



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Ciências Aplicadas

Wilmer Dario Urango Narvaez

**OTIMIZAÇÃO DA RECEITA NO TRANSPORTE
FERROVIÁRIO DE PASSAGEIROS: UM ESTUDO
BASEADO EM MODELOS DE DEMANDA
INDEPENDENTE E COMPORTAMENTAL**

**OPTIMIZATION OF REVENUE IN PASSENGER RAIL
TRANSPORTATION: A STUDY BASED ON
INDEPENDENT AND BEHAVIORAL DEMAND MODELS**

Qualificação apresentada à Faculdade de Ciências Aplicadas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestrado em Engenharia de Produção e de Manufatura. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Gestão de Processos.

Orientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto

Co-orientador: Dr(a). Karim Perez Martinez

Este exemplar corresponde à versão parcial da dissertação defendida pelo aluno Wilmer Dario Urango Narvaez, e orientado pelo Prof. Diego Jacinto Fiorotto.

Limeira
2024

Na atualidade, os sistemas de administração de receitas, conhecidos como *Revenue Management* (RM) em inglês, referem-se ao conjunto de técnicas utilizadas pela indústria para maximizar o lucro. Ele se encarrega de encontrar os produtos apropriados para os clientes certos, no momento correto e a um preço conveniente. A metodologia do RM foi desenvolvida pela primeira vez pela indústria aérea, no entanto, tem sido aplicada com sucesso em outros setores com características semelhantes, como hotelaria, transporte, varejo, restaurantes, comércio eletrônico, entre outros. O RM é uma área desafiadora e interessante que combina temas como otimização, economia, estatística inferencial e ciência do comportamento.

Este trabalho está inserido no setor de transporte, mais especificamente no transporte ferroviário de passageiros, onde o objetivo é determinar a quantidade ideal de assentos a serem reservados e disponibilizados para venda durante o período compreendido entre a abertura das vendas ao público e a partida do trem.

O principal objetivo deste estudo foi desenvolver três modelos matemáticos inteiros mistos. O primeiro baseia-se em demandas independentes e os outros dois, em demandas comportamentais utilizando listas de preferência. A eficiência desses modelos foi avaliada em 10 instâncias reais, classificadas como grandes, médias e pequenas, fornecidas pela empresa canadense Expretio. Entre os principais achados, destaca-se que ambos os modelos atingiram resultados ótimos em tempos competitivos, em termos de segundos, além de que, em todas as instâncias, a solução ótima foi encontrada explorando, no máximo um nó.

Palavras-chaves: Demanda Comportamental, Programação Inteira Mista, Transporte Ferroviário de Passageiros, Modelagem Matemática.

Currently, Revenue Management Systems (RM), refer to a set of techniques used by industries to maximize profit. RM focuses on finding the right products for the right customers at the right time and at a convenient price. The RM methodology was first developed by the airline industry but has been successfully applied in other sectors with similar characteristics, such as hospitality, transportation, retail, restaurants, e-commerce, among others. RM is a challenging and fascinating field that combines topics such as optimization, economics, inferential statistics, and behavioral science.

This study is situated in the transportation sector, specifically passenger rail transportation, where the goal is to determine the optimal number of seats to reserve and make available for sale during the period between the opening of sales to the public and the train's departure.

The main objective of this study was to develop three mixed-integer mathematical models. The first is based on independent demands, while the other two are based on behavioral demands using preference lists. The efficiency of these models was evaluated on 10 real-world instances, classified as large, medium, and small, provided by the Canadian company Expretio. Among the main findings, it stands out that all models achieved optimal results in competitive times, measured in seconds, and in all instances, the optimal solution was obtained by exploring at most one node.

Keywords: Behavioral Demand, Mixed Integer Programming, Passenger Rail Transportation, Mathematical Modeling.

Lista de Figuras

2.1	Versão gráfica simples do Problema de Transporte Ferroviário de Passageiros	15
2.2	Solução factível para o problema simplificado	16
2.3	Solução factível para a variável de decisão Autorização	21
2.4	Solução factível para os assentos Autorizados e assentos Reservados	21
2.5	Exemplo: Restrições Fulfillments over periods	23
2.6	Exemplo para as restrições 2.12 e 2.13	24
2.7	Exemplo para as restrições 2.14 e 2.15	24
2.8	Exemplo: Tipos de Demanda	26
2.9	Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_1	26
2.10	Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_2	27
2.11	Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_3	27
2.12	Exemplo: Demanda comportamental total Potencial	27
2.13	Ajuste da Demanda Comportamental com Proporções	30
2.14	Ajuste da Demanda Comportamental com Hierarquia	32
3.1	Comparação Modelos Full primeira parte	39
3.2	Comparação Modelos Full segunda parte	40

Lista de Tabelas

2.1	Notação matemática do problema	18
2.2	Exemplo ajuste da demanda comportamental com proporções	30
3.1	Descrição dos modelos matemáticos propostos	34
3.2	Resumo das instâncias utilizadas no experimento	35
3.3	Resultados para a Instância1	36
3.4	Resultados para a Instância2	36
3.5	Resultados para a Instância3	36
3.6	Resultados para a Instância4	37
3.7	Resultados para a Instância5	37
3.8	Resultados para a Instância6	37
3.9	Resultados para a Instância7	37
3.10	Resultados para a Instância8	38
3.11	Resultados para a Instância9	38
3.12	Resultados para a Instância10	38

Introdução	7
1 Revisão da literatura	10
1.1 Origem do Revenue Management (RM)	10
1.2 Modelagem do Transporte Ferroviário de Passageiros	12
2 Modelagem matemática	14
2.1 Modelagem matemática	14
2.2 Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente	15
2.3 Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental	25
3 Resultados Computacionais	33
3.1 Modelos Matemáticos	33
3.2 Instâncias	34
3.3 Experimentos Computacionais	35
4 Conclusões e trabalhos futuro	42

Introdução

A otimização de receitas no transporte ferroviário de passageiros tornou-se uma área de pesquisa essencial para aumentar a sustentabilidade e a competitividade do setor. Esse tipo de transporte enfrenta desafios específicos na gestão de sua capacidade devido à variabilidade da demanda, à rigidez tarifária e à necessidade crescente de adaptar suas estratégias às dinâmicas de mercado [3]. Nesse contexto, o Revenue Management (RM) oferece uma estrutura robusta para abordar a alocação ideal de recursos, utilizando técnicas avançadas de modelagem matemática e análise de dados [1].

O principal objetivo do RM no transporte ferroviário de passageiros pode ser exemplificado da seguinte forma: um operador de transporte define o itinerário de um trem específico, detalhando a origem, o destino e o horário de partida. Os clientes, ou seja, os potenciais passageiros, podem adquirir bilhetes antecipadamente para viajar nesse trem. Chamamos de classes tarifárias ou produtos tarifários os bilhetes disponíveis para venda. O horizonte de reserva é o período de tempo entre a disponibilização inicial dos bilhetes para compra e a partida do trem. Esse horizonte geralmente é dividido em dias, de forma que cada período representa um dia (ou conjunto de dias) antes da partida.

A função do RM, nesse contexto, é controlar a disponibilidade dos produtos tarifários ao longo do horizonte de reserva para maximizar a receita total. Mais especificamente, o processo de otimização busca determinar a quantidade de bilhetes de cada produto que deve estar disponível para venda em cada período, com o objetivo de maximizar os lucros associados a cada partida de trem.

Um elemento fundamental para maximizar as receitas é um modelo preciso da demanda. Alinhar oferta e demanda para otimizar os lucros requer uma compreensão aprofundada do comportamento dos clientes e uma previsão confiável de suas decisões diante de diferentes ofertas de produtos [10].

Uma simplificação comum na modelagem da demanda para gestão de receitas é assumir que os clientes têm um comportamento de compra independente. Isso significa que cada cliente compra um produto específico, desconsiderando a oferta disponível no momento. Na prática, por exemplo, um cliente que desejasse comprar um bilhete de trem por R\$10 não pagaria R\$10,50 se essa fosse a única oferta disponível. Em vez disso, ele optaria por não viajar. Da mesma forma, em um modelo de demanda independente, assumimos que um cliente disposto a pagar R\$100 por um bilhete nunca compraria um bilhete mais barato (por exemplo, R\$50), mesmo que estivesse disponível.

Por outro lado, uma abordagem mais robusta considera o comportamento de compra baseado em faixas ou listas de preferência. Esse modelo assume que os clientes escolhem entre um conjunto de ofertas com base em suas preferências. Se a opção mais desejada não estiver disponível, eles passam para a próxima opção viável, desde que esta seja mais atrativa do que não realizar a compra.

Para abordar essa problemática, foram desenvolvidos três modelos de Programação Inteira Mista (MIP): O primeiro baseado em demanda independente. O segundo em demandas comportamentais ajustadas por proporções. Y o terceiro em demandas comportamentais ajustadas por hierarquia.

Esses modelos respeitam as restrições operacionais do sistema ferroviário, como capacidade dos trens, estrutura hierárquica dos produtos tarifários, reservas de bilhetes, disponibilidade de vendas dentro do horizonte de reserva e coerência dos preços dos bilhetes ao longo do tempo, entre outras.

O uso de instâncias reais fornecidas por uma empresa especializada permitiu validar a aplicabilidade dos modelos desenvolvidos, destacando tanto sua capacidade de capturar a complexidade do mercado quanto sua eficiência computacional. Os resultados preliminares indicam que os modelos baseados em demandas comportamentais geraram soluções de melhor qualidade em comparação com o modelo de demanda independente. No entanto, em termos do valor da função objetivo, os modelos comportamentais apresentaram os mesmos resultados entre si, que foram ligeiramente diferentes dos obtidos pelo modelo independente.

Essa pesquisa contribui para o corpo de conhecimento em Revenue Management ao combinar técnicas de modelagem baseadas em demandas comportamentais, utilizando listas de preferência, e programação matemática para resolver problemas complexos de alocação de assentos no transporte ferroviário de passageiros.

CAPÍTULO 1

Revisão da literatura

1.1 Origem do Revenue Management (RM)

Até o ano de 1978, a Junta de Aeronáutica Civil (CAB em inglês) limitava a concorrência entre as companhias aéreas, onde basicamente as companhias só podiam competir oferecendo serviços como refeições luxuosas e alta frequência nos horários de saída dos voos. Nesse ponto, a CAB não permitia que fosse oferecida uma tarifa menor para um voo, se esta fosse antieconômica para a indústria como um todo. Assim, mesmo que para uma companhia aérea fosse rentável colocar um valor baixo para uma passagem em comparação com outra, a CAB não permitiria, a menos que houvesse uma justificativa extremamente sólida. Quando esse tipo de situação ocorria, o restante das companhias aéreas justificava que o público seria prejudicado, pois elas teriam que aumentar o valor das passagens em outras rotas para compensar o baixo custo da nova proposta do concorrente.

Com a chegada da desregulamentação, as companhias aéreas se depararam com um mundo cheio de novas formas de concorrência, onde o preço das passagens se tornou prioritário. E foi nesse momento que iniciou a verdadeira concorrência entre as transportadoras. Aqui surgiu um novo problema em função da diversidade de preços com diferentes restrições que limitam a disponibilidade de assentos a tarifas mais baixas, a presença de múltiplos voos operados por diversas companhias aéreas em diferentes rotas, e a variabilidade na demanda por assentos em função de

fatores como a temporada, o dia da semana, a hora do dia e a qualidade do serviço oferecido, o que influencia a escolha dos passageiros entre diferentes opções de voo.

Nesse momento, esse problema foi denominado como problema de preços e combinação de passageiros e foi modelado como: cada passageiro em um voo representa um custo de oportunidade, já que sua ocupação de um assento impede que outro passageiro com um itinerário mais rentável ou uma classe de tarifa mais alta o utilize. Isso se traduz na possibilidade de assentos vazios em diferentes segmentos de voo, o que afeta a eficiência da rede da companhia aérea ao considerar múltiplos passageiros com diversas origens, destinos e classes de tarifas.

Houve dois possíveis resultados: 1) a otimização da combinação de passageiros permite que as companhias aéreas estruturem de maneira mais eficaz seu sistema de reservas, estabelecendo limites e prioridades adequadas para o número de passageiros com diferentes classes de tarifas em distintos voos. 2) Além disso, possibilita a avaliação de diversos cenários de preço e rota, considerando o benefício gerado a partir da melhor combinação de passageiros em relação a um cenário específico.

Ao ajustar a estrutura das classes de tarifas, as companhias aéreas buscam gerenciar o deslocamento de passageiros por meio de estratégias de preços e a aplicação de restrições como horários, duração da estadia e tempo de antecedência à saída do voo. Além disso, buscam reduzir o deslocamento controlando a capacidade, determinando a quantidade de assentos atribuídos a cada classe de tarifa em cada segmento de voo.

Por outro lado, a otimização da combinação de passageiros é formulada como: "Dada a previsão diária da demanda de passageiros nas diferentes classes de tarifas, qual combinação de passageiros e classes de tarifas em cada segmento de voo maximizará as receitas do dia?" Essa resposta ajuda a companhia aérea a determinar a alocação ideal de reservas entre as diversas classes de tarifas em cada segmento de voo [2].

Essas últimas duas definições foram conhecidas como Yield Management e, posteriormente, com a chegada de novos sistemas de informação, regras de controle e outras condições, foram generalizadas e aplicadas em outras indústrias de características semelhantes, que no futuro seriam chamadas de Revenue Management [6].

Según [8], a gestão de receitas (RM) abrange o conjunto de estratégias e táticas que as empresas utilizam para gerenciar de forma científica a demanda por seus produtos e serviços. Além disso,

pode-se dizer que, seu objetivo é vender cada unidade de ações para o cliente certo, no momento e pelo preço corretos [5].

A princípio, os problemas de gestão de RM parecem ser simples; no entanto, nada poderia estar mais longe da realidade. Esses problemas têm uma complexidade esmagadora, e este documento não seria suficiente para detalhar cada um deles, apenas para mencionar alguns, temos modelagem, análise teórica, implementação, previsão, vendas excessivas, controle de estoque de assentos, preços, etc. Então, como sempre acontece, trabalha-se com simplificações de fatores muito complexos e com aproximações em outros casos [7].

1.2 Modelagem do Transporte Ferroviário de Passageiros

Nos últimos anos, a gestão de reservas de bilhetes no transporte ferroviário de passageiros evoluiu significativamente graças à aplicação de modelos matemáticos avançados. Esses modelos têm como objetivo otimizar a alocação de assentos, o planejamento de paradas e as estratégias de preços, buscando maximizar as receitas e melhorar a satisfação dos passageiros. A seguir, são descritos alguns dos enfoques mais relevantes utilizados nesse campo, com base em pesquisas recentes.

Um dos modelos destacados é o desenvolvido por [11], que integra a teoria das perspectivas, o modelo logit e um modelo de transferência de fluxo de passageiros para alocar a demanda de maneira eficaz. Esse enfoque permite estabelecer preços diferenciados e distribuir os assentos de forma a maximizar as receitas, considerando as preferências e comportamentos de diferentes segmentos de passageiros.

Por outro lado, o planejamento das paradas dos trens e a estratégia de preços estão interligados e impactam tanto as receitas quanto a experiência dos passageiros. Em [12] propuseram um modelo de otimização não linear inteiro misto que aborda conjuntamente a estratégia de preços dos bilhetes e o planejamento das paradas. Esse modelo busca maximizar as receitas do transporte ferroviário e minimizar o tempo de viagem dos passageiros, alcançando um equilíbrio eficiente entre oferta e demanda.

Além disso, a demanda de passageiros está sujeita a incertezas que tornam a gestão operacional mais desafiadora. Han e Ren em 2020 desenvolveram um modelo que otimiza conjuntamente o planejamento de paradas e a alocação de bilhetes, utilizando a teoria da incerteza. Esse modelo

busca maximizar a satisfação dos passageiros e a taxa média de ocupação dos assentos, oferecendo soluções robustas frente às flutuações na demanda [4].

Posteriormente, em [9], investiga-se como a escolha da rota dos passageiros é influenciada pelas estruturas tarifárias e pelos preços dos bilhetes. Sua pesquisa abordou o problema de determinar a tarifa mais econômica em sistemas de transporte público, avaliando diferentes estruturas tarifárias, como aquelas baseadas em distância ou zonas, e propondo algoritmos altamente eficientes para resolver esses problemas.

CAPÍTULO 2

Modelagem matemática

2.1 Modelagem matemática

Como mencionado anteriormente, esta pesquisa propõe três modelos matemáticos de programação inteira mista. O primeiro utiliza uma demanda do tipo independente; o segundo emprega um modelo de demanda comportamental ajustado por proporções, onde essas proporções são calculadas com base na demanda independente; e o terceiro adota um modelo de demanda comportamental ajustado por hierarquia, em que essa hierarquia está associada à quantidade de assentos reservados para cada classe de controle.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura 2.1, onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade física máxima de assentos;
- Há apenas um tipo de classe comercial;
- Existe apenas um período no horizonte de reserva;

- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos;
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

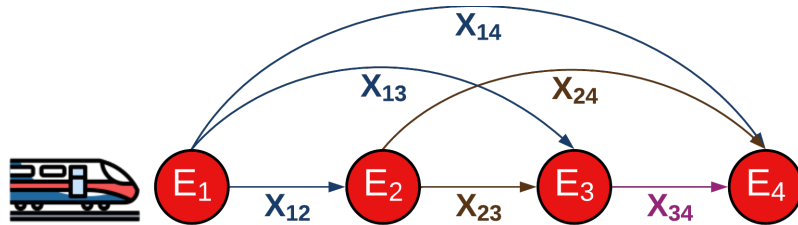


Figura 2.1: Versão gráfica simples do Problema de Transporte Ferroviário de Passageiros

2.2 Primeira abordagem: modelo baseado em demanda independente

Para este modelo, assumiremos uma demanda independente, o que significa que cada cliente pode comprar um produto específico independentemente da oferta disponível no momento da compra. Em outras palavras, pode-se dizer que, se um cliente estiver disposto a pagar um valor, por exemplo, de 10 reais por um assento, ele comprará o bilhete exatamente por esse valor, mesmo que um preço mais baixo esteja disponível. Agora, se o cliente não encontrar esse valor exato, ele preferirá não comprar.

Então, para esta proposta, temos o seguinte

x_{ij} : Quantidade de assentos que serão reservados no trecho com origem em i e destino em j , onde $j > i$ (variável de decisão).

A_i : Quantidade de assentos vagos na estação i .

P_{ij} : Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j .

Q : Capacidade física do trem.

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto i, j , matematicamente seria:

$$FO : \max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$$

s.a.

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1$ onde $A_1 = Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq A_2$ onde $A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$

Estação 3: $x_{34} \leq A_3$ onde $A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações, E_1, E_2 e E_3 , já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação, E_4 , é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 2.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

		DESTINOS			Disponibilidade (A)	Não Atribuídos
		E2	E3	E4		
ORIGENS	E1	X_{12} 10	X_{13} 5	X_{14} 15	100	70
	E2	---	X_{23} 40	X_{24} 20	70 + 10	20
	E3	---	---	X_{34} 60	20 + 5 + 40	5

Figura 2.2: Solução factível para o problema simplificado

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja, $A_1 = 100$, e que a soma das variáveis seria $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$. Portanto, teríamos $30 \leq 100$, ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$. Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso $x_{12} = 10$. Portanto, para a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja, $60 \leq 80$. Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3, $x_{13} = 5$ e $x_{23} = 40$, assim teríamos $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$, e no final teríamos $60 \leq 65$.

Além da lógica anterior, assume-se que há um trem, com vários tipo de assento, que viajará de

uma estação E_1 até uma estação E_n (onde n é a última estação onde o trem chegará). Esse trem terá um itinerário que conterá o nome do trem, a estação de origem, a estação de destino, a data e hora de partida e de chegada. Além disso, haverá uma lista de preços (para cada tipo de assento) a ser disponibilizada para venda. Cada um dos preços da lista será chamado de classe de controle ou control class. Os bilhetes serão disponibilizados para venda antes da partida do trem, e o tempo entre a disponibilização e a referida partida será chamado de horizonte de reserva. Esse horizonte será dividido em vários períodos, que podem ter diferentes temporalidades. Por exemplo, pode haver períodos em dias, semanas, meses, etc., e combinações entre eles. Os períodos dentro do horizonte de reserva estão ordenados de forma descendente, onde o menor valor é zero e representa a data de partida do trem, e o valor maior representa a data de disponibilização das vendas, $[t, t - 1, t - 2, \dots, 0]$.

Cada relação possível entre uma estação e outra será denominada origem-destino ou trecho. Será dito que uma origem-destino é adjacente se, e somente se, não houver estações intermediárias entre elas; caso contrário, serão não adjacentes. Por exemplo, na figura 2.1, os trechos adjacentes seriam: $(E_1 - E_2)$, $(E_2 - E_3)$, $(E_3 - E_4)$, e os trechos não adjacentes seriam: $(E_1 - E_3)$, $(E_1 - E_4)$ e $(E_2 - E_4)$. Além disso, observe que os trechos não adjacentes podem conter outros trechos, tanto adjacentes quanto não adjacentes. Por exemplo, o trecho $(E_1 - E_4)$ da figura 2.1 contém os trechos adjacentes $(E_1 - E_2)$, $(E_2 - E_3)$, e contém os trechos não adjacentes $(E_1 - E_3)$ e $(E_2 - E_4)$. Vejamos o modelo completo:

Definição	Descrição	Domínio
Conjuntos		
O	Conjunto de Estações de origem	
D	Conjunto de Estações de Destino	
OD	Conjunto de Trechos com itinerário	
NAD	Conjunto de Trechos que NÃO são Adjacentes e que tem itinerário	
$BRI_{(o,d)}$	Conjunto de Trechos contidos dentro de cada trecho (o,d) NÃO Adjacente	
$CR_{(o,d)}$	É um conjunto que contém outros subconjuntos, onde cada subconjunto é uma rota possível para ir desde a origem o até o destino d , sendo (o,d) não adjacente. Por exemplo, para a rota $E_1 - E_4$ da figura 2.1, $CR_{(E_1,E_4)} = \{\{(E_1 - E_2), (E_2 - E_4)\}, \{(E_1 - E_3), (E_3 - E_4)\}, \{(E_1 - E_2), (E_2 - E_3), (E_3 - E_4)\}\}$	
S	Representa cada subconjunto dentro de $CR_{(o,d)}$	
V	Conjunto de tipos de assento do trem	
T	Conjunto de Períodos	
K_v	É o conjunto de classes de controle para cada tipo de assento v . Por exemplo, suponha que há dois tipos de assento z e p , e cada tipo contém três classes de controle c_1, c_2, c_3 , então a representação seria $K_z : \{c_1, c_2, c_3\}$ e $K_p : \{c_1, c_2, c_3\}$. Além disso, considere que os elementos de cada K_v são ordenados, onde sempre se cumpre que a classe de menor índice é a classe mais custosa, ou seja $c_1 > c_2 > c_3$.	
Parâmetros		
n	Quantidade de Estações	
Q_v	Capacidade física do trem para cada tipo de assento v	$v \in V$
P_{ijk}	Preços das passagens no Trecho (i,j) , tipo de assento v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
d_{ijvkt}	Demanda Independente no Trecho (i,j) , tipo de assento v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variáveis de decisão		
X_{ijvkt}	Quantidade de passagens reservadas no trecho (i,j) , tipo de assento v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagens autorizados no trecho (i,j) , tipo de assento v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
γ_{ijvkt}	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando $Y_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
β_{ijvkt}	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando a classe k é a classe mais barata que foi autorizada para venda, no trecho i, j , tipo de assento v e período t ; e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
α_{ijvkt}	É uma variável binária que toma o valor de 1 quando $X_{ijvkt} \neq 0$ e toma valor de 0 caso contrario	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variável auxiliar		
A_{iv}	Armazena a quantidade de assentos vazios disponíveis para venda em cada estação de origem e cada tipo de assento durante todo o horizonte de reserva. Cabe esclarecer que esta não é uma variável de decisão, pois esta variável apenas armazena um cálculo com base na capacidade física do trem e nas variáveis de decisão de passagens reservadas	$i \in O, v \in V$

Tabela 2.1: Notação matemática do problema

$$\text{Max } Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \quad (2.1)$$

s.a.

$$A_{iv} = A_{i-1,v} - \sum_{(i,j) \in OD / j \geq i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j) \in OD / j < i} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijvkt} \leq A_{iv}, \quad \forall i \in O / i < j, i < n, v \in V \quad (2.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,k,t} \leq Q_v, \quad k = \min\{K_v\}, \forall i \in O \quad (2.4)$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt}, \quad k = \max\{K_v\}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T \quad (2.5)$$

$$Y_{ijvkt} \geq X_{ijvkt} + Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < \|K_v\|, t \in T \quad (2.6)$$

Demanda Independente

$$X_{ijvkt} \leq d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.7)$$

Fulfillments over periods

$$\gamma_{ijvkt} \leq Y_{ijvkt} \leq \gamma_{ijvkt} Q_v, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.8)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq X_{ijvkt} \leq \alpha_{ijvkt} d_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.9)$$

$$\alpha_{ijvkt} \leq \alpha_{i,j,v,k,t+1}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (2.10)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \geq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j,v,k,t+1} P_{ijvk}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, t \in T / t \neq \max\{T\} \quad (2.11)$$

Skip Lagging

$$\beta_{ijvkt} = \gamma_{ijvkt} - \gamma_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K / k < \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.12)$$

$$\beta_{ijvkt} = \gamma_{ijvkt}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k = \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.13)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk} \leq \sum_{k \in K_v} \beta_{i,j',v,k,t} P_{ijvk}, \quad \forall i \in O, j \in D, j' \in D / j' > j, v \in V, t \in T \quad (2.14)$$

$$\sum_{k \in K_v} \beta_{odvkt} P_{odvk} \leq \sum_{(i,j) \in S} \sum_{k \in K_v} \beta_{ijvkt} P_{ijvk}, \quad \forall (o,d) \in NAD, \quad (2.15)$$

$$v \in V, t \in T, \quad \forall S \in CR_{o,d} / S \subset CR_{o,d}$$

Inicialização e domínio

$$A_{0,v} = Q_v, \quad \forall v \in V \quad (2.16)$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0, \quad \forall j \in D, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.17)$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.18)$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.19)$$

$$A_{iv} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in O, v \in V \quad (2.20)$$

$$\gamma_{ijvkt}, \beta_{ijvkt}, \alpha_{ijvkt} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.21)$$

Na equação 2.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos reservados a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada tipo de assento, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe. Observe que queremos maximizar os ingressos em função dos assentos que estão reservados, que é o mais próximo que se tem da realidade em função da demanda conhecida.

A restrição 2.2 é responsável por calcular a quantidade de assentos vazios disponíveis em cada estação de origem, para cada tipo de assento, ao longo de todo o horizonte de reserva. Ela é uma generalização do exemplo simplificado utilizado para calcular A_{iv} .

A restrição 2.3 garante que os assentos reservados ao longo de todo o horizonte de reserva, para cada trecho, não excedam a capacidade disponível para cada tipo de assento em cada estação de origem.

A restrição 2.4 garante que a soma de autorizações da classe mais custosa, de cada estação de origem, de todos os períodos, não ultrapasse a capacidade do trem de cada tipo de assento. Note que apenas estamos considerando a classe mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização é por isso que o valor de k é o mínimo das classes de cada tipo de assento, pois a ordem do nome das classes é crescente mas o seu valor é decrescente. Para melhor compreensão, suponhamos uma solução para um problema de dois vagões V_1 e V_2 , 3 classes para V_1 e 3 classes para V_2 , 5 estações, 10 trechos, um período e uma capacidade física do trem de 700 cadeiras, conforme mostra a figura 2.3.

Observe que os nomes das classes são números ordenados de forma crescente [1, 2, 3] também o valor da classe 1 é mais caro que o valor da classe 2 e este é maior que o valor da classe 3. Além disso, a soma que não ultrapassará a capacidade do trem é a soma das classes 1 de cada tipo de assento de cada estação de origem. Por exemplo, para a estação 3 seria $43 + 85$ para V_1 trecho 3-4 e 3-5, mais, $105 + 88$ para V_2 nos mesmos trechos, ou seja $43 + 85 + 105 + 88 = 321 \leq 700$

Até ao momento foi referido que a variável Y tem um carácter cumulativo e são as restrições

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

Figura 2.3: Solução factível para a variável de decisão Autorização

2.5 e 2.6 que controlam este comportamento. A restrição 2.5 é um caso particular da restrição 2.6, aplicada apenas à última classe, ou classe mais barata reservada para cada tipo de assento ($k = \max\{K_v\}$), e garante que a soma de todos os períodos, de cada estação de origem da classe mais barata da variável "autorização" é maior ou igual à variável de decisão "reservas" nas mesmas condições. Por outro lado, a restrição 2.6 garante que cada classe autorizada seja sempre maior ou igual à classe autorizada imediatamente menor, mais a quantidade reservas da mesma classe, isto para cada período, cada trecho e cada classe diferente da classe mais barata. Para melhor compreensão, assuma as mesmas suposições que foram feitas na restrição 2.4.

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	145	116	55	127	52	0
1-3	52	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	128	104	63	80	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	105	46	0
3-5	85	59	0	88	4	0
4-5	150	62	0	143	58	0

Trechos	V1			V2		
	1	2	3	1	2	3
1-2	29	61	55	75	52	0
1-3	12	40	0	0	0	0
1-4	0	0	0	0	0	0
1-5	0	0	0	0	0	0
2-3	24	41	63	29	51	0
2-4	16	0	0	35	0	0
2-5	0	0	0	0	0	0
3-4	43	0	0	59	46	0
3-5	26	59	0	84	4	0
4-5	88	36	0	85	0	0

(a) Autorizados [Variável Y]

(b) Reservados [Variável X]

Figura 2.4: Solução factível para os assentos Autorizados e assentos Reservados

Observe a linha correspondente ao trecho 1-2 do tipo de assento V_2 na tabela 2.4b, veja que a classe reservada mais barata foi a classe 2 com valor de 52, por este motivo na tabela 2.4a na mesma posição o valor deverá ser igual ou maior que 52, que neste caso é o mesmo valor; Agora observe

para o mesmo trecho para o tipo de assento V_1 classe 3 em ambas as tabelas acontece a mesma coisa, esse comportamento é garantido pela restrição 2.5. Agora não vamos olhar para a classe mais barata, vamos olhar para qualquer outra, por exemplo, para o mesmo trecho veja a classe 1 do tipo de assento V_1 da tabela 2.4b com valor 29, se quiséssemos saber o valor correspondente na tabela 2.4a deveríamos adicionar a classe imediata menor (à direita) da classe 1 na tabela 2.4a, neste caso seria a classe 2 com valor 116, e some o valor da classe 1 da tabela 2.4b, que já sabemos que é 29, assim, o valor buscado será maior ou igual a $116 + 29 = 145$, como visto em tabela 2.4a, lembre-se que nessa posição o valor mínimo será o calculado, mas poderá assumir um valor superior. Esta última situação é controlada pela restrição 2.6.

A restrição 2.7 garante que a quantidade de passagens reservadas não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe de cada tipo de assento e em cada período no horizonte de reserva.

A restrição 2.8 é utilizada para determinar quando a variável de decisão Y assume valores diferentes de zero e quando não. Assim, γ toma o valor de 1 no primeiro caso e 0 no segundo.

Uma condição importante estabelece que uma classe pode ser reservada desde que essa mesma classe já tenha sido reservada em períodos anteriores. Para isso, definem-se as restrições 2.9 e 2.10, onde a primeira busca atribuir o valor 1 à variável α_{ijvkt} quando X_{ijvkt} assume um valor diferente de zero, e atribuir 0 caso contrário; essa restrição possui a mesma estrutura e raciocínio da restrição 2.8.

Agora, a restrição 2.10 garante que uma certa variável binária α_{ijvkt} tomará o valor 1 se, e somente se, no período anterior ($\alpha_{i,j,v,k,t+1}$) também assumiu o valor 1; caso contrário, ela fica livre para tomar qualquer valor, 0 ou 1. Isso significa que só é possível reservar uma certa classe se essa mesma classe foi reservada no período anterior. Vejamos um exemplo:

Lembre que $t = 0$ é a data de partida do trem, ou seja, quanto maior for o valor de t , mais longe estará da data de partida. Assim, $t = 1$ será o período exatamente anterior a $t = 0$.

Para cada trecho, tipo de assento e classe dados na figura 2.5, suponha que: a figura 2.5a é uma solução factível que representa a quantidade de assentos reservados para o período $t = 1$; a figura 2.5b é a variável binária α_{ijvkt} , que mostra 1 sempre que a quantidade de assentos reservados for diferente de zero em $t = 1$ e mostra zero caso contrário (controlado pela restrição 2.9). As figuras 2.5c e 2.5d representam o mesmo que as figuras 2.5a e 2.5b, mas para o período $t = 0$.

Observe que as posições na figura 2.5d tomarão o valor zero sempre que, na figura 2.5b, essa

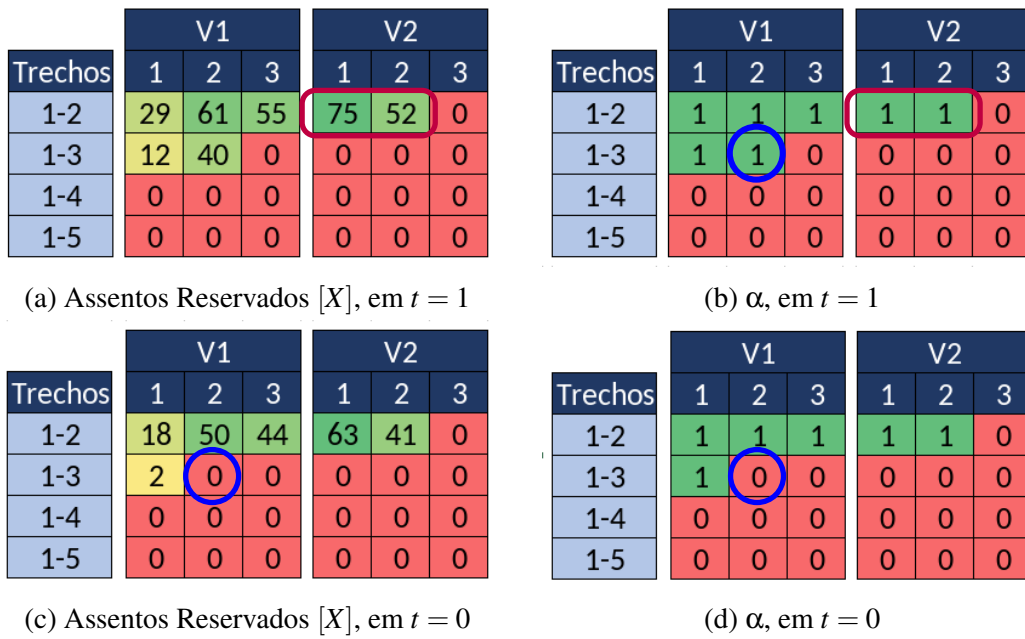


Figura 2.5: Exemplo: Restrições Fulfillments over periods

posição também for zero. Isso significa que, se a classe do período anterior for zero, então a do período atual também será zero. Note também que, quando o valor na figura 2.5b é 1, na figura 2.5d o valor poderá ser 0 ou 1. Por exemplo, para o trecho 1 – 3 do tipo de assento v_1 e classe 2, note que na figura 2.5b o valor é 1 e na figura 2.5d é zero, o que significa que a classe 2 foi reservada no período anterior, mas no período atual não foi.

Outra condição especial deste problema está relacionada à disponibilização dos preços dos bilhetes ao longo do tempo. Esses preços devem seguir uma lógica contínua, sem oscilações. Em outras palavras, os preços dos bilhetes devem sempre aumentar conforme a data de partida do trem se aproxima. A restrição 2.11 é responsável por garantir que essa condição seja atendida.

Por outro lado, a restrição 2.12 e 2.13 cumprem a mesma função de encontrar a última classe que foi disponibilizada para venda em um determinado trecho, período e tipo de assento. No entanto, a restrição 2.13 é aplicada sempre que se analisa a classe mais barata, e, em outros casos, usa-se a restrição 2.12. Assim, essas duas equações atribuem o valor 1 à variável β_{ijvkt} sempre que a classe atual k seja a classe mais barata disponibilizada para venda no trecho (i, j) , tipo de assento v , e período t ; caso contrário, atribui-se o valor zero. Essa restrição é necessária para aplicar as restrições 2.14 e 2.15.

Vamos usar o mesmo exemplo da figura ??, considerando apenas o trecho $E_1 - E_3$ e adicionando a variável binária β .

Na figura 2.6a, vemos que, para a classe mais barata c_6 , $\beta = \gamma = 0$. Agora, para o restante das

E ₁ - E ₃			
Classe	Y	γ	β
c ₁	10	1	$\beta = 1-1$
c ₂	9	1	$\beta = 1-1$
c ₃	5	1	$\beta = 1-1$
c ₄	5	1	$\beta = 1-0$
c ₅	0	0	$\beta = 0$
c ₆	0	0	$\beta = 0$

(a) Cálculo Variável β

E ₁ - E ₃			
Classe	Y	γ	β
c ₁	10	1	0
c ₂	9	1	0
c ₃	5	1	0
c ₄	5	1	1
c ₅	0	0	0
c ₆	0	0	0

(b) Resultado Variável β

Figura 2.6: Exemplo para as restrições 2.12 e 2.13

classes, realiza-se um cálculo com base nos valores de γ . Por exemplo, para a classe c_1 , o cálculo seria: γ de c_1 menos γ da próxima classe, ou seja, γ de c_2 , o que resulta em $1 - 1$. Note, além disso, que para a classe c_4 , fazendo o mesmo cálculo, o resultado é 1, como mostrado na figura 2.6b, e observe que essa classe é a última que possui um valor diferente de zero em γ .

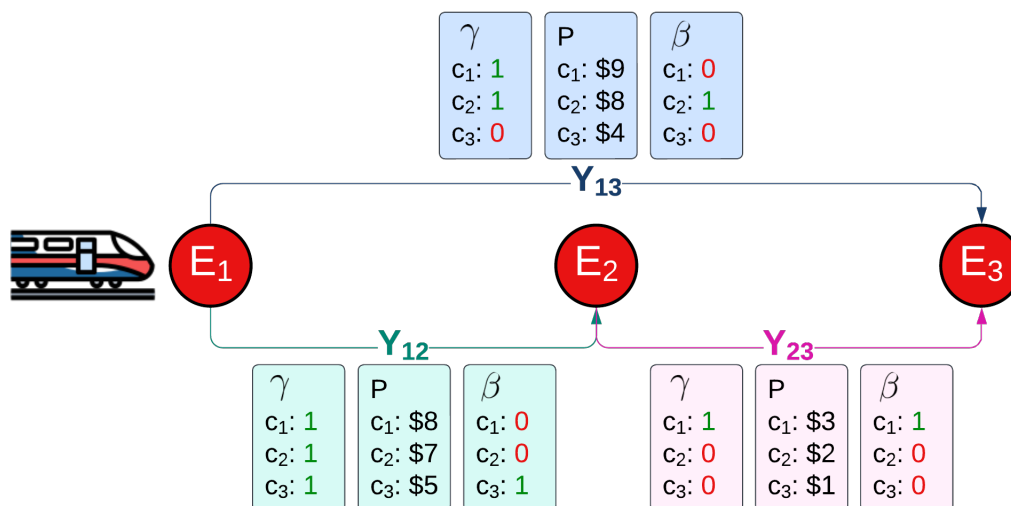


Figura 2.7: Exemplo para as restrições 2.14 e 2.15

Dentro do problema, é necessário garantir que, para todos os trechos com a mesma estação de origem, os trechos mais curtos disponibilizados para venda sejam mais baratos que os trechos mais longos. Isso é para evitar que passageiros comprem bilhetes para um trecho maior e desembarquem em estações anteriores. Por exemplo, se uma pessoa quer ir da estação E_1 para a estação E_2 , mas percebe que o preço para ir de E_1 a E_3 é mais barato, então essa pessoa comprará o bilhete de E_1 a E_3 e desembarcará na estação E_2 . Essa situação é controlada pela restrição 2.14.

Vamos ver um exemplo mais claro: na figura 2.7, temos três estações, assumindo um único

período e um único tipo de assento, além de três classes para cada trecho (c_1, c_2, c_3). Note que γ e β são as variáveis binárias explicadas anteriormente, e P representa o preço de cada classe de controle. Para este caso, a restrição 2.14 pode ser aplicada aos trechos $(E_1 - E_2)$ e $(E_1 - E_3)$.

Observe como o produto da soma do preço P e da variável β ativa o preço da classe mais barata (c_3 com valor de \$7) em $(E_1 - E_2)$, e o produto da soma de $(E_1 - E_3)$ ativa o preço da classe c_2 (com valor de \$8). No final, teríamos que \$7 deve ser menor ou igual a \$8, o que está garantindo que o trecho $(E_1 - E_2)$ seja mais barato que o trecho $(E_1 - E_3)$.

Note a importância do valor da variável β , que é responsável por "habilitar apenas os preços" das classes mais baratas disponibilizadas para a venda.

Além do mencionado anteriormente, também deve-se garantir que todas as possíveis combinações dos preços mais baratos dos trechos contidos dentro dos trechos não adjacentes sejam maiores ou iguais ao preço desse trecho não adjacente. Essa situação é controlada pela restrição 2.15.

Para dar um exemplo, analisemos novamente a figura 2.7 e identifiquemos os trechos não adjacentes e os trechos que estes contêm. Note que o trecho $(E_1 - E_3)$ seria o único trecho não adjacente e contém os trechos $(E_1 - E_2)$ e $(E_2 - E_3)$. Portanto, precisamos garantir que a soma das classes mais baratas disponibilizadas em $(E_1 - E_2)$ e $(E_2 - E_3)$ seja maior ou igual à classe mais barata disponibilizada em $(E_1 - E_3)$. Em termos numéricos, teríamos que $5 + 3 \geq 8$. Assim, este exemplo satisfaz nossa restrição.

As restrições de 2.17 e 2.16 são usadas para inicializar a restrição 2.2 quando $i = 1$. E as restrições de 2.18 a 2.21 representam o domínio das variáveis.

2.3 Segunda abordagem: modelos baseados em demanda comportamental

Até agora, falamos de uma demanda independente para o modelo, mas agora trabalharemos com uma demanda comportamental. A demanda comportamental está mais próxima da realidade do que a demanda independente. Veja o seguinte exemplo:

Suponhamos para este caso que temos um trecho $(1 - 2)$ e três classes (c_1, c_2, c_3), onde o preço de $c_1 > c_2 > c_3$, além, cada classe terá uma demanda de 10, 20 e 30, respectivamente.

Para interpretar a demanda independente, podemos dizer (segundo a figura 2.8a) que: existem

$d_{12c1} = 10$ $d_{12c2} = 20$ $d_{12c3} = 30$	$d'_{12c1} = 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\}$ $d'_{12c2} = 20 = \{c_3 > c_2 > NC\}$ $d'_{12c3} = 30 = \{c_3 > NC\}$
(a) Demanda Independente [d]	(b) Demanda Comportamental [d']

Figura 2.8: Exemplo: Tipos de Demanda

10 pessoas dispostas a comprar passagens **a um preço** de c_1 , 20 pessoas a comprar **a um preço** de c_2 e 30 pessoas a comprar **a um preço** de c_3 . No entanto, se as 10 pessoas dispostas a pagar c_1 encontrarem um melhor valor no momento da compra (por exemplo, c_3), essas pessoas prefeririam não comprar, mesmo quando encontram um preço mais barato. Situação que, na realidade, não faria sentido.

Por outro lado, temos a demanda comportamental, denotada como d' , que esta representada com uma lista de preferência, conforme visto na figura 2.8b. Esta lista significa que, por exemplo, 10 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** com valor c_1 (antes de preferir não comprar (NC)), 20 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de c_2 (antes de preferir não comprar) e 30 pessoas estão dispostas a comprar **até um preço** de c_3 (antes de preferir não comprar).

O funcionamento seria o seguinte: imagine que as 10 pessoas dispostas a comprar até um valor de c_1 vão tentar comprar primeiro a um valor mais barato, neste caso c_3 . Se c_3 não estiver disponível, elas procurariam assentos com valor c_2 . Se c_2 também não estiver disponível, subiriam na lista e procurariam passagens com valor de c_1 . Se estes não estiverem disponíveis, então não comprariam. Note que esse comportamento é o que comumente se usa na realidade.

Agora vejamos como o modelo leria esse novo comportamento. Para isso, calculemos a nova demanda potencial:

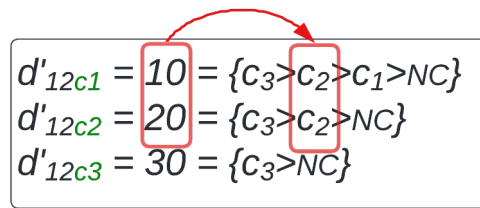
para c_1 , vejamos a lista e notemos quem está disposto a pagar por esse valor.

$$\begin{aligned}
 d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\
 d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\
 d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\}
 \end{aligned}$$

Figura 2.9: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_1

Segundo a figura 2.9, apenas 10 possíveis passageiros estão dispostos a pagar esse valor.

Agora vamos ver quem está disposto a pagar um valor por um bilhete da classe c_2 :

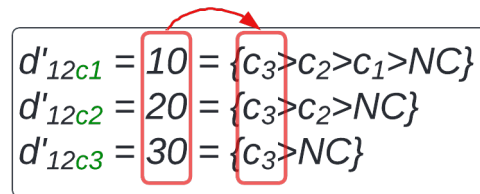


$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 2.10: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_2

Neste caso, 30 possíveis pessoas estariam dispostas a pagar esse valor. Observe que, de esta nova demanda, 10 pessoas correspondentes à demanda de c_1 também estariam dispostas a comprar pelo valor da classe c_2 .

Por último, para a classe mais barata c_3 , veja a figura 2.11. Note que, neste caso, 60 pessoas es-

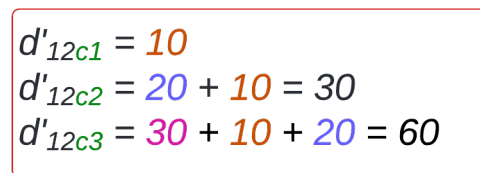


$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 = \{c_3 > c_2 > c_1 > NC\} \\ d'_{12c2} &= 20 = \{c_3 > c_2 > NC\} \\ d'_{12c3} &= 30 = \{c_3 > NC\} \end{aligned}$$

Figura 2.11: Exemplo: Demanda comportamental para a classe c_3

tariam dispostas a pagar um bilhete da classe c_3 , ou seja, toda a demanda da rota (1 – 2) compraria pelo valor mais barato se este estivesse disponível.

Assim, a demanda potencial comportamental para o modelo seria como se apresenta na figura 2.12. No entanto, é importante lembrar que a demanda potencial inicial era de 60 pessoas, mas



$$\begin{aligned} d'_{12c1} &= 10 \\ d'_{12c2} &= 20 + 10 = 30 \\ d'_{12c3} &= 30 + 10 + 20 = 60 \end{aligned}$$

Figura 2.12: Exemplo: Demanda comportamental total Potencial

até este ponto, a demanda poderia ser maior, pois a demanda de cada classe comercial agora é o acúmulo das demandas das classes mais caras. Essa situação precisa ser controlada para não criar uma demanda inexistente; para isso, serão consideradas as seguintes restrições, relacionando neste caso as variáveis de decisão de assentos reservados:

$$X_{12c_1} \leq d'_{12c_1} = 10 \quad (2.22)$$

$$X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \quad (2.23)$$

$$X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \quad (2.24)$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} \leq d'_{12c_2} = 30 \quad (2.25)$$

$$X_{12c_1} + X_{12c_2} + X_{12c_3} \leq d'_{12c_3} = 60 \quad (2.26)$$

Observe que as restrições de 2.22 até 2.24 são restrições conhecidas que limitam os valores que as passagens reservadas podem assumir, enquanto as restrições 2.25 e 2.26 são as que nos ajudarão a controlar para não ultrapassarmos a demanda potencial total inicial.

Por exemplo, se X_{12c_2} assume o valor de 30 (restrição 2.23), a restrição 2.25 garante que X_{12c_1} seja igual a 0, pois a demanda de 10 pessoas correspondente preferiu comprar ao preço da classe c_2 . A mesma situação ocorreria se X_{12c_3} assumisse o valor de 60 (restrição 2.24), então a restrição 2.26 garantiria que a demanda por X_{12c_1} e X_{12c_2} fosse igual a zero, já que esses clientes decidiram comprar pelo valor da classe c_3 . Dessa forma, esse conjunto de restrições funcionaria para cada combinação possível das variáveis descritas.

Agora, para formular o modelo completo utilizando a demanda comportamental baseada em listas ou faixas de preferência, basta modificar apenas as restrições que controlam a demanda no modelo independente e adicionar as restrições generalizadas descritas no modelo comportamental.

$$X_{ijvkt} \leq d'_{ijvkt}, \quad \forall (i, j) \in OD / i < j, v \in V, k \in K_v, t \in T \quad (2.27)$$

$$\sum_{k' \in K_v / k' \leq k} X_{i,j,v,k',t} \leq d'_{ijvkt} \quad \forall (i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k > 1, t \in T \quad (2.28)$$

As restrições 2.27 e 2.28 representam a generalização das restrições de 2.22 a 2.26. Apenas adicionando essas duas últimas restrições e eliminando a restrição 2.7 do modelo independente, obteríamos, em teoria, um modelo com demanda comportamental. No entanto, essa afirmação não é completamente verdadeira. Embora as novas restrições limitem a demanda do modelo de forma que possam ser utilizadas as listas de preferência, o modelo ainda se comportará como um modelo

independente.

Isso ocorre porque a demanda independente é um caso particular de todas as combinações possíveis que podem ser geradas ao usar as listas de preferência. Além disso, a demanda independente é o caso que produziria o maior lucro. Lembre-se de que as listas de preferência permitem a flexibilidade de um cliente disposto a pagar mais caro poder adquirir um produto mais barato, caso exista essa possibilidade — algo que a demanda independente não permite. Por isso, já sabemos de antemão que a solução obtida com a demanda comportamental será inferior à solução oferecida pelo modelo independente.

Além disso, é importante destacar que o modelo apresenta um comportamento otimista, pois assume que os clientes dispostos a pagar mais caro sempre chegarão antes daqueles que estão dispostos a pagar menos (devido à formulação da função objetivo).

Portanto, não basta apenas adicionar as restrições 2.27 e 2.28 para afirmar que temos um modelo com demanda comportamental. É necessário, de alguma forma, informar ao modelo que ele deve considerar outras possibilidades "mais realistas" durante a resolução do problema. É nesse ponto que introduzimos as seguintes restrições, que ajudarão a mitigar essa situação:

$$X_{ijvkt} \leq \left(d'_{ijvkt} \right) \left(\frac{d_{ijvkt}}{d'_{i,j,v,k',t}} \right), \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k < k', k' < \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.29)$$

$$X_{i,j,v,k',t} \leq d_{i,j,v,k',t} + \left(d'_{i,j,v,k',t} - \sum_{k \in K_v} \frac{d'_{ijvkt} d_{ijvkt}}{d'_{i,j,v,k',t}} \right), \quad \forall (i,j) \in OD, \quad (2.30)$$

$$v \in V, k' = \max\{K_v\}, t \in T$$

Para essas novas restrições, além da demanda comportamental, também utilizaremos a demanda independente. Assim, na restrição 2.29, o que fazemos é calcular as proporções da demanda independente para as classes de cada trecho, tipo de assento e período. Em seguida, essas proporções são multiplicadas pela demanda comportamental. Esse processo faz com que as demandas comportamentais potenciais para cada classe sejam reduzidas de acordo com as proporções da demanda independente. Dessa forma, garantimos que a solução obtida não seja idêntica à oferecida pelo modelo independente.

Observe que, ao calcular essas proporções, a demanda comportamental é reduzida, o que resulta em uma "perda de demanda". Esse complemento é então somado à classe mais barata do

trecho, tipo de assento e período analisado, conforme ilustrado pela restrição 2.30. Dessa forma, incentivamos o modelo a utilizar as classes mais baratas. Vamos analisar um exemplo: assuma que há um trecho com três classes para um tipo de assento e um período, e que essas classes possuem parâmetros de demanda independente d , conforme mostrado na Tabela 2.2.

Classes	d	%	d'	% * d'
c_1	36	34,62%	36	12,46
c_2	58	55,77%	94	52,42
c_3	10	9,62%	104	10 + 29,12
Total	104			

Tabela 2.2: Exemplo ajuste da demanda comportamental com proporções

Observe que a coluna "%" apresenta as proporções calculadas com base na demanda independente d . A coluna d' mostra a demanda comportamental potencial, enquanto a coluna "% * d' " exibe o produto entre as proporções "%" e a demanda comportamental (d').

Adicionalmente, note que, para a classe mais barata c_3 , o valor da última coluna é 10 (resultado do produto mencionado) somado a 29.12. Este último valor representa o complemento da demanda, ou seja, $104 - (12,46 + 52,42 + 10)$. Esse complemento é redistribuído para a classe mais acessível, garantindo que as regras do modelo sejam atendidas de forma a refletir a alocação proporcional e a flexibilidade comportamental.

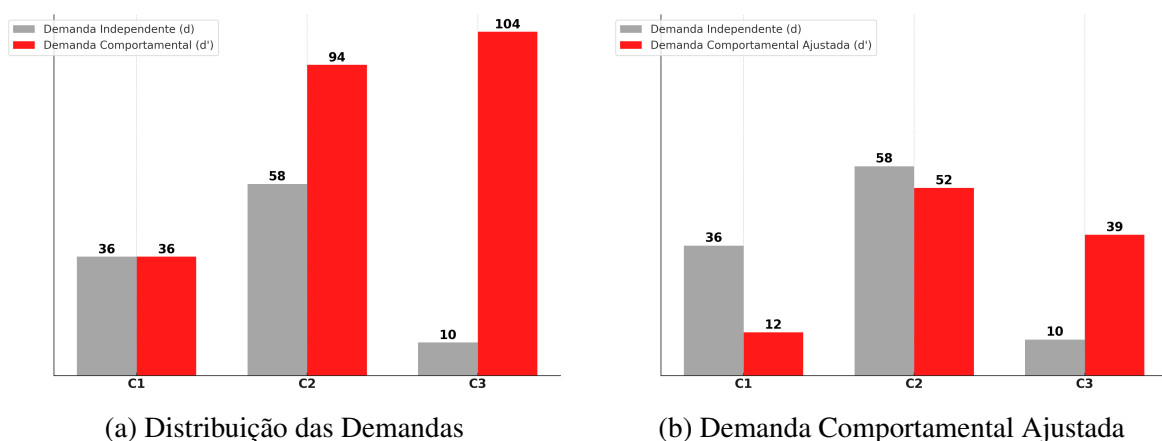


Figura 2.13: Ajuste da Demanda Comportamental com Proporções

O gráfico 2.13 nos ajuda a ter uma visão mais clara do problema. Observe que, na parte 2.13a, temos a comparação entre a demanda independente d e a demanda comportamental d' . Note que, em todos os casos, $d' \geq d$. Independentemente dos valores que d' possa assumir, o modelo selecionará os valores de d , pois estes são os que geram o maior lucro.

Após a aplicação do nosso ajuste, na parte 2.13b, observe como "reduzimos a demanda" tanto da classe c_1 quanto da classe c_2 para redistribuí-la à classe c_3 . Agora, d' não é sempre maior ou igual a d , e o modelo é forçado a considerar o limite inferior, o que resulta na inclusão da demanda comportamental ajustada.

Em outras palavras, isso reflete uma situação em que parte das pessoas que estavam dispostas a pagar mais caro chegaram primeiro, mas encontraram opções mais baratas disponíveis e aproveitaram essa situação para realizar suas compras. Esse ajuste garante que o modelo capture um comportamento de compra mais realista e alinhado à flexibilidade das preferências dos clientes.

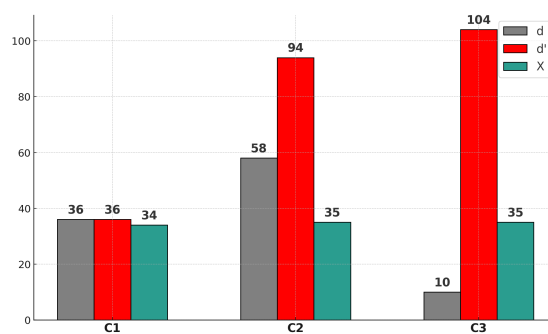
Outra abordagem proposta, como alternativa às restrições 2.29 e 2.30, foi o controle da demanda, desta vez criando uma hierarquia descendente para as classes da variável de decisão X , considerando um determinado tipo de assento, trecho e período. Em teoria, essa estratégia homogeneiza os valores que X poderia assumir, atribuindo valores muito semelhantes a todas as classes dentro das condições especificadas. Vejamos a restrição e um exemplo:

$$X_{ijvkt} \leq X_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k \neq \max\{K_v\}, t \in T \quad (2.31)$$

Retomemos novamente o exemplo apresentado na tabela 2.2. Se aplicarmos essa nova lógica, o resultado esperado seria que $X_{c_1} \leq X_{c_2} \leq X_{c_3}$. No entanto, como neste ponto (antes de adicionar as restrições que complementam a demanda comportamental) o modelo ainda se comporta como independente — uma situação já explicada anteriormente —, o modelo utilizaria a demanda independente como base para criar a hierarquia descendente. É importante destacar algo crucial: mencionamos que o modelo considera a demanda independente para ajustar a hierarquia. No entanto, ao formular a restrição, utilizamos a variável X e não o parâmetro d' . Isso não é uma contradição e foi feito intencionalmente. Na verdade, essa escolha foi realizada para explicar, de forma prática, como o modelo funciona internamente. Dito isso, uma solução para o nosso exemplo seria:

Classes	d	d'	X
c_1	36	36	34
c_2	58	94	35
c_3	10	104	35
Total	104		

(a) Exemplo restrição 2.31



(b) Exemplo visual da restrição 2.31

Figura 2.14: Ajuste da Demanda Comportamental com Hierarquia

Nesse caso, a coluna X representa a solução mais gulosa que a variável X poderia assumir. Observe como os valores são muito semelhantes para cada classe e respeitam a ordem decrescente.

Esse último enfoque não requer intervenção direta na demanda comportamental já calculada (assim como o primeiro enfoque). Apenas adicionamos uma condição para a variável X , que é suficiente para ativar a característica de lista de preferências do modelo.

CAPÍTULO 3

Resultados Computacionais

3.1 Modelos Matemáticos

Embora três modelos matemáticos tenham sido propostos — a formulação independente e as formulações comportamentais —, ao resolver as instâncias decidiu-se inicialmente testar os modelos sem as restrições de fulfillment nem as restrições de skiplagging. Em seguida, cada modelo foi testado separadamente com cada grupo de restrições. Por fim, ambos os modelos foram avaliados considerando os dois conjuntos de restrições simultaneamente. Essa abordagem foi adotada para observar como a solução evoluía ou se comportava ao incluir cada tipo de restrição no modelo. Dito isso, a seguir são apresentados os modelos com suas respectivas descrições.

Tipo de Modelo	Descrição
BaseModel	Modelo base independente sem as restrições de Fulfillments nem as restrições de Skiplagging.
BaseModelFulfillments	Modelo base independente com as restrições de Fulfillments.
BaseModelSkiplagging	Modelo base independente com as restrições de Skiplagging.
BaseModelFull	Modelo independente completo com os dois conjuntos de restrições.

HierarBehavioralModel	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo hierarquia, sem as restrições de Fulfillments nem as restrições de Skiplagging.
HierarBehavioralModelFulfillments	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo hierarquia, com as restrições de Fulfillments.
HierarBehavioralModelSkiplagging	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo hierarquia, com as restrições de Skiplagging.
HierarBehavioralModelFull	Modelo comportamental completo com ajuste de demanda do tipo hierarquia, com os dois conjuntos de restrições.
PercentBehavioralModel	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo proporção, sem as restrições de Fulfillments nem as restrições de Skiplagging.
PercentBehavioralModelFulfillments	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo proporção, com as restrições de Fulfillments.
PercentBehavioralModelSkiplagging	Modelo base comportamental com ajuste de demanda do tipo proporção, com as restrições de Skiplagging.
PercentBehavioralModelFull	Modelo comportamental completo com ajuste de demanda do tipo proporção, com os dois conjuntos de restrições.

Tabela 3.1: Descrição dos modelos matemáticos propostos

3.2 Instâncias

Para verificar as características dos modelos propostos, foram utilizadas 10 instâncias reais fornecidas pela empresa canadense Expetrio. As características de cada uma dessas instâncias estão apresentadas na Tabela 3.2.

Instância	Nome Trem	Capacidade Trem	Data Partida	# Trechos	# Períodos	# Classes
Instância1	68	561	2023-11-21	256	120	15
Instância2	13	637	2023-11-26	252	146	15
Instância3	71	563	2023-10-13	250	105	16
Instância4	71	561	2023-11-21	241	124	15
Instância5	8	561	2022-12-04	152	116	17
Instância6	40	565	2023-11-21	149	68	16
Instância7	74	491	2023-07-25	136	70	16
Instância8	72	493	2023-10-25	100	85	16
Instância9	45	563	2023-03-16	90	73	16
Instância10	15	493	2023-08-07	50	60	12

Tabela 3.2: Resumo das instâncias utilizadas no experimento

A coluna "# Trechos" representa a quantidade de trechos que a viagem do trem possui em cada instância. A coluna "# Períodos" indica a quantidade de períodos considerados na programação desse trajeto dentro do seu horizonte de reserva. Por fim, a coluna "# Classes" mostra o número máximo de classes disponíveis para cada viagem de cada trem; Observe que, para cada trecho, podem estar disponíveis todas as classes indicadas na coluna correspondente ou uma quantidade menor.

Por outro lado, afirmamos que as instâncias compreendidas entre a Instância1 e a Instância4 são classificadas como grandes, as instâncias entre a Instância5 e a Instância7 como médias, e as demais como pequenas.

3.3 Experimentos Computacionais

Para resolver as instâncias utilizando os modelos matemáticos propostos, foi empregado um computador da marca Dell, modelo Precision 3660, equipado com o sistema operacional Windows 11 Pro de 64 bits, processador 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13700 2.10 GHz baseado em arquitetura x64, e memória RAM de 16GB. Além disso, utilizou-se o Python como linguagem de programação na versão 3.10.14, e o solver Gurobi na versão 11.0.3.

Em primeiro lugar, apresentam-se os resultados de cada instância após serem resolvidas por meio de cada um dos modelos propostos. Essa organização busca evidenciar de forma clara e comparativa o desempenho dos modelos em diferentes cenários, destacando as principais diferen-

ças e similaridades nas soluções obtidas para cada instância.

Observe que a primeira coluna indica o nome do modelo utilizado. A segunda coluna, "*T. Criação Modelo (seg.)*", exibe o tempo, em segundos, que o solver levou para construir o modelo. A terceira coluna, "*T. Solução (seg.)*", mostra o tempo necessário para que o solver resolvesse o modelo. A sétima coluna, "*Z Relaxado*", apresenta a relaxação linear do problema no nó raiz. Já a oitava coluna, "*Z*", indica o valor ótimo da função objetivo (máximo lucro encontrado). Por fim, a nona coluna, "*ΔZ(%)*", mostra a diferença percentual entre a solução relaxada e a solução ótima.

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorados	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	Δ Z (%)
BaseModel	2,30	0,07	1	0	1	170.485	170.485	0,00
BaseModelFulfillments	3,97	0,07	1	0	1	170.485	170.485	0,00
BaseModelSkiplagging	6,06	0,06	1	0	1	133.237	133.237	0,00
BaseModelFull	6,43	0,05	1	0	1	51.410	51.410	0,00
HierarBehavioralModel	3,17	0,07	1	0	1	170.455	170.455	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	4,87	0,08	1	0	1	170.455	170.455	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	7,09	0,08	1	2	2	132.928	132.928	0,00
HierarBehavioralModelFull	7,48	0,05	1	0	1	51.336	51.336	0,00
PercentBehavioralModel	3,14	0,07	1	0	1	166.345	166.345	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	4,90	0,08	1	0	1	170.455	170.455	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	7,07	0,06	1	2	2	132.928	132.928	0,00
PercentBehavioralModelFull	7,47	0,05	1	0	1	51.336	51.336	0,00

Tabela 3.3: Resultados para a Instância1

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	Δ Z (%)
BaseModel	2,90	0,08	1	0	1	314.883,03	314.883,03	0,00
BaseModelFulfillments	5,22	0,08	1	0	1	314.883,03	314.883,03	0,00
BaseModelSkiplagging	7,47	0,07	1	0	1	303.634,13	303.634,13	0,00
BaseModelFull	8,00	0,07	1	0	1	203.208,98	203.208,98	0,00
HierarBehavioralModel	3,98	0,07	1	0	1	314.599,53	314.599,53	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	6,38	0,10	1	0	3	314.599,53	314.599,53	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	8,58	0,06	1	0	1	303.375,63	303.375,63	0,00
HierarBehavioralModelFull	9,11	0,07	1	0	1	203.276,98	203.276,98	0,00
PercentBehavioralModel	3,98	0,07	1	0	1	313.547,03	313.547,03	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	6,35	0,10	1	0	3	314.599,53	314.599,53	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	8,62	0,06	1	0	1	303.375,63	303.375,63	0,00
PercentBehavioralModelFull	9,20	0,08	1	0	1	203.276,98	203.276,98	0,00

Tabela 3.4: Resultados para a Instância2

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	Δ Z (%)
BaseModel	2,25	0,05	1	33	2	140.788,61	140.788,61	0,00
BaseModelFulfillments	3,75	0,08	1	377	2	140.788,61	140.788,61	0,00
BaseModelSkiplagging	18,62	0,07	1	25	2	95.625,49	95.625,49	0,00
BaseModelFull	19,15	0,05	1	0	1	37.214,03	37.214,03	0,00
HierarBehavioralModel	3,01	0,08	1	97	6	140.179,10	140.167,27	0,01
HierarBehavioralModelFulfillments	4,67	0,12	1	571	10	140.086,16	140.077,33	0,01
HierarBehavioralModelSkiplagging	19,87	0,06	1	55	3	95.101,49	95.101,49	0,00
HierarBehavioralModelFull	20,08	0,05	1	4	4	37.183,03	37.183,03	0,00
PercentBehavioralModel	3,02	0,05	1	35	2	136.487,26	136.487,26	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	4,67	0,12	1	571	10	140.086,16	140.077,33	0,01
PercentBehavioralModelSkiplagging	20,09	0,05	1	55	3	95.101,49	95.101,49	0,00
PercentBehavioralModelFull	20,43	0,05	1	4	4	37.183,03	37.183,03	0,00

Tabela 3.5: Resultados para a Instância3

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	2,20	0,05	1	0	1	166.118,29	166.118,29	0,00
BaseModelFulfillments	3,70	0,08	1	0	1	166.118,29	166.118,29	0,00
BaseModelSkiplagging	4,65	0,07	1	0	1	130.810,41	130.810,41	0,00
BaseModelFull	4,95	0,04	1	0	1	40.602,31	40.602,31	0,00
HierarBehavioralModel	3,02	0,05	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	4,48	0,07	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	5,50	0,05	1	0	2	129.740,41	129.740,41	0,00
HierarBehavioralModelFull	5,84	0,04	1	0	1	40.718,31	40.718,31	0,00
PercentBehavioralModel	3,07	0,05	1	0	1	162.681,09	162.681,09	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	4,52	0,08	1	0	1	165.869,29	165.869,29	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	5,47	0,07	1	0	2	129.740,41	129.740,41	0,00
PercentBehavioralModelFull	5,73	0,05	1	0	1	40.718,31	40.718,31	0,00

Tabela 3.6: Resultados para a Instância4

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	2,20	0,05	1	29	3	127.371,39	127.371,39	0,00
BaseModelFulfillments	3,07	0,07	1	143	4	127.371,39	127.371,39	0,00
BaseModelSkiplagging	3,05	0,07	1	0	1	95.816,84	95.816,84	0,00
BaseModelFull	3,24	0,05	1	0	1	28.647,69	28.647,69	0,00
HierarBehavioralModel	2,72	0,05	1	53	4	127.020,39	127.010,39	0,01
HierarBehavioralModelFulfillments	3,58	0,07	1	170	4	127.020,39	127.010,39	0,01
HierarBehavioralModelSkiplagging	3,58	0,07	1	0	1	95.403,84	95.403,84	0,00
HierarBehavioralModelFull	3,87	0,06	1	0	1	28.460,69	28.460,69	0,00
PercentBehavioralModel	2,68	0,07	1	34	3	124.593,69	124.593,69	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	3,67	0,08	1	170	4	127.020,39	127.010,39	0,01
PercentBehavioralModelSkiplagging	3,62	0,05	1	0	1	95.403,84	95.403,84	0,00
PercentBehavioralModelFull	3,85	0,05	1	0	1	28.460,69	28.460,69	0,00

Tabela 3.7: Resultados para a Instância5

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	1,18	0,03	0	0	1	67.715,07	67.715,07	0,00
BaseModelFulfillments	1,75	0,03	0	0	1	67.715,07	67.715,07	0,00
BaseModelSkiplagging	1,72	0,04	0	0	1	51.708,29	51.708,29	0,00
BaseModelFull	1,83	0,03	0	0	1	24.722,37	24.722,37	0,00
HierarBehavioralModel	1,48	0,03	0	0	1	67.593,22	67.593,22	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	2,15	0,07	0	0	1	67.587,22	67.587,22	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	2,07	0,05	1	0	1	51.589,44	51.589,44	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,27	0,03	0	0	1	24.714,52	24.714,52	0,00
PercentBehavioralModel	1,48	0,03	0	0	1	65.256,64	65.256,64	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	2,10	0,05	0	0	1	67.587,22	67.587,22	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	2,08	0,03	1	0	1	51.589,44	51.589,44	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,22	0,03	0	0	1	24.714,52	24.714,52	0,00

Tabela 3.8: Resultados para a Instância6

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	N° Nós Explorado	N° Iterações	N° Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	1,07	0,03	0	0	1	48.719,71	48.719,71	0,00
BaseModelFulfillments	1,72	0,03	0	0	1	48.719,71	48.719,71	0,00
BaseModelSkiplagging	1,81	0,03	0	0	1	20.996,45	20.996,45	0,00
BaseModelFull	1,98	0,03	0	0	1	9.382,95	9.382,95	0,00
HierarBehavioralModel	1,43	0,05	1	60	5	47.990,71	47.990,71	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	2,17	0,05	1	227	6	47.990,71	47.990,71	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	2,25	0,03	0	0	3	20.694,45	20.694,45	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,37	0,05	0	0	1	8.663,95	8.663,95	0,00
PercentBehavioralModel	1,45	0,02	-	-	-	-	Infactível	-
PercentBehavioralModelFulfillments	2,17	0,05	1	227	6	47.990,71	47.990,71	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	2,25	0,03	0	0	3	20.694,45	20.694,45	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,38	0,03	0	0	1	8.663,95	8.663,95	0,00

Tabela 3.9: Resultados para a Instância7

Modelo	T. Criação Modelo (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	0,94	0,03	0	0	1	53.844,31	53.844,31	0,00
BaseModelFulfillments	1,58	0,05	0	0	1	53.844,31	53.844,31	0,00
BaseModelSkiplagging	1,57	0,04	0	0	1	28.675,46	28.675,46	0,00
BaseModelFull	1,70	0,03	0	0	1	13.985,90	13.985,90	0,00
HierarBehavioralModel	1,32	0,03	1	54	5	52.091,71	52.091,71	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	1,98	0,07	1	205	6	52.091,71	52.091,71	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	1,98	0,03	0	0	2	28.506,46	28.506,46	0,00
HierarBehavioralModelFull	2,12	0,03	0	0	2	11.599,90	11.599,90	0,00
PercentBehavioralModel	1,30	0,02	-	-	-	-	Infactível	-
PercentBehavioralModelFulfillments	1,99	0,05	1	205	6	52.091,71	52.091,71	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	1,97	0,03	0	0	2	28.506,46	28.506,46	0,00
PercentBehavioralModelFull	2,12	0,03	0	0	2	11.599,90	11.599,90	0,00

Tabela 3.10: Resultados para a Instância8

Modelo	T. Criação Model (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	0,82	0,03	0	0	1	55.282,08	55.282,08	0,00
BaseModelFulfillments	1,33	0,03	0	0	1	55.282,08	55.282,08	0,00
BaseModelSkiplagging	1,37	0,03	0	0	1	33.524,11	33.524,11	0,00
BaseModelFull	1,48	0,03	0	0	1	9.902,35	9.902,35	0,00
HierarBehavioralModel	1,12	0,03	0	0	1	55.230,08	55.230,08	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	1,66	0,05	1	13	5	55.230,08	55.230,08	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	1,71	0,03	1	3	3	33.249,11	33.249,11	0,00
HierarBehavioralModelFull	1,85	0,03	0	0	1	9.726,35	9.726,35	0,00
PercentBehavioralModel	1,12	0,03	0	0	1	50.834,74	50.834,74	0,00
PercentBehavioralModelFulfillments	1,68	0,05	1	13	5	55.230,08	55.230,08	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	1,70	0,03	1	3	3	33.249,11	33.249,11	0,00
PercentBehavioralModelFull	1,82	0,04	0	0	1	9.726,35	9.726,35	0,00

Tabela 3.11: Resultados para a Instância9

Modelo	T. Criação Model (seg.)	T. Solução (seg.)	Nº Nós Explorado	Nº Iterações	Nº Soluções	Z Relaxado	Z*	ΔZ (%)
BaseModel	0,39	0,02	0	0	1	21.548,62	21.548,62	0,00
BaseModelFulfillments	0,65	0,02	0	0	1	21.548,62	21.548,62	0,00
BaseModelSkiplagging	0,64	0,00	0	0	1	13.102,66	13.102,66	0,00
BaseModelFull	0,70	0,01	0	0	1	3.637,46	3.637,46	0,00
HierarBehavioralModel	0,56	0,02	1	5	3	22.112,12	22.112,12	0,00
HierarBehavioralModelFulfillments	0,90	0,03	1	0	1	22.112,12	22.112,12	0,00
HierarBehavioralModelSkiplagging	0,85	0,01	1	19	2	13.015,16	13.015,16	0,00
HierarBehavioralModelFull	0,94	0,01	0	0	1	3.362,96	3.362,96	0,00
PercentBehavioralModel	0,58	0,00	-	-	-	-	Infactível	-
PercentBehavioralModelFulfillments	0,87	0,02	1	0	1	22.112,12	22.112,12	0,00
PercentBehavioralModelSkiplagging	0,88	0,00	1	19	2	13.015,16	13.015,16	0,00
PercentBehavioralModelFull	0,95	0,02	0	0	1	3.362,96	3.362,96	0,00

Tabela 3.12: Resultados para a Instância10

Dentro dos resultados observados, diversos comportamentos interessantes foram identificados:

1. Tempo de solução: O tempo necessário para resolver cada modelo em todas as instâncias foi relativamente baixo. Por exemplo:

- Para as instâncias grandes, os tempos variaram entre 0,04 e 0,12 segundos;
- Para as instâncias médias, entre 0,02 e 0,08 segundos;

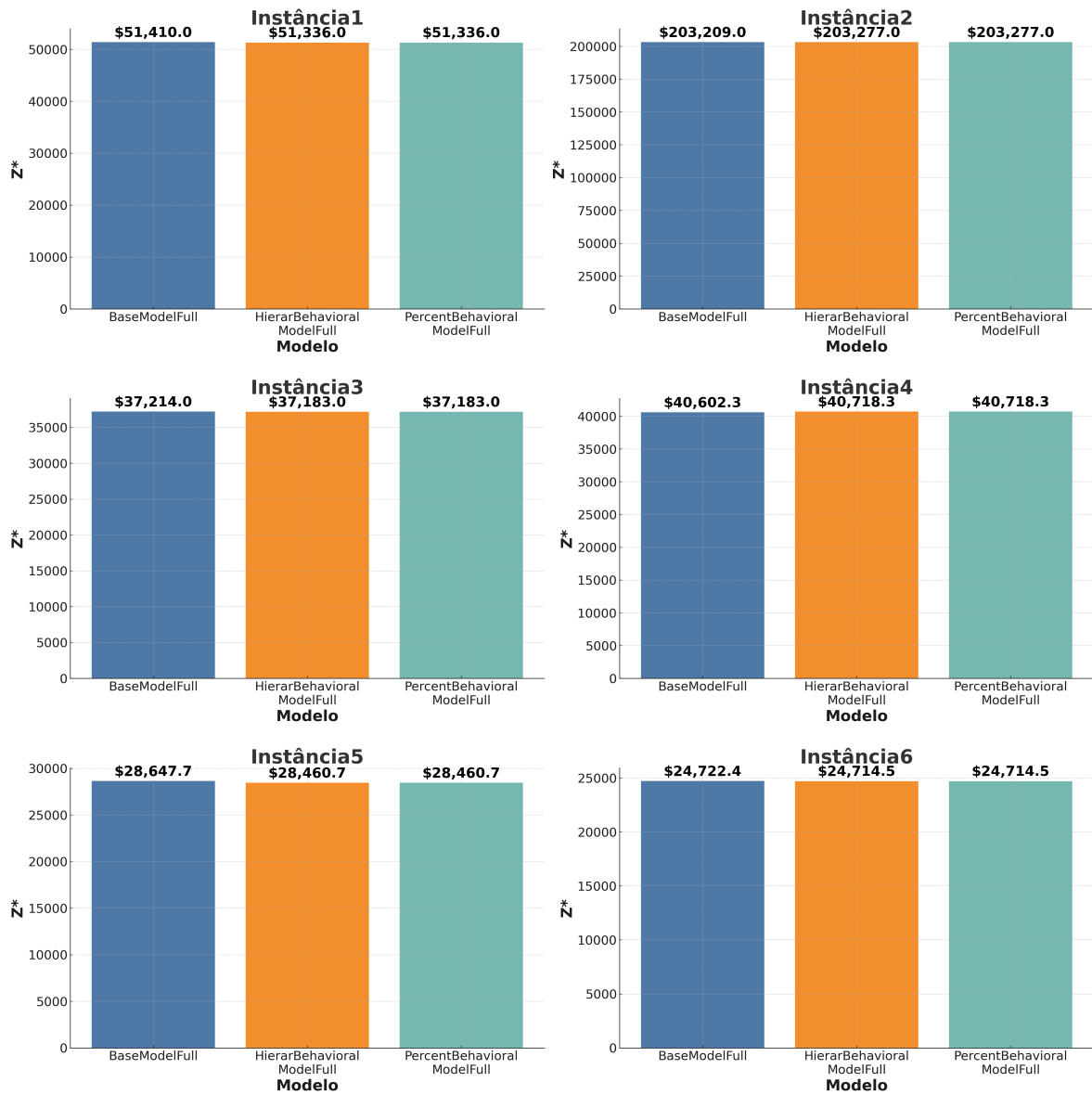


Figura 3.1: Comparação Modelos Full primeira parte

- Para as instâncias pequenas, entre 0,00 e 0,07 segundos.
2. Exploração de nós: Os modelos sempre alcançaram a solução ou soluções ótimas explorando, no máximo, um único nó. Isso demonstra que, na maioria dos casos, a solução ótima coincide com a relaxação linear. Quando isso não ocorre, a diferença máxima relativa é de apenas 0,01%.
 3. Modelos com demanda independente:
 - Os modelos BaseModel e BaseModelFulfillments produziram exatamente os mesmos resultados em todas as instâncias analisadas;

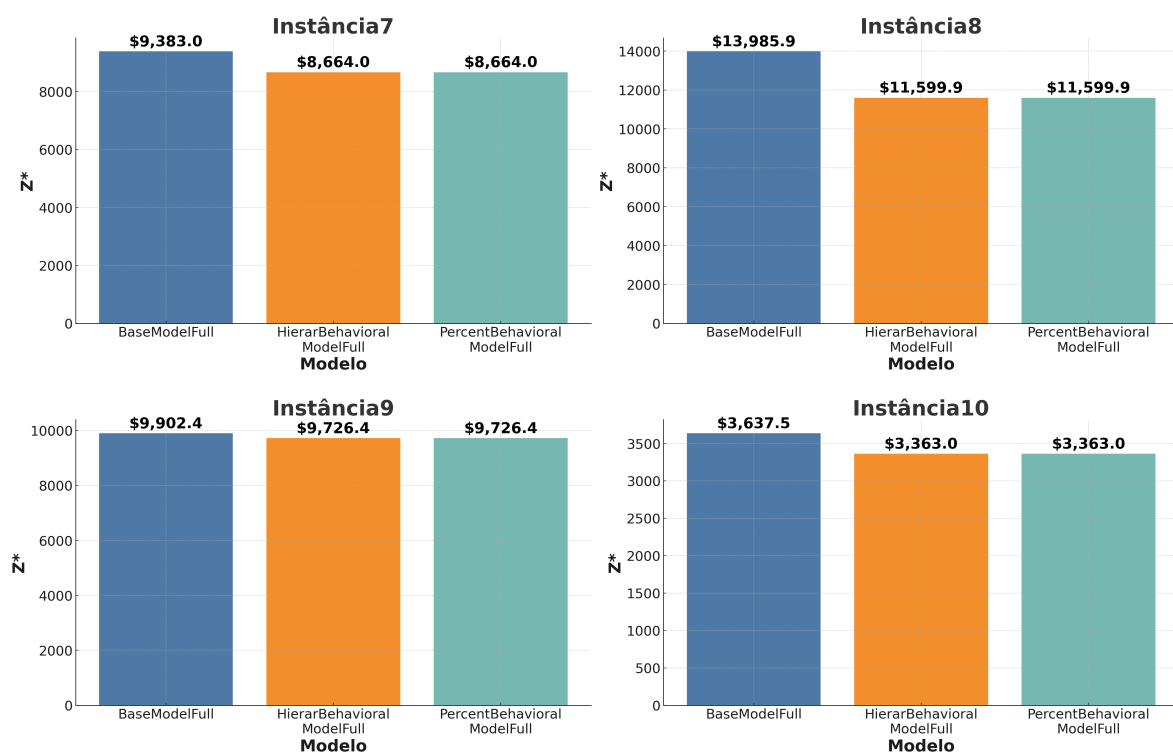


Figura 3.2: Comparação Modelos Full segunda parte

- O modelo BaseModelSkiplagging, em comparação com o BaseModelFulfillments, apresentou uma redução relativa entre 21,25% e 56,90% em todas as instâncias, exceto na instância instância2, onde a redução foi de apenas 3,57%;
- O modelo BaseModelFull mostrou uma redução ainda maior, variando entre 21,25% e 72,24%, em comparação com o BaseModelSkiplagging, novamente com exceção da instância instância2, onde a redução foi de 3,57%.

4. Modelos com demanda comportamental ajustada por proporções:

- Não foram observadas diferenças entre os modelos BaseModel e BaseModelFulfillments;
- Ao contrário do comportamento no modelo independente, o modelo PercentBehavioralModelFulfillments apresentou um aumento relativo entre 0,33% e 8,6% nas soluções obtidas, em comparação com o modelo HierarBehavioralModel, exceto nas instâncias instância7, instância8 e instância10, onde o HierarBehavioralModel foi inviável. Acredita-se que essa inviabilidade se deva a alguma inconsistência gerada durante o ajuste da demanda, mas a causa exata ainda não foi determinada;

- O modelo PercentBehavioralModelFull mostrou uma redução relativa entre 33% e 70%, em comparação com o modelo PercentBehavioralModelSkiplagging.

5. Modelos com demanda comportamental ajustada por hierarquia:

- Os modelos HierarBehavioralModel e HierarBehavioralModelFulfillments apresentaram os mesmos resultados em todas as instâncias, exceto nas instâncias instância3 e instância6, onde ocorreram reduções de 0,06% e 0,01%, respectivamente;
- O modelo HierarBehavioralModelSkiplagging apresentou reduções entre 21,8% e 56,9%, exceto na instância instância1, onde a redução foi de apenas 3,57%;
- O modelo HierarBehavioralModelFull registrou reduções consideráveis em relação ao modelo HierarBehavioralModelSkiplagging, variando entre 33% e 74%.

6. Análise dos modelos Full (BaseModelFull, HierarBehavioralModelFull, PercentBehavioralModelFull):

- Considerando apenas os modelos Full, ou seja, aqueles que incluem todos os conjuntos de restrições, os modelos comportamentais obtiveram exatamente os mesmos resultados para a função objetivo em cada instância. No entanto, como algumas instâncias possuem múltiplas soluções ótimas, os valores das variáveis de decisão podem diferir, mesmo que os valores da função objetivo sejam iguais;
- Além disso, a diferença entre os modelos comportamentais e o modelo independente foi de, no máximo, 2%, exceto nas instâncias instância7 e instância8, onde as variações foram de 7,7% e 16,1%, respectivamente.

Esse detalhamento evidencia o comportamento dos modelos e suas respectivas eficiências em diferentes cenários e ajustes.

CAPÍTULO 4

Conclusões e trabalhos futuro

O presente estudo abordou a problemática de otimizar o Transporte Ferroviário de Passageiros por meio do desenvolvimento de modelos matemáticos de programação inteira mista, explorando dois enfoques principais: demanda independente e demanda comportamental. A aplicação desses modelos em cenários reais possibilitou uma avaliação comparativa detalhada, destacando as diferenças e os benefícios inerentes a cada abordagem.

Em primeiro lugar, do ponto de vista computacional, todos os modelos demonstraram ser robustos e capazes de alcançar soluções ótimas dentro de tempos razoáveis, validando assim sua viabilidade para aplicações práticas na indústria ferroviária.

Em segundo lugar, os modelos mostraram alta eficiência em encontrar a solução ou soluções ótimas dentro do espaço de busca, explorando no máximo um único nó. Até o momento, não foi possível explicar com precisão esse comportamento. No entanto, pode-se afirmar que isso não está relacionado à simplicidade das instâncias utilizadas, pois foram testadas instâncias consideradas de grande porte na indústria, representando até 30 estações e envolvendo até 74.788 variáveis de decisão inteiras.

Em terceiro lugar, observou-se que, embora os modelos comportamentais apresentem um valor da função objetivo ligeiramente inferior ao do modelo independente, a qualidade da solução é superior. Isso reforça que, nesse tipo de problema, além de buscar a maximização do lucro, também

se valoriza que a solução seja baseada em características mais próximas da realidade. Destaca-se como um resultado inesperado a semelhança dos valores da função objetivo entre os dois enfoques.

Em quarto lugar, a infactibilidade do modelo PercentBehavioralModel ocorreu devido às características específicas das instâncias instância7, instância8 e instância10, que durante o ajuste da demanda comportamental em função da demanda independente, criou-se uma situação inviável. Isso demonstra que é necessário cuidado ao aplicar esse enfoque, para evitar situações semelhantes.

Trabalhos futuros a serem incluídos na versão final desta proposta incluem:

- Aprofundar a revisão bibliográfica: Fortalecer as bases teóricas da pesquisa, explorando ainda mais a literatura relacionada;
- Explicar com maior clareza o comportamento dos modelos: Investigar detalhadamente o motivo pelo qual os modelos encontram a solução ótima explorando apenas um nó, além de explicar com mais precisão as causas da inviabilidade do modelo PercentBehavioralModel em certas instâncias;
- Explorar outros enfoques para ajustar a demanda: neste caso, optou-se por adicionar restrições que melhorassem seu comportamento. No entanto, também seria possível abordar essa questão alterando a formulação da função objetivo.

Bibliografia

- [1] Salvatore Ammirato et al. «A systematic literature review of revenue management in passenger transportation». Em: *Emerald Publishing Limited* 24 (2020), pp. 223–242. DOI: [10.1108/MBE-09-2019-0096](https://doi.org/10.1108/MBE-09-2019-0096). URL: <https://doi.org/10.1108/MBE-09-2019-0096>.
- [2] Fred Glover et al. «The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines». Em: *Interfaces* 12.3 (1982), pp. 73–80. ISSN: 00922102, 1526551X. URL: <http://www.jstor.org/stable/25060268> (accedido em 07/08/2024).
- [3] Francesca Guerriero, Martina Luzzi e Giusy Macrina. «Revenue Management Approach for Passenger Transport Service: An Italian Case Study». Em: *Optimization and Decision Science: ODS, Virtual Conference, November 19, 2020*. Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 237–247. ISBN: 978-3-030-86841-3. DOI: [10.1007/978-3-030-86841-3_20](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86841-3_20). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-86841-3_20.
- [4] X. Han e Z. Ren. «Joint optimization of stop planning and ticket allocation under uncertainty theory». Em: *Soft Computing* 24.9 (2020), pp. 7293–7308. DOI: [10.1007/s00500-019-04617-9](https://doi.org/10.1007/s00500-019-04617-9).
- [5] Jesús Muñuzuri José Guadix Luis Onieva e Pablo Cortés. «An overview of revenue management in service industries: an application to car parks». Em: *The Service Industries Journal* 31.1 (2011), pp. 91–105. DOI: [10.1080/02642069.2010.491543](https://doi.org/10.1080/02642069.2010.491543).

- [6] Ken Littlewood. «Special Issue Papers: Forecasting and control of passenger bookings». Em: *Journal of Revenue and Pricing Management* 4 (abr. de 2005), pp. 111–123. DOI: [10.1057/palgrave.rpm.5170134](https://doi.org/10.1057/palgrave.rpm.5170134).
- [7] Jeffrey I. McGill e Garrett J. van Ryzin. «Revenue Management: Research Overview and Prospects». Em: *Transportation Science* 33.2 (1999), pp. 233–256. DOI: [10.1287/trsc.33.2.233](https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233). eprint: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>. URL: <https://doi.org/10.1287/trsc.33.2.233>.
- [8] Garrett J. van Ryzin e Kalyan T. Talluri. «An Introduction to Revenue Management». Em: *INFORMS Tutorials in Operations Research* (out. de 2014), pp. 142–194. DOI: <https://doi.org/10.1287/educ.1053.0019>.
- [9] A. Schöbel e F. Urban. «Optimal fare structures and algorithms for ticket assignment in public transportation systems». Em: *ArXiv preprint* abs/2106.10521 (2021). URL: <https://arxiv.org/abs/2106.10521>.
- [10] Xiang Zhao e Peng Zhao. «A seat assignment model for high-speed railway ticket booking system with customer preference consideration». Em: *Transportmetrica A Transport Science* 15.2 (2019), pp. 776–806. DOI: <https://doi.org/10.1080/23249935.2018.1532467>.
- [11] X. Zhou et al. «Integrated pricing and passenger flow assignment model based on prospect theory and logit model». Em: *Mathematics* 11.6 (2023), p. 1412. DOI: [10.3390/math11061412](https://doi.org/10.3390/math11061412).
- [12] X. Zhou et al. «Nonlinear integer programming model for integrated ticket pricing and stop planning in railway systems». Em: *Mathematics* 10.10 (2022), p. 1679. DOI: [10.3390/math10101679](https://doi.org/10.3390/math10101679).