Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Ciências Aplicadas

Wilmer Dario Urango Narvaez

UM MODELO LINEAR DE DEMANDA COMPORTAMENTAL PARA MAXIMIZAR A RECEITA DO PROBLEMA DE TRANSPORTE FERROVIÁRIO DE PASSAGEIROS

A LINEAR BEHAVIORAL DEMAND MODEL TO MAXIMIZE REVENUE FROM THE RAIL PASSENGER TRANSPORTATION PROBLEM

Dissertação apresentada à Faculdade de Ciências Aplicadas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestrado em Engenharia de Produção e de Manufatura. Área de concentração: Pesquisa Operacional e Gestão de Processos.

Orientador: Prof. Dr. Diego Jacinto Fiorotto
Co-orientador: Dr. Karim Perez

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Wilmer Dario Urango Narvaez, e orientado pelo Prof. Diego Jacinto Fiorotto.

Limeira
2024

CAPÍTULO 1

Modelagem matemática

1.1 Modelagem matemática

Dentro da pesquisa, foram realizadas duas modelagens distintas, ambas, diferentemente da literatura clássica, foram elaboradas com base nas estações de origem e destino, e não nos legs do percurso.

Para compreender essas propostas, consideremos uma versão simplificada do problema como se mostra na figura 1.1, onde temos:

- 4 estações pelas quais o trem deve passar em um único sentido, ou seja, o trem não tem retorno.
- O trem tem uma capacidade máxima de assentos.
- Há apenas um tipo de classe comercial.
- Existe apenas um período no horizonte de reserva.
- A variável de decisão é a quantidade de assentos que pode ser disponibilizada para venda em um trecho com origem e destino específicos.
- Todos os assentos disponibilizados para venda serão vendidos.

1.2 Primeira modelagem matemática

Agora, para a primeira proposta de modelagem, temos o seguinte

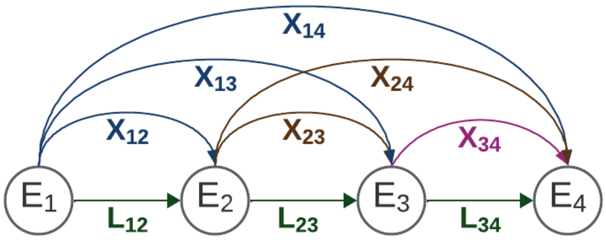

Figura 1.1: Versão gráfica simples

x_{ij}: Quantidade de assentos que será disponibilizada para venda no trecho com origem em i e destino em j, onde $j > i$

A_i: Disponibilidade do trem na estação i

P_{ij}: Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j

Q: Capacidade do trem

Dado o exposto, a função objetivo será maximizar o lucro para cada possível venda em cada trajeto i, j, matematicamente seria:

$FO : max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$

s.a.

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq A_1 \quad onde \quad A_1 = Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq A_2 \quad onde \quad A_2 = A_1 - (x_{12} + x_{13} + x_{14}) + x_{12}$

Estação 3: $x_{34} \leq A_3 \quad onde \quad A_3 = A_2 - (x_{23} + x_{24}) + x_{13} + x_{23}$

Note que as restrições são aplicadas para cada uma das três primeiras estações, E1, E2 e E3, já que são as estações que têm pelo menos um destino, e a última estação, E4, é excluída, pois não possui nenhum destino.

Cada uma das restrições leva em consideração o fluxo de pessoas que sairão e entrarão no trem. Levando isso em conta, é necessário calcular a disponibilidade do trem para cada estação. Considere uma solução viável para o modelo, conforme mostrado na figura 1.2, com uma capacidade total de 100 assentos para um trem.

Note que, para a restrição da estação 1, o trem está com todos os assentos vazios, ou seja, $A_1 = 100$, e que a soma das variáveis seria $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10 + 5 + 15 = 30$. Portanto, teríamos $30 \leq 100$, ou seja, foram disponibilizados para venda 30 assentos dos 100 que o trem possui. Nesse sentido, no momento da partida do trem da estação 1, haveria 70 assentos vazios ou disponíveis para venda em estações posteriores.

Agora, para a estação 2, teríamos $A_2 = 100 - 30 + 10 = 70 + 10 = 80$. Já era conhecido que havia 70 assentos disponíveis vindos da estação 1, mas também é preciso levar em conta que os assentos com destino à estação 2 também ficarão disponíveis da estação 2 em diante, para este caso $x_{12} = 10$. Portanto, para

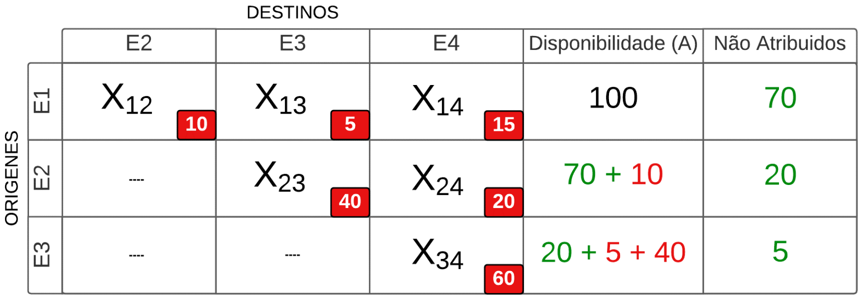

Figura 1.2: Solução factível para o problema simplificado

a estação 2, teríamos 80 assentos vazios para disponibilizar, ou seja, $60 \leq 80$. Analogamente, o mesmo raciocínio seria aplicado para a estação 3, ou seja, teríamos a soma de todos os assentos que chegaram à estação 3, $x_{13} = 5$ e $x_{23} = 40$, assim teríamos $A_3 = 80 - 60 + 5 + 40 = 20 + 5 + 40 = 65$, e no final teríamos $60 \leq 65$.

Dada a lógica anterior, vejamos agora o modelo proposto completo:

Definição	**Notação**	**Domínio**
Conjuntos		
OD	Conjunto de Trechos com itinerario	
V	Conjunto de Cabines do trem	
K_v	Conjunto de Classes de Control de cada cabine em V	
T	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
Parâmetros		
n	Quantidade de Estações	
Q	Capacidade do trem	
P_{ijvk}	Preços das passagem no Trecho (i, j), Cabine v e Classe de Control k	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
D_{ijvkt}	Demanda das passagem no Trecho (i, j), Cabine v e Classe de Control k	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variáveis de decisão		
A_i	Disponibilidade de passagens para vendas na estação i	$i \in I$
X_{ijvkt}	Quantidade de passagem atribuídos no trecho (i, j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagem autorizados no trecho (i, j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i, j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 1.1: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j)\in OD} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \tag{1.1}$$

s.a.

$$A_i = A_{i-1} - \sum_{(i,j)\in OD/j\geq i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{i-1,j,v,k,t} + \sum_{(i,j)\in OD/j<i} \sum_{v\in V} \sum_{k\in K_v} \sum_{t\in T} X_{jivkt}, \quad \forall i \in OD \tag{1.2}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD}\sum_{v\in V}\sum_{k\in K_v}\sum_{t\in T} X_{ijvkt} \leq A_i, \quad \forall i \in OD/i<j, i<n \tag{1.3}$$

$$\sum_{(i,j)\in OD}\sum_{v\in V}\sum_{t\in T} Y_{i,j,v,1,t} \leq Q \tag{1.4}$$

$$\sum_{t\in T} Y_{i,j,v,k,t} \geq \sum_{t\in T} X_{i,j,v,k,t}, \quad k = \|K_v\|, \forall (i,j), v \tag{1.5}$$

$$\sum_{t\in T} Y_{i,j,v,\|K_v\|-k,t} \geq \sum_{t\in T} X_{i,j,v,\|K_v\|-k,t} + \sum_{t\in T} Y_{i,j,v,\|K_v\|k+1,t}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v/k \leq \|K_v\|-1 \tag{1.6}$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j), v, k, t/i<j, k<\|K\|, P_{ijvk} \geq P_{i,j,v,k+1} \tag{1.7}$$

$$X_{ijvkt} \leq D_{ijvkt}, \quad \forall (i,j), v, k, t/i<j \tag{1.8}$$

$$X_{0,j,v,k,t} = 0, \quad \forall j, k, t \tag{1.9}$$

$$A_0 = Q \tag{1.10}$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.11}$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.12}$$

$$A_{jk} \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.13}$$

Na equação 1.1, a qual representa a função objetivo, temos a soma do produto entre a quantidade de assentos atribuídos a cada trajeto de origem e destino para a classe comercial em cada período e cada vagone, multiplicada pelo preço correspondente para cada trajeto e classe. A restrição 1.2 é análoga ao exemplo simplificado e calcula a disponibilidade de assentos em cada uma das estações. A restrição 1.3 também é análoga ao exemplo simplificado e restringe a quantidade de atribuições que podem ser feitas para cada estação usando a disponibilidade calculada na restrição 1.2. A restrição 1.17 garanta que a soma das classes mais costosas de cada vagone, de tudos os periodos e de tudos os trechos não ultrapase a capacidade do trem, note que apenas estamos considerando a restrição mais cara devido à natureza cumulativa das variáveis de autorização, por exemplo, suponha que exista uma classe 2 e uma classe 3, e digamos que a classe 2 seja mais cara que a classe 3, então, o valor da classe 2 precisa ser maior ou igual ao valor da classe 3 já que ela precisa conter pelo menos o valor da classe 3; a restrição 1.18 garanta que para cada trecho e para cada vagone a quantidades de assentos autorizados da ultima classe mais barata seja maior que a quantidade de assentos asegurados, note que esta restrição é um caso particular da restrição 1.19; a restrição 1.19garante que a soma de todos os valores das autorizações de cada classe (exceto a mais barata) seja maior ou igual à soma dos tempos de todas as autorizações da classe imediatamente anterior mais a soma dos tempos das quantidades de assentos assegurados na mesma classe, para cada segmento, cada vagão e cada classe, com a exceção mencionada, note que as restriciones 1.18 e 1.19 formam uma única restrição, além disso, para essas duas restrições, leve em consideração que as classes estão ordenadas do maior para o menor preço e que a acumulação das variáveis de autorização é feita com base nos preços, do menor para o maior. Essa é a razão da notação do subíndice correspondente às classes A restrição 1.7 é uma restrição de hierarquia e garante que as quantidades de autorizações para as classes de maior preço sejam sempre maiores do que as quantidades de autorizações de menor preço em cada vagone, em cada trecho para tudos os período do horizonte de reserva. A restrição 1.8 garante que a quantidade de atribuições não ultrapasse a demanda para cada trecho de cada classe em cada vagoen e em cada período no horizonte de reserva. As restrições de 1.9 e 1.10 são usadas para inicializar a restrição 1.2 quando $i = 1$. E as restrições de 1.11 a 1.13 representam o domínio das variáveis.

1.3 Segunda modelagem matemática

Vamos considerar novamente uma versão simplificada do problema. Na verdade, para esta modelagem, serão levadas em conta as mesmas variáveis do primeiro modelo, exceto a variável de disponibilidade A, conforme mostrado a seguir:

x_{ij}: Quantidade de assentos que será disponibilizada para venda no trecho com origem em i e destino em j, onde $j > i$

P_{ij}: Preço da passagem no trajeto com origem em i e destino em j

Q: Capacidade do trem

Assim, a função objetivo e as restrições são como segue:

$FO : max \quad x_{12}P_{12} + x_{13}P_{13} + x_{14}P_{14} + x_{23}P_{23} + x_{24}P_{24} + x_{34}P_{34}$

s.a.

Restrições para estações de origem

Estação 1: $x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq Q$

Estação 2: $x_{23} + x_{24} \leq Q$

Estação 3: $x_{34} \leq Q$

Restrições para estações de destino

Estação 2: $x_{12} \leq Q$

Estação 3: $x_{13} + x_{23} \leq Q$

Estação 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq Q$

Observe que esta formulação é baseada nos modelos de transporte, onde as estações de origem seriam os depósitos e estão restritas por sua capacidade (capacidade do trem), e as estações de destino seriam os destinos e estão restritas, neste caso, pela mesma capacidade do trem e não pela demanda de cada destino.

Esta formulação garante que sempre será disponibilizada, no máximo, a capacidade do trem tanto para cada saída quanto para cada chegada do trem. Imagine uma solução viável como a mostrada na figura 1.2.

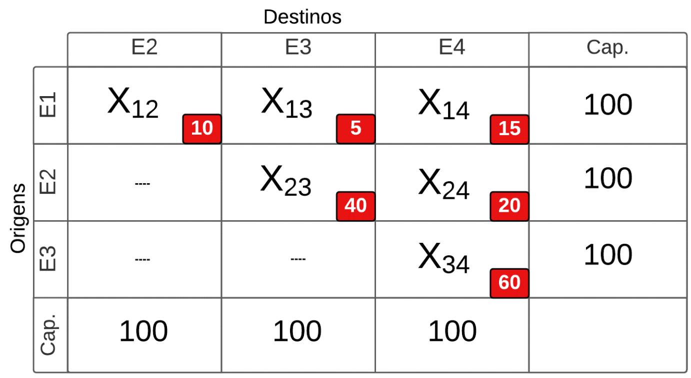

Figura 1.3: Solução factível para o problema simplificado

Observe que os valores das variáveis são os mesmos que foram mostrados na figura 1.3. E ainda todas as restrições, tanto por linha quanto por coluna (por origens e por destinos), continuam sendo atendidas.

Definição	**Notação**	**Domínio**
Conjuntos		
OD	Conjunto de Trechos com itinerario	
V	Conjunto de Cabines do trem	
K_v	Conjunto de Classes de Control de cada cabine em V	
T	Conjunto de Check-Points (Períodos)	
Parâmetros		
n	Quantidade de Estações	
Q	Capacidade do trem	
P_{ijvk}	Preços das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v$
D_{ijvkt}	Demanda das passagem no Trecho (i,j), Cabine v e Classe de Control k	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Variáveis de decisão		
X_{ijvkt}	Quantidade de passagem atribuídos no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$
Y_{ijvkt}	Quantidade de passagem autorizados no trecho (i,j), cabine v e com classe de control k no período t	$(i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v, t \in T$

Tabela 1.2: Notação matemática

$$Max \quad Z = \sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} P_{ijvk} X_{ijvkt} \tag{1.14}$$

s.a.

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijvkt} \leq Q, \quad \forall j / j > 1, i < j \tag{1.15}$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{k \in K_v} \sum_{t \in T} X_{ijvkt} \leq Q, \quad \forall i / i < n, j > i \tag{1.16}$$

$$\sum_{(i,j) \in OD} \sum_{v \in V} \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,1,t} \leq Q \tag{1.17}$$

$$\sum_{t \in T} Y_{i,j,v,k,t} \geq \sum_{t \in T} X_{i,j,v,k,t}, \quad k = \|K_v\|, \forall (i,j), v \tag{1.18}$$

$$\sum_{t \in T} Y_{i,j,v,\|K_v\|-k,t} \geq \sum_{t \in T} X_{i,j,v,\|K_v\|-k,t} + \sum_{t \in T} Y_{i,j,v,\|K_v\|k+1,t}, \forall (i,j) \in OD, v \in V, k \in K_v / k \leq \|K_v\| - 1 \tag{1.19}$$

$$Y_{ijvkt} \geq Y_{i,j,v,k+1,t}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j, k < \|K\|, P_{ijvk} \geq P_{i,j,v,k+1} \tag{1.20}$$

$$X_{ijvkt} \leq D_{ijvkt}, \quad \forall (i,j), v, k, t / i < j \tag{1.21}$$

$$X_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.22}$$

$$Y_{ijvkt} \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.23}$$

Note que, na definição, não temos mais a variável de decisão de disponibilidade A_i. Neste caso, a equação 1.14 representa a função objetivo que esta tentando maximizar a soma do produto entre as quantidades seguradas e os preços das mesmas, ou seja, estamos maximizando a receita em função das quantidades dos assentos que estão assegurados. A restrição 1.15 garante que a quantidade total de assentos autorizados para cada destino seja a quantidade máxima de assentos do trem para todas as classes e todos os períodos. A restrição 1.16 garante que a quantidade de assentos autorizados para cada origem seja no máximo a capacidade do trem para todas as classes e todos os períodos. As restrições de 1.17 a 1.23 representam o mesmo que o primeiro modelo já exposto.

Note que a diferenca dos dois modelos fica nas restrições de capacidade do problema.