira parte

- O modelo BaseModelSkiplagging, em comparação com o BaseModelFulfillments, apresentou uma redução relativa entre 21,25% e 56,90% em todas as instâncias, exceto na instância instância2, onde a redução foi de apenas 3,57%;
- O modelo BaseModelFull mostrou uma redução ainda maior, variando entre 21,25% e 72,24%, em comparação com o BaseModelSkiplagging, novamente com exceção da instância instância2, onde a redução foi de 3,57%.

#### 4. Modelos com demanda comportamental ajustada por proporções:

- Não foram observadas diferenças entre os modelos BaseModel e BaseModelFulfillments;

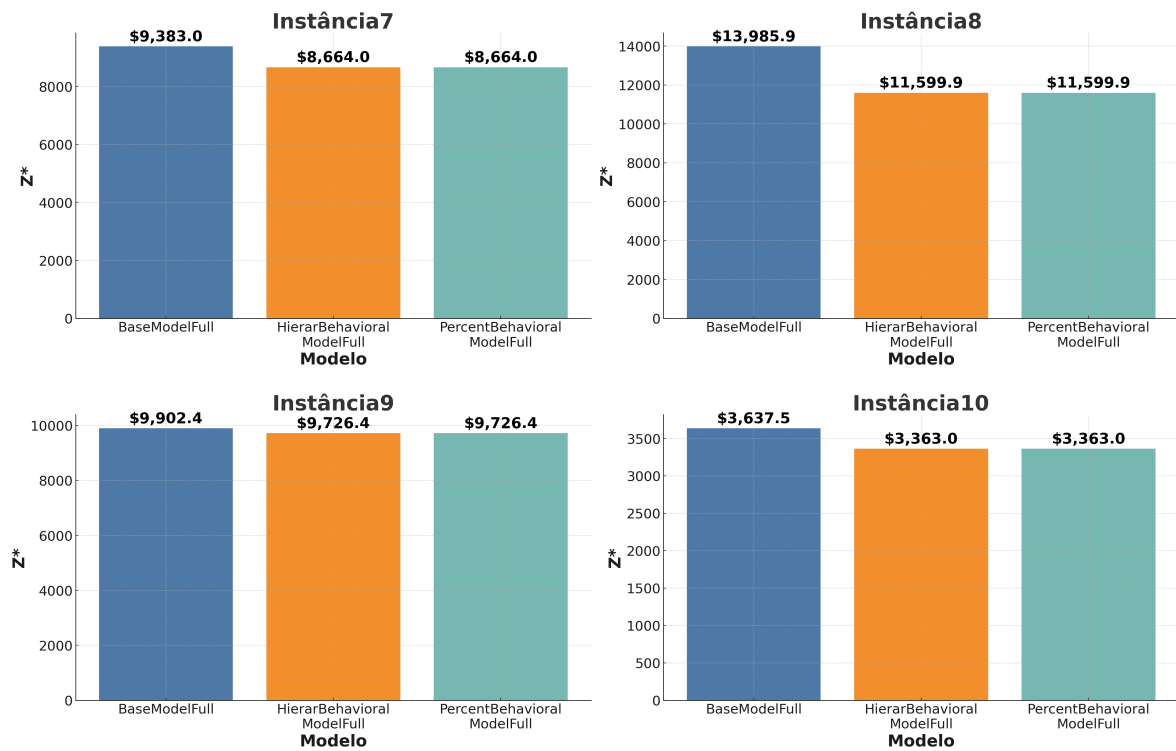


Figura 5.2: Comparação Modelos Full segunda parte

- Ao contrário do comportamento no modelo independente, o modelo PercentBehavioralModelFull apresentou um aumento relativo entre 0,33% e 8,6% nas soluções obtidas, em comparação com o modelo HierarBehavioralModel, exceto nas instâncias instância7, instância8 e instância10, onde o HierarBehavioralModel foi inviável. Acredita-se que essa inviabilidade se deva a alguma inconsistência gerada durante o ajuste da demanda, mas a causa exata ainda não foi determinada;
- O modelo PercentBehavioralModelFull mostrou uma redução relativa entre 33% e 70%, em comparação com o modelo PercentBehavioralModelSkiplagging.

##### 5. Modelos com demanda comportamental ajustada por hierarquia:

- Os modelos HierarBehavioralModel e HierarBehavioralModelFull apresentaram os mesmos resultados em todas as instâncias, exceto nas instâncias instância3 e instância6, onde ocorreram reduções de 0,06% e 0,01%, respectivamente;
- O modelo HierarBehavioralModelSkiplagging apresentou reduções entre 21,8% e 56,9%, exceto na instância instância1, onde a redução foi de apenas 3,57%;
- O modelo HierarBehavioralModelFull registrou reduções consideráveis em relação ao

modelo HierarBehavioralModelSkiplagging, variando entre 33% e 74%.

6. Análise dos modelos Full (BaseModelFull, HierarBehavioralModelFull, PercentBehavioral-ModelFull):

- Considerando apenas os modelos Full, ou seja, aqueles que incluem todos os conjuntos de restrições, os modelos comportamentais obtiveram exatamente os mesmos resultados para a função objetivo em cada instância. No entanto, como algumas instâncias possuem múltiplas soluções ótimas, os valores das variáveis de decisão podem diferir, mesmo que os valores da função objetivo sejam iguais;
- Além disso, a diferença entre os modelos comportamentais e o modelo independente foi de, no máximo, 2%, exceto nas instâncias instância7 e instância8, onde as variações foram de 7,7% e 16,1%, respectivamente.

Esse detalhamento evidencia o comportamento dos modelos e suas respectivas eficiências em diferentes cenários e ajustes.



## CAPÍTULO 6

---

### Conclusões e trabalhos futuro

---

O presente estudo abordou a problemática de otimizar o Transporte Ferroviário de Passageiros por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos de programação inteira mista, explorando dois enfoques principais: demanda independente e demanda comportamental. A aplicação desses modelos em cenários reais possibilitou uma avaliação comparativa detalhada, destacando as diferenças e os benefícios inerentes a cada abordagem.

Em primeiro lugar, do ponto de vista computacional, todos os modelos demonstraram ser robustos e capazes de alcançar soluções ótimas dentro de tempos razoáveis, validando assim sua viabilidade para aplicações práticas na indústria ferroviária.

Em segundo lugar, os modelos mostraram alta eficiência em encontrar a solução ou soluções ótimas dentro do espaço de busca, explorando no máximo um único nó. Até o momento, não foi possível explicar com precisão esse comportamento. No entanto, pode-se afirmar que isso não está relacionado à simplicidade das instâncias utilizadas, pois foram testadas instâncias consideradas de grande porte na indústria, representando até 30 estações e envolvendo até 74.788 variáveis de decisão inteiras.

Em terceiro lugar, observou-se que, embora os modelos comportamentais apresentem um valor da função objetivo ligeiramente inferior ao do modelo independente, a qualidade da solução é superior. Isso reforça que, nesse tipo de problema, além de buscar a maximização do lucro, também

se valoriza que a solução seja baseada em características mais próximas da realidade. Destaca-se como um resultado inesperado a semelhança dos valores da função objetivo entre os dois enfoques.

Em quarto lugar, a infactibilidade do modelo PercentBehavioralModel ocorreu devido às características específicas das instâncias instância7, instância8 e instância10, que durante o ajuste da demanda comportamental em função da demanda independente, criou-se uma situação inviável. Isso demonstra que é necessário cuidado ao aplicar esse enfoque, para evitar situações semelhantes.

Trabalhos futuros a serem incluídos na versão final desta proposta incluem:

- Aprofundar a revisão bibliográfica: Fortalecer as bases teóricas da pesquisa, explorando ainda mais a literatura relacionada;
- Explicar com maior clareza o comportamento dos modelos: Investigar detalhadamente o motivo pelo qual os modelos encontram a solução ótima explorando apenas um nó, além de explicar com mais precisão as causas da inviabilidade do modelo PercentBehavioralModel em certas instâncias;
- Explorar outros enfoques para ajustar a demanda: neste caso, optou-se por adicionar restrições que melhorassem seu comportamento. No entanto, também seria possível abordar essa questão alterando a formulação da função objetivo.

---

## Referências

---

- Valerio Agasucci, Giorgio Grani, and Leonardo Lamorgese. Solving the train dispatching problem via deep reinforcement learning. *Journal of Rail Transport Planning and Management*, 26: 100394, 2023. ISSN 2210-9706. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jrtpm.2023.100394>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210970623000264>.
- Salvatore Ammirato, Alberto Michele Felicetti, Roberto Linzalone, Antonio Palmiro Volpentesta, and Giovanni Schiuma. A systematic literature review of revenue management in passenger transportation. *Measuring Business Excellence*, 24(2):223–242, 2020. ISSN 1368-3047. doi: 10.1108/MBE-09-2019-0096. URL <https://doi.org/10.1108/MBE-09-2019-0096>.
- Shirin Aslani, Mohammad Modarres, and Soheil Sibdari. On the fairness of airlines’ ticket pricing as a result of revenue management techniques. *Journal of Air Transport Management*, 40: 56–64, 2014. ISSN 0969-6997. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2014.05.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969699714000556>.
- Erhan Atilla Avinal. Revenue management in hotels. *Journal of Foodservice Business Research*, 7 (4):51–57, 2006. doi: 10.1300/J369v07n04\_02. URL [https://doi.org/10.1300/J369v07n04\\_02](https://doi.org/10.1300/J369v07n04_02).
- Thibault Barbier, Miguel F. Anjos, Fabien Cirinei, and Gilles Savard. Product-closing approximation for ranking-based choice network revenue management. *European Journal of Operational Research*, 286(3):1002–1017, 2020. ISSN 0377-2217. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.04.042>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221720303957>.

- Peter P. Belobaba. Survey paper—airline yield management an overview of seat inventory control. *Transportation Science*, 21(2):63–73, 1987. doi: 10.1287/trsc.21.2.63. URL <https://doi.org/10.1287/trsc.21.2.63>.
- Dimitris Bertsimas and S de Boer. Joint network pricing and resource allocation. Technical report, Technical report, 2002.
- Nikola Besinovi, Lorenzo De Donato, Francesco Flammini, Rob M. P. Goverde, Zhiyuan Lin, Ronghui Liu, Stefano Marrone, Roberto Nardone, Tianli Tang, and Valeria Vittorini. Artificial intelligence in railway transport: Taxonomy, regulations, and applications. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 23(9):14011–14024, 2022. doi: 10.1109/TITS.2021.3131637.
- Ş. İlker Birbil, J. B. G. Frenk, Joaquim A. S. Gromicho, and Shuzhong Zhang. The role of robust optimization in single-leg airline revenue management. *Management Science*, 55(1):148–163, 2009. doi: 10.1287/mnsc.1070.0843. URL <https://doi.org/10.1287/mnsc.1070.0843>.
- S. L. Brumelle and J. I. McGill. Airline seat allocation with multiple nested fare classes. *Operations Research*, 41(1):127–137, 02 1993. doi: 10.1287/opre.41.1.127. URL <https://ideas.repec.org/a/inm/oropre/v41y1993i1p127-137.html>.
- Don B Casey. Past, present and future challenges of revenue management, pricing and scheduling. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 13(5):343–346, 2014. ISSN 1477-657X. doi: 10.1057/rpm.2014.16. URL <https://doi.org/10.1057/rpm.2014.16>.
- Yu-Hern Chang, Chung-Hsing Yeh, and Ching-Cheng Shen. A multiobjective model for passenger train services planning: application to taiwan’s high-speed rail line. *Transportation Research Part B: Methodological*, 34(2):91–106, 2000. ISSN 0191-2615. doi: [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(99\)00013-2](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(99)00013-2). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261599000132>.
- Ji Chen, Yifan Xu, Peiwen Yu, and Jun Zhang. A reinforcement learning approach for hotel revenue management with evidence from field experiments. *Journal of Operations Management*, 69(7):1176–1201, 2023. doi: <https://doi.org/10.1002/joom.1246>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/joom.1246>.

- S.Hossein Cheraghi, Mohammad Dadashzadeh, and Prakash Venkitachalam. Revenue management in manufacturing: A research landscape. *Journal of Business & Economics Research*, 8, 2010. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:154873467>.
- Ek Peng Chew, Chulung Lee, and Rujing Liu. Joint inventory allocation and pricing decisions for perishable products. *International Journal of Production Economics*, 120(1):139–150, 2009. ISSN 0925-5273. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2008.07.018>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925527308003368>. Special Issue on Operations Strategy and Supply Chains Management.
- Claire Cizaire. Optimization models for joint airline pricing and seat inventory control: Multiple products, multiple periods. 09 2011.
- M.T. Claessens, N.M. van Dijk, and P.J. Zwaneveld. Cost optimal allocation of rail passenger lines. *European Journal of Operational Research*, 110(3):474–489, 1998. ISSN 0377-2217. doi: [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00271-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00271-3). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221797002713>.
- Francesco Corman, Andrea D’Ariano, Ingo A. Hansen, and Dario Pacciarelli. Optimal multi-class rescheduling of railway traffic. *Journal of Rail Transport Planning and Management*, 1(1):14–24, 2011. ISSN 2210-9706. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210970611000023>. Robust Modelling of Capacity, Delays and Rescheduling in Regional Networks.
- Robert G. Cross. An introduction to revenue management. 1995. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:166489213>.
- Robert G. Cross. Launching the revenue rocket: How revenue management can work for your business. *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly*, 38(2):32–43, 1997. doi: <https://doi.org/10.1177/001088049703800222>. URL <https://doi.org/10.1177/001088049703800222>.
- James D. Dana. Equilibrium price dispersion under demand uncertainty: The roles of costly capacity and market structure. *The RAND Journal of Economics*, 30(4):632–660, 1999. ISSN 07416261. URL <http://www.jstor.org/stable/2556068>.

- Paul Dobson and Claudio Piga. The impact of mergers on fares structure: Evidence from european low-cost airlines. *Economic Inquiry*, 51(2):1196–1217, 2013. URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:bla:ecinqu:v:51:y:2013:i:2:p:1196-1217>.
- Noomesh Dowlut and Baby Gobin-Rahimbux. Forecasting resort hotel tourism demand using deep learning techniques – a systematic literature review. *Heliyon*, 9(7), 2023. ISSN 2405-8440. doi: 10.1016/j.heliyon.2023.e18385. URL <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e18385>.
- Topaloglu Huseyin Erdelyi Alexander. Using decomposition methods to solve pricing problems in network revenue management. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 10(4):325–343, 2011. doi: 10.1057/rpm.2009.53.
- Youyi Feng and Baichun Xiao. A dynamic airline seat inventory control model and its optimal policy. *Operations Research*, 49(6):938–949, 2001. doi: 10.1287/opre.49.6.938.10026. URL <https://doi.org/10.1287/opre.49.6.938.10026>.
- Oskar Fröidh. Perspectives for a future high-speed train in the swedish domestic travel market. *Journal of Transport Geography*, 16(4):268–277, 2008. ISSN 0966-6923. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2007.09.005>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0966692307000919>.
- Mitsuyoshi Fukushi, Felipe Delgado, Sebastián Raveau, and Bruno F. Santos. Chairs: A choice-based air transport simulator applied to airline competition and revenue management. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 155:297–315, 2022. ISSN 0965-8564. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2021.11.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965856421002895>.
- G. Gallego and G. van Ryzin. Optimal dynamic auctions for revenue management. *Management Science*, 40(7):999–1020, 1994.
- Guillermo Gallego and Garrett van Ryzin. A multiproduct dynamic pricing problem and its applications to network yield management. *Operations Research*, 45(1):24–41, 1997. doi: 10.1287/opre.45.1.24. URL <https://doi.org/10.1287/opre.45.1.24>.
- Huina Gao, Michael O Ball, and Itir Z Karaesmen. Competitive seat inventory control decisions

- under the regret criterion. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 9(1):49–65, 2010. ISSN 1477-657X. doi: 10.1057/rpm.2009.40. URL <https://doi.org/10.1057/rpm.2009.40>.
- Fred Glover, Randy Glover, Joe Lorenzo, and Claude McMillan. The passenger-mix problem in the scheduled airlines. *Interfaces*, 12(3):73–80, 1982. ISSN 00922102, 1526551X. URL <http://www.jstor.org/stable/25060268>.
- Xueyi Guan, Jin Qin, Chenghui Mao, and Wenliang Zhou. A literature review of railway pricing based on revenue management. *Mathematics*, 11(4), 2023. ISSN 2227-7390. doi: 10.3390/math11040857. URL <https://www.mdpi.com/2227-7390/11/4/857>.
- Francesca Guerriero, Martina Luzzi, and Giusy Macrina. *Revenue Management Approach for Passenger Transport Service: An Italian Case Study*, pages 237–247. Springer International Publishing, Cham, 2021. ISBN 978-3-030-86841-3. doi: 10.1007/978-3-030-86841-3\_20. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86841-3\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86841-3_20).
- Peng Guo, Baichun Xiao, and Jun Li. Unconstraining methods in revenue management systems: Research overview and prospects. *Advances in Operations Research*, 2012(1):270910, 2012. doi: <https://doi.org/10.1155/2012/270910>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2012/270910>.
- Jochen Gönsch, Robert Klein, Michael Neugebauer, and Claudius Steinhardt. Dynamic pricing with strategic customers. *Journal of Business Economics*, 83(5):505–549, July 2013. ISSN 1861-8928. doi: 10.1007/s11573-013-0663-7. URL <https://doi.org/10.1007/s11573-013-0663-7>.
- X. Han and Z. Ren. Joint optimization of stop planning and ticket allocation under uncertainty theory. *Soft Computing*, 24(9):7293–7308, 2020. doi: 10.1007/s00500-019-04617-9.
- Haonan He, Liangyu Chen, and Shanyong Wang. Flight short-term booking demand forecasting based on a long short-term memory network. *Computers & Industrial Engineering*, 186:109707, 2023. ISSN 0360-8352. doi: 10.1016/j.cie.2023.109707. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360835223007313>.
- Henrique Henriques and Luis Nobre Pereira. Hotel demand forecasting models and methods using

- artificial intelligence: A systematic literature review. *Tourism & Management Studies*, 20(3): 39–51, 2024. doi: 10.18089/tms.20240304. URL <https://doi.org/10.18089/tms.20240304>.
- Cindy Yoonjoung Heo and Seoki Lee. Application of revenue management practices to the theme park industry. *International Journal of Hospitality Management*, 28(3):446–453, 2009. ISSN 0278-4319. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijhm.2009.02.001>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0278431909000255>.
- Pratt Hetrakul and Cinzia Cirillo. Accommodating taste heterogeneity in railway passenger choice models based on internet booking data. *Journal of Choice Modelling*, 6:1–16, 2013. ISSN 1755-5345. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jocm.2013.04.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1755534513000080>.
- Pratt Hetrakul and Cinzia Cirillo. A latent class choice based model system for railway optimal pricing and seat allocation. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 61:68–83, 2014. ISSN 1366-5545. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2013.10.005>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554513001725>.
- Kuancheng Huang and Yu-Tung Liang. A dynamic programming algorithm based on expected revenue approximation for the network revenue management problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 47(3):333–341, 2011. ISSN 1366-5545. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2010.11.005>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554510001092>. Selected papers from the 13th ATRS Conference, Abu Dhabi, 2009.
- Dennis Huisman, Leo G. Kroon, Ramon M. Lentink, and Michiel J. C. M. Vromans. Operations research in passenger railway transportation. *Statistica Neerlandica*, 59(4):467–497, 2005. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9574.2005.00303.x>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9574.2005.00303.x>.
- Stanislav Ivanov and Vladimir Zhechev. Hotel revenue management - a critical literature review. *Tourism*, 60, 12 2011. doi: 10.2139/ssrn.1977467.
- Eva König. A review on railway delay management. *Public Transport*, 12(2):335–361, 2020. ISSN 1613-7159. doi: 10.1007/s12469-020-00233-1. URL <https://doi.org/10.1007/s12469-020-00233-1>.



- Yihua Li, Ahmadreza Mahmoudzadeh, and Xiubin Bruce Wang. Airlines seat pricing with seat upgrading. *Multimodal Transportation*, 1(4):100054, 2022. ISSN 2772-5863. doi: <https://doi.org/10.1016/j.multra.2022.100054>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772586322000545>.
- Ken Littlewood. Special issue papers: Forecasting and control of passenger bookings. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 4:111–123, 04 2005. doi: 10.1057/palgrave.rpm.5170134.
- Jiamin Zhao Maged M. Dessouky, Quan Lu and Robert C. Leachman. An exact solution procedure to determine the optimal dispatching times for complex rail networks. *IIE Transactions*, 38(2):141–152, 2006. doi: 10.1080/074081791008988. URL <https://doi.org/10.1080/074081791008988>.
- Jeffrey McGill and Garrett van Ryzin. Revenue management: Research overview and prospects. *Transportation Science*, 33:233–256, 05 1999. doi: 10.1287/trsc.33.2.233.
- Yuniar Mulyani. The forty-year history of revenue management: Bibliometric analysis. *OPSI*, 2021. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:237823656>.
- Isabel Méndez-Díaz, Juan José Miranda-Bront, Gustavo Vulcano, and Paula Zabala. A branch-and-cut algorithm for the latent-class logit assortment problem. *Discrete Applied Mathematics*, 164: 246–263, 2014. ISSN 0166-218X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.03.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X12001072>. Combinatorial Optimization.
- Serguei Netessine and Robert A. Shumsky. Revenue management games: Horizontal and vertical competition. *Management Science*, 51(5):813–831, 2005. doi: 10.1287/mnsc.1040.0356. URL <https://doi.org/10.1287/mnsc.1040.0356>.
- B. M. Noone, K. A. McGuire, and K. V. Rohlfs. Social media meets hotel revenue management: Opportunities, issues and unanswered questions. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 10(4):293–305, 2011.
- Daniel F. Otero and Raha Akhavan-Tabatabaei. A stochastic dynamic pricing model for the multiclass problems in the airline industry. *European Journal of Operational Research*, 242(1):188–200, 2015. ISSN 0377-2217. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.09.038>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221714007772>.

- Luis Nobre Pereira. An introduction to helpful forecasting methods for hotel revenue management. *International Journal of Hospitality Management*, 58:13–23, 2016. ISSN 0278-4319. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijhm.2016.07.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S027843191630086X>.
- Luis Nobre Pereira and Vitor Cerqueira and. Forecasting hotel demand for revenue management using machine learning regression methods. *Current Issues in Tourism*, 25(17):2733–2750, 2022. doi: 10.1080/13683500.2021.1999397. URL <https://doi.org/10.1080/13683500.2021.1999397>.
- Jianguo Qi, Lixing Yang, Zhen Di, Shukai Li, Kai Yang, and Yuan Gao. Integrated optimization for train operation zone and stop plan with passenger distributions. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 109:151–173, 2018. ISSN 1366-5545. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.11.003>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554517303812>.
- Ahmad Rusdiansyah, Rescha Dwi A. P., and Nia Puspitasari. Model dynamic pricing untuk penetapan harga tiket pesawat terbang berbasis waktu dan persediaan kursi dengan mempertimbangkan keputusan kompetitor. *Jurnal Teknik Industri: Jurnal Keilmuan dan Aplikasi Teknik Industri*, 15(1):45–56, 05 2013. doi: 10.9744/jti.15.1.45-56. URL <https://jurnalindustri.petra.ac.id/index.php/ind/article/view/18707>.
- Malek Sarhani and Stefan Voß. Prediction of rail transit delays with machine learning: How to exploit open data sources. *Multimodal Transportation*, 3(2):100120, 2024. ISSN 2772-5863. doi: <https://doi.org/10.1016/j.multra.2024.100120>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2772586324000017>.
- A. Schöbel and F. Urban. Optimal fare structures and algorithms for ticket assignment in public transportation systems. *ArXiv preprint*, abs/2106.10521, 2021. URL <https://arxiv.org/abs/2106.10521>.
- Mahaboobsabani Shaik. Ai-driven revenue management using lang chain models in hospitality. *International Journal of Leading Research Publication*, 5(3), 3 2024. doi: 10.5281/zenodo.14471629. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.14471629>.

- Xinghua Shan, Xiaoyan Lv, Jinfei Wu, Shuo Zhao, and Junfeng Zhang. Revenue management method and critical techniques of railway passenger transport. *Railway Sciences*, 3(5):636–649, 2024. ISSN 2755-0907, 2755-0915. doi: 10.1108/RS-04-2024-0013. URL <https://doi.org/10.1108/RS-04-2024-0013>.
- Zuo-Jun Max Shen and Xuanming Su. Customer behavior modeling in revenue management and auctions: A review and new research opportunities. *Production and Operations Management*, 16(6):713–728, 2007. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2007.tb00291.x>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1937-5956.2007.tb00291.x>.
- Barry C. Smith, John F. Leimkuhler, and Ross M. Darrow. Yield management at american airlines. *Interfaces*, 22(1):8–31, 1992. doi: 10.1287/inte.22.1.8. URL <https://doi.org/10.1287/inte.22.1.8>.
- Arne K. Strauss, Robert Klein, and Claudius Steinhardt. A review of choice-based revenue management: Theory and methods. *European Journal of Operational Research*, 271(2): 375–387, 2018. ISSN 0377-2217. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.01.011>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221718300110>.
- Yanshuo Sun, Zhibin Jiang, Jinjing Gu, Min Zhou, Yeming Li, and Lei Zhang. Analyzing high speed rail passengers’ train choices based on new online booking data in china. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 97:96–113, 2018. ISSN 0968-090X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.10.015>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X18301694>.
- Kalyan Talluri and Garrett van Ryzin. An analysis of bid-price controls for network revenue management. *Management Science*, 44(11-part-1):1577–1593, 1998. doi: 10.1287/mnsc.44.11.1577. URL <https://doi.org/10.1287/mnsc.44.11.1577>.
- Kalyan T Talluri and Garrett J Van Ryzin. Theory and practice of revenue management. *Springer Science & Business Media*, 2004.
- Kalyan T. Talluri, Garrett J. van Ryzin, Itir Z. Karaesmen, and Gustavo J. Vulcano. Revenue management: Models and methods. In *2008 Winter Simulation Conference*, pages 145–156, 2008. doi: 10.1109/WSC.2008.4736064.

- Ruifan Tang, Lorenzo De Donato, Nikola Bessinovic, Francesco Flammini, Rob M.P. Goverde, Zhiyuan Lin, Ronghui Liu, Tianli Tang, Valeria Vittorini, and Ziyulong Wang. A literature review of artificial intelligence applications in railway systems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 140:103679, 2022. ISSN 0968-090X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103679>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X22001206>.
- Tao Tang, Simin Chai, Wei Wu, Jiateng Yin, and Andrea D'Ariano. A multi-task deep reinforcement learning approach to real-time railway train rescheduling. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 194:103900, 2025. ISSN 1366-5545. doi: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2024.103900>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554524004915>.
- Saravanan Thirumuruganathan, Noora Al Emadi, Soon gyo Jung, Joni Salminen, Dianne Ramirez Robillos, and Bernard J. Jansen. Will they take this offer? a machine learning price elasticity model for predicting upselling acceptance of premium airline seating. *Information & Management*, 60(3):103759, 2023. ISSN 0378-7206. doi: 10.1016/j.im.2023.103759. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378720623000071>.
- Ben Vinod. Unlocking the value of revenue management in the hotel industry. *Journal of Revenue and Pricing Management*, 3(2):178–190, 2004. ISSN 1477-657X. doi: 10.1057/palgrave.rpm.5170105. URL <https://doi.org/10.1057/palgrave.rpm.5170105>.
- Darius Walczak and Shelby Brumelle. Semi-markov information model for revenue management and dynamic pricing. *OR Spectrum*, 29(1):61–83, 2007. ISSN 1436-6304. doi: 10.1007/s00291-005-0026-z. URL <https://doi.org/10.1007/s00291-005-0026-z>.
- Weidi Wang, Ou Tang, and Jiazhen Huo. Dynamic capacity allocation for airlines with multi-channel distribution. *Journal of Air Transport Management*, 69:173–181, 2018. ISSN 0969-6997. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2018.02.006>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0969699717303204>.
- Chieh-Hua Wen and Po-Hung Chen. Passenger booking timing for low-cost airlines: A continuous logit approach. *Journal of Air Transport Management*, 64:91–99, 2017. ISSN 0969-6997. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2017.06.030>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/>

- [article/pii/S0969699717302995](#). Selected papers from the 19th ATRS World Conference, Singapore, 2015.
- Elizabeth Louise. Williamson. Airline network seat inventory control : methodologies and revenue impacts. 1992. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:109755890>.
- Guangming Xu, Hai Yang, Wei Liu, and Feng Shi. Itinerary choice and advance ticket booking for high-speed-railway network services. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 95:82–104, 2018. ISSN 0968-090X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2018.07.010>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0968090X18300251>.
- Dan Zhang and Daniel Adelman. An approximate dynamic programming approach to network revenue management with customer choice. *Transportation Science*, 43(3):381–394, 2009. doi: [10.1287/trsc.1090.0262](https://doi.org/10.1287/trsc.1090.0262). URL <https://doi.org/10.1287/trsc.1090.0262>.
- Dan Zhang and William L. Cooper. Pricing substitutable flights in airline revenue management. *European Journal of Operational Research*, 197(3):848–861, 2009. ISSN 0377-2217. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.10.067>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221708002038>.
- Xiang Zhao and Peng Zhao. A seat assignment model for high-speed railway ticket booking system with customer preference consideration. *Transportmetrica A Transport Science*, 15(2):776–806, 2019. doi: <https://doi.org/10.1080/23249935.2018.1532467>.
- Nan Zheng and Nikolas Geroliminis. Modeling and optimization of multimodal urban networks with limited parking and dynamic pricing. *Transportation Research Part B: Methodological*, 83:36–58, 2016. ISSN 0191-2615. doi: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.10.008>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261515002234>.
- X. Zhou and Others. Nonlinear integer programming model for integrated ticket pricing and stop planning in railway systems. *Mathematics*, 10(10):1679, 2022. doi: [10.3390/math10101679](https://doi.org/10.3390/math10101679).
- X. Zhou and Others. Integrated pricing and passenger flow assignment model based on prospect theory and logit model. *Mathematics*, 11(6):1412, 2023. doi: [10.3390/math11061412](https://doi.org/10.3390/math11061412).