

<b>1</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>2</b>
1.1	Contextualização Teórica . . . . .	2
1.2	Revenue Management (RM) . . . . .	5
1.2.1	Modelagem do Transporte Ferroviário de Passageiros . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modelagem matemática</b>	<b>9</b>
2.1	Modelagem matemática . . . . .	9
2.2	Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente . . . . .	10
2.3	Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental . . . . .	21

# CAPÍTULO 1

## Revisão da literatura

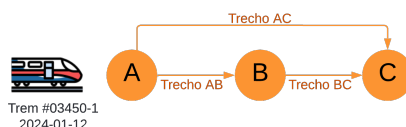
### 1.1 Contextualização Teórica

Esta seção apresenta alguns dos termos comumente utilizados na gestão de receitas no transporte ferroviário de passageiros, além de aprofundar-se em conceitos específicos que frequentemente geram confusão entre si.

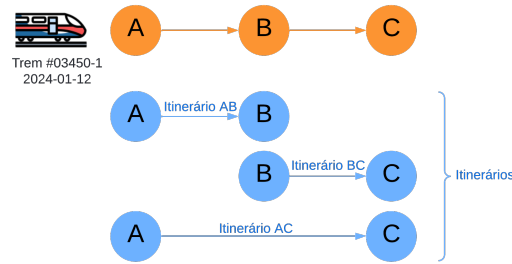
**Viagem:** Um trem programado para uma data específica é denominado "viagem". Uma viagem inclui uma estação de partida (estação de origem) e uma estação de chegada (estação de destino final). Exemplo: O trem #03450-1 de 12 de janeiro de 2024 é uma viagem:



**Trecho e itinerário:** Um trecho é uma conexão direta entre duas estações.



Um itinerário é uma combinação única de origem, destino, horário de partida e trem. Um itinerário pode consistir em um ou mais trechos, e uma viagem pode englobar um ou mais itinerários.



**Classes de controle:** Uma classe de controle é um produto oferecido por um operador de transporte a passageiros potenciais por um preço específico. As classes de controle também são conhecidas como classes tarifárias, produtos tarifários ou classes de reservas. Uma classe de controle define os benefícios e/ou restrições que o passageiro terá como resultado do preço pago pelo bilhete.

**Horizonte de reserva:** É o período de tempo entre o momento em que os bilhetes para o trem em questão são disponibilizados para venda pela primeira vez e a data de partida do trem. O horizonte de reserva geralmente é discretizado por dias, de forma que cada período representa um dia específico antes da partida (DBD). Frequentemente, realizamos uma agregação temporal para reduzir o tamanho do horizonte de reserva, selecionando alguns DBD específicos como pontos de controle (CP). Nesse contexto, o horizonte de contabilização é discretizado por períodos, onde o tamanho de cada período corresponde ao intervalo de tempo entre dois CP consecutivos.

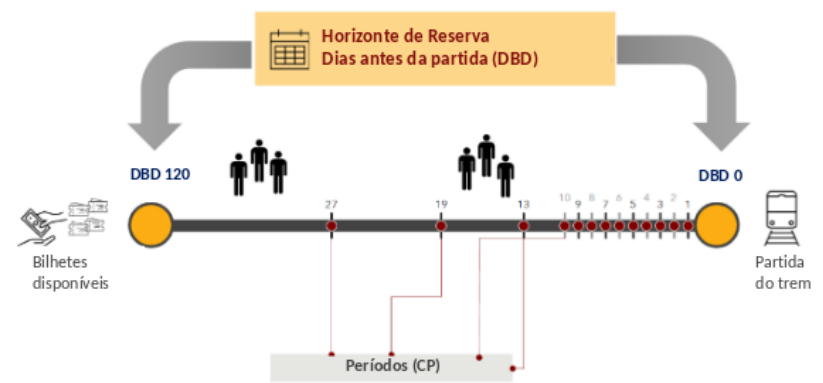


Figura 1.1: Horizonte de reserva

**Reservas:** As reservas representam o número de assentos protegidos para atender à demanda potencial de uma classe de controle específica em um determinado itinerário, durante um período específico do horizonte de reserva. O tamanho da reserva é definido no processo de otimização, considerando a demanda potencial do itinerário e da classe de controle correspondente. As reservas

também são conhecidas como níveis de proteção.

**Autorizações:** As autorizações representam o número de assentos disponíveis para venda em um determinado itinerário e classe de controle. Elas podem ser entendidas como a quantidade de bilhetes apresentados aos passageiros como disponíveis para compra. As autorizações têm como objetivo controlar o volume de passageiros ao longo de um itinerário ou trecho.

**Demanda comportamental:** Neste modelo, assume-se que o comportamento de compra dos passageiros é influenciado pelo conjunto de classes de controle disponíveis. Um exemplo desse conceito é ilustrado na Figura 1.2. Considere um cenário em que 4 clientes desejam comprar a tarifa A3, sendo essa sua primeira opção. Caso a tarifa A3 não esteja disponível, um dos clientes desiste da compra, enquanto os outros 3 permanecem no sistema e estão dispostos a adquirir a tarifa A2. Se A2 também não estiver disponível, mais 2 clientes abandonam a compra, restando apenas um cliente que opta por A1 (geralmente, a opção de maior valor).

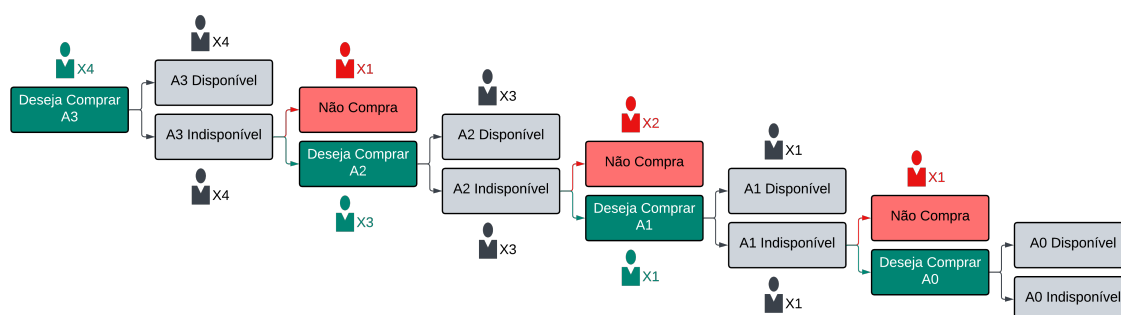
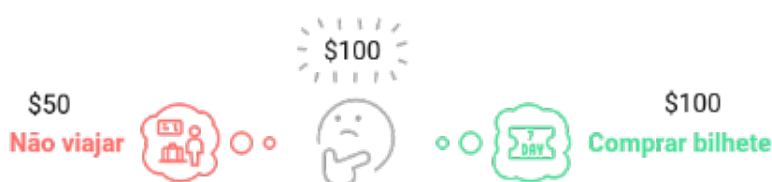


Figura 1.2: Representação de demanda comportamental

**Demanda independente:** Os clientes compram um produto específico, independentemente da oferta disponível no momento. Em um modelo de demanda independente, assume-se que um cliente disposto a pagar R\$100 por um bilhete nunca optaria por um bilhete mais barato (por exemplo, R\$50), mesmo que este estivesse disponível.



**Skip lagging:** No contexto do transporte ferroviário de passageiros, skip lagging refere-se a uma estratégia de otimização na programação das paradas dos trens, na qual certos serviços omitem paradas intermediárias em determinados trechos. O objetivo é reduzir os tempos de viagem e aumentar a eficiência operacional, garantindo que essa omissão não comprometa a acessibilidade e a qualidade do serviço oferecido aos passageiros. Na seção de modelagem matemática, será apresentado um conjunto de restrições associadas a esse conceito.

**Fulfillments over periods:** No contexto do transporte ferroviário de passageiros, fulfillments over periods refere-se ao cumprimento de determinados níveis de serviço, demanda ou capacidade ao longo de um período de tempo definido. Esse conceito é especialmente relevante na gestão de receitas, planejamento operacional e alocação de recursos, onde é essencial garantir que a oferta de serviços ferroviários atenda a objetivos estratégicos ao longo do tempo, em vez de se concentrar apenas em momentos específicos. Na seção de modelagem matemática, será apresentado um conjunto de restrições associadas a esse conceito.

## 1.2 Revenue Management (RM)

A gestão da receita, conhecido como RM, do inglês *Revenue Management*, desempenha um papel essencial na otimização da rentabilidade das empresas, permitindo ajustes dinâmicos nos preços e na capacidade de oferta conforme a demanda em tempo real (Gallego e G. v. Ryzin 1994). Essa abordagem estratégica é particularmente relevante em setores onde os recursos são limitados, como na aviação, hotelaria e transporte ferroviário. Nessas indústrias, cada unidade de capacidade disponível precisa ser aproveitada ao máximo, e o RM possibilita exatamente isso, segmentando clientes, controlando a disponibilidade de produtos e ajustando preços de forma dinâmica (Heo e Lee 2009). Além de elevar a rentabilidade, essa estratégia melhora a previsibilidade da demanda, permitindo que as empresas reajam rapidamente às oscilações do mercado. Em um ambiente altamente competitivo, o gerenciamento de receitas torna-se um diferencial crucial para manter uma posição sólida e, ao mesmo tempo, oferecer soluções mais eficientes e personalizadas para os consumidores.

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços

como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente (Glover et al. [1982](#)).

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo (Glover et al. [1982](#)).

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas (Glover et al. [1982](#)).

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturam de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o desloca-

mento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?" Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo (Glover et al. 1982).

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, com a chegada de novos sistemas de informação, regras de controle e outras condições, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management Littlewood 2005.

Según G. J. v. Ryzin e Talluri 2014, a gestão de receitas (RM) abrange o conjunto de estratégias e táticas que as empresas utilizam para gerenciar de forma científica a demanda por seus produtos e serviços. Além disso, pode-se dizer que, seu objetivo é vender cada unidade de ações para o cliente certo, no momento e pelo preço corretos José Guadix e Cortés 2011.

A princípio, os problemas de gestão de RM parecem ser simples; no entanto, nada poderia estar mais longe da realidade. Esses problemas têm uma complexidade esmagadora, e este documento não seria suficiente para detalhar cada um deles, apenas para mencionar alguns, temos modelagem, análise teórica, implementação, previsão, vendas excessivas, controle de estoque de assentos, preços, etc. Então, como sempre acontece, trabalha-se com simplificações de fatores muito complexos e com aproximações em outros casos McGill e G. J. v. Ryzin 1999.

### **1.2.1 Modelagem do Transporte Ferroviário de Passageiros**

Nos últimos anos, a gestão de reservas de bilhetes no transporte ferroviário de passageiros evoluiu significativamente graças à aplicação de modelos matemáticos avançados. Esses modelos têm como objetivo otimizar a alocação de assentos, o planejamento de paradas e as estratégias de preços, buscando maximizar as receitas e melhorar a satisfação dos passageiros. A seguir, são descritos alguns dos enfoques mais relevantes utilizados nesse campo, com base em pesquisas

recentes.

Um dos modelos destacados é o desenvolvido por Zhou et al. [2023](#), que integra a teoria das perspectivas, o modelo logit e um modelo de transferência de fluxo de passageiros para alocar a demanda de maneira eficaz. Esse enfoque permite estabelecer preços diferenciados e distribuir os assentos de forma a maximizar as receitas, considerando as preferências e comportamentos de diferentes segmentos de passageiros.

Por outro lado, o planejamento das paradas dos trens e a estratégia de preços estão interligados e impactam tanto as receitas quanto a experiência dos passageiros. Em Zhou et al. [2022](#) propuseram um modelo de otimização não linear inteiro misto que aborda conjuntamente a estratégia de preços dos bilhetes e o planejamento das paradas. Esse modelo busca maximizar as receitas do transporte ferroviário e minimizar o tempo de viagem dos passageiros, alcançando um equilíbrio eficiente entre oferta e demanda.

Além disso, a demanda de passageiros está sujeita a incertezas que tornam a gestão operacional mais desafiadora. Han e Ren em 2020 desenvolveram um modelo que otimiza conjuntamente o planejamento de paradas e a alocação de bilhetes, utilizando a teoria da incerteza. Esse modelo busca maximizar a satisfação dos passageiros e a taxa média de ocupação dos assentos, oferecendo soluções robustas frente às flutuações na demanda Han e Ren [2020](#).

Posteriormente, em Schöbel e Urban [2021](#), investiga-se como a escolha da rota dos passageiros é influenciada pelas estruturas tarifárias e pelos preços dos bilhetes. Sua pesquisa abordou o problema de determinar a tarifa mais econômica em sistemas de transporte público, avaliando diferentes estruturas tarifárias, como aquelas baseadas em distância ou zonas, e propondo algoritmos altamente eficientes para resolver esses problemas.



## CAPÍTULO 2

---

### Modelagem matemática

---

#### 2.1 Modelagem matemática

Como mencionado anteriormente, esta pesquisa propõe três modelos matemáticos de programação inteira mista. O primeiro utiliza uma demanda do tipo independente; o segundo emprega um modelo de demanda comportamental ajustado por proporções, onde essas proporções são calculadas com base na demanda independente; e o terceiro adota um modelo de demanda comportamental ajustado por hierarquia, em que essa hierarquia está associada à quantidade de assentos reservados para cada classe de controle.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura 2.1, onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade física máxima de assentos;
- Há apenas um tipo de classe comercial;
- Existe apenas um período no horizonte de reserva;

- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos;
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

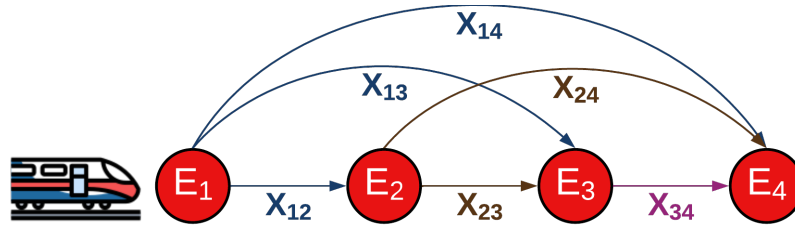


Figura 2.1: Versão gráfica simples do Problema de Transporte Ferroviário de Passageiros

## 2.2 Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente

Para este modelo, assumiremos uma demanda independente, o que significa que cada cliente pode comprar um produto específico independentemente da oferta disponível no momento da compra. Em outras palavras, pode-se dizer que, se um cliente estiver disposto a pagar um valor, por exemplo, de 10 reais por um assento, ele comprará o bilhete exatamente por esse valor, mesmo que um preço mais baixo esteja disponível. Agora, se o cliente não encontrar esse valor exato, ele preferirá não comprar.

Então, para esta proposta, temos o seguinte

$x_{ij}$ : Quantidade de assentos que serão reservados no trecho com origem em  $i$  e destino em  $j$ , onde  $j > i$  (variável de decisão).

$A_i$ : Quantidade de assentos vagos na estação  $i$ .

$P_{ij}$ : Preço da passagem no trajeto com origem em  $i$  e destino em  $j$ .

$Q$ : Capacidade física do trem.

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto  $i, j$ , matematicamente seria:

$$FO : \max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$$

s.a.

Estação 1:  $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1$  onde  $A_1 = Q$

Estação 2:  $x_{23} + x_{24} \leq A_2$  onde  $A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$

Estação 3:  $x_{34} \leq A_3$  onde  $A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações,  $E_1, E_2$  e  $E_3$ , já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação,  $E_4$ , é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 2.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

		DESTINOS			Disponibilidade (A)	Não Atribuídos
		E2	E3	E4		
ORIGENS	E1	$X_{12}$ 10	$X_{13}$ 5	$X_{14}$ 15	100	70
	E2	...	$X_{23}$ 40	$X_{24}$ 20	$70 + 10$	20
	E3	...	...	$X_{34}$ 60	$20 + 5 + 40$	5

Figura 2.2: Solução factível para o problema simplificado

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja,  $A_1 = 100$ , e que a soma das variáveis seria  $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$ . Portanto, teríamos  $30 \leq 100$ , ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos  $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$ . Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso  $x_{12} = 10$ . Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja,  $60 \leq 80$ . Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3,  $x_{13} = 5$  e  $x_{23} = 40$ , assim teríamos  $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$ , e no final teríamos  $60 \leq 65$ .

Além da lógica anterior, assume-se que há um trem, com vários tipo de assento, que viajará de uma estação  $E_1$  até uma estação  $E_n$  (onde  $n$  é a última estação onde o trem chegará). Esse trem terá um itinerário que conterà o nome do trem, a estação de origem, a estação de destino, a data e hora de partida e de chegada. Além disso, haverá uma lista de preços (para cada tipo de assento) a ser disponibilizada para venda. Cada um dos preços da lista será chamado de classe de controle ou control class. Os bilhetes serão disponibilizados para venda antes da partida do trem, e o tempo entre a disponibilização e a referida partida será chamado de horizonte de reserva. Esse horizonte será dividido em vários períodos, que podem ter diferentes temporalidades. Por exemplo, pode haver períodos em dias, semanas, meses, etc., e combinações entre eles. Os períodos dentro do horizonte de reserva estão ordenados de forma descendente, onde o menor valor é zero e representa a data de partida do trem, e o valor maior representa a data de disponibilização das vendas,  $[t, t - 1, t - 2, \dots, 0]$ .

Cada relação possível entre uma estação e outra será denominada origem-destino ou trecho. Será dito que uma origem-destino é adjacente se, e somente se, não houver estações intermediárias entre elas; caso contrário, serão não adjacentes. Por exemplo, na figura 2.1, os trechos adjacentes seriam:  $(E_1 - E_2)$ ,  $(E_2 - E_3)$ ,  $(E_3 - E_4)$ , e os trechos não adjacentes seriam:  $(E_1 - E_3)$ ,  $(E_1 - E_4)$  e  $(E_2 - E_4)$ . Além disso, observe que os trechos não adjacentes podem conter outros trechos, tanto adjacentes quanto não adjacentes. Por exemplo, o trecho  $(E_1 - E_4)$  da figura 2.1 contém os trechos adjacentes  $(E_1 - E_2)$ ,  $(E_2 - E_3)$ , e contém os trechos não adjacentes  $(E_1 - E_3)$  e  $(E_2 - E_4)$ . Vejamos o modelo completo:

Definição	Descrição	Domínio
<b>Conjuntos</b>		
$O$	Conjunto de Estações de origem	
$D$	Conjunto de Estações de Destino	
$OD$	Conjunto de Trechos com itinerário	
$NAD$	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerário	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho $(o,d)$ NÃO Adjacente	
$CR_{(o,d)}$	É um conjunto que contém outros subconjuntos, onde cada subconjunto é uma rota possível para ir desde a origem $o$ até o destino $d$ , sendo $(o,d)$ não adjacente. Por exemplo, para a rota $E_1 - E_4$ da figura 2.1, $CR_{(E_1,E_4)} = \{ \{(E_1 - E_2), (E_2 - E_4)\}, \{(E_1 - E_3), (E_3 - E_4)\}, \{(E_1 - E_2), (E_2 - E_3), (E_3 - E_4)\} \}$	
$S$	Representa cada subconjunto dentro de $CR_{(o,d)}$	
$V$	Conjunto de tipos de assento do trem	
$T$	Conjunto de Períodos	
$K_v$	É o conjunto de classes de controle para cada tipo de assento $v$ . Por exemplo, suponha que há dois tipos de assento $z$ e $p$ , e cada tipo contém três classes de controle $c_1, c_2, c_3$ , então a representação seria $K_z : \{c_1, c_2, c_3\}$ e $K_p : \{c_1, c_2, c_3\}$ . Além disso, considere que os elementos de cada $K_v$ são ordenados, onde sempre se cumpre que a classe de menor índice é a classe mais custosa, ou seja $c_1 > c_2 > c_3$ .	
<b>Parâmetros</b>		
$n$	Quantidade de Estações	
$Q_v$	Capacidade física do trem para cada tipo de assento $v$	$v \in V$
$P_{ijvk}$	Preços das passagens no Trecho $(i,j)$ , tipo de assento $v$ e Classe de Control $k$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
$d_{ijvkt}$	Demanda Independente no Trecho $(i,j)$ , tipo de assento $v$ e Classe de Control $k$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
<b>Variáveis de decisão</b>		
$X_{ijvkt}$	Quantidade de passagens reservadas no trecho $(i,j)$ , tipo de assento $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$Y_{ijvkt}$	Quantidade de passagens autorizados no trecho $(i,j)$ , tipo de assento $v$ e com classe de control $k$ no período $t$	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$\gamma_{ijvkt}$	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$\beta_{ijvkt}$	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando a classe $k$ é a classe mais barata que foi autorizada para venda, no trecho $i,j$ , tipo de assento $v$ e período $t$ ; e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
$\alpha_{ijvkt}$	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando $X_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
<b>Variável auxiliar</b>		
$A_{iv}$	Armazena a quantidade de assentos vazios disponíveis para venda em cada estação de origem e cada tipo de assento durante todo o horizonte de reserva. Cabe esclarecer que esta não é uma variável de decisão, pois esta variável apenas armazena um cálculo com base na capacidade física do trem e nas variáveis de decisão de passagens reservadas	$i \in O, v \in V$

Tabela 2.1: Notação matemática do problema

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (2.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijvkt} \leq A_{iv}, \quad \forall i \in O / i < j, i < n, v \in V \quad (2.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q_v, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O \quad (2.4)$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (2.5)$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\|, t \in T \quad (2.6)$$

### Demanda Independente

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.7)$$

### Fulfillments over periods

$$\gamma_{ijvkt} \leq Y_{ijvkt} \leq \gamma_{ijvkt} Q_v, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.8)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.9)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (2.10)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (2.11)$$

### Skip Lagging

$$\beta_{ijvkt} = \gamma_{ijvkt} - \gamma_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \gamma_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.13)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D / j' > j, v \in V, t \in T \quad (2.14)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad (2.15)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d} / S \subset CR_{o,d}$$

### Inicialização e domínio

$$A_{0,v} = Q_v, \quad \forall v \in V \quad (2.16)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0, \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.17)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.18)$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.19)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (2.20)$$

$$\gamma_{ijvkt}, \beta_{ijvkt}, \alpha_{ijvkt} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.21)$$

Na equação 2.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos reservados a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada tipo de assento, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe. Observe que queremos maximizar os ingressos em função dos assentos que estão reservados, que é o mais próximo que se tem da realidade em função da demanda conhecida.

A restrição 2.2 é responsável por calcular a quantidade de assentos vazios disponíveis em cada estação de origem, para cada tipo de assento, ao longo de todo o horizonte de reserva. Ela é uma generalização do exemplo simplificado utilizado para calcular  $A_{iv}$ .

A restrição 2.3 garante que os assentos reservados ao longo de todo o horizonte de reserva, para cada trecho, não excedam a capacidade disponível para cada tipo de assento em cada estação de origem.

A restrição 2.4 garante que a soma de autorizações da classe mais custosa, de cada estação de origem, de todos os períodos, não ultrapasse a capacidade do trem de cada tipo de assento. Note que apenas estamos considerando a classe mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização é por isso que o valor de  $k$  é o mínimo das classes de cada tipo de assento, pois a ordem do nome das classes é crescente mas o seu valor é decrescente. Para melhor compreensão, suponhamos uma solução para um problema de dois vagões  $V_1$  e  $V_2$ , 3 classes para  $V_1$  e 3 classes para  $V_2$ , 5 estações, 10 trechos, um período e uma capacidade física do trem de 700 cadeiras, conforme mostra a figura 2.3.

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

Figura 2.3: Solução factível para a variável de decisão Autorização

Observe que os nomes das classes são números ordenados de forma crescente [1, 2, 3] também o valor da classe 1 é mais caro que o valor da classe 2 e este é maior que o valor da classe 3. Além disso, a soma que não ultrapassará a capacidade do trem é a soma das classes 1 de cada tipo de assento de cada estação de origem. Por exemplo, para a estação 3 seria  $43 + 85$  para  $V_1$  trecho 3-4 e 3-5, mais,  $105 + 88$  para  $V_2$  nos mesmos trechos, ou seja  $43 + 85 + 105 + 88 = 321 \leq 700$

Até ao momento foi referido que a variável  $Y$  tem um carácter cumulativo e são as restrições 2.5 e 2.6 que controlam este comportamento. A restrição 2.5 é um caso particular da restrição 2.6, aplicada apenas à última classe, ou classe mais barata reservada para cada tipo de assento ( $k = \max\{K_v\}$ ), e garante que a soma de todos os períodos, de cada estação de origem da classe mais barata da variável "autorização" é maior ou igual à variável de decisão "reservas" nas mesmas condições. Por outro lado, a restrição 2.6 garante que cada classe autorizada seja sempre maior ou igual à classe autorizada imediatamente menor, mais a quantidade reservas da mesma classe, isto para cada período, cada trecho e cada classe diferente da classe mais barata. Para melhor compreensão, assuma as mesmas suposições que foram feitas na restrição 2.4.



Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

(a) Autorizados [Variável Y]

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	29	61	55	75	52	0
1-3	12	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	24	41	63	29	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	59	46	0
3-5	26	59	0	84	4	0
4-5	88	36	0	85	0	0

(b) Reservados [Variável X]

Figura 2.4: Solução factível para os assentos Autorizados e assentos Reservados

Observe a linha correspondente ao trecho 1-2 do tipo de assento  $V_2$  na tabela 2.4b, veja que a classe reservada mais barata foi a classe 2 com valor de 52, por este motivo na tabela 2.4a na mesma posição o valor deverá ser igual ou maior que 52, que neste caso é o mesmo valor; Agora observe para o mesmo trecho para o tipo de assento  $V_1$  classe 3 em ambas as tabelas acontece a mesma coisa, esse comportamento é garantido pela restrição 2.5. Agora não vamos olhar para a classe mais barata, vamos olhar para qualquer outra, por exemplo, para o mesmo trecho veja a classe 1 do tipo de assento  $V_1$  da tabela 2.4b com valor 29, se quiséssemos saber o valor correspondente na tabela 2.4a deveríamos adicionar a classe imediata menor (à direita) da classe 1 na tabela 2.4a, neste caso seria a classe 2 com valor 116, e some o valor da classe 1 da tabela 2.4b, que já sabemos que é 29, assim, o valor buscado será maior ou igual a  $116 + 29 = 145$ , como visto em tabela 2.4a, lembre-se que nessa posição o valor mínimo será o calculado, mas poderá assumir um valor superior. Esta última situação é controlada pela restrição 2.6.

A restrição 2.7 garante que a quantidade de passagens reservadas não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe de cada tipo de assento e em cada período no horizonte de reserva.

A restrição 2.8 é utilizada para determinar quando a variável de decisão  $Y$  assume valores diferentes de zero e quando não. Assim,  $\gamma$  toma o valor de 1 no primeiro caso e 0 no segundo.

Uma condição importante estabelece que uma classe pode ser reservada desde que essa mesma classe já tenha sido reservada em períodos anteriores. Para isso, definem-se as restrições 2.9 e 2.10, onde a primeira busca atribuir o valor 1 à variável  $\alpha_{ijvkt}$  quando  $X_{ijvkt}$  assume um valor diferente de zero, e atribuir 0 caso contrário; essa restrição possui a mesma estrutura e raciocínio da restrição

## 2.8.

Agora, a restrição 2.10 garante que uma certa variável binária  $\alpha_{ijvkt}$  tomará o valor 1 se, e somente se, no período anterior ( $\alpha_{i,j,v,k,t+1}$ ) também assumiu o valor 1; caso contrário, ela fica livre para tomar qualquer valor, 0 ou 1. Isso significa que só é possível reservar uma certa classe se essa mesma classe foi reservada no período anterior. Vejamos um exemplo:

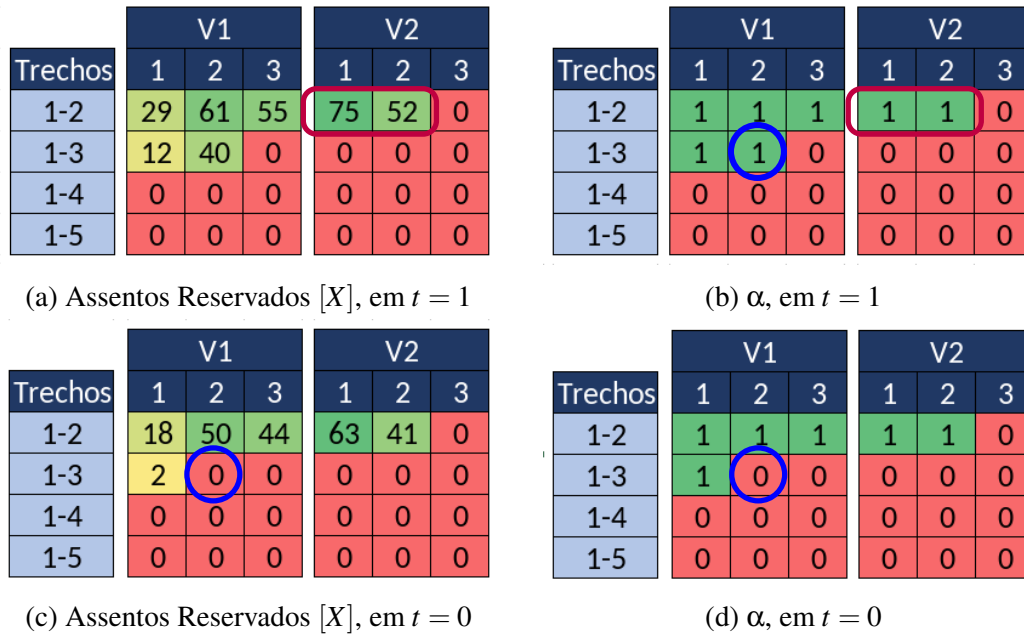


Figura 2.5: Exemplo: Restrições Fulfillments over periods

Lembre que  $t = 0$  é a data de partida do trem, ou seja, quanto maior for o valor de  $t$ , mais longe estará da data de partida. Assim,  $t = 1$  será o período exatamente anterior a  $t = 0$ .

Para cada trecho, tipo de assento e classe dados na figura 2.5, suponha que: a figura 2.5a é uma solução factível que representa a quantidade de assentos reservados para o período  $t = 1$ ; a figura 2.5b é a variável binária  $\alpha_{ijvkt}$ , que mostra 1 sempre que a quantidade de assentos reservados for diferente de zero em  $t = 1$  e mostra zero caso contrário (controlado pela restrição 2.9). As figuras 2.5c e 2.5d representam o mesmo que as figuras 2.5a e 2.5b, mas para o período  $t = 0$ .

Observe que as posições na figura 2.5d tomarão o valor zero sempre que, na figura 2.5b, essa posição também for zero. Isso significa que, se a classe do período anterior for zero, então a do período atual também será zero. Note também que, quando o valor na figura 2.5b é 1, na figura 2.5d o valor poderá ser 0 ou 1. Por exemplo, para o trecho 1 – 3 do tipo de assento  $v_1$  e classe 2, note que na figura 2.5b o valor é 1 e na figura 2.5d é zero, o que significa que a classe 2 foi reservada no período anterior, mas no período atual não foi.

Outra condição especial deste problema está relacionada à disponibilização dos preços dos bilhetes ao longo do tempo. Esses preços devem seguir uma lógica contínua, sem oscilações. Em outras palavras, os preços dos bilhetes devem sempre aumentar conforme a data de partida do trem se aproxima. A restrição 2.11 é responsável por garantir que essa condição seja atendida.

Por outro lado, a restrição 2.12 e 2.13 cumprem a mesma função de encontrar a última classe que foi disponibilizada para venda em um determinado trecho, período e tipo de assento. No entanto, a restrição 2.13 é aplicada sempre que se analisa a classe mais barata, e, em outros casos, usa-se a restrição 2.12. Assim, essas duas equações atribuem o valor 1 à variável  $\beta_{ijvkt}$  sempre que a classe atual  $k$  seja a classe mais barata disponibilizada para venda no trecho  $(i, j)$ , tipo de assento  $v$ , e período  $t$ ; caso contrário, atribui-se o valor zero. Essa restrição é necessária para aplicar as restrições 2.14 e 2.15.

E <sub>1</sub> - E <sub>3</sub>			
Classe	Y	$\gamma$	$\beta$
c <sub>1</sub>	10	1	$\beta = 1-1$
c <sub>2</sub>	9	1	$\beta = 1-1$
c <sub>3</sub>	5	1	$\beta = 1-1$
c <sub>4</sub>	5	1	$\beta = 1-0$
c <sub>5</sub>	0	0	$\beta = 0$
c <sub>6</sub>	0	0	$\beta = 0$

(a) Cálculo Variável  $\beta$

E <sub>1</sub> - E <sub>3</sub>			
Classe	Y	$\gamma$	$\beta$
c <sub>1</sub>	10	1	0
c <sub>2</sub>	9	1	0
c <sub>3</sub>	5	1	0
c <sub>4</sub>	5	1	1
c <sub>5</sub>	0	0	0
c <sub>6</sub>	0	0	0

(b) Resultado Variável  $\beta$

Figura 2.6: Exemplo para as restrições 2.12 e 2.13

Na figura 2.6a, vemos que, para a classe mais barata  $c_6$ ,  $\beta = \gamma = 0$ . Agora, para o restante das classes, realiza-se um cálculo com base nos valores de  $\gamma$ . Por exemplo, para a classe  $c_1$ , o cálculo seria:  $\gamma$  de  $c_1$  menos  $\gamma$  da próxima classe, ou seja,  $\gamma$  de  $c_2$ , o que resulta em  $1 - 1$ . Note, além disso, que para a classe  $c_4$ , fazendo o mesmo cálculo, o resultado é 1, como mostrado na figura 2.6b, e observe que essa classe é a última que possui um valor diferente de zero em  $\gamma$ .

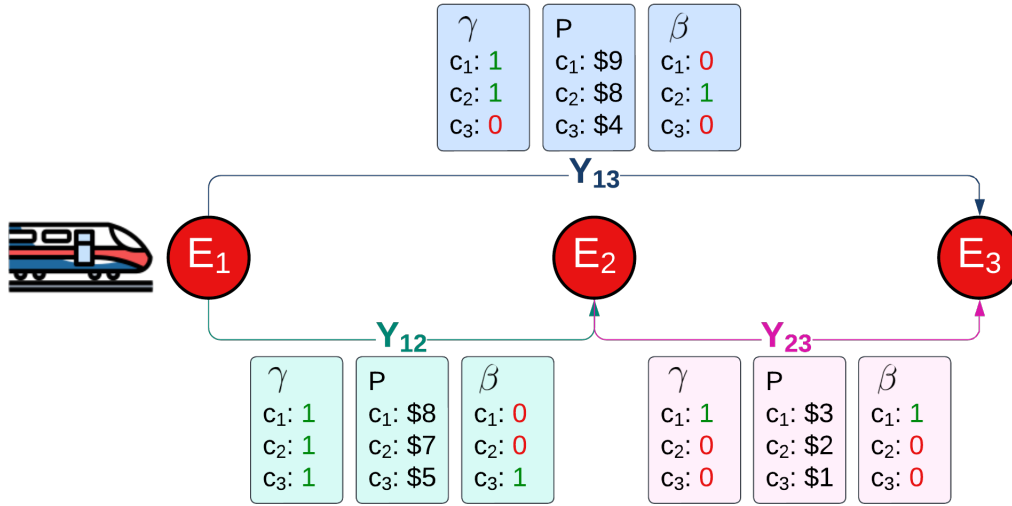


Figura 2.7: Exemplo para as restrições 2.14 e 2.15

Dentro do problema, é necessário garantir que, para todos os trechos com a mesma estação de origem, os trechos mais curtos disponibilizados para venda sejam mais baratos que os trechos mais longos. Isso é para evitar que passageiros comprem bilhetes para um trecho maior e desembarquem em estações anteriores. Por exemplo, se uma pessoa quer ir da estação  $E_1$  para a estação  $E_2$ , mas percebe que o preço para ir de  $E_1$  a  $E_3$  é mais barato, então essa pessoa comprará o bilhete de  $E_1$  a  $E_3$  e desembarcará na estação  $E_2$ . Essa situação é controlada pela restrição 2.14.

Vamos ver um exemplo mais claro: na figura 2.7, temos três estações, assumindo um único período e um único tipo de assento, além de três classes para cada trecho ( $c_1, c_2, c_3$ ). Note que  $\gamma$  e  $\beta$  são as variáveis binárias explicadas anteriormente, e  $P$  representa o preço de cada classe de controle. Para este caso, a restrição 2.14 pode ser aplicada aos trechos  $(E_1 - E_2)$  e  $(E_1 - E_3)$ .

Observe como o produto da soma do preço  $P$  e da variável  $\beta$  ativa o preço da classe mais barata ( $c_3$  com valor de \$7) em  $(E_1 - E_2)$ , e o produto da soma de  $(E_1 - E_3)$  ativa o preço da classe  $c_2$  (com valor de \$8). No final, teríamos que \$7 deve ser menor ou igual a \$8, o que está garantindo que o trecho  $(E_1 - E_2)$  seja mais barato que o trecho  $(E_1 - E_3)$ .

Note a importância do valor da variável  $\beta$ , que é responsável por "habilitar apenas os preços" das classes mais baratas disponibilizadas para a venda.

Além do mencionado anteriormente, também deve-se garantir que todas as possíveis combinações dos preços mais baratos dos trechos contidos dentro dos trechos não adjacentes sejam maiores ou iguais ao preço desse trecho não adjacente. Essa situação é controlada pela restrição 2.15.

Para dar um exemplo, analisemos novamente a figura 2.7 e identifiquemos os trechos não adjacentes e os trechos que estes contêm. Note que o trecho  $(E_1 - E_3)$  seria o único trecho não adjacente e contém os trechos  $(E_1 - E_2)$  e  $(E_2 - E_3)$ . Portanto, precisamos garantir que a soma das classes mais baratas disponibilizadas em  $(E_1 - E_2)$  e  $(E_2 - E_3)$  seja maior ou igual à classe mais barata disponibilizada em  $(E_1 - E_3)$ . Em termos numéricos, teríamos que  $5 + 3 \geq 8$ . Assim, este exemplo satisfaz nossa restrição.

As restrições de 2.17 e 2.16 são usadas para inicializar a restrição 2.2 quando  $i = 1$ . E as restrições de 2.18 a 2.21 representam o domínio das variáveis.

## 2.3 Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental

Até agora, falamos de uma demanda independente para o modelo, mas agora trabalharemos com uma demanda comportamental. A demanda comportamental está mais próxima da realidade do que a demanda independente. Veja o seguinte exemplo:

Suponhamos para este caso que temos um trecho  $(1 - 2)$  e três classes  $(c_1, c_2, c_3)$ , onde o preço de  $c_1 > c_2 > c_3$ , além, cada classe terá uma demanda de 10, 20 e 30, respectivamente.

$d_{12c1} = 10$ $d_{12c2} = 20$ $d_{12c3} = 30$	$d'_{12c1} = 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\}$ $d'_{12c2} = 20 = \{c_3 > c_2 > NC\}$ $d'_{12c3} = 30 = \{c_3 > NC\}$
(a) Demanda Independente $[d]$	(b) Demanda Comportamental $[d']$

Figura 2.8: Exemplo: Tipos de Demanda

Para interpretar a demanda independente, podemos dizer (segundo a figura 2.8a) que: existem 10 pessoas dispostas a comprar passagens **a um preço** de  $c_1$ , 20 pessoas a comprar **a um preço** de  $c_2$  e 30 pessoas a comprar **a um preço** de  $c_3$ . No entanto, se as 10 pessoas dispostas a pagar  $c_1$  encontrarem um melhor valor no momento da compra (por exemplo,  $c_3$ ), essas pessoas prefeririam não comprar, mesmo quando encontram um preço mais barato. Situação que, na realidade, não faria sentido.


Por outro lado, temos a demanda comportamental, denotada como  $d'$ , que esta representada

com uma lista de preferência, conforme visto na figura 2.8b. Esta lista significa que, por exemplo, 10 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** com valor  $c_1$  (antes de preferir não comprar (NC)), 20 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de  $c_2$  (antes de preferir não comprar) e 30 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de  $c_3$  (antes de preferir não comprar).

O funcionamento seria o seguinte: imagine que as 10 pessoas dispostas a comprar até um valor de  $c_1$  vão tentar comprar primeiro a um valor mais barato, neste caso  $c_3$ . Se  $c_3$  não estiver disponível, elas procurariam assentos com valor  $c_2$ . Se  $c_2$  também não estiver disponível, subiriam na lista e procurariam passagens com valor de  $c_1$ . Se estes não estiverem disponíveis, então não comprariam. Note que esse comportamento é o que comumente se usa na realidade.

Agora vejamos como o modelo leria esse novo comportamento. Para isso, calculemos a nova demanda potencial:

para  $c_1$ , vejamos a lista e notemos quem está disposto a pagar por esse valor.

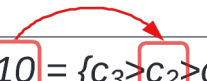


$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 2.9: Exemplo: Demanda comportamental para a classe  $c_1$

Segundo a figura 2.9, apenas 10 possíveis passageiros estão dispostos a pagar esse valor.

Agora vamos ver quem está disposto a pagar um valor por um bilhete da classe  $c_2$ :

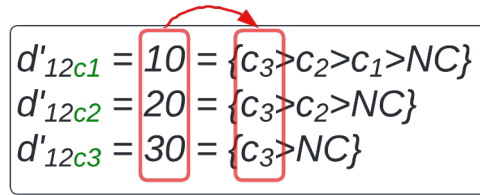


$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 2.10: Exemplo: Demanda comportamental para a classe  $c_2$

Neste caso, 30 possíveis pessoas estariam dispostas a pagar esse valor. Observe que, de esta nova demanda, 10 pessoas correspondentes à demanda de  $c_1$  também estariam dispostas a comprar pelo valor da classe  $c_2$ .

Por último, para a classe mais barata  $c_3$ , veja a figura 2.11.

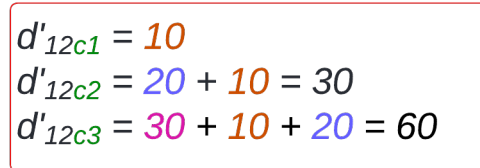


$$\begin{aligned}
 d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\
 d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\
 d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\}
 \end{aligned}$$

Figura 2.11: Exemplo: Demanda comportamental para a classe  $c_3$

Note que, neste caso, 60 pessoas estariam dispostas a pagar um bilhete da classe  $c_3$ , ou seja, toda a demanda da rota (1 – 2) compraria pelo valor mais barato se este estivesse disponível.

Assim, a demanda potencial comportamental para o modelo seria como se apresenta na figura 2.12.



$$\begin{aligned}
 d'_{12c1} &= 10 \\
 d'_{12c2} &= 20 + 10 = 30 \\
 d'_{12c3} &= 30 + 10 + 20 = 60
 \end{aligned}$$

Figura 2.12: Exemplo: Demanda comportamental total Potencial

No entanto, é importante lembrar que a demanda potencial inicial era de 60 pessoas, mas até este ponto, a demanda poderia ser maior, pois a demanda de cada classe comercial agora é o acúmulo das demandas das classes mais caras. Essa situação precisa ser controlada para não criar uma demanda inexistente; para isso, serão consideradas as seguintes restrições, relacionando neste caso as variáveis de decisão de assentos reservados:

$$X_{12c_1} \leq d'_{12c_1} = 10 \quad (2.22)$$

$$X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \quad (2.23)$$

$$X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \quad (2.24)$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \quad (2.25)$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} + X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \quad (2.26)$$

Observe que as restrições de 2.22 até 2.24 são restrições conhecidas que limitam os valores que as passagens reservadas podem assumir, enquanto as restrições 2.25 e 2.26 são as que nos ajudarão

a controlar para não ultrapassarmos a demanda potencial total inicial.

Por exemplo, se  $X_{12c_2}$  assume o valor de 30 (restrição 2.23), a restrição 2.25 garante que  $X_{12c_1}$  seja igual a 0, pois a demanda de 10 pessoas correspondente preferiu comprar ao preço da classe  $c_2$ . A mesma situação ocorreria se  $X_{12c_3}$  assumisse o valor de 60 (restrição 2.24), então a restrição 2.26 garantiria que a demanda por  $X_{12c_1}$  e  $X_{12c_2}$  fosse igual a zero, já que esses clientes decidiram comprar pelo valor da classe  $c_3$ . Dessa forma, esse conjunto de restrições funcionaria para cada combinação possível das variáveis descritas.

Agora, para formular o modelo completo utilizando a demanda comportamental baseada em listas ou faixas de preferência, basta modificar apenas as restrições que controlam a demanda no modelo independente e adicionar as restrições generalizadas descritas no modelo comportamental.

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.27)$$

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (2.28)$$

As restrições 2.27 e 2.28 representam a generalização das restrições de 2.22 a 2.26. Apenas adicionando essas duas últimas restrições e eliminando a restrição 2.7 do modelo independente, obteríamos, em teoria, um modelo com demanda comportamental. No entanto, essa afirmação não é completamente verdadeira. Embora as novas restrições limitem a demanda do modelo de forma que possam ser utilizadas as listas de preferência, o modelo ainda se comportará como um modelo independente.

Isso ocorre porque a demanda independente é um caso particular de todas as combinações possíveis que podem ser geradas ao usar as listas de preferência. Além disso, a demanda independente é o caso que produziria o maior lucro. Lembre-se de que as listas de preferência permitem a flexibilidade de um cliente disposto a pagar mais caro poder adquirir um produto mais barato, caso exista essa possibilidade — algo que a demanda independente não permite. Por isso, já sabemos de antemão que a solução obtida com a demanda comportamental será inferior à solução oferecida pelo modelo independente.

Além disso, é importante destacar que o modelo apresenta um comportamento otimista, pois assume que os clientes dispostos a pagar mais caro sempre chegarão antes daqueles que estão dispostos a pagar menos (devido à formulação da função objetivo).



Portanto, não basta apenas adicionar as restrições 2.27 e 2.28 para afirmar que temos um modelo com demanda comportamental. É necessário, de alguma forma, informar ao modelo que ele deve considerar outras possibilidades "mais realistas" durante a resolução do problema. É nesse ponto que introduzimos as seguintes restrições, que ajudarão a mitigar essa situação:

$$X_{ijvkt} \leq \left(d'_{ijvkt}\right) \left(\frac{d_{ijvkt}}{d'_{i,j,v,k',t}}\right), \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < k', k' < \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.29)$$

$$X_{i,j,v,k',t} \leq d_{i,j,v,k',t} + \left(d'_{i,j,v,k',t} - \sum_{k \in K_v} \frac{d'_{ijvkt} d_{ijvkt}}{d'_{i,j,v,k',t}}\right), \quad \forall (i,j) \in OD, \\ v \in V, k' = \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.30)$$

Para essas novas restrições, além da demanda comportamental, também utilizaremos a demanda independente. Assim, na restrição 2.29, o que fazemos é calcular as proporções da demanda independente para as classes de cada trecho, tipo de assento e período. Em seguida, essas proporções são multiplicadas pela demanda comportamental. Esse processo faz com que as demandas comportamentais potenciais para cada classe sejam reduzidas de acordo com as proporções da demanda independente. Dessa forma, garantimos que a solução obtida não seja idêntica à oferecida pelo modelo independente.

Observe que, ao calcular essas proporções, a demanda comportamental é reduzida, o que resulta em uma "perda de demanda". Esse complemento é então somado à classe mais barata do trecho, tipo de assento e período analisado, conforme ilustrado pela restrição 2.30. Dessa forma, incentivamos o modelo a utilizar as classes mais baratas. Vamos analisar um exemplo: assumamos que há um trecho com três classes para um tipo de assento e um período, e que essas classes possuem parâmetros de demanda independente  $d$ , conforme mostrado na Tabela 2.2.

Classes	$d$	%	$d'$	% * $d'$
$c_1$	36	34,62%	36	<b>12,46</b>
$c_2$	58	55,77%	94	<b>52,42</b>
$c_3$	10	9,62%	104	<b>10 + 29,12</b>
Total	104			

Tabela 2.2: Exemplo ajuste da demanda comportamental com proporções

Observe que a coluna "%" apresenta as proporções calculadas com base na demanda inde-

pendente  $d$ . A coluna  $d'$  mostra a demanda comportamental potencial, enquanto a coluna " $\%*d'$ " exibe o produto entre as proporções "%" e a demanda comportamental ( $d'$ ).

Adicionalmente, note que, para a classe mais barata  $c_3$ , o valor da última coluna é 10 (resultado do produto mencionado) somado a 29.12. Este último valor representa o complemento da demanda, ou seja,  $104 - (12,46 + 52,42 + 10)$ . Esse complemento é redistribuído para a classe mais acessível, garantindo que as regras do modelo sejam atendidas de forma a refletir a alocação proporcional e a flexibilidade comportamental.

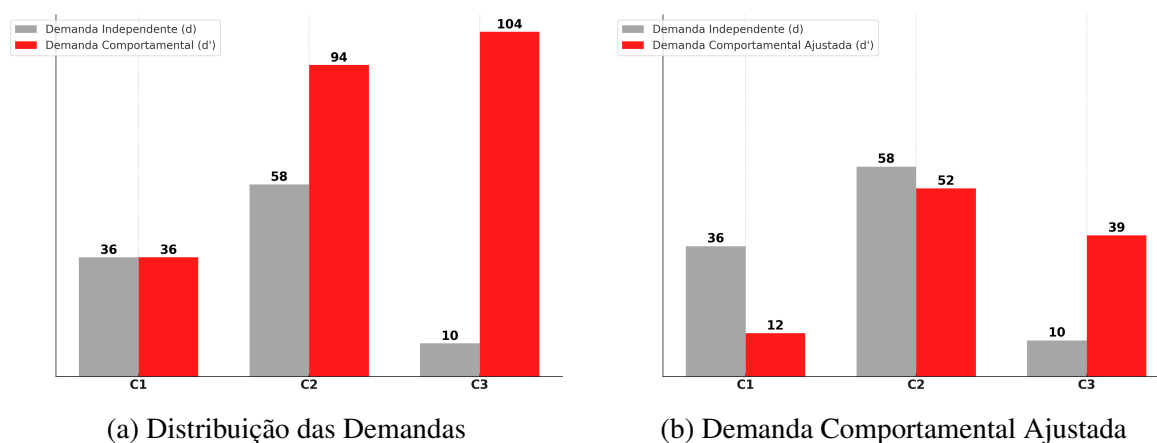


Figura 2.13: Ajuste da Demanda Comportamental com Proporções

O gráfico 2.13 nos ajuda a ter uma visão mais clara do problema. Observe que, na parte 2.13a, temos a comparação entre a demanda independente  $d$  e a demanda comportamental  $d'$ . Note que, em todos os casos,  $d' \geq d$ . Independentemente dos valores que  $d'$  possa assumir, o modelo selecionará os valores de  $d$ , pois estes são os que geram o maior lucro.

Após a aplicação do nosso ajuste, na parte 2.13b, observe como "reduzimos a demanda" tanto da classe  $c_1$  quanto da classe  $c_2$  para redistribuí-la à classe  $c_3$ . Agora,  $d'$  não é sempre maior ou igual a  $d$ , e o modelo é forçado a considerar o limite inferior, o que resulta na inclusão da demanda comportamental ajustada.

Em outras palavras, isso reflete uma situação em que parte das pessoas que estavam dispostas a pagar mais caro chegaram primeiro, mas encontraram opções mais baratas disponíveis e aproveitaram essa situação para realizar suas compras. Esse ajuste garante que o modelo capture um comportamento de compra mais realista e alinhado à flexibilidade das preferências dos clientes.

Outra abordagem proposta, como alternativa às restrições 2.29 e 2.30, foi o controle da demanda, desta vez criando uma hierarquia descendente para as classes da variável de decisão  $X$ , considerando um determinado tipo de assento, trecho e período. Em teoria, essa estratégia homo-

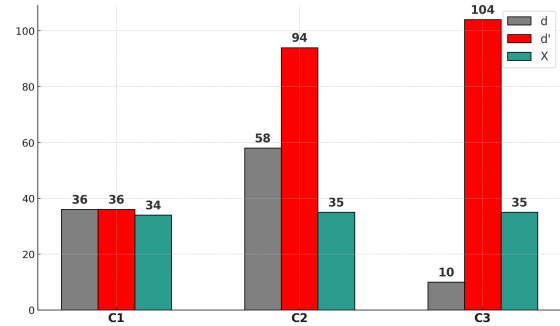
geneiza os valores que  $X$  poderia assumir, atribuindo valores muito semelhantes a todas as classes dentro das condições especificadas. Vejamos a restrição e um exemplo:

$$X_{ijvkt} \leq X_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k \neq \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.31)$$

Retomemos novamente o exemplo apresentado na tabela 2.2. Se aplicarmos essa nova lógica, o resultado esperado seria que  $X_{c_1} \leq X_{c_2} \leq X_{c_3}$ . No entanto, como neste ponto (antes de adicionar as restrições que complementam a demanda comportamental) o modelo ainda se comporta como independente — uma situação já explicada anteriormente —, o modelo utilizaria a demanda independente como base para criar a hierarquia descendente. É importante destacar algo crucial: mencionamos que o modelo considera a demanda independente para ajustar a hierarquia. No entanto, ao formular a restrição, utilizamos a variável  $X$  e não o parâmetro  $d'$ . Isso não é uma contradição e foi feito intencionalmente. Na verdade, essa escolha foi realizada para explicar, de forma prática, como o modelo funciona internamente. Dito isso, uma solução para o nosso exemplo seria:

Classes	$d$	$d'$	$X$
$c_1$	36	36	<b>34</b>
$c_2$	58	94	<b>35</b>
$c_3$	10	104	<b>35</b>
<b>Total</b>	104		

(a) Exemplo restrição 2.31



(b) Exemplo visual da restrição 2.31

Figura 2.14: Ajuste da Demanda Comportamental com Hierarquia

Nesse caso, a coluna  $X$  representa a solução mais gulosa que a variável  $X$  poderia assumir. Observe como os valores são muito semelhantes para cada classe e respeitam a ordem decrescente.

Esse último enfoque não requer intervenção direta na demanda comportamental já calculada (assim como o primeiro enfoque). Apenas adicionamos uma condição para a variável  $X$ , que é suficiente para ativar a característica de lista de preferências do modelo.

---

## Bibliografia

---

- Gallego, G. e G. van Ryzin (1994). «Optimal dynamic auctions for revenue management». Em: *Management Science* 40.7, pp. 999–1020.
- Glover, Fred et al. (1982). «The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines». Em: *Interfaces* 12.3, pp. 73–80. ISSN: 00922102, 1526551X. URL: <http://www.jstor.org/stable/25060268> (acedido em 07/08/2024).
- Han, X. e Z. Ren (2020). «Joint optimization of stop planning and ticket allocation under uncertainty theory». Em: *Soft Computing* 24.9, pp. 7293–7308. DOI: [10.1007/s00500-019-04617-9](https://doi.org/10.1007/s00500-019-04617-9).
- Heo, Cindy Yoonjoung e Seoki Lee (2009). «Application of revenue management practices to the theme park industry». Em: *International Journal of Hospitality Management* 28.3, pp. 446–453. ISSN: 0278-4319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijhm.2009.02.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0278431909000255>.
- José Guadix Luis Onieva, Jesús Muñuzuri e Pablo Cortés (2011). «An overview of revenue management in service industries: an application to car parks». Em: *The Service Industries Journal* 31.1, pp. 91–105. DOI: [10.1080/02642069.2010.491543](https://doi.org/10.1080/02642069.2010.491543).
- Littlewood, Ken (abr. de 2005). «Special Issue Papers: Forecasting and control of passenger bookings». Em: *Journal of Revenue and Pricing Management* 4, pp. 111–123. DOI: [10.1057/palgrave.rpm.5170134](https://doi.org/10.1057/palgrave.rpm.5170134).

- McGill, Jeffrey I. e Garrett J. van Ryzin (1999). «Revenue Management: Research Overview and Prospects». Em: *Transportation Science* 33.2, pp. 233–256. DOI: [10.1287/trsc.33.2.233](https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233). eprint: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>. URL: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>.
- Ryzin, Garrett J. van e Kalyan T. Talluri (out. de 2014). «An Introduction to Revenue Management». Em: *INFORMS Tutorials in Operations Research*, pp. 142–194. DOI: <https://doi.org/10.1287/educ.1053.0019>.
- Schöbel, A. e F. Urban (2021). «Optimal fare structures and algorithms for ticket assignment in public transportation systems». Em: *ArXiv preprint* abs/2106.10521. URL: <https://arxiv.org/abs/2106.10521>.
- Zhou, X. et al. (2022). «Nonlinear integer programming model for integrated ticket pricing and stop planning in railway systems». Em: *Mathematics* 10.10, p. 1679. DOI: [10.3390/math10101679](https://doi.org/10.3390/math10101679).
- (2023). «Integrated pricing and passenger flow assignment model based on prospect theory and logit model». Em: *Mathematics* 11.6, p. 1412. DOI: [10.3390/math11061412](https://doi.org/10.3390/math11061412).