Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Ciências Aplicadas

Wilmer Dario Urango Narvaez

UM MODELO LINEAR DE DEMANDA COMPORTAMENTAL PARA MAXIMIZAR A RECEITA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE FERROVIÁRIO DE PASSAGEIROS

A LINEAR BEHAVIORAL DEMAND MODEL TO MAXIMIZE REVENUE FROM THE RAIL PASSENGER TRANSPORTATION PROBLEM

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências Aplicadas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestrado em Engenharia de Produção e de Manufatura. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Gestão de Processos.

Orientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto
Co-orientador: Dr. Karim Perez

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Wilmer Dario Urango Narvaez, e orientado pelo Prof. Diego Jacinto Fiorotto.

Limeira
2024

CAPÍTULO 1

Revisão da literatura

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente.

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento precioso que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo.

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas.

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturem de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o deslocamento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?"Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo [1].

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, com a chegada de novos sistemas de informação, regras de controlo e outras condições, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management [3].

Según [5], a gestão de receitas (RM) abrange o conjunto de estratégias e táticas que as empresas utilizam para gerenciar de forma científica a demanda por seus produtos e serviços. Além disso, pode-se dizer que, Seu objetivo é vender cada unidade de ações para o cliente certo, no momento e pelo preço corretos [2].

A princípio, os problemas de gestão de RM parecem ser simples; no entanto, nada poderia estar mais longe da realidade. Esses problemas têm uma complexidade esmagadora, e este documento não seria suficiente para detalhar cada um deles, apenas para mencionar alguns, temos modelagem, análise teórica, implementação, previsão, vendas excessivas, controle de estoque de assentos, preços, etc. Então, como sempre acontece, trabalha-se com simplificações de fatores muito complexos e com aproximações em outros casos [4]

CAPÍTULO 2

Modelagem matemática

2.1 Modelagem matemática

Dentro da pesquisa, foram realizadas duas modelagens distintas, ambas, diferentemente da literatura clássica, foram elaboradas com base nas estações de origem e destino, e não nos legs do percurso.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura 2.1, onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade física máxima de assentos.
- Há apenas um tipo de classe comercial.
- Existe apenas um período no horizonte de reserva.
- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos.
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

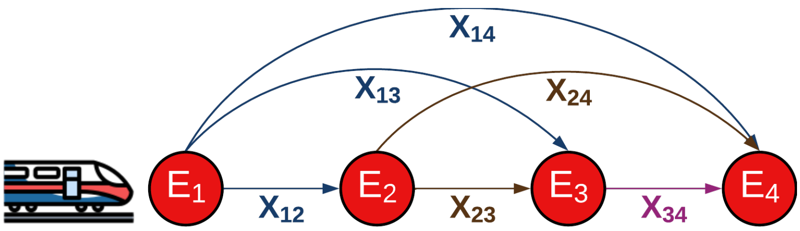

Figura 2.1: Versão gráfica simples

2.2 Primeira modelagem: Demanda Independente

Para este modelo, assumiremos uma demanda independente, o que significa que cada cliente pode comprar um produto específico independentemente da oferta disponível no momento da compra. Em outras palavras, pode-se dizer que, se um cliente estiver disposto a pagar um valor, por exemplo, de 10 reais por um assento, ele comprará o bilhete exatamente por esse valor, mesmo que um preço mais baixo esteja disponível. Agora, se o cliente não encontrar esse valor exato, ele preferirá não comprar.

Então, para esta proposta, temos o seguinte

x_{ij}: Quantidade de assentos que serão seguradas no trecho com origem em i e destino em j, onde $j > i$ (variável de decisão).

A_i: Quantidade de assentos vagos na estação i.

P_{ij}: Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j.

Q: Capacidade física do trem.

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto i, j, matematicamente seria:

$FO : max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$

s.a.

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1 \quad onde \quad A_1 = Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq A_2 \quad onde \quad A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$

Estação 3: $x_{34} \leq A_3 \quad onde \quad A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações, E_1, E_2 e E_3, já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação, E4, é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem.

Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 2.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

ORIGENES \ DESTINOS	E2	E3	E4	Disponibilidade (A)	Não Atribuidos
E1	X_{12} 10	X_{13} 5	X_{14} 15	100	70
E2	—	X_{23} 40	X_{24} 20	70 + 10	20
E3	—	—	X_{34} 60	20 + 5 + 40	5

Figura 2.2: Solução factível para o problema simplificado

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja, $A_1 = 100$, e que a soma das variáveis seria $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$. Portanto, teríamos $30 \leq 100$, ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$. Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso $x_{12} = 10$. Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja, $60 \leq 80$. Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3, $x_{13} = 5$ e $x_{23} = 40$, assim teríamos $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$, e no final teríamos $60 \leq 65$.

Além da lógica anterior, assume-se que há um trem, com vários vagões ou cabines, que viajará de uma estação E_1 até uma estação E_n (onde n é a última estação onde o trem chegará). Esse trem terá um itinerário que conterá o nome do trem, a estação de origem, a estação de destino, a data e hora de partida e de chegada. Além disso, haverá uma lista de preços (para o mesmo tipo de assento) a ser disponibilizada para venda. Cada um dos preços da lista será chamado de classe de controle ou control class. Os bilhetes serão disponibilizados para venda antes da partida do trem, e o tempo entre a disponibilização e a referida partida será chamado de horizonte de reserva. Esse horizonte será dividido em vários períodos, que podem ter diferentes temporalidades. Por exemplo, pode haver períodos em dias, semanas, meses, etc., e combinações entre eles. Cada um desses períodos será chamado de check point. Os períodos dentro do horizonte de reserva estão ordenados de forma descendente, onde o menor valor é zero e representa a data de partida do trem, e o valor maior representa a data de disponibilização das vendas, $[t, t-1, t-2, \ldots, 0]$.

Cada relação possível entre uma estação e outra será denominada origem-destino ou trecho. Será dito que uma origem-destino é adjacente se, e somente se, não houver estações intermediárias entre elas; caso contrário, serão não adjacentes. Por exemplo, na figura 2.1, os trechos adjacentes seriam: $(E_1 - E_2)$, $(E_2 - E_3)$, $(E_3 - E_4)$, e os trechos não adjacentes seriam: $(E_1 - E_3)$, $(E_1 - E_4)$ e $(E_2 - E_4)$. Além disso, observe que os trechos não adjacentes podem conter outros trechos, tanto adjacentes quanto não adjacentes. Por exemplo, o trecho $(E_1 - E_4)$ da figura 2.1 contém os trechos adjacentes $(E_1 - E_2)$, $(E_2 - E_3)$, e contém os trechos não adjacentes $(E_1 - E_3)$ e $(E_2 - E_4)$. Vejamos o modelo completo:

Definição	**Descrição**	**Domínio**
Conjuntos		
O	Conjunto de Estações de origem	
D	Conjunto de Estações de Destino	
OD	Conjunto de Trechos com itinerário	
NAD	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerário	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho (o,d) NÃO Adjacente	
$CR_{(o,d)}$	É um conjunto que contém outros subconjuntos, onde cada subconjunto é uma rota possível para ir desde a origem o até o destino d, sendo (o,d) não adjacente. Por exemplo, para a rota $E_1 - E_4$ da figura 2.1, $CR_{(E_1,E_4)} = \{\{(E_1 - E_2),(E_2 - E_4)\},\{(E_1 - E_3),(E_3 - E_4)\},\{(E_1 - E_2),(E_2 - E_3),(E_3 - E_4)\}\}$	
S	Representa cada subconjunto dentro de $CR_{(o,d)}$	
V	Conjunto de Cabines do trem	
T	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
K_v	É o conjunto de classes de controle para cada vagão v. Por exemplo, suponha que há duas cabines z e p, e cada cabine contém três classes de controle c_1, c_2, c_3, então a representação seria $K_z : \{c_1, c_2, c_3\}$ e $K_p : \{c_1, c_2, c_3\}$. Além disso, considere que os elementos de cada K_v são ordenados, onde sempre se cumpre que a classe de menor indice é a classe mais costosa, ou seja $c_1 > c_2 > c_3$.	
Parâmetros		
n	Quantidade de Estações	
Q	Capacidade física do trem	
P_{ijvk}	Preços das passagens no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
d_{ijvkt}	Demanda Independente no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 2.1: Notação matemática

Definição	Descrição	Domínio
Variáveis de decisão		
X_{ijvkt}	Quantidade de passagens segurados no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagens autorizados no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
BY_{ijvkt}	É uma variável binaria que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
BL_{ijvkt}	É uma variável binaria que toma o valor de 1 quando a classe k é a classe mais barata que foi autorizada para venda, no trecho i,j, vagão v e período t; e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
BX_{ijvkt}	É uma variável binaria que toma o valor de 1 quando $X_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variável auxiliar		
A_i	Armazena a quantidade de assentos vazios disponíveis para venda em cada estação de origem durante todo o horizonte de reserva. Cabe esclarecer que esta não é uma variável de decisão, pois esta variável apenas armazena um cálculo com base na capacidade física do trem e nas variáveis de decisão de passagens seguradas	$i \in O$

Tabela 2.2: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \tag{2.1}$$

s.a.

$$A_i = A_{i-1} - \sum_{(i,j)\in OD/j\geq i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j)\in OD/j<i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O \tag{2.2}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{ijvkt} \leq A_i, \quad \forall i \in O/i<j, i<n \tag{2.3}$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD/i<j, v \in V, k \in K_v/k < \|K_v\|, t \in T \tag{2.4}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{t\in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q, \quad k = min\{K_v\}, \forall i \in O \tag{2.5}$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt}, \quad k = max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T \tag{2.6}$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k < \|K_v\|, t \in T \tag{2.7}$$

$$BY_{odvkt} \leq Y_{odvkt} \leq BY_{odvkt} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, v \in V, k \in K_v, t \in T \tag{2.8}$$

$$BY_{odvkt} \leq Y_{ijvkt} \leq BY_{odvkt} Q, \quad \forall (o,d) \in NAD, (i,j) \in BRI_{(o,d)}, v \in V, k \in K_v, t \in T \tag{2.9}$$

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD/i<j, v \in V, k \in K_v, t \in T \tag{2.10}$$

Fulfillments over periods

$$BX_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq BX_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \tag{2.11}$$

$$BX_{ijvkt} \leq BX_{i,j,v,k,t-1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq max\{T\} \tag{2.12}$$

Skip Lagging

$$BY_{ijvkt} - BY_{i,j,v,k+1,t} \leq BL_{ijvkt} \leq BY_{ijvkt} - BY_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD$$
$$v \in V, k \in K / k < max\{K_v\}, t \in T \tag{2.13}$$

$$BL_{ijvkt} = BY_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k = max\{K_v\}, t \in T \tag{2.14}$$

$$\sum_{k \in K_v} BL_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} BL_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D / j' > j, v \in V, t \in T \tag{2.15}$$

$$\sum_{k \in K_v} BL_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} BL_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad \forall S \in CR_{o,d} / S \subset CR_{o,d} \tag{2.16}$$

Inicialização e domínio

$$A_0 = Q \tag{2.17}$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0, \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \tag{2.18}$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.19}$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.20}$$

$$A_j \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.21}$$

$$BY_{ijvkt} \in \{0,1\} \tag{2.22}$$

Na equação 2.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos segurados a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada vagão, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe. Observe que queremos maximizar os ingressos em função dos assentos que estão segurados, que é o mais próximo que se tem da realidade em função da demanda conhecida.

A restrição 2.2 é utilizada para calcular a disponibilidade de assentos de cada estação de origem, em cada período de tempo para cada classe em cada vagão e é a generalização do exemplo simplificado para calcular a variável auxiliar A_i.

A restrição 2.3 garante que todas as autorizações habilitadas a partir de cada estação de origem para cada período e cada classe de cada vagão não excedam a disponibilidade da sua estação de origem correspondente (a disponibilidades é calculada na restrição 2.2).

A restrição 2.4 é uma restrição de hierarquia e garante que as quantidades de autorizações para as classes de maior preço sejam sempre maiores do que as quantidades de autorizações de menor preço em cada vagão, em cada trecho, e em cada período do horizonte de reserva.

A restrição 2.5 garanta que a soma de autorizações da classe mais custosa de cada vagão, de cada estação de origem, de todos os períodos, não ultrapasse a capacidade do trem, note que apenas estamos considerando a classe mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização é por isso que o valor de k é o mínimo das classes de cada vagão, pois a ordem do nome das classes é crescente mas o seu valor é decrescente. Para melhor compreensão, suponhamos uma solução para um problema de dois vagões V_1 e V_2, 3 classes para V_1 e 3 classes para V_2, 5 estações, 10 trechos, um período e uma capacidade física do trem de 700 cadeiras, conforme mostra a figura 2.3.

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

Figura 2.3: Solução factível para a variável de decisão Autorização

Observe que os nomes das classes são números ordenados de forma crescente [1, 2, 3] também o valor da classe 1 é mais caro que o valor da classe 2 e este é maior que o valor da classe 3. Além disso, a soma que não ultrapassará a capacidade do trem é a soma das classes 1 de cada vagão de cada estação de origem. Por exemplo, para a estação 3 seria $43+85$ para V_1 trecho 3-4 e 3-5, mais, $105+88$ para V_2 nos mesmos trechos, ou seja $43+85+105+88 = 321 \leq 700$

Até ao momento foi referido que a variável Y tem um carácter cumulativo e são as restrições 2.6 e 2.7 que controlam este comportamento. A restrição 2.6 é um caso particular da restrição 2.7, aplicada apenas à última classe, ou classe mais barata segurada para cada vagão ($k = max\{K_v\}$), e garante que a soma de todos os períodos, de cada estação de origem da classe mais barata da variável "autorização"é maior ou igual à variável de decisão "segurada"nas mesmas condições.

Por outro lado, a restrição 2.7 garante que cada classe autorizada seja sempre maior ou igual à classe autorizada imediatamente menor, mais a quantidade segurada da mesma classe, isto para cada período, cada trecho e cada classe diferente da classe mais barata. Para melhor compreensão, assuma as mesmas suposições que foram feitas na restrição 2.5

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

(a) Autorizados [Variável Y]

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	29	61	55	75	52	0
1-3	12	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	24	41	63	29	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	59	46	0
3-5	26	59	0	84	4	0
4-5	88	36	0	85	0	0

(b) Segurados [Variável X]

Figura 2.4: Solução factível para os assentos Autorizados e assentos Segurados

Observe a linha correspondente ao trecho 1-2 do vagão V_2 na tabela 2.4b, veja que a classe segurada mais barata foi a classe 2 com valor de 52, por este motivo na tabela 2.4a na mesma posição o valor deverá ser igual ou maior que 52, que neste caso é o mesmo valor; Agora observe para o mesmo trecho para o vagão V_1 classe 3 em ambas as tabelas acontece a mesma coisa, esse comportamento é garantido pela restrição 2.6. Agora não vamos olhar para a classe mais barata, vamos olhar para qualquer outra, por exemplo, para o mesmo trecho veja a classe 1 do vagão V_1 da tabela 2.4b com valor 29, se quiséssemos saber o valor correspondente na tabela 2.4a deveríamos adicionar a classe imediata menor (à direita) da classe 1 na tabela 2.4a, neste caso seria a classe 2 com valor 116, e some o valor da classe 1 da tabela 2.4b, que já sabemos que é 29, assim, o valor buscado será maior ou igual a $116+29 = 145$, como visto em tabela 2.4a, lembre-se que nessa posição o valor mínimo será o calculado, mas poderá assumir um valor superior. Esta última situação é controlada pela restrição 2.7.

Suponha que você tem um trecho não adjacente E1-E3, e que esse trecho contém outros trechos E1-E2 e E2-E3. Para esta situação, a classe mais barata ativada no trecho E1-E3 deverá ser a classe mais barata ativada nos trechos E1-E2 e E2-E3. Isso é feito com o objetivo de que as combinações dos preços dos bilhetes por trechos não sejam mais econômicos do que o preço de um bilhete direto. Para alcançar isso, é criada uma variável binária para cada trecho não adjacente (BY), que será ativada, ou tomará o valor de 1, quando as passagem autorizadas "Y" (ou assentos a serem disponibilizados para venda) de uma classe desse trecho, de um vagão e de um período, forem diferentes de zero e tomará o valor de zero caso contrário. Esse comportamento será controlado pela restrição 2.8.

Uma vez calculados os valores para BY dos trechos não adjacentes, a restrição 2.9 fará com que as classes de controle de todos os trechos contidos em cada trecho não adjacente sejam 0 ou, no mínimo 1. Assim, quando a classe de controle do trecho não adjacente assumir um valor de $BY = 0$, essa classe será 0 para os trechos contidos. Por outro lado, se a classe de controle do trecho não adjacente assumir o valor de $BY = 1$, então essa classe tomará, no mínimo, o valor de 1 para todos os trechos contidos.

Para um melhor entendimento, suponha um trem com 1 vagão que passa por 3 estações, E_1, E_2 e E_3, e tem um horizonte de reserva de um único período. Sob esta situação, o trecho não adjacente seria "$E_1 - E_3$" e os trechos contidos seriam "$E_1 - E_2$" e "$E_2 - E_3$". Agora imagine que cada trecho tem 6 classes diferentes ($c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$), onde o preço de $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4 \geq c_5 \geq c_6$, e que as autorizações para o trecho não adjacente (variável Y) tomam os valores mostrados na tabela 2.5:

	E_1 - E_3		E_1 - E_2	E_2 - E_3
Classe	Y	BY	Y	Y
c_1	10	1	1 ≤ Y ≤ Q	1 ≤ Y ≤ Q
c_2	9	1	1 ≤ Y ≤ Q	1 ≤ Y ≤ Q
c_3	5	1	1 ≤ Y ≤ Q	1 ≤ Y ≤ Q
c_4	5	1	1 ≤ Y ≤ Q	1 ≤ Y ≤ Q
c_5	0	0	0 ≤ Y ≤ 0	0 ≤ Y ≤ 0
c_6	0	0	0 ≤ Y ≤ 0	0 ≤ Y ≤ 0

Figura 2.5: Exemplo simplificado do funcionamento da restrição 2.9

Para o trecho "$E_1 - E_3$", note que quando $Y \neq 0$, $BY = 1$ e quando $Y = 0$, $BY = 0$ (controlado pela restrição 2.8). Agora observe que, quando $BY = 1$ para uma certa classe, os trechos $E_1 - E_2$ e $E_2 - E_3$ assumem valores entre 1 e um número suficientemente grande ($1 \leq Y \leq Q$) neste caso a capacidade do trem, o que indica que os assentos a serem disponibilizados para essa classe nesses trechos não podem ser zero. Por outro lado, quando $BY = 0$, os trechos menores devem zerar a classe correspondente com ($0 \leq Y \leq 0$), ou seja, não se deve disponibilizar assentos com essa classe (controlado pela restrição 2.9). Deve-se esclarecer que as classe de controle dos trechos contidos, apenas imitam o comportamento da classe não adjacente correspondente, e não os valores que esta assume.

A restrição 2.10 garante que a quantidade de passagens seguradas não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe em cada vagão e em cada período no horizonte de reserva.

O problema do transporte ferroviário possui uma restrição importante que estabelece que uma classe pode ser segurada desde que essa mesma classe já tenha sido segurada em períodos anteriores. Para isso, definem-se as restrições 2.11 e 2.12, onde a primeira busca asignar o valor 1 à variável BX_{ijvkt} quando X_{ijvkt} assume um valor diferente de zero, e asignar 0 caso contrário; essa restrição possui a mesma estrutura e raciocínio da restrição 2.8.

Agora, a restrição 2.12 garante que uma certa variável binária BX_{ijvkt} tomará o valor 1 se, e somente se, no período anterior ($BX_{i,j,v,k,t-1}$) também assumiu o valor 1; caso contrário, ela fica livre para tomar qualquer valor, 0 ou 1. Isso significa que só é possível assegurar uma certa classe se essa mesma classe foi assegurada no período anterior. Vejamos um exemplo:

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	29	61	55	75	52	0
1-3	12	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0

(a) Assentos Segurados $[X]$, em $t = 1$

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	1	1	1	1	1	0
1-3	1	1	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0

(b) BX, em $t = 1$

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	18	50	44	63	41	0
1-3	2	0	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0

(c) Assentos Segurados $[X]$, em $t = 0$

	V1			V2		
Trechos	1	2	3	1	2	3
1-2	1	1	1	1	1	0
1-3	1	0	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0

(d) BX, em $t = 0$

Figura 2.6: Exemplo: Restrições Fulfillments over periods

Lembre que $t = 0$ é a data de partida do trem, ou seja, quanto maior for o valor de t, mais longe estará da data de partida. Assim, $t = 1$ será o período exatamente anterior a $t = 0$.

Para cada trecho, vagão e classe dados na figura 2.6, suponha que: a figura 2.6a é uma solução factível que representa a quantidade de assentos assegurados para o período $t = 1$; a figura 2.6b é a variável binária BX_{ijvkt}, que mostra 1 sempre que a quantidade de assentos assegurados for diferente de zero em $t = 1$ e mostra zero caso contrário (controlado pela restrição 2.11). As figuras 2.6c e 2.6d representam o mesmo que as figuras 2.6a e 2.6b, mas para o período $t = 0$.

Observe que as posições na figura 2.6d tomarão o valor zero sempre que, na figura 2.6b, essa posição também for zero. Isso significa que, se a classe do período anterior for zero, então a do período atual também será zero. Note também que, quando o valor na figura 2.6b é 1, na figura 2.6d o valor poderá ser 0 ou 1. Por exemplo, para o trecho $1-3$ do vagão v_1 e classe 2, note que na figura 2.6b o valor é 1 e na figura 2.6d é zero, o que significa que a classe 2 foi assegurada no período anterior, mas no período atual não foi.

A restrição 2.13 e 2.14 cumprem a mesma função de encontrar a última classe que foi disponibilizada para venda em um determinado trecho, período e vagão. No entanto, a restrição 2.14 é aplicada sempre que se analisa a classe mais barata, e, em outros casos, usa-se a restrição 2.13. Assim, essas duas equações atribuem o valor 1 à variável BL_{ijvkt} sempre que a classe atual k seja a classe mais barata disponibilizada para venda no trecho (i, j), vagão v, e período t; caso contrário, atribui-se o valor zero. Essa restrição é necessária para aplicar as restrições 2.15 e 2.16.

Vamos usar o mesmo exemplo da figura 2.5, considerando apenas o trecho $E_1 - E_3$ e adicionando a variável binária BL.

	E_1 - E_3		
Classe	Y	BY	BL
c_1	10	1	1-1 ≤ BL ≤ 1-1
c_2	9	1	1-1 ≤ BL ≤ 1-1
c_3	5	1	1-1 ≤ BL ≤ 1-1
c_4	5	1	1-0 ≤ BL ≤ 1-0
c_5	0	0	0-0 ≤ BL ≤ 0-0
c_6	0	0	BL = 0

(a) Cálculo Variável BL

	E_1 - E_3		
Classe	Y	BY	BL
c_1	10	1	0
c_2	9	1	0
c_3	5	1	0
c_4	5	1	1
c_5	0	0	0
c_6	0	0	0

(b) Resultado Variável BL

Figura 2.7: Exemplo para as restrições 2.13 e 2.14

Na figura 2.7a, vemos que, para a classe mais barata c_6, $BL = BY = 0$. Agora, para o restante das classes, realiza-se um cálculo com base nos valores de BY. Por exemplo, para a classe c_1, o cálculo seria: BY de c_1 menos BY da próxima classe, ou seja, BY de c_2, o que resulta em $1-1$. Note, além disso, que para a classe c_4, fazendo o mesmo cálculo, o resultado é 1, como mostrado na figura 2.7b, e observe que essa classe é a última que possui um valor diferente de zero em BY.

Dentro do problema, é necessário garantir que, para todos os trechos com a mesma estação de

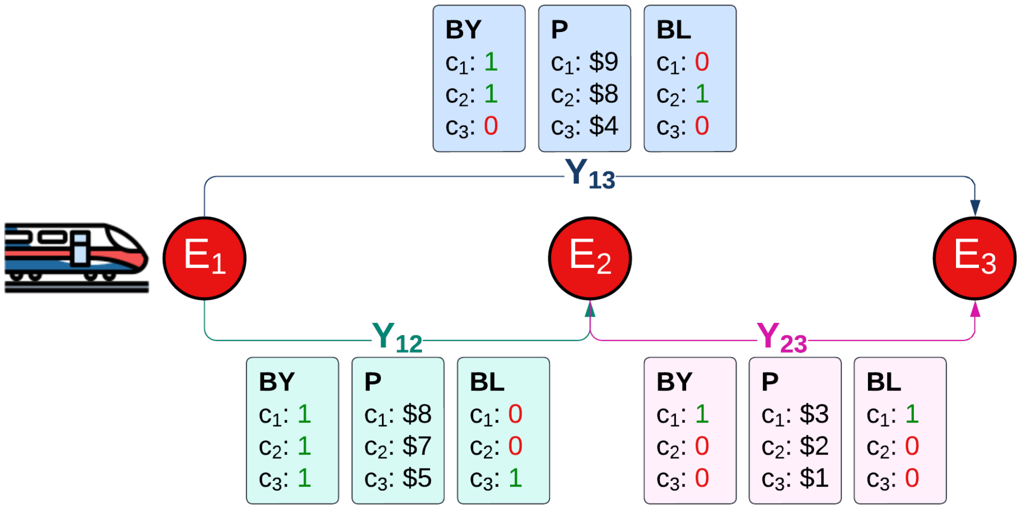

Figura 2.8: Exemplo restrições 2.15 e 2.16

origem, os trechos mais curtos disponibilizados para venda sejam mais baratos que os trechos mais longos. Isso é para evitar que passageiros comprem bilhetes para um trecho maior e desembarquem em estações anteriores. Por exemplo, se uma pessoa quer ir da estação E_1 para a estação E_2, mas percebe que o preço para ir de E_1 a E_3 é mais barato, então essa pessoa comprará o bilhete de E_1 a E_3 e desembarcará na estação E_2. Essa situação é controlada pela restrição 2.15.

Vamos ver um exemplo mais claro: na figura 2.8, temos três estações, assumindo um único período e um único vagão, além de três classes para cada trecho (c_1, c_2, c_3). Note que *BY* e *BL* são as variáveis binárias explicadas anteriormente, e *P* representa o preço de cada classe de controle. Para este caso, a restrição 2.15 pode ser aplicada aos trechos $(E_1 - E_2)$ e $(E_1 - E_3)$.

Observe como o produto da soma do preço *P* e da variável *BL* ativa o preço da classe mais barata (c_3 com valor de \$7) em $(E_1 - E_2)$, e o produto da soma de $(E_1 - E_3)$ ativa o preço da classe c_2 (com valor de \$8). No final, teríamos que \$7 deve ser menor ou igual a \$8, o que está garantindo que o trecho $(E_1 - E_2)$ seja mais barato que o trecho $(E_1 - E_3)$.

Note a importância do valor da variável *BL*, que é responsável por "habilitar apenas os preços"das classes mais baratas disponibilizadas para a venda.

Além do mencionado anteriormente, também deve-se garantir que todas as possíveis combinações dos preços mais baratos dos trechos contidos dentro dos trechos não adjacentes sejam maiores ou iguais ao preço desse trecho não adjacente. Essa situação é controlada pela restrição 2.16.

Para dar um exemplo, analisemos novamente a figura 2.8 e identifiquemos os trechos não adjacentes e os trechos que estes contêm. Note que o trecho $(E_1 - E_3)$ seria o único trecho não adjacente e contém os trechos $(E_1 - E_2)$ e $(E_2 - E_3)$. Portanto, precisamos garantir que a soma das classes mais baratas disponibilizadas em $(E_1 - E_2)$ e $(E_2 - E_3)$ seja maior ou igual à classe mais barata disponibilizada em $(E_1 - E_3)$. Em termos numéricos, teríamos que $5 + 3 \geq 8$. Assim, este exemplo satisfaz nossa restrição.

As restrições de 2.18 e 2.17 são usadas para inicializar a restrição 2.2 quando $i = 1$. E as restrições de 2.19 a 2.22 representam o domínio das variáveis.

2.3 Segunda modelagem: Demanda Comportamental

Até agora, falamos de uma demanda independente para o modelo, mas agora trabalharemos com uma demanda comportamental. A demanda comportamental está mais próxima da realidade do que a demanda independente. Veja o seguinte exemplo:

Suponhamos para este caso que temos um trecho $(1 - 2)$ e três classes (c_1, c_2, c_3), onde o preço de $c_1 > c_2 > c_3$, além, cada classe terá uma demanda de 10, 20 e 30, respectivamente.

$$d_{12c1} = 10$$
$$d_{12c2} = 20$$
$$d_{12c3} = 30$$

(a) Demanda Independente $[d]$

$$d'_{12c1} = 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\}$$
$$d'_{12c2} = 20 = \{c_3 > c_2 > NC\}$$
$$d'_{12c3} = 30 = \{c_3 > NC\}$$

(b) Demanda Comportamental $[d']$

Figura 2.9: Exemplo: Tipos de Demanda

Para interpretar a demanda independente, podemos dizer (segundo a figura 2.9a) que: existem 10 pessoas dispostas a comprar passagens **a um preço** de c_1, 20 pessoas a comprar **a um preço** de c_2 e 30 pessoas a comprar **a um preço** de c_3. No entanto, se as 10 pessoas dispostas a pagar c_1 encontrarem um melhor valor no momento da compra (por exemplo, c_3), essas pessoas prefeririam não comprar, mesmo quando encontram um preço mais barato. Situação que, na realidade, não faria sentido.

Por outro lado, temos a demanda comportamental, que é representada com uma lista de preferência, conforme visto na figura 2.9b. Esta lista significa que, por exemplo, 10 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** com valor c_1, 20 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de c_2 e 30 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de c_3.

O funcionamento seria o seguinte: imagine que as 10 pessoas dispostas a comprar até um valor de c_1 vão tentar comprar primeiro a um valor mais barato, neste caso c_3. Se c_3 não estiver disponível, elas procurariam assentos com valor c_2. Se c_2 também não estiver disponível, subiriam na lista e procurariam passagens com valor de c_1. Se estes não estiverem disponíveis, então não comprariam. Note que esse comportamento é o que comumente se usa na realidade.

Agora vejamos como o modelo leria esse novo comportamento. Para isso, calculemos a nova demanda potencial:

para c_1, vejamos a lista e notemos quem está disposto a pagar por esse valor.

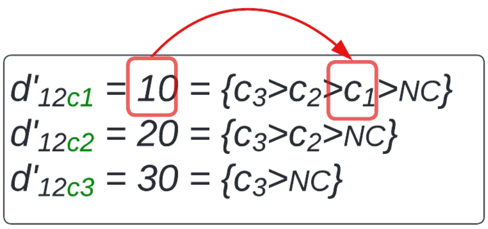

Figura 2.10: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_1

Segundo a figura 2.10, apenas 10 possíveis passageiros estão dispostos a pagar esse valor.

Agora vamos ver quem está disposto a pagar um valor por um bilhete da classe c_2:

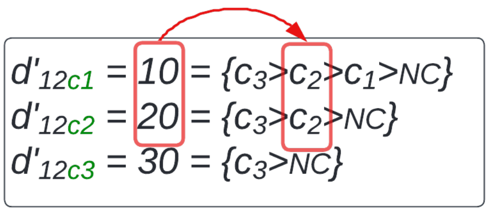

Figura 2.11: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_2

Neste caso, 30 possíveis pessoas estariam dispostas a pagar esse valor. Observe que, de esta nova demanda, 10 pessoas correspondentes à demanda de c_1 também estariam dispostas a comprar pelo valor da classe c_2.

Por último, para a classe mais barata c3, veja a figura 2.12. Note que, neste caso, 60 pessoas estariam dispostas a pagar um bilhete da classe c_3, ou seja, toda a demanda da rota $(1-2)$ compraria pelo valor mais barato se este estivesse disponível.

Assim, a demanda potencial comportamental para o modelo seria como se apresenta na figura 2.13. No entanto, é importante lembrar que a demanda potencial inicial era de 60 pessoas, mas

$$
\begin{aligned}
d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\
d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\
d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\}
\end{aligned}
$$

Figura 2.12: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_3

$$
\begin{aligned}
d'_{12c1} &= 10 \\
d'_{12c2} &= 20 + 10 = 30 \\
d'_{12c3} &= 30 + 10 + 20 = 60
\end{aligned}
$$

Figura 2.13: Exemplo: Demanda comportamental total Potencial

até este ponto, a demanda poderia ser maior, pois a demanda de cada classe comercial agora é o acúmulo das demandas das classes mais caras. Essa situação precisa ser controlada para não criar uma demanda inexistente; para isso, serão consideradas as seguintes restrições, relacionando neste caso as variáveis de decisão de passagens seguradas:

$$X_{12c_1} \leq d'_{12c_1} = 10 \tag{2.23}$$

$$X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \tag{2.24}$$

$$X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \tag{2.25}$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \tag{2.26}$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} + X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \tag{2.27}$$

Observe que as restrições de 2.23 até 2.25 são restrições conhecidas que limitam os valores que as passagens seguradas podem assumir, enquanto as restrições 2.26 e 2.27 são as que nos ajudarão a controlar para não ultrapassarmos a demanda potencial total inicial, que para o exemplo da figura 2.9 era de 60.

Bibliografia

[1] Fred Glover et al. «The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines». Em: *Interfaces* 12.3 (1982), pp. 73–80. ISSN: 00922102, 1526551X. URL: http://www.jstor.org/stable/25060268 (acedido em 07/08/2024).

[2] Jesús Muñuzuri José Guadix Luis Onieva e Pablo Cortés. «An overview of revenue management in service industries: an application to car parks». Em: *The Service Industries Journal* 31.1 (2011), pp. 91–105. DOI: 10.1080/02642069.2010.491543.

[3] Ken Littlewood. «Special Issue Papers: Forecasting and control of passenger bookings». Em: *Journal of Revenue and Pricing Management* 4 (abr. de 2005), pp. 111–123. DOI: 10.1057/palgrave.rpm.5170134.

[4] Jeffrey I. McGill e Garrett J. van Ryzin. «Revenue Management: Research Overview and Prospects». Em: *Transportation Science* 33.2 (1999), pp. 233–256. DOI: 10.1287/trsc.33.2.233. eprint: https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233. URL: https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233.

[5] Garrett J. van Ryzin e Kalyan T. Talluri. «An Introduction to Revenue Management». Em: *INFORMS Tutorials in Operations Research* (out. de 2014), pp. 142–194. DOI: https://doi.org/10.1287/educ.1053.0019.