Chipimplementation einer zweidimensionalen Fouriertransformation für die Auswertung eines Sensor-Arrays

Thomas Lattmann

Bachelorarbeit eingereicht im Rahmen der Bachelorprüfung
im Studiengang Informations- und Elektrotechnik
am Department Informations- und Elektrotechnik
der Fakultät Technik und Informatik
der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

Betreuender Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Karl-Ragmar Riemschneider
Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Vollmer

Abgegeben am 20.04.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Motivation

Sensorarray beschreiben

1.2 Stand der Technik

Der verwendete Prozess ist mit 350 µm im Vergleich zu modernen Prozessen mit beispielsweise 20 nm Strukturbreite um die Größenordnung 10^4 größer. Entsprechend handelt es sich um einen relativ alten Prozess.

Kurze Beschreibung zu Standardzellen.

1.3 Ziel dieser Arbeit

Im Rahmen des Integrated Sensor Array (ISAR)-Projekts der HAW Hamburg soll zur Signalvorverarbeitung einer Matrix von Magnetsensoren eine zweidimensionale diskrete Fouriertransformation (2D-DFT) in VHDL implementiert werden. Mit der 2D-DFT sollen relevante Signalanteile identifiziert werden, um so den Informationsgehalt der Sensorsignale auf relevante Anteile zu reduzieren. Die Sensoren basieren auf dem anisotropen magnetoresistiven Effekt (AMR)- bzw. in einem späteren Schritt tunnelmagnetoresistiven Effekt (TMR).

In einem Text zitiert dann so [1, S. 10-20] und blabla.

Winkelberechnung als Ziel beschreiben.

2 Grundlagen

Um einen guten Ausgangspunkt für spätere Erläuterungen zu haben, sollen an dieser Stelle die wesentlichen Grundlagen zusammengefasst werden.

2.1 Binäre Zahlendarstellung von Festkommazahlen

Im Rahmen dieses Projekts wird von Ein- sowie Ausgangswerten mit einer Genauigkeit von 12 Bit ausgegangen. Basierend auf älteren Sensoren wird von Werten im Bereich von $-2 < z < 2$ ausgegangen. Aus diesem Grund müssen sowohl ein Ganzzahlanteil, sowie Nachkommastellen repräsentiert werden können. Wie dies gelingt, wird in den nächsten Abschnitten gezeigt. Hierfür werden Festkommazahlen verwendet, aufgrund der Rechenoperationen haben diese dennoch unterschiedlich viele Vor- sowie Nachkommastellen.

2.1.1 Integer-Zahl im 1er-Komplement

Bei der Interpretation des Bitvektors als Integerwert im Einerkomplement werden die Bits anhand ihrer Position im Bitvektor gewichtet, wobei das niederwertigste Bit (LSB, least significant bit) dem Wert für den Faktor 2^0 entspricht, das Bit links davon dem für 2^1 und so weiter. Die Summe aller Bits, ohne das höchstwertigste, multipliziert mit ihrer Wertigkeit (Potenz) ergibt den Betrag der Dezimalzahl. Das höchstwertigste Bit (MSB, most significant bit) gibt Auskunft darüber, ob es sich um eine negative oder positive Zahl handelt, wobei eine 0 für eine positive Zahl steht. Entsprechend besagt die 1, dass die Zahl negativ ist. Dies hat zur Folge, dass es eine positive und eine negative Null und somit eine Doppeldeutigkeit gibt. Des Weiteren wird ein LSB an Auflösung verschenkt. Der Wertebereich erstreckt sich von $-2^{\mathrm{MSB}-1} + 1\,\mathrm{LSB}$ bis $2^{\mathrm{MSB}-1} - 1\,\mathrm{LSB}$

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sich das Ergebnis einer Multiplikation der Zahlen $a \cdot b$ und $-a \cdot b$ nur im vordersten Bit unterscheidet. Darüber hinaus lässt sich das Vorzeichen des Ergebnisses durch eine einfache XOR-Verknüpfung der beiden MSB der Multiplikanden ermitteln. Die eigentliche Multiplikation beschränkt sich auf die Bits MSB-1 bis LSB.

Nachteile zeigen sich hingegen bei der Addition sowie Subtraktion negativer Zahlen. Auch hierfür gibt es schematische Rechenregeln, diese erfordern jedoch mehr Zwischenschritte als im Zweierkomplement.

2.1.2 Integer-Zahl im 2er-Komplement

Bei der Interpretation als Zweierkomplement kann anhand es MSB ebenfalls erkannt werden, ob es sich um eine positive oder negative Zahl handelt. Hie bedeutet ein gesetztes MSB

-2^{MSB-1}, was der negativsten darstellbaren Zahl entspricht. Hierbei sind alle anderen Bits auf 0. Für gesetzte Bits wird der Dezimalwert, wie beim Einerkomplement beschrieben, berechnet und auf den negativen Wert aufaddiert. Wenn das MSB nicht gesetzt ist, wird der errechnete Dezimalwert auf 0 addiert. Auf diese Weise lassen sich Zahlen im Wertebereich von -2^{MSB-1} bis $2^{MSB-1} - 1\,LSB$ darstellen. Der positive Wertebereich ist also um ein LSB kleiner als der negative und es gibt keine doppelte Null.

Um das Vorzeichen umzukehren müssen alle Bits invertiert werden. Auf das Resultat muss abschließend 1 LSB addiert werden.

Vorteil bei dieser Darstellung ist, dass die mathematischen Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation direkt angewandt werden können. Unterstützt werden sie z.B. von den Datentypen `unsigned` sowie `signed`, welche in der Bibliothek u.a. `ieee.numeric_std.all` definiert sind.

2.1.3 Darstellung dualer Zahlen im SQ-Format

Im SQ-Format werden Zahlen als vorzeichenbehafteter Quotient (signed quotient) dargestellt. Wie beim 2er-Komplement entscheidet das höchstwertigste Bit, ob es sich um eine positive oder negative Zahl handelt. In Abbildung 2.1 ist exemplarisch die Interpretation von Dualzahlen im SQ3-Format, also für vier Bit, zu sehen.

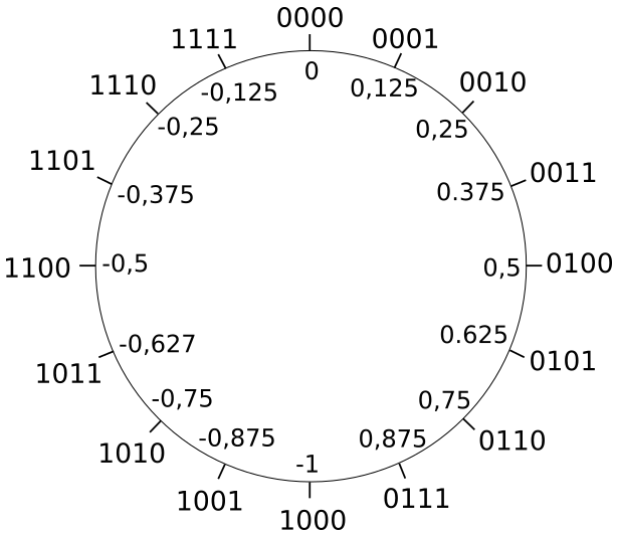


Abbildung 2.1: Interpretation von Dualzahlen im SQ3-Format

Der darstellbare Zahlenbereich liegt hier bei $-1 \leq z < 1$. Benötigt werden Zahlen im Bereich von etwa ± 2, weshalb ein Vorkommabit benötigt wird. Da 12 Bit zur Verfügung stehen, von denen eins für das Vorzeichen und ein weiteres für eine Vorkommastelle verwendet werden, bleiben 10 Bits für die Nachkommazahlen übrig. Die Aufteilung der Bits wird über die Bezeichnung S1Q10 definiert. Da für den Quotient 10 Bit zur Verfügung stehen, beträgt die maximale Auflösung $1\,LSB = 2^{-10} = 1024^{-1} = 9,765625 \cdot 10^{-4}$. Der Wertebereich liegt in diesem Fall liegt bei -2 bis 1,999 023 438.

Für die Addition oder Multiplikation zweier Zahlen müssen beide einerseits dieselbe Bitbreite und andererseits das gleiche Darstellungsformat besitzen.

2.1.4 Numerisch bedingte Ungenauigkeiten

Numerische Ungenauigkeiten entstehen immer dann, wenn die zur Verfügung stehenden Bits es nicht ermöglichen eine Zahl exakt abzubilden. Bei einem Bitshift, welcher häufig für die Division durch Zwei oder Vielfachen von Zwei verwendet wird, kann immer Information verloren gehen. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Bits die abgeschnitten werden eine 1 sind. Das hat zur Folge, dass beispielsweise bei einer Division durch Zwei der resultierende Wert um 1 LSB kleiner ist, als er eigentlich sein sollte. Dieses Problem kann bei jedem Bitshift auftreten. Die Wahrscheinlichkeit für eine 1 liegt im Mittel bei 50 %, weshalb davon ausgegangen werden muss, dass ein positives Ergebnis etwas kleiner und ein negatives vom Betrag her etwas größer ist, als bei verlustfreier Berechnung.

Da diese Arbeit den Schwerpunkt in der Aufwandsabschätzung einer Chipimplementation einer 2D-DFT auf einem Application Specific Integrated Circuit, *dt.: Anwendungsspezifischer Integrierter Schaltkreis* (ASIC) hat, ist diese Problematik kein Gegenstand dieser Arbeit und wird an dieser Stelle nur in Grundzügen erwähnt.

2.2 Mathematische Grundlagen

Zu den mathematischen Grundlagen werden die komplexe Multiplikation sowie die Matrixmultiplikation gezählt, welche nachfolgen kurz behandelt werden. Auf die Fouriereihenentwicklung sowie insbesondere die Fouriertransformation und ihre diskrete Variante wird im Anschluss detaillierter eingegangen, da sie elementarer Bestandteil dieser Arbeit sind. Da auch die diskrete Kosinustransformation als mögliche Transformationsart im Raum stand, um in den Bildbereich zu gelangen, wird diese ebenfalls kurz aufgegriffen.

2.2.1 Komplexe Multiplikation

Im allgemeinen Fall müssen gemäß Gl. (2.1) bei der komplexen Multiplikation vier einfache Multiplikation sowie zwei Additionen durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} e + jf &= (a + jb) \cdot (c + jd) \\ &= a \cdot c + j(a \cdot d) + j(b \cdot c) + j^2(b \cdot d) \\ &= a \cdot c - b \cdot d + j(a \cdot d + b \cdot c) \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2.2 Matrixmultiplikation

Um nachfolgende Abschnitte besser erörten zu können, soll zunächst die Matrixmultiplikation besprochen werden. Wie in Abbildung 2.2 verdeutlicht, wird Element(i, j) der Ergebnismatrix dadurch berechnet, dass die Elemente(i, k) einer Zeile der 1. Matrix mit den Elementn(k, j)

aus der zweiten Matrix multipliziert und die Werte aufsummiert werden. i und j sind für die Berechnung eines Elements konstant, während k über alle Elemente einer Zeile bzw. Spalte läuft.

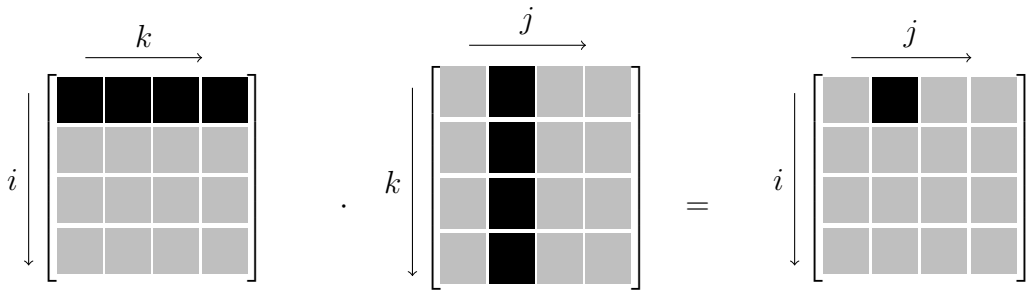


Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Matrixmultiplikation

2.3 Fourierreihenentwicklung

Mit einer Fourierreihe kann ein periodisches Signal aus einer Summe von Sinus- und Konsinusfunktionen zusammengesetzt werden. Die Schreibweise als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen (Gl. 2.2) ist eine der häufigsten Darstellungsformen.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k cos(kt) + b_k sin(kt)) \tag{2.2}$$

Die Fourierkoeffizienten lassen sich über die Gleichungen (2.3) und (2.4) berechnen:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot cos(kt) dt \quad \text{für} \quad k \geq 0 \tag{2.3}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cdot sin(kt) dt \quad \text{für} \quad k \geq 1 \tag{2.4}$$

Mit der Exponentialschreibweise lassen sich Sinus und Kosinus auch wie in (2.5) und (2.6) ausdrücken:

$$\cos(kt) = \frac{1}{2} \left(e^{jkt} + e^{-jkt} \right) \tag{2.5}$$

$$\sin(kt) = \frac{1}{2j} \left(e^{jkt} - e^{-jkt} \right) \tag{2.6}$$

und zusammengefasst ergibt sich in (Gl. 2.7) der komplexe Zeiger, der eine Rotation im Gegenuhrzeigersinn auf dem Einheitskreis beschreibt. In Abbildung 2.3 wird dies grafisch dargestellt.

$$\begin{aligned}\cos(kt) + j \cdot \sin(kt) &= \frac{1}{2}\left(e^{jkt} + e^{-jkt}\right) + j \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{jkt} - e^{-jkt}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{jkt} + e^{jkt}\right) \\ &= e^{jkt}\end{aligned} \tag{2.7}$$

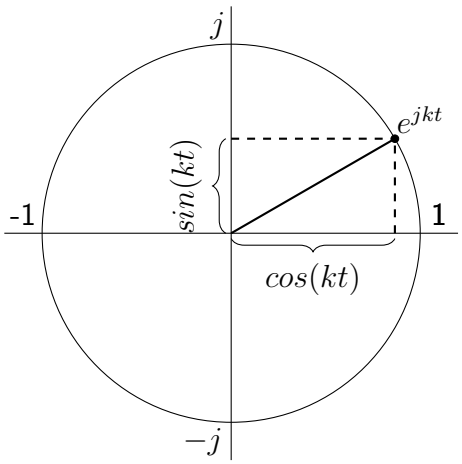


Abbildung 2.3: Einheitskreis, Zusammensetzung des komplexen Zeigers aus Sinus und Kosinus

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k lassen sich auch als komplexe Zahl c_k zusammengefasst berechnen:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-j2\pi kt}dt \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.8}$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} \tag{2.9}$$

2.4 Fouriertransformation

Mit der Fouriertransformation kann umgekert ein periodisches Signal $x(t)$ in eine Summe aus Sinus- und Kosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen zerlegt werden. Da diese Funktionen jeweils mit nur einer Frequenz periodisch sind, entsprechen diese Frequenzen den Frequenzbestandteilen von $x(t)$.

Grundlage für die Fouriertransformation ist das Fourierintegral (Gl. 2.10)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \tag{2.10}$$

Wenn Sinus- und Kosinusfunktionen wie in Gl. (2.5) und (2.6) als Exponentialfunktion

geschrieben werden, können sie zu einer komplexen Exponentialfunktion zusammengefasst werden. Hieraus lässt sich ableiten, dass das Spektrum, also $X(f)$ komplexwertig sein muss.

Signalformen wie etwa ein Rechteck haben entsprechend sehr viele dieser Frequenzbeiträge. Deren Höhe ist Information darüber, wie groß ihr Anteil, also die Amplitude des Zeitsignals, ist. Die Fouriertransformation kann als das Gegenteil der Fourierreihenentwicklung gesehen werden, mit ihr erhält man das Spektrum eines Zeitsignals. Eine Vertiefung dieses umfangreichen Gebiets der Fourier-Analyse findet sich u.a. in ...

In der vorliegenden Arbeit wird künftig X^* für die eindimensionale diskrete Fouriertransformation (1D-DFT) und X für die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation (2D-DFT) stehen.

2.4.1 Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Die diskrete Fouriertransformation (DFT) ist die zeit- und wertdiskrete Variante der Fouriertransformation, die statt von $-\infty$ bis ∞ über einen Vektor von N Werten, also von 0 bis N-1 läuft. Dies hat zur Folge, dass sich ihr Frequenzspektrum periodisch nach N Werten wiederholt.

Da es sich um eine endliche Anzahl diskreter Werte handelt, geht das Integral aus Gleichung (2.10) in die Summe aus Gleichung (2.11) über.

Üblicherweise wird die (diskrete) Fouriertransformation genutzt, um vom Zeitbereich in den Frequenzbereich zu gelangen. In diesem Fall enthielte der Eingangsvektor Werte im Zeitbereich, der Ausgangsvektor Werte im Frequenzbereich. Um von Daten im Zeitbereich sprechen zu können, müssen diese zeitlich versetzt auf den gleichen Bezugspunkt erfasst worden sein. Bezogen auf das Sensorarray würde eine bestimmte Anzahl an zeitlich versetzten zeit- und wertediskretisierten Daten eines einzelnen Sensors in einem Vektor zusammengefasst und darauf die DFT angewandt werden, um beim Ausgangsvektor von Daten im Frequenzbereich sprechen zu können.

Statt zeitlich versetzter Daten werden beim Sensorarray die Daten von mehreren Sensoren gleichzeitig erfasst. Da das Sensorarray zweidimensional ist, ergibt sich an Stelle eines Vektors eine Matrix. Weil die Werte gleichzeitig erfasst werden und diese verschiedene Koordinaten repräsentieren, muss hier von Orts- anstatt von Zeitwerten gesprochen werden. Von der Transformation ins Frequenzspektrum spricht man wiederum bei Zeitwerten, da das Spektrum die Frequenzen darstellt, aus denen das Zeitsignal zusammengesetzt ist. Da bei der eben beschriebenen Datenerfassung Ortsdaten transformiert werden, spricht man hier allgemeiner von einer Transformation in den Bilbereich.

In dieser Arbeit werden statt Zeit- bzw. Ortsbereich respektive Frequenzbereich und Bildverarbeitung häufig auch die Begriffe Ein- und Ausgangsvektor bzw. -matrix verwendet.

Mit der eindimensionalen diskreten Fouriertransformation (1D-DFT) wird die spaltenweise DFT einer Matrix bezeichnet, in der Regel ist sie der erste Schritt der Berechnung der 2D-DFT. Die Größe der Eingangsmatrix gibt die Größe der Twiddlefaktormatrix vor, beide müssen identisch und quadratisch sein. In dieser Arbeit wird die DFT einer Matrix der Größe NxN auch NxN-DFT genannt.

2.4.2 Summen- und Matrizenschreibweise der DFT

1D-DFT

Die DFT findet wie bereits erwähnt üblicherweise Anwendung, um vom Zeit- in den Frequenzbereich zu gelangen.

$$X^*[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \tag{2.11}$$

In Gleichung (2.11) ist die übliche Verwendung von Eingangsvektor $x[n]$ und Ausgangsvektor $X[n]$ zu sehen. Eine spaltenweise Multiplikationen einer Matrix ist auch denkbar und ist darüber hinaus Grundlage für die 2D-DFT. Gleichung (2.13) zeigt die Summenformel aus (2.11), umgeschrieben zu einer Matrixmultiplikation.

Mit Gleichung (2.12) werden zunächst alle Twiddlefaktoren in Matrixform berechnet, wobei n der Index des zu berechnenden Elements des Vektors im Zeitbereich und m das Äquivalent im Frequenzbereich ist.

$$W = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \tag{2.12}$$

Somit gilt:

$$X^* = W \cdot x \tag{2.13}$$

In Matlab kann die Twiddlefaktormatrix mit

$$W = e^{-\frac{i2\pi}{N} \cdot [0:N-1]' \cdot [0:N-1]} \tag{2.14}$$

berechnet werden, wobei N die Anzahl der Elemente je Zeile bzw. Spalte ist.

Anhand der beiden Summen die jeweils von 0 bis N-1 laufen, lassen sich die Anzahl der benötigten komplexen Multiplikationen m_{DFT} einer DFT errechnen. Siehe auch Gleichung (2.15).

$$m_{DFT} = N^2 \tag{2.15}$$

2D-DFT

Die 2D-DFT wird hingegen häufig in der Bildverarbeitung verwendet, um vom Orts- in den Fourierraum zu gelagen. Da es sich somit nicht mehr um eine Abhängigkeit der Zeit handelt, werden andere Indizes verwendet.

$$\begin{aligned} X[u,v] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*[m] \cdot e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \cdot e^{-\frac{j2\pi mn}{N}} \right) \cdot e^{-\frac{j2\pi mn}{M}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

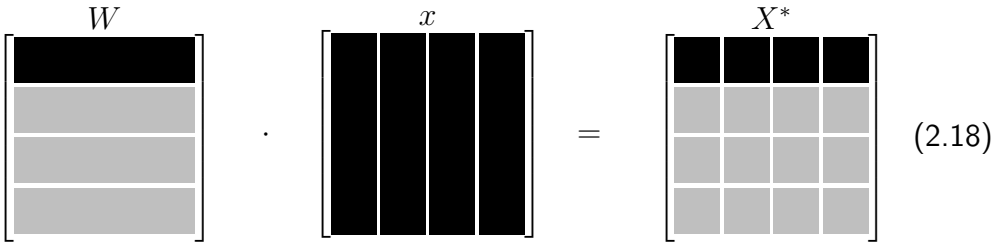
Auch hier lässt sich die Berechnung in Matrizenschreibweise darstellen:

$$\begin{aligned} X &= W \cdot x \cdot W \\ &= X^* \cdot W \end{aligned} \tag{2.17}$$

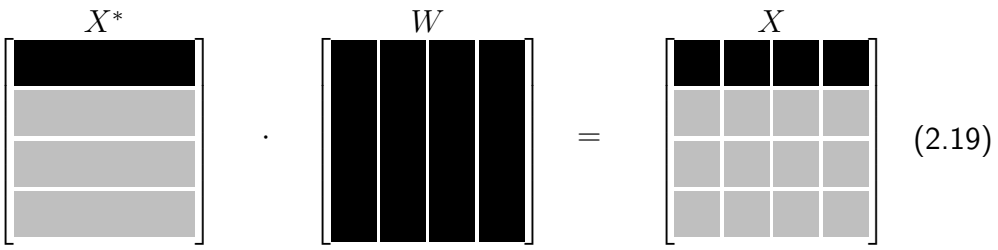
Die Gleichungen (2.13) und (2.17) werden wesentlicher Bestandteil der Umsetzung der 2D-DFT sein.

Wie in Gleichung (2.17) beschrieben, kann die 2D-DFT als "doppelte" Matrizenmultiplikation geschrieben werden. Es wird also erst die 1D-DFT berechnet und die sich daraus ergebende Matrix X^* (Abb. 2.18) wird anschließend mit der Twiddlefaktor-Matrix W multipliziert. Man könnte es auch als zweite 1D-DFT betrachten, bei der Twiddlefaktor-Matrix und Eingangsmatrix vertauscht sind.

Veranschaulicht wird dies in den Abbildungen 2.18 und 2.19.



(2.18)



(2.19)

2.4.3 2D-DFT mit reellen Eingangswerten

Bei der oben beschriebenen Berechnung können die Eingangssignale auch komplex sein. Da das Ausgangssignal der 1D-DFT unabhängig von den Eingangssignalen in jedem Fall komplex ist, kann es dort direkt als Eingangssignal für die komplexe 2D-DFT genutzt werden.

Es wäre jedoch auch möglich, das komplexe Ausgangssignal der 1D-DFT als zwei von einander unabhängige rein reelle Eingangssignale der 2D-DFTs zu betrachten und später wieder zusammenzusetzen. Gleiches gilt dann natürlich auch für ein komplexes Eingangssignal, welches ebenfalls in zwei von einander unabhängigen DFTs transformiert werden kann. Da bei dieser Umsetzung kein Imaginärteil in die Berechnung der Ergebnisse einfließt, hat sie den Vorteil, dass aus Symmetriegründen die Hälfte der Multiplikationen eingespart werden können. Hierbei ist es erforderlich, dass der Imaginärteil der gespiegelten Ergebnisse negiert wird. Abbildung 2.5 zeigt die redundanten Werte der DFT. Es müssen bei der 8x8-DFT also statt 16 nur 8 Multiplikationen mit reellem Multiplikand und komplexen Multiplkator erfolgen.

Wie bereits beschrieben, lässt sich dieses Verfahren auch für komplexe Eingangssignale, deren Real- und Imaginärteil separat voneinander mit der DFT transformiert werden, anwenden. Anschließend müssen die Ergebnisse zusammengesetzt werden. Wie dies geschieht ist der Abbildung 2.4 zu entnehmen. Die Abbildung stellt die schematische Berechnung der 2D-DFT eines reellen Eingangssignals dar. Um die 2D-DFT eines komplexen Eingangssignals zu berechnen, muss entweder eine identische Einheit für den Imaginärteil vorhanden sein oder Real- und Imaginärteil müssten zeitlich versetzt berechnet werden. Die Ergebnisse beider 2D-DFTs müssen identisch zusammengefasst werden, wie es zum Abschluss der einzelnen 2D-DFTs geschehen muss.

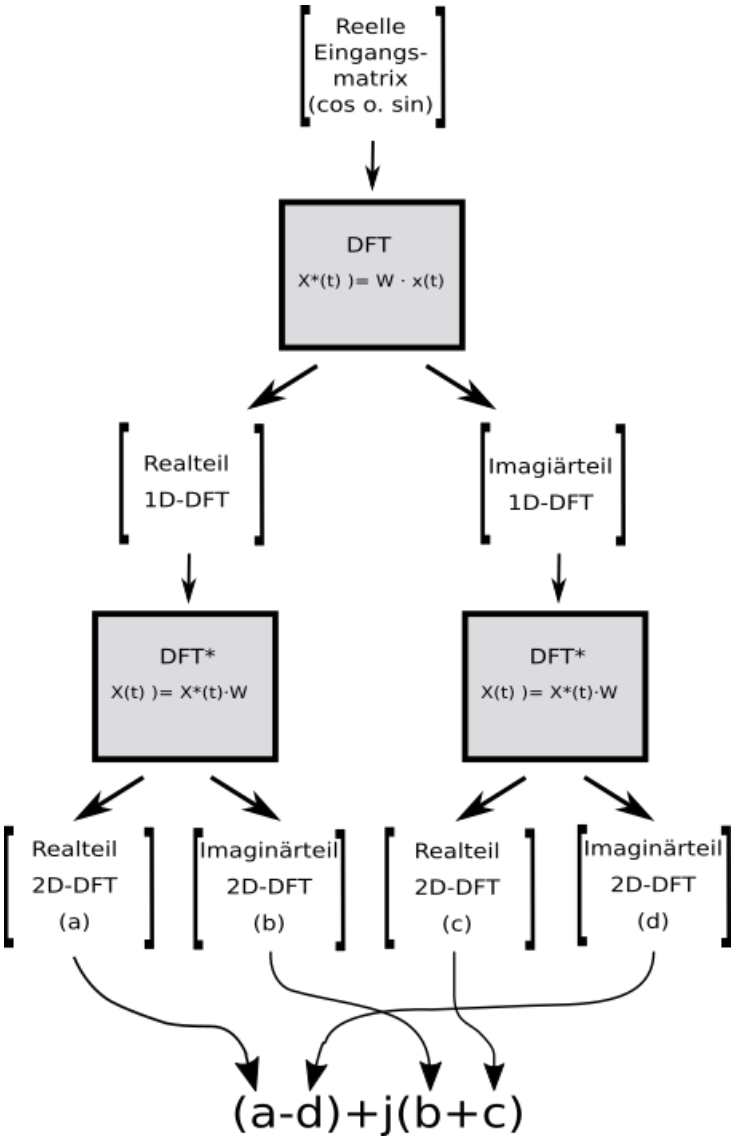


Abbildung 2.4: Veranschaulichung der Berechnung der DFT mit reellen Eingangswerten

Da die gegebenen Eingangssignale aus einer Sinus- und einer Kosinuskomponente bestehen und es sich auf diese Weise als ein komplexes Signal auffassen lässt, kann die komplexe Be-

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6	A4	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4
7	A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3
8	A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2

(a) Realteil

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6	-A4	-B4	-C4	-D4	-E4	-F4	-G4	-H4
7	-A3	-B3	-C3	-D3	-E3	-F3	-G3	-H3
8	-A2	-B2	-C2	-D2	-E2	-F2	-G2	-H2

(b) negierter Imaginärteil

Abbildung 2.5: Redundante Werte der spaltenweisen DFT einer 8x8-Matrix. Der Imaginärteil der redundanten Werte hat denselben Betrag mit negiertem Vorzeichen.

rechnung sowohl bei der 1D-DFT als auch bei der 2D-DFT genutzt werden. Da hierdurch in beiden Fällen eine vollständige Auslastung einer komplexen Berechnung gegeben ist und wie bereits erwähnt, bei der reellen Berechnung zusätzlicher Speicher erforderlich wäre, wird dieses Verfahren angewandt.

2.4.4 Berechnung der Diskreten Fouriertransformation mittels FFT

Die Mathematiker Cooley und Tukey haben einen Algorithmus entwickelt und im Jahr 1965 veröffentlicht, mit dem sich die DFT mit vergleichsweise wenig Multiplikationen und somit deutlich schneller als bei der allgemeinen DFT berechnen lässt. Das Verfahren wird als Fast Fouriertransformation (FFT) bezeichnet. Grundlage ist, dass sich eine DFT in kleinere Teil-DFTs aufspalten lässt, welche durch Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften in der Summe weniger Koeffizienten haben. Üblich ist die Radix-2 FFT, Ausgangspunkt ist also eine DFT mit 2 Eingangswerten. Da mit jeder weiteren Teil-DFT sich die Anzahl der Eingangswerte verdoppelt, eignet sich diese Methode nur für Eingangsvektoren der Größe 2^n. Dieser vermeintliche Nachteil lässt sich durch Auffüllen des Eingangsvektors mit Nullen (Zeropadding) eliminieren. Dies hat zur Folge, dass die Größe des Ausgangsvektors immer eine Potenz von Zwei ist. Die Anzahl der benötigten komplexen Multiplikationen m_{FFT} kann mit der Gleichung (2.20) abgeschätzt werden.

$$m_{FFT} = \frac{N}{2} \log_2(N) \tag{2.20}$$

2.4.5 Inverse DFT

Die inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT) ist die Umkehrfunktion der DFT. Wenn das Eingangssignal $x[n]$ zeitabhängig und somit als $\vec{x}(t)$ geschrieben werden kann, dann handelt es sich bei $X^*[m]$ um dessen Darstellung im Frequenzbereich und kann als $\vec{X^*}(f)$ geschrieben werden. Mit der IDFT ist es möglich, aus der Frequenzdarstellung das Zeitsignal zu errechnen.

$$x\left[n\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X^*[m] \cdot e^{\frac{j2\pi mn}{N}} \tag{2.21}$$

Gleichung (2.21) ist bis auf die Drehrichtung des komplexen Zeigers und die Vertauschten Ein- und Ausgangsvektoren identisch zu Gleichung (2.11).

2.5 Diskrete Kosinus Transformation (DCT)

2.5.1 Verwendung der DCT

Die DCT findet häufig in der Bildverarbeitung Anwendung,

2.5.2 Berechnung der DCT

Für die Berechnung der DCT gibt es verschiedene Varianten, welche sich in der Symmetrie der Ergebnismatrix unterscheiden. (Stimmt das wirklich? was sonst?)

Darüber hinaus wird in der Bildverarbeitung häufig die erste Zeile der Twiddlefaktormatrix mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sowie die gesamte Matrix mit $\sqrt{\frac{2}{N}}$, $N =$ Anzahl Elemente in einer Zeile bzw. Spalte multipliziert.

Da es hier um eine Aufwandsabschätzung geht, wird sich auf die in der Bildverarbeitung gängigste Variante jedoch ohne die skalierenden Faktoren beschränkt. Diese berechnet sich zu

$$X^*[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left[\frac{\pi k}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, N-1 \tag{2.22}$$

Die Twiddlefaktormatrix kann in Matlab mit

$$W = \cos\left(\frac{\pi}{N} \cdot \left([0:N-1]') * ([0:N-1] + \frac{1}{2}\right)\right) \tag{2.23}$$

berechnet werden. Da die diskrete Kosinus Transformation (DCT) anders als die DFT nur auf Kosinusfunktionen und nicht aus einer Kombination aus Sinus und Kosinus, liefert sie rein reelle Werte.

3 Analyse

Im diesem Kapitel werden zunächst die DFT und die DCT in verschiedenen Größen einander gegenübergestellt und eine Entscheidung darüber getroffen, welche sich besser dafür eignet, auf einem ASIC implementiert zu werden. Hierbei spielen in erster Linie die Anzahl unterschiedlicher Faktoren eine Rolle, da für identische Faktoren nur eine Multiplikationseinheit nötig ist. Gleiche Faktoren gehen also mit einer kleineren Chipfläche einher, was zusammen mit der schnellen Berechnung, also geringe Zahl benötigter Takte, die beiden Hauptziele bei der Chipimplementierung darstellen. Als interessante Kandidaten wurden primär die Matrizen mit den Größen 8x8, 9x9 und 15x15 ausgewählt. Die 8x8-Matrix hat dieselbe Anzahl der Sensoren wie das derzeitige Demo-Array, sodass die Eingangswerte direkt transformiert werden können. Die beiden anderen haben aufgrund ihrer ungeraden Zahl ihren Mittelpunkt zwischen den mittleren Sensorelementen, was für die weitere Verarbeitung des transformierten Signals von Bedeutung ist. Die Matrix der Dimension 15x15 lässt sich durch Interpolation der Daten errechnen, während es für die 9x9-Matrix bisher keine Überlegungen gibt, wie sie errechnet werden könnte. Die 12x12 sowie die 16x16 werden zum besseren Einordnen der Bewertungen ebenfalls betrachtet. Darüber hinaus ist aus Abschnitt 2.4.4 bekannt, dass die FFT auf 2^n Elementen basiert und es sich hierbei um ein sehr schnelles und effizientes Verfahren handelt.

Im zweiten Schritt wird untersucht, wie die 8x8-DFT, welche als Favorit aus der ersten Betrachtung herausgegangen ist, optimiert werden kann.

3.1 Bewertung verschiedener DFT- und DCT-Größen

In diesem Abschnitt sollen Erkenntnisse gewonnen werden, auf denen basierend später die Wahl der Transformation und die Größe ihrer Matrix getroffen werden kann. Die Bewertung berücksichtigt wie bereits angedeutet die beiden Eigenschaften Anzahl verschiedener Faktoren und die gesamte Anzahl an Faktoren, wobei die erst genannte größeren Einfluss auf eine negative Bewertung hat, da sich gleiche Faktoren mit Hilfe des Distributivgesetzes ausklammern lassen. Bei den Faktoren wird zwischen solchen unterschieden, die als trivial erachtet werden, da sie nur einer Addition bedürfen (± 1), zusätzlich zur Addition nur eine Division durch 2 erfolgt $(\pm 0,5)$ oder gar keine Berechnung nötig ist (0) und solchen, die als nicht trivial betrachtet werden müssen, da eine Multiplikation unumgänglich ist (beispielsweise $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Begründet werden kann dies mit dem dualen Zahlensystem, da eine Multiplikation mit als trivial eingestuften Werten kein komplexes Schaltnetz erfordert.

Interessant ist die DFT trotz ihrer komplexen Ausgangsmatrix, da sich aus Real- und Imaginärteil direkt der Winkel berechnen lässt. Wie in der Einleitung beschrieben, handelt es sich hierbei um eine der Größen, die im Rahmen dieses Projekts anhand des Sensorarrays ermittelt werden soll.

3.1.1 Bewertung verschiedener DCT-Größen

In Tabelle 3.1 ist die Gegenüberstellung der genannten Größen zu sehen. Für die Bewertung wurde das Matlab-Skript aus Anhang 8.1 geschrieben. Ersichtlich ist, dass die Anzahl verschiedener nicht trivialer Werte etwa der Wurzel aus der Anzahl aller Werte ist. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass im Schnitt jede Zeile einen neuen Faktor einführt. Die Summe nicht trivialer Werte weist bei allen Matrizen mehr als 50% auf.

Tabelle 3.1: Bewertung der DCT-Twiddlefaktor-Matrizen

N	8	9	12	15	16
N×N	64	81	144	225	256
$\sum$ trivialer Werte	8	33	28	63	16
$\sum$ nicht trivialer Werte	56	48	116	162	240
Anzahl verschiedener nicht trivialer Werte	7	7	10	13	15
Verhältnis $\sum$ trivial / $\sum$ nicht trivial	0.143	0.6875	0.2414	0.389	0.067

3.1.2 Bewertung verschiedener DFT-Größen

In der Tabelle 3.2 werden die DFT-Matrizen einander gegenüber gestellt. Anders als die DCT haben die Twiddlefaktormatrix und deshalb auch das Ergebnis der DFT einen Real- und einen Imaginärteil. Die Beurteilung basiert auf dem Matlab-Skript aus Anhang 8.2. Wie zu sehen ist, schneiden vor allem die 8x8- und die 12x12-DFT gut ab. Da letztere nur zum Vergleich mit aufgenommen wurde, ist die 8x8-DFT der klare Favorit, welcher im folgenden Abschnitt genauer betrachtet werden soll.

Tabelle 3.2: Bewertung der DFT-Twiddlefaktor-Matrizen

N	8	9	12	15	16
N×N	64	81	144	225	256
trivial $\Re$	48	45	128	81	128
nicht triv. $\Re$	16	36	16	144	128
triv. $\Im$	48	21	96	45	128
nicht triv. $\Im$	16	60	48	180	128
$\sum$ triv.	96	66	224	126	256
$\sum$ nicht triv.	32	96	64	324	256
Anzahl verschiedener nicht trivialer Werte	1	7	1	13	3
Verhältnis $\sum$ trivial / $\sum$ nicht trivial	3	0,6875	3,5	0,3889	1

3.1.3 Bewertungsfazit

Sowohl die DCT als auch die DFT finden häufig in der Bildverarbeitung Anwendung, so dass bereits diverse Algorithmen für die weiteren Berechnungen vorhanden sind. Beide haben symmetrische Twiddlefaktormatrizen. Der Vorteil der DCT gegenüber der DFT ist, dass sie rein reelle Ergebniswerte liefert. Dem steht als großer Nachteil gegenüber, dass beinahe alle ihrer Twiddlefaktoren zu den nicht trivialen gezählt werden müssen. Des Weiteren verteilen sich ihre Werte auf mehr verschiedene Zahlen, sodass eine effiziente Implementierung gegenüber der DFT, trotz der rein reellen Werte, weniger praktikabel erscheint.

Als Ausschlag gebendes Kriterium wird letztlich der Vorteil eines komplexen Ergebnisses herangezogen, aus dem sich ohne Umwege der Winkel berechnen lässt.

3.2 Genauere Betrachtung der 8x8-DFT

Da die 8x8-DFT als Favorit aus der Betrachtung der Transformationsmatrizen herausgegangen ist, wird diese im nächsten Abschnitt auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Dies wird die Grundlage für eine effiziente Implementierung sein. Die Twiddlefaktormatrix der 8x8-DFT besteht, wie bereits aus Gleichung (2.12) bekannt, aus komplexen Zeigern. Die möglichen Werte sind in Abbildung 3.1 zu sehen, in Abbildung 3.2 sind zur besseren Veranschaulichung die Zeiger auf 8 Einheitskreise aufgeteilt, wobei jeder einen Laufindex (m) des Zeitbereichs abdeckt. In den einzelnen Kreisen sind wiederum alle Laufindizes (n) des Frequenzbereichs zu sehen.

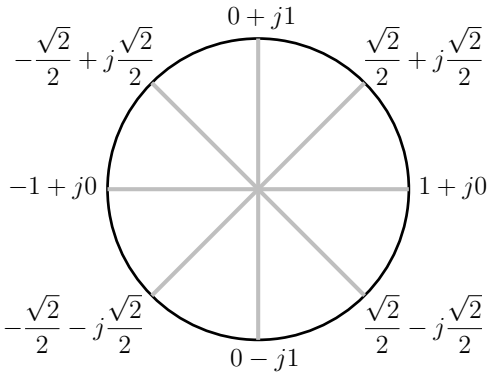


Abbildung 3.1: Einheitskreis mit relevanten Werten der 8x8-DFT

Wie anhand der Grafiken 3.1 zu sehen ist, setzen sich die Faktoren ausschließlich aus den Zahlen ± 1, $\pm\sqrt{2}/2$ und 0 zusammen. Gemäß der Definition für nicht triviale Werte aus Abschnitt 3.1 zählt ausschließlich der letztgenannte zu diesen. Ebenfalls ist ersichtlich, dass der Betrag aller Zahlen immer 1 ist. In Abbildung 3.3 ist die Twiddlefaktormatrix auf zwei Matrizen aufgeteilt, wobei die Zahlen durch Farben repräsentiert werden. Die linke enthält alle realen Anteile, die rechte alle imaginären. Anhand der Grafik lässt sich gut die Symmetrie erkennen, mit der die Werte auftreten. Diese Grafik soll als Ausgangspunkt für die folgende Betrachtung

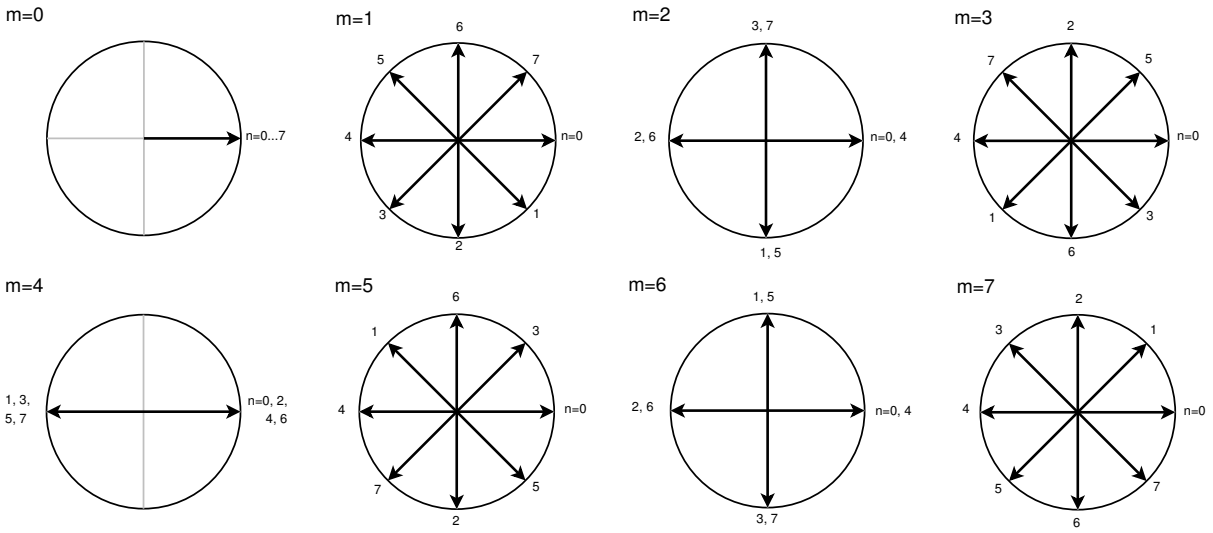


Abbildung 3.2: Twiddlefaktoren der 8×8-Matrix, aufgeteilt auf die Laufindizes m und n. m bezieht sich auf das Element im Ausgangsvektor $\vec{X}$, n auf den Eingangsvektor $\vec{x}$. Siehe auch Gl. (2.11).

dienen. Es lässt sich auch gut erkennen, das die Kreise aus Abbildung 3.2 die Werte der korrespondierenden Zeilen wiederspiegeln.

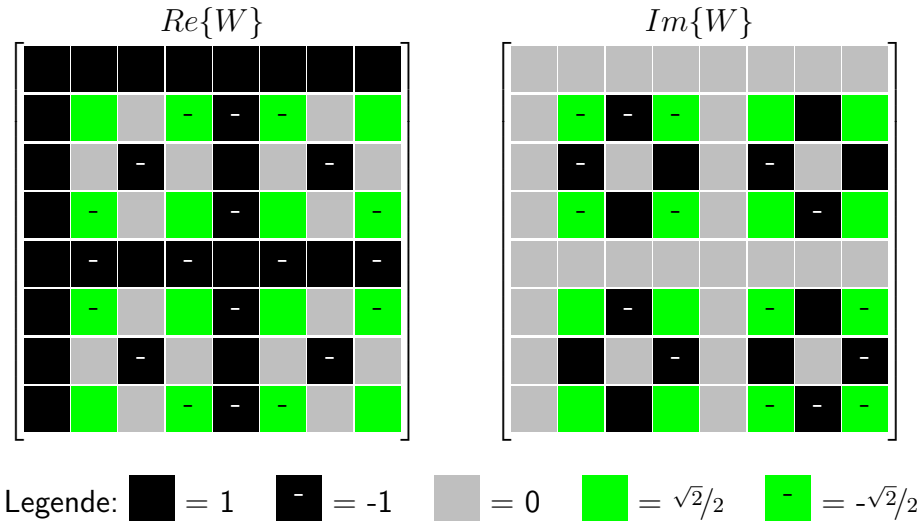


Abbildung 3.3: Matrix-Darstellung der 8x8-DFT-Twiddlefaktoren aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil.

Auf den ersten Blick sticht die erste Zeile hervor, da sie im Realteil nur aus positiven Einsen und im Imaginärteil nur aus Nullen besteht. Mit der fünften Zeile verhält es sich ähnlich. Anders ist hier, dass sich positive und negative Einsen abwechseln. In die gleiche Gruppe können noch die dritte und die siebte Zeile zusammengefasst werden. Im Unterschied zu den vorigen können

hier aber auch die Imaginärteile eine positive bzw. negative Eins haben. Entsprechend ist dann der Realteil Null. Hier müssen zur Berechnung des Ergebnisses also auch Imaginärteile der Eingangsmatrix mit einbezogen werden. Für die vier bisher betrachteten Zeilen gilt, dass zur Berechnung eines Elements der Ergebnismatrix ausschließlich Additionen oder Subtraktionen erforderlich sind.

Alle Werte, die bis jetzt vorkamen, haben entweder nur einem Real- oder einem Imaginärteil. Dies hat den Vorteil, dass weniger Berechnungen erfolgen müssen, da von einer vollständig komplexen Multiplikation nur eine Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer rein reellen (bzw. imaginären) übrig bleiben. Auf diese Weise reduziert sich der in Gleichung (2.1) gezeigte Aufwand zu dem in Gleichung (3.1). Darüber hinaus sind bei den bisherigen Zahlen keine Multiplikationen nötig, weshalb sich der Rechenaufwandt auf den Additionsteil der Gleichung beschränkt.

$$\begin{aligned} e + jf &= a \cdot (c + jd) \\ &= a \cdot c + j(a \cdot d) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Für die übrigen vier Zeilen gelten die bisherigen Beobachtungen nicht oder nur teilweise, weshalb sie nicht zur ersten Gruppe gezählt werden können. Dafür haben sie aber alle gemein, dass die Hälfte der Faktoren sowohl einen Real- als auch einen Imaginärteil besitzen, welche symmetrisch angeordnet sind. Für diese vier Faktoren sind deshalb jeweils die gesamten vier Multiplikationen aus Gleichung 2.1 nötig.

Eine besondere Eigenschaft ist, dass der Faktor für nicht triviale Multiplikationen im Real- und Imaginärteil zumindest vom Betrag her identisch sind. Dies liegt daran, dass der Einheitskreis in acht Teile geteilt wird und für beispielsweise $\frac{2 \cdot \pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ der Sinus- und Kosinuswert identisch sind. Hieraus resultiert, dass die Hälfte der Berechnungen der nicht trivialen Werte, die für die reelle Matrix gemacht werden müssen, direkt für den imaginären Anteil übernommen werden könnten. Die andere Hälfte müsste lediglich negiert werden. Deshalb kann das berechnete Verhältnis von 3 in Tabelle 3.2 als deutlich höher angenommen werden.

3.3 Einordnung des Rechenaufwands

Nachdem nun die Symmetrien der 8x8-Twiddlefaktormatrix der DFT analysiert wurden, soll eine Abschätzung des Rechenaufwands erfolgen. Hierbei wird in vier Kategorien unterschieden. Zum einen werden die erforderlichen Berechnungen bezüglich der 8x8-Twiddlefaktormatrix einerseits für reelle und andererseits für komplexe Eingangswerte betrachtet. Als dritte Variante soll aufgezeigt werden, wie viele Multiplikationen nötig wären, wenn die Twiddlefaktormatrix als variabel angenommen wird. Als letztes soll der Butterfly-Algorithmus auf die Anzahl der benötigten Multiplikationen hin untersucht werden.

Abschließend wird die Bildung des Zweierkomplements der Konstantenmultiplikation unter dem Gesichtspunkt der benötigten Zeit und Fläche gegenüber gestellt. Dies geschieht vor dem Hintergrund, dass je nach Implementierung zwar weniger Multiplikationseinheiten, dafür aber zusätzliche Einheiten zur Negierung von Werten existieren müssen.

Da die Multiplikationen im Normalfall als bedeutend aufwändiger angenommen werden müseen, wird sich in der folgenden Betrachung hierauf beschränkt. Tatsächlich ist es so, dass die Multiplikationen mit einer Konstanten über ein Schaltnetz innerhalb eines Taktes erfolgen können und somit gerade bei wenigen Multiplikationen die Anzahl der Additionen an Bedeutung gewinnt. Trotzdem erlaubt der Vergleich eine gute Abschätzung.

3.3.1 8x8-DFT mit komplexen Eingangswerten

Die Sensormatrix liefert für jedes Sensorelement einen Sinus- und einen Kosinuswert. Diese können für die Berechnung der DFT zu einer komplexen Zahl zusammengefasst werden $(\cos(x) + j \cdot \sin(x)$. Auf diese Weise lässt sich die Berechnung mathematisch kompakter durchführen.

Die Twiddlefaktormatrix der 8x8-DFT weist, wie in Abb. 3.3 zu sehen, insgesamt nur 16 Faktoren auf, die einen Real- und einen Imaginärteil besitzen. Da diese Faktoren sowohl für den Real- als auch den Imaginärteil betragsmäßig alle denselben Wert haben, lässt er sich ausklammern. Bezogen auf die erforderlichen Additionen verschiebt sich so lediglich deren Durchführung auf einem früheren Zeitpunkt. Man könnte sich die Twiddlefaktormatrix also als Matrix mit nur noch einem einzigen komplexen Faktor in den Zeilen 2, 4, 6, 8 vorstellen. Trotz des selben Betrags beider Anteile müssen beide vorhanden sein, sonst würden die Sinusanteile keinen Einfluss in den Realteil des Ergebnisses haben. Da alle Zeilen der Twiddlefaktormatrix mit allen Spalten der Eingangsmatrix multipliziert werden müssen, ergeben sich $4 \cdot 8 = 32$ Multiplikationen für Real bzw. Imaginärteil der Ergebnismatrix. Zusammen sind also 64 reelle Multiplikationen für die 1D- bzw. 128 2D-DFT nötig.

3.3.2 8x8-DFT mit reellen Eingangswerten

Anders als bei der Multiplikation komplexer Eingangswerte sind bei der getrennten Berechnung von Real- und Imaginärteil ungleich viele positive und negative Faktoren je Zeile vorhanden, sodass zu diesem Zeitpunkt davon ausgegangen werden muss, dass eine Negation mancher Werte erforderlich sein wird. Wie ein Vergleich der Gleichungen (2.1) und (3.1) zeigt, entfallen die Hälfte der Multiplikationen, wenn die Eingangswerte rein reell sind. Da der Imaginärteil der Eingangswerte aber getrennt berechnet wird, treten diese Multiplikationen an anderer Stelle wieder auf. Hier findet also keine Ersparnis statt. Allerdings kommen bei rein reellen Eingangswerten beispielsweise keine j^2-Komponenten zustande, welche ausmultipliziert und anschließend aufaddiert werden müssten. Dies führt zu der in Abschnitt 2.4.3 gezeigten Eigenschaft, dass die letzten drei Zeilen für den Realteil des Ergebnisses direkt bzw. für den Imaginärteil negiert aus den Zeilen 2-4 übernommen werden können. Spätestens an dieser Stelle müssen also Negationen erfolgen. Da zu den drei Zeilen aus Abb. 2.4 auch die beiden gehören, in denen Multiplikationen durchgeführt werden müssen, entfallen bei reellen Eingangswerten die Hälfte der Multiplikationen im Vergleich zu komplexen Eingangswerten, weshalb für die 1D-DFT nur 32 bzw. für die 2D-DFT nur 64 Multiplikationen nötig sind.

Interessant ist dieser Ansatz dann, wenn entweder die Recheneinheit so klein wie irgend möglich gehalten werden soll und Real- und Imaginärteil der Eingangsmatrix nacheinander

berechnet werden können oder die Berechnung äußerst schnell erfolgen muss. In beiden Fällen wird im Vergleich zur Berechnungen mit komplexen Eingangswerten deutlich mehr Speicher benötigt. Ingesamt übersteigt bei diese Art der Berechnung der Flächenbedarf der gesamten Einheit den der komplexen Variante. Auch die Leitungen um den Speicher anzubinden dürfen nicht vernachlässigt werden.

3.3.3 Direkte Multiplikation zweier 8x8 Matrizen mit komplexen Werten

Diese Art der Implementation hätte den Vorteil, dass sich zu einem späteren Zeitpunkt für ein anderes Transformationsverfahren entschieden und einfach deren Twiddlefaktoren geladen werden könnten. Da keinerlei Optimierungen möglich sind, ist hier auch eine flexible Größe denkbar. Um einen Vergleich zu ermöglichen, wird die Multiplikation zweier 8x8 Matrizen betrachtet. Die in Abschnitt 2.2.2 erläuterte Matrixmultiplikation bedarf bei einer 8x8 Matrix je Element der Ausgangsmatrix 8 komplexe Multiplikationen. Für die $8{\cdot}8 = 64$ Elemente werden deshalb 512 komplexe Multiplikationen benötigt. Da es sich sowohl bei den Eingangswerten als auch bei der Twiddlefaktormatrix um komplexe Zahlen handelt, sind, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, insgesamt $512 \cdot 4 = 2048$ Multiplikationen nötig. Für die 2D-DFT sind mit 4096 entsprechend doppelt so viele Multiplikationen nötig.

3.3.4 Betrachung des Butterfly-Algorithmus für 8 Eingangswerte

Abbildung 3.4 illustriert die FFT anhand eines Eingangsvektors mit acht Werten. Um diesen Algorithmus anwenden zu können ist es erforderlich, dass die Werte im Eingangsvektor in umgekehrte Bitreihenfolge getauscht werden (bitreversed order). Dies geschieht nach dem Muster, dass die Indizes der Eingangswerte, wie üblich bei 0 beginnend, binär dargestellt werden. Nun wird die Reihenfolge der Bits getauscht. Auf diese Weise tauschen bei einem 8-Bit Vektor die Elemente 2 und 5 sowie 4 und 7 ihre Position. Andernfalls wären die Ergebnisse in vertauschter Reihenfolge. Anhand der Grafik lässt sich erkennen, dass die DFT in mehrere Stufen aufgeteilt wird.

Aus Gleichung (2.12) ist bekannt, dass die Variablen der Twiddlefaktorberechnung die Indizes der Eingangs- sowie Ausgangsvektoren sind. Hieraus lässt sich bereits erkennen, dass die gesamte Twiddlefaktormatrix N verschiedene komplexe Werte enthält. Dies wird auch aus Abbildung 3.1 am Beispiel für N=8 ersichtlich. Darüber hinaus lässt sich erkennen, dass die komplexen Zeiger den Einheitskreis in N Bereiche mit einem Winkel von $\frac{2\pi}{N}$ unterteilen. Bekannt ist ebenfalls, dass der erste Wert immer die 1 ist. Daraus ergeben sich bei einer DFT mit 2 Eingangswerten die Twiddlefaktoren 1 und -1, so dass eine Multiplikation entfällt. Dies bildet die erste Stufe.

Ähnlich verhält es sich mit der zweiten Stufe. Hier ergeben sich die Werte $1, -j, -1, j$, was ebenfalls bedeutet, dass keine Multiplikation erfolgen muss. Der nächste Schritt zur Reduzierung des Rechenaufwandes ergibt sich aus der Erkenntnis, dass die Werte $exp(-i2\pi mn/N)$ und $exp(-i2\pi\frac{mn}{2}/N) = -exp(-i2\pi mn/N)$ lediglich ein negiertes Vorzeichen haben. Auch

dies lässt sich der Abb. (3.1) entnehmen. Auf diese Weise fällt der Faktor $-j$ weg. Dies bedeutet, dass sich so die Hälfte der Multiplikationen einsparen lässt.

Bei der dritten Stufe gibt es wegen der acht Eingangswerte theoretisch auch acht Faktoren. Aus den genannten Symmentriegründen halbiert sich die Anzahl. Wiederum die Hälfte davon sind komplexe Faktoren, die übrigen erfordern keine Multiplikation. Dies bedeutet, dass zwei komplexe Multiplikationen durchgeführt werden müssen, was insgesamt acht reellen Multiplikationen entspricht.

Wie gezeigt wurde, werden nur 2 komplexe Multiplikationen benötigt statt der nach Gleichung (2.20) geschätzten $^8/_2 \cdot 3 = 12$. So ergeben sich für alle 8 Spalten einer 8x8-Matrix tatsächlich nur $2 \cdot 8 = 16$ komplexe Multiplikationen. Für die 2D-DFT sind somit lediglich 32 komplexe, beziehungsweise 128 reelle Multiplikationen erforderlich.

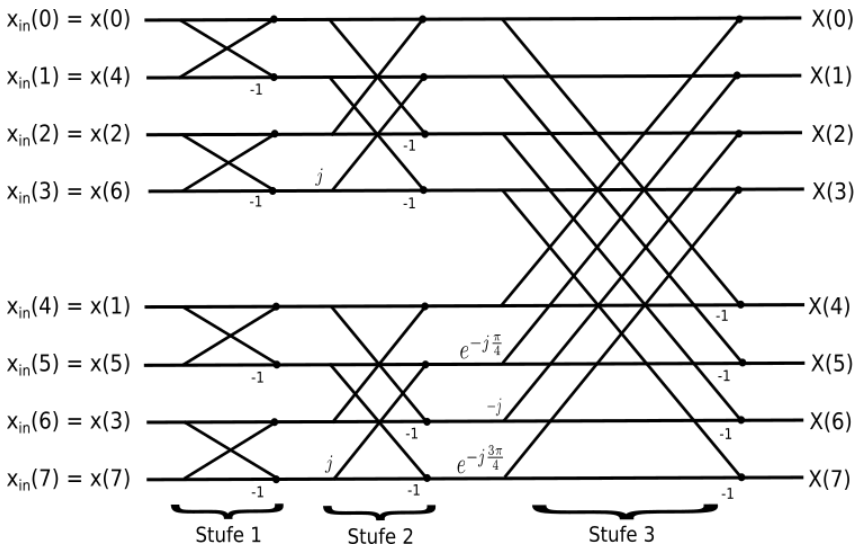


Abbildung 3.4: Berechnungsschema der DFT mit 8 Eingangswerten nach dem Butterfly-Verfahren

3.3.5 Fazit der Berechnungs-Gegenüberstellungen

Es konnte gezeigt werden, dass die optimierte Matrixmultiplikation mit komplexen Eingangswerten die gleiche Anzahl benötigter Multiplikationen wie die FFT hat. Das liegt daran, dass es vom Betrag her nur einen einzigen Faktor gibt. Dieser tritt nur in der Hälfte der Zeilen der Twiddlefaktormatrix auf und kann wegen des Distributivgesetzes ausgeklammert werden. Gleiches gilt für die Berechnung mit rein reellen Eingangswerten, hier kann wegen der Symmetrieeigenschaften zusätzlich noch die Hälfte der Multiplikationen eingespart werden. Bei Twiddlefaktormatrizen mit mehreren als nicht trivial einzustufenden Faktoren ist davon auszugehen, dass die FFT das effizientere Verfahren darstellt.

Als Vorteil kann bei der Multiplikation mit komplexen Eingangswerten gesehen werden, dass die Programmierung der 2D-DFT als einfacher angenommen werden kann. Begründet wird dies damit, dass es möglich ist, eine einzige Einheit für die Berechnung der 1D-DFT und der 2D-DFT verwenden zu können.

Die Matrixmultiplikation mit ladbaren Faktoren ist so weit abgeschlagen, dass sie nicht ansatzweise in Betracht gezogen werden kann. Sie verdeutlicht dafür sehr gut, wie sehr sich Berechnungsaufwand einsparen lässt, wenn sich für ein dediziertes System entschieden und dieses optimiert wird. Falls also zwei verschiedene Transformationsverfahren auf einem Chip vorhanden sein sollen, wäre es immer noch effizienter beide optimiert zu implementieren. Abschließend werden in Tabelle 3.3 die Anzahl benötigter reeller Multiplikationen der verglichenen Methoden aufgeführt.

Tabelle 3.3: Auflistung benötigter reeller Multiplikationen der verschiedenen Methoden für die 2D-DFT

Methode	Anzahl reeller Multiplikationen
komplexe Eingangswerte	128
reelle Eingangswerte	64
ladbare Matrixmultiplikation	4096
FFT	128

4 Entwurf

In diesem Kapitel wird die Theorie aus dem Kapitel Analyse in ein funktionsfähiges VHDL-Programm mit den geforderten Eigenschaften umgesetzt. Es werden weitere Vorüberlegungen getroffen, die sich speziell an der Implementation als Hardwarekomponente orientieren. Wenn die Komponente Teil eines Chips werden würde, wurde dieser in 350 nm Technologie gefertigt werden. Entprechend beziehen sich die Größenangaben der Syntheseergebnisse auf diesen Prozess. Der Auftragsfertiger, bei dem der Chip in Auftrag gegeben werden würde, ist Austria Micro Systems (AMS). Dementsprechend sind die Standarzellen von dieser Firma.

4.1 Projekt- und Programmstruktur

In diesem Abschnitt werden Entscheidungen zum Einhalten der Bitbreite der Vektoren, den verwendeten VHDL-Bibliotheken und der Aufteilung des Programmcodes zusammengetragen.

4.1.1 Vorüberlegungen aus Hardwaresicht

Für die binäre Darstellung der Eingangswerte sind zwölf Bit vorgesehen, wovon zehn auf die Nachkommastellen entfallen. Bei den beiden Rechenoperationen Addition und Subtraktion entstehen keine weiteren Nachkommastellen. Je nach Vorzeichen und Zahlenwert kann es jedoch sein, dass der Vorkomma-Wertebereich von zwei Bit nicht mehr ausreicht. Aus diesem Grund muss der Zielvektor immer um ein Bit breiter sein - von 12 Bit ausgehend also 13 Bit. Da dies bei jeder Addition geschieht, würde die benötigte Bitbreite ohne Gegenmaßnahmen immer weiter anwachsen. Die einfachste Möglichkeit dies zu verhindern ist die Divison eines Summationsergebnises durch Zwei. So kann beliebig oft auf den selben Vektor eine Addition ausgeführt werden, ohne einen Überlauf zu provozieren. Die Kehrseite dieser Vorgehensweise ist, dass durch den Bitshift die Genauigkeit des Ergebnisses sinkt. Auf die Folgen wird in Abschnitt 2.1.4 kurz eingegangen. Für die verlustfreie Multiplikation zweier Zahlen wird sogar die doppelte Breite des Vektors benötigt. Hier kann sich der Bitbereich vor und nach dem Komma ändern.

Wenn diese Maßnahme jedoch nicht ergriffen und alle zusätzlichen Bits beibehalten würden, müsste mit etwa 70 Bit je Ausgangswert gerechnet werden. Sollte wenigstens auf die bei der Multiplikation entstehenden Nachkommabits verzichtet werden, würde die benötigte Bitbreite immer noch bei über 40 liegen. Auch dies würde noch eine immense Vergrößerung der Schaltung alleine schon wegen der zusätzlichen Leitungen bedeuten. Desweiteren würden sich hierdurch die benötigten Zeiten aller Berechnungen erhöhen, was eine langsamere Taktfrequenz oder eine eine Unterteilung in Teilschaltnetzte und somit in der Summe mehr Takte mit sich ziehen würde.

4.1.2 VHDL-Bibliotheken

Cadence unterstützt die VHDL-Versionen von 1987 und 1993. Enthalten ist unter anderem die Bibliothek `std_logic_arith`, welche von der Firma Synopsys entwickelt wurde. Hierbei handelt es sich um die erste Bibliothek für mathematische Berechnungen wie Addition und Multiplikation mit VHDL, weshalb sie eine große Verbreitung erlangt hat. Die Bibliothek basiert auf der vom Konsortium des Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) spezifizierten Bibliothek `std_logic`. Anders als angenommen werden könnte, handelt es sich hierbei zwar um einen weitverbreiteten aber eben keinen offiziellen Standard. Ähnliches gilt auch für die Bibliotheken `std_logic_unsigned` und `std_logic_signed`. Leider hat Synopsys nicht konsequent die strenge Typisierung von VHDL eingehalten, weshalb es bei überladenen Funktionen möglich ist, die Datentypen `signed` und `unsigned` zu mischen, was zu einem unerwarteten Verhalten führt. Aus diesem Grund wird in diesem Projekt die Bibliothek `numeric_std` verwendet, welche einen vergleichbaren Funktionsumfang bietet, vom IEEE-Konsortium spezifiziert wurde und dieses Problem nicht aufweist. Zu ihrem Umfang gehört auch die `resize`-Funktion, welche es ermöglicht einen Vektor vorzeichengerecht zu erweitern.

Für den Standardsatz der Datentypen zu dem beispielsweise `std_logic` gehört, wird `std_logic_1164.all` verwendet. Um Textdateien lesen und schreiben zu können, wird die Bibliothek `std.textio.all` sowie `std_logic_textio.all` benötigt.

4.1.3 Vorüberlegungen zum Programmablauf

Über die Parallelität der Berechnungen wird auch bei gleicher Funktion der Komponenten maßgeblich die benötigten Takte der Berechnung der 2D-DFT sowie die benötigte Logik und deren Größe bestimmt. Um einen guten Kompromiss aus benötigter Zeit und Chipfläche zu erzielen, sollen Real- und Imaginärteil die die Berechnung der Matrixelemente jeweils gleichzeitig, die einzelnen Elemente aber nacheinander berechnet werden. Darüber hinaus ist geplant, die selbe Recheneinheit der 1D-DFT auch für die 2D-DFT zu nutzen.

4.1.4 Struktureller Aufbau

Das Programm wurde, wie bei umfangreicheren Projekten üblich, auf verschiedene Dateien aufgeteilt. Alle Konstanten werden in einem Paket deklariert, welches in allen anderen Dateien eingebunden werden muss. So ist es möglich z.B. die Bitbreiten eines Vektors an einer zentralen Stelle zu setzen. Diese liegen für Eingangswerte bei 12, Summen 13 und Produkte 26 Bit. Da alle anderen Dateien auf diese Konstanten zugreifen, muss dieses Paket zuerst kompiliert werden. In einem weiteren Paket findet die Deklaration der eigenen Datentypen statt. Hier sei insbesondere die 8x8 Matrix mit ihren 12 Bit Vektoren vom Typ `signed` erwähnt, welche für die eingelesenen Daten, die Zwischenergebnisse (1D-DFT) sowie die Ausgangswerte verwendet wird. Da die weiteren Dateien diese Datentypen verwenden, ist es erforderlich, dass dieses Paket als zweites kompiliert wird. Alle weiteren Pakete können in beliebiger Reihenfolge kompiliert werden, da sie erst später ineinander greifen. Zum Testen bzw. für die Simulation müssen Eingangswerte geladen werden. Hierfür wurde die Komponente `read_input_matrix` geschrieben. Die Werte müssen in einer Datei mit dem Namen `InputMatrix_komplex.txt`

stehen und im dualen Zahlenformat vorliegen. Die Datei besteht aus 16 Spalten und acht Zeilen, in den leerzeichengetrennten Spalten stehen immer im Wechsel der Real- und der Imaginärteil einer Zahl. Die berechneten Ergebnisse werden mit der Komponente `write_results` im gleichen Format in eine Datei geschrieben, wie sie in der Input-Datei stehen.

4.2 Entwicklung der 2D-DFT-Komponente

Bis die Berechnung der 2D-DFT realisiert war, wurden verschiedene Stadien durchlaufen. Im ersten Schritt wurde die 1D-DFT implementiert, wobei die im Kapitel Analyse behandelten Optimierungsmöglichkeiten näher betrachtet werden. Desweiteren wird das Berechnungsschema der geraden sowie ungeraden Zeilen der Twiddlefaktormatrix und die daraus resultierende Anzahl an Takten vorgestellt. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Umsetzung der 2D-DFT auf Basis der vorhandenen 1D-DFT-Einheit. Abschließend wird gezeigt, dass es auf einfache Weise möglich ist, die vorhandene DFT-Einheit um die Funktion der IDFT zu ergänzen.

4.2.1 Optimierte 8x8 DFT als Matrixmultiplikation

Anfangs wurde angenommen, dass Multiplikationen mit den Twiddlefaktoren ± 1 und $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ durchgeführt werden müssen. Dass bei einer optimierten 8x8-DFT wegen des explizieten ausprogrammierens der Berechnungen die Multiplikation mit ± 1 wegfällt, war schnell klar. Wegen der betragsmäßig identischen nicht trivialen Twiddlefaktoren wurde zu Beginn der Entwicklung in Betracht gezogen das 1er-Komplement zu verwenden, da sich negative und positive Zahlen mit gleichem Betrag nur durch ihr höchstwertigstes Bit unterscheiden. Auf diese Weise könnte das selbe Resultat für den Imaginär- wie für den Realteil verwendet werden. Das Vorzeichen würde sich über eine einfache XOR-Verknüpfung beider MSB der Multiplikanden ergeben. Diesem Vorteil steht jedoch eine aufwändigere Subtraktion (bzw. Addition negativer Zahlen) gegenüber. Der zusätzliche Aufwand entspricht etwa dem der Negierung von Zahlen im 2er-Komplement. Aus diesem Grund wurde sich hierfür entschieden.

Bei der genaueren Betrachtung der Twiddlefaktormatrix konnte in Abschnitt 3.3.1 festgestellt werden, dass, abgesehen von der ersten, in jeder Zeile gleich viele Additionen wie Subtraktionen vorhanden sind. Dies trifft auch ausschließlich auf die jeweils vier nicht trivialen Faktoren der geraden Zeilen zu. Dies lässt sich anhand des Einheitskreises in Abb. 3.1, der Abbildung 3.2 und der grafischen Darstellung der Twiddlefaktormatrix in Abb. 3.3 nachvollziehen. Darüber hinaus ist ersichtlich, dass für komplexe Eingangswerte in den Zeilen 2, 4, 6 und 8 zwölf und in den übrigen acht Multiplikationen erfolgen müssen. Dies kann anhand der Gleichungen (2.1) und (3.1) nachvollzogen werden.

Aus Abschnitt 2.2.2 ist bekannt, dass bei einer Matrixmultiplikation Elemente multipliziert und anschließend die Ergebnisse aufsummiert werden. Hieraus kann abgeleitet werden, dass es das Assoziativgesetz erlaubt die Eingangswerte umzusortieren, wenn auch die Twiddlefaktoren entsprechend umsortiert werden. Geschickt aufgeteilt auf triviale und nicht triviale Berechnungen, ist es dadurch möglich auf das Invertieren der Eingangswerte, also den hierfür benötigten Takt und die Inverter zu verzichten und um nur noch die Multiplikation mit $+\frac{\sqrt{2}}{2}$ durchführen

zu müssen. Letztere muss wegen des Distributivgesetzes nur ein Mal pro Zeile und Real- bzw. Imaginärteil erfolgen.

Darüber hinaus minimiert sich bei dieser Anordnung das Risiko eines Überlaufs, da zumindest im ersten Schritt eine Subtraktion erfolgt. In den weiteren muss unweigerlich die Akkumulation stattfinden. Wegen der Einsen in der ersten Zeile der Twiddlefaktormatrix müssen für die erste Zeile der Ausgangsmatrix alle Spalten einmal aufsummiert werden. Dies hat zur Folge, dass ein großer Wert entstehen kann, welcher Maßgebend für die Anzahl der Vorkommabits ist. Aus diesem Grund wird zur Sicherheit, der einheitlichen Skalierung der Zahlen und der Einfachheit wegen nach jeder Addition oder Subtraktion das Ergebnis durch einen Bitshift halbiert. Es sei an dieser Stelle lediglich angemerkt, dass über die Eingangswerte die Annahme getroffen werden kann, dass aufeinanderfolgende Werte das selbe Vorzeichen haben oder, nach Abzug eines evtl. vorhandenen Offsets, nahe Null sind. Basierend auf diesem Wissen ist es denkbar die Wahrscheinlichkeit weiter zu reduzieren, dass es zu einem Überlauf kommt. Wegen der Null im Imaginärteil der ersten und fünften Zeile der Twiddlefaktormatrix sind auch alle Imaginärteile dieser Spalte der Ausgangsmatrix Null. Wie in Abschnitt 2.1.4 erwähnt, ist die Optimierung bezüglich numerischer Ungenauigkeiten nicht Gegenstand dieser Arbeit.

4.2.2 Berechnungsschema und benötigte Takte der Ergebnisse

In Abbildung 4.1 ist die Berechnung der ungeraden Spalten der Eingangsmatrix am Beispiel der ersten zu sehen. Für die 3. und 7. müssen die Eingangswerte so angeordnet werden, dass die Vorzeichen, beginnend mit einer Subtraktion, immer im Wechsel auftreten. Für die 5. Zeile ist dies bereits gegeben. r steht für den Realteil der Eingangswerte, i stünde für dessen Imaginärteil. Der Index gibt die Postition des Elements in einer Spalte an, angewandt werden muss die Berechnung auf alle Spalten.

1. Spalte: $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$

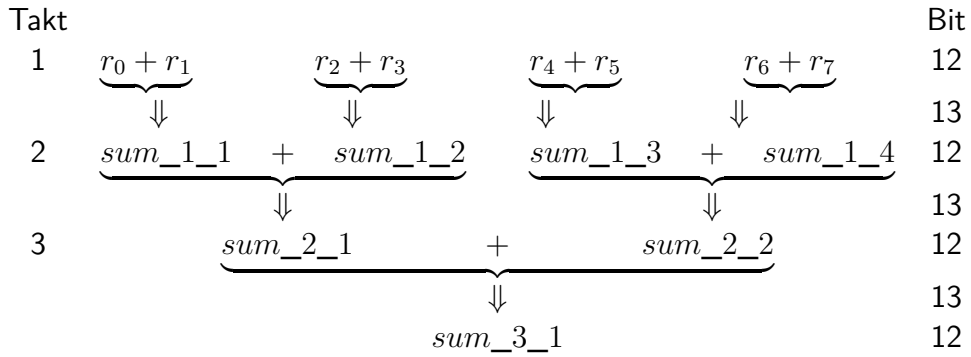


Abbildung 4.1: Vorgehensweise der Akkumulation der ungeraden Spalten der Eingangswerte.

Wie der linken Spalte der Abb. 4.1 zu entnehmen ist, werden 3 Takte für die Berechnungen der Werte aus den ungeraden Spalten der Eingangsmatrix benötigt. Der 1. Takt für Additionen bzw. Subtraktionen und 2. sowie 3. Takt für das Aufsummieren. Der Bitvektor des Ergebnisses

ist zwar 12 Bit breit, aber beim letzten Bitshift von 13 auf 12 werden nur 11 Bit übernommen. Es wird alo ein doppelter Bitshift vollzogen. Dies erfolgt, damit sowohl in den geraden als auch den ungeraden Zeilen gleich viele Bitshifts erfolgen und die Werte somit identisch skaliert sind.

Die Berechnung der geraden Zeilen wird in Abbildung 4.2 am Beispiel der zweiten Zeile gezeigt. r steht wieder für den Realteil der Eingangswerte, i für dessen Imaginärteil. Auch hier ist der linken Spalte die Anzahl der benötigten Takte zu entnehmen. In diesem Fall dauert die Berechnung 5 Takte. Diese setzen sich zusammen aus ein Takt für Additionen bzw. Subtraktionen, 2.-3. sowie 5. Takt für das Aufsummieren und der 4. Takt für die Multiplikationen. In Abschnitt 4.3.1 wird gezeigt, dass die Multiplikation mit einer Konstanten innerhalb eines Taktes mit einem Schaltnetz erfolgen kann.

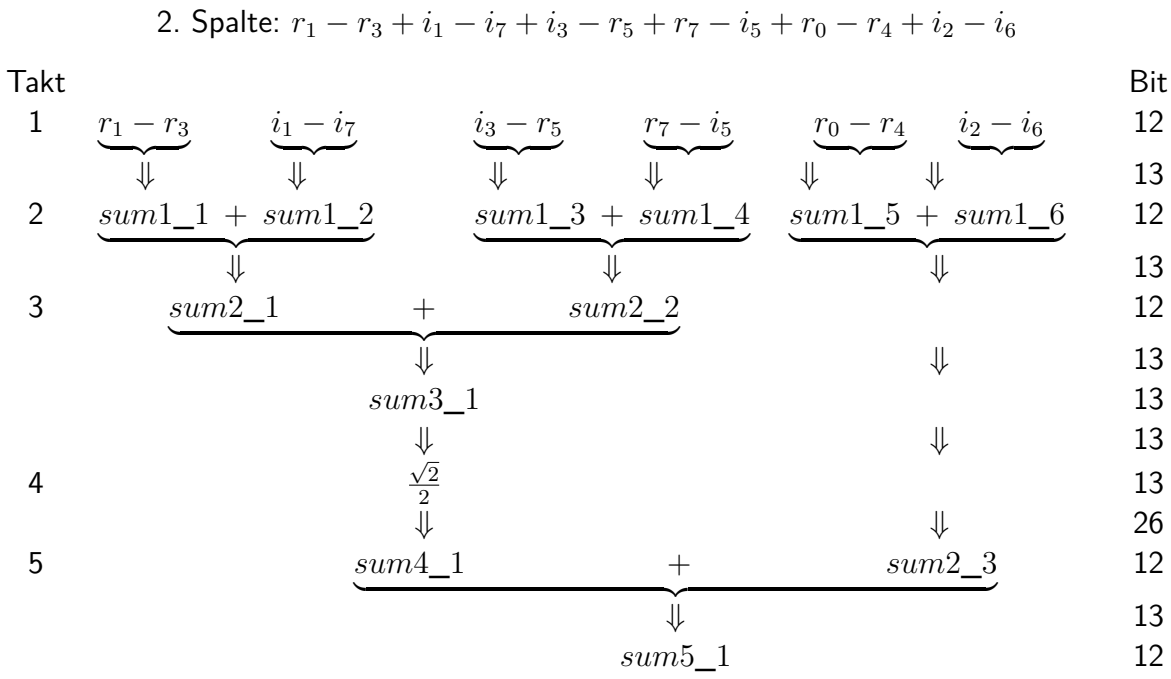


Abbildung 4.2: Vorgehensweise der Akkumulation der geraden Spalten der Eingangswerte.

Der rechten Spalte aus Abb. 4.2 kann entnommen werden, dass sich durch die Addition eine Bitbreitenerweiterung um eins bzw. bei der Multiplikation eine Verdoppelung ergibt. Durch die hintereinander erfolgenden Bitshifts wird durch 2^{n_B} geteilt, wobei n_B die Anzahl der Bitshifts ist. Den beiden Darstellungen der Summationen kann entnommen werden, dass, um ein Überlaufen des Bitvektors zu vermeiden es nötig ist, drei respektive vier Bitshifts durch zu führen. Wie bereits erläutert erfolgt bei den ungeraden Zeilen abschließend ein doppelter Bitshift. Auf diese Weise ergibt sich für die 1D-DFT, dass das Ergebnis um den Faktor 16 kleiner ist. Da beim zweiten Durchlauf, um die 2D-DFT zu berechnen, ebenfalls durch 16 geteilt wird, ergibt sich insgesamt eine Division durch $2^{2 \cdot 4} = 256$.

Aus den Abbildungen 4.1 und 4.2 können die Takte, die zur Berechnung der 1D- bzw. 2D-DFT benötigt werden, abgeleitet werden. Für ungeraden Zeilen sind je Element drei Takte nötig und mit acht Elementen pro Zeile und vier ungeraden Zeilen errechnen sich so 3·8·4=96 Takte. Analog errechnet sich für die geraden Zeilen mit je fünf Takten pro Element 5·8·4=160

Takte. In der Summe ergeben sich so 96+160=256 Takte für die 1D-DFT. Da die 2D-DFT ohne Takte fürs Umspeichern oder ähnliches sofort im Anschluss berechnet werden kann, verdoppelt sich die Anzahl der Takte auf 512 für die vollständige Berechnung.

Tabelle 4.1: Benötigte Takte für die komplexe DFT

Zeile	Additionen pro Element (N)	Takte pro Element ($\log_2(N)$)	Takte für Multiplikation	Summe der Takte
1	8	3	0	3
2	12	3,6	1	5
3	8	3	0	3
4	12	3,6	1	5
5	8	3	0	3
6	12	3,6	1	5
7	8	3	0	3
8	12	3,6	1	5

Anhand der rechten Spalte ergeben sich so (3+5)·4·8 = 256 Takte sowohl für den Real- als auch den Imaginärteil der komplexen Ausgangsmatrix. Real- und Imaginärteil werden parallel berechnet und sind somit zeitgleich fertig.

4.2.3 Programmablauf der 1D-DFT

Im ersten Takt der Berechnung werden die für die jeweilige Zeile der Twiddlefaktormatrix spezifischen Additionen und Subtraktionen durchgeführt. Für die geraden Zeilen werden die Werte, die eine Multiplikation benötigen, getrennt von den übrigen zusammengefasst. Im darauffolgenden Takt werden die Zwischenwerte, für die geraden Zeilen wieder getrennt nach Multiplikation oder nicht, akkumuliert. Der dritte Takt ist für die ungeraden Zeilen der letzte, da nur acht Werte aufsummiert werden müssen (siehe Abb. 4.1). Im darauffolgenden Takt wird in den ungeraden Zeilen mit der Berechnung der nächsten Zahl begonnen. Die geraden Zeilen haben acht Werte, die mit $\sqrt{2}/2$ multipliziert werden müssen. Die vier Werte, die nur addiert werden müssen, sind bereits im zweiten Takt aufsummiert. Deshalb kann im vierten Takt die Konstantenmultiplikation erfolgen und abschließend im fünften die Summation der Zwischenergebnisse erfolgen (siehe Abb. 4.2).

Die Zuordnung der aktuellen Zeile der Twiddlefaktormatrix erfolgt über einen Zähler, der von 0 bis 63 zählt. Er ist als 6 Bit Vektor realisiert, der bei 63 einen beabsichtigten Überlauf hat und wieder bei 0 anfängt. Der Vektor kann als zwei aufeinanderfolgende 3 Bit Vektoren gesehen werden. Auf den vorderen wird immer eine Eins aufaddiert, wenn der hintere einen Überlauf hat und wieder bei Null zu zählen beginnt. Beide Vektoren können für sich als Modulo-8-Zähler betrachtet werden. Die vorderen drei Bit des gesamten Vektors entsprechen der aktuellen Zeile, die hinteren drei der Spalte, also dem Index in der aktuellen Zeile. Mit der Funktion `to_integer` der VHDL-Bibliothek `numeric_std` lassen sich die Teilvektoren nutzen, um die Elemente der Eingangsmatrix anzusprechen. Das letzte Bit des ersten Teilvektors ist für ungerade Zeilen Null und für gerade Zeilen Eins. Da sich die Eigenschaften der

Twiddlefaktormatrix in gerade und ungerade Zeilen aufteilen lassen, kann dies genutzt werden, um die entsprechenden Operationen durchzuführen und den passenden Folgezustand des Zustandsautomaten zu setzen.

4.2.4 Entwickelung von der 1D-DFT zur 2D-DFT

In Abschnitt 4.1.3 wurde entschieden, dass nach Möglichkeit die selbe Recheneinheit für die 1D- wie auch die 2D-DFT genutzt werden soll. Aus Abschnitt 2.4.2 ist bekannt, dass für die 2D-DFT einer Matrix die Twiddlefaktormatrix einmal links und einmal rechts von der Eingangsmatrix steht. Als 1D-DFT-Matrix (Zwischenwertematrix) wird die Multiplikation der ersten Twiddlefaktormatrix mit der Eingangsmatrix betrachtet. Anschließend wird die 1D-DFT-Matrix mit der Twiddlefaktormatrix multipliziert. Aus der vertauschten Reihenfolge resultiert, dass die Zeilen und Spalten getauscht durchlaufen werden. Da die Eingangsmatrix spaltenweise durchlaufen werden soll, müsste für jedes Element eine aus Hardwaresicht aufwändige Fallunterscheidung erfolgen. Umgehen lässt sich dass, indem das Kommutativgesetz angewandt wird und die Matrizen transponiert werden. Belegt wird das mit der Gleichung (4.1). Wie zu sehen ist, muss auch die Ausgangsmatrix transponiert werden. Für die Twiddlefaktormatrix erübrigt sich dies, da ihre Transponierte identisch ist. Es konnte gezeigt werden, dass beide Berechnungen mit der selben Einheit durchführbar sind. In Grafik (4.3) ist das beschriebene veranschaulicht. Das Transponieren der Zwischen- und der Ausgangsmatrix erfolgt mit vertauschtem Zeilen- und Spaltenindex. Für die Unterscheidung zwischen 1D- und 2D-DFT wird ein Bit-Signal getoggelt, wenn der in Abscnitt 4.2.3 eingeführte Vektor bis 63 gezählt hat.

$$\begin{aligned} X &= W \cdot x \cdot W \\ &= \left((x \cdot W)^T \cdot W\right)^T \\ &= \left(X^{*T} \cdot W\right)^T \end{aligned} \tag{4.1}$$

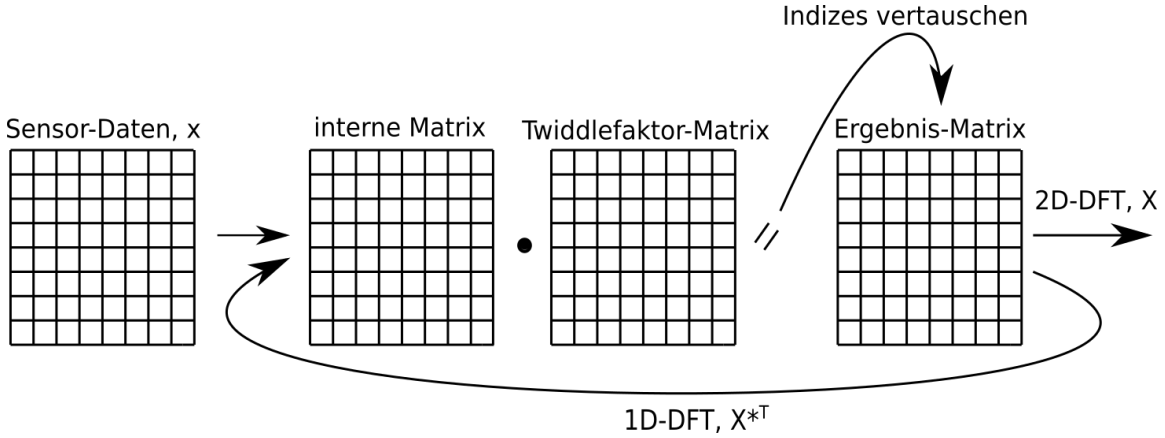


Abbildung 4.3: Darstellung der Berechnung der 2D-DFT aus Gleichung (4.1)

Da die Matrizen transponiert werden, ist eine zweite interne Matrix erforderlich, da sonst die Werte oberhalb der Nebendiagonalen überschrieben werden.

4.2.5 Zusammenhang von DFT und IDFT bei der Matrixmultiplikation

Durch die umgekehrte Drehrichtung des komplexen Zeigers in Gleichung (2.21) werden in der Matrizenschreibweise die Zeilen 2 und 8, 3 und 7 sowie 4 und 6 vertauscht. Nachvollziehen lässt sich das gut anhand der Grafik 3.1. Verdeutlicht wird das vorgehen in Abbildung 4.4.

Dies lässt sich nutzen, um auf einfache Weise die vorhandene DFT-Einheit um die IDFT-Funktionalität zu ergänzen. Die DFT-Komponente wird dafür um das Eingangssignal `idft` ergänzt. Im Quelltext erfolgt eine Abfrage, ob `idft` gesetzt ist. Ist dies der Fall, wird der in Abschnitt 4.2.3 eingeführten Teilvektor für das Durchlaufen der Zeilen in seiner Integer-Interpretation von Acht subtrahiert.

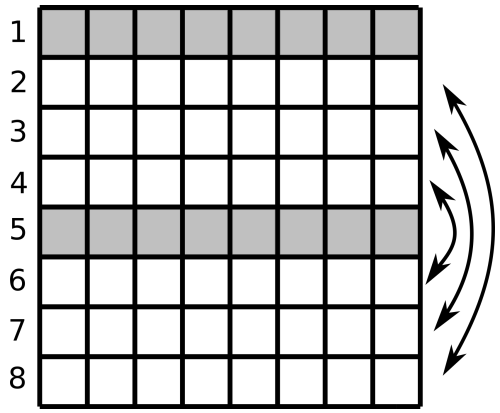


Abbildung 4.4: Um von der DFT zur IDFT zu kommen, müssen bei der Matrixmultiplikation die Zeilen 2 und 8, 3 und 7 sowie 4 und 6 der Twiddlefaktormatrix vertauscht werden.

4.3 Syntheseergebnisse von Teilkomponenten

Da das Schaltnetz der gesamten Schaltung zu groß und nicht nachvollziebar wäre, werden in diesem Abschnitt nur relevante Teilkomkonenten gezeigt.

4.3.1 13 Bit Konstantenmultiplizierer

Der duale Wert lässt sich am einfachsten mit der Matlab-Funktion `fi()` ermitteln. Der Funktion werden hierfür Kommagetrennt der Deziamlwert, 1 für vorzeichenbehaftet, die gesamte Anzahl an Stellen (13) und die Anzahl der Nachkommastellen (10) übergeben. Der vollständige Aufruf sieht dann wie folgt aus:

```
val=fi(sqrt(2)/2,1,13,10)
```

Der erzeugte Datentyp hat unter anderem die Eigenschaften `val.bin`, welche einem mit 0001011010100 den Wert als Binärzahl zurück gibt, `val.double` gibt den approximierten Dezimalwert mit 0,70703125 zurück und `val.dec` interpretiert den Dualwert als Integer, was 724 entspricht. Letzterer ist wichtig zu kennen, um die Werte der Simulation nachvollziehen zu können.

Der Berechnung aus Gleichung (4.2) kann entnommen werden, dass die Abweichung weit unter einem Prozent liegt.

$$\frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{2} \cdot 0,70703125 = 99,989\% \tag{4.2}$$

Zeigen, welche Bits heraus genommen werden müssen! und belegen warum.

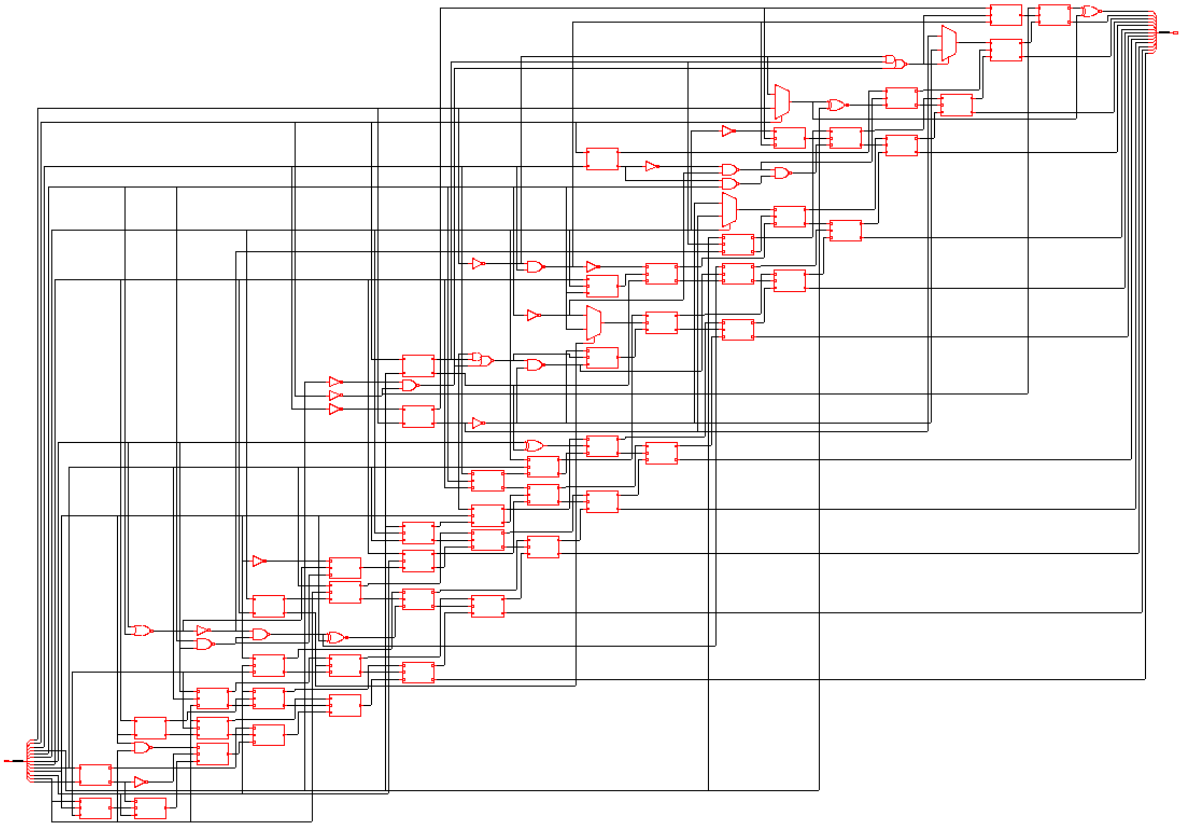


Abbildung 4.5: Schaltnetz des 13 Bit Konstantenmultiplizierers für $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.70711 \simeq 0.70703125 = 0001011010100_2$ in Encounter; Eingang links, Ausgang rechts

Der vollständige Gate-Report befindet sich in Abschnitt 8.3 auf Seite 51

4.3.2 Bildung des 2er-Komplements eines 13 Bit Vektors

In Abb. 4.6 ist die nicht expliziet implementierte, aber in Abschnitt 3.3.2 erwähnte Negierung von Zahlen zu sehen.

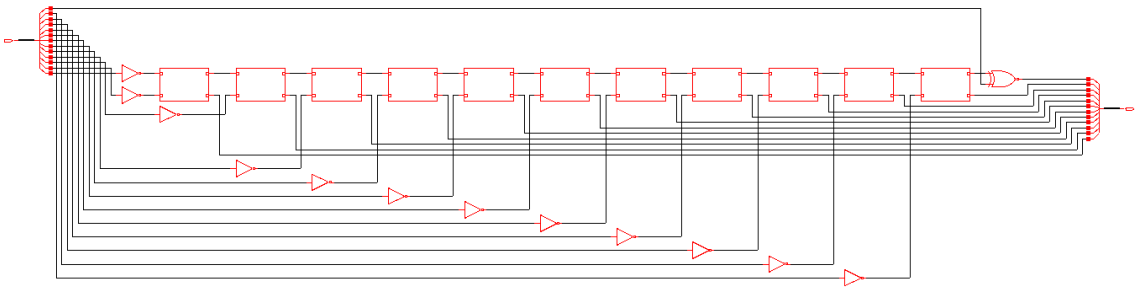


Abbildung 4.6: Schaltnetz einer Einheit zur Bildung des 2er-Komplements eines 13 Bit Vektors; Eingang links, Ausgang rechts

Für die Negierung eines 13 Bit Vektors hat das Synthesewerkzeug `encounter` 22 Standardzellen verwendet. Das sind knapp doppelt so viele Gatter, wie der Vektor Bits breit ist. Der Unterschied zum Konstantenmultiplizierer fällt somit sehr gering aus. Wie zu sehen, handelt es sich fast ausschließlich um Inverter und Addierer. In Abschnitt 2.1.2 wurde bereits beschrieben, dass für die Bildung des 2er-Komplements zunächst alle Bits invertiert werden müssen. Abschließend wird auf den Vektor 1 LSB addiert. Beide Pfade weisen die gleiche Länge auf und verwenden überwiedend die selben Gattertypen, weshalb darauf geschlossen werden kann, dass die maximale Gatterlaufzeit in der gleichen Größenordnung liegen muss.

4.3.3 13 Bit Addierer

Der 13 Bit Addierer hat zwei 13 Bit Eingänge, allerdings werden durch einen Bitshift beide Eingangswerte halbiert, damit kein Überlauf entsteht. Insofern fließen nur jeweils die forderen 12 Bit in die Berechnung ein.

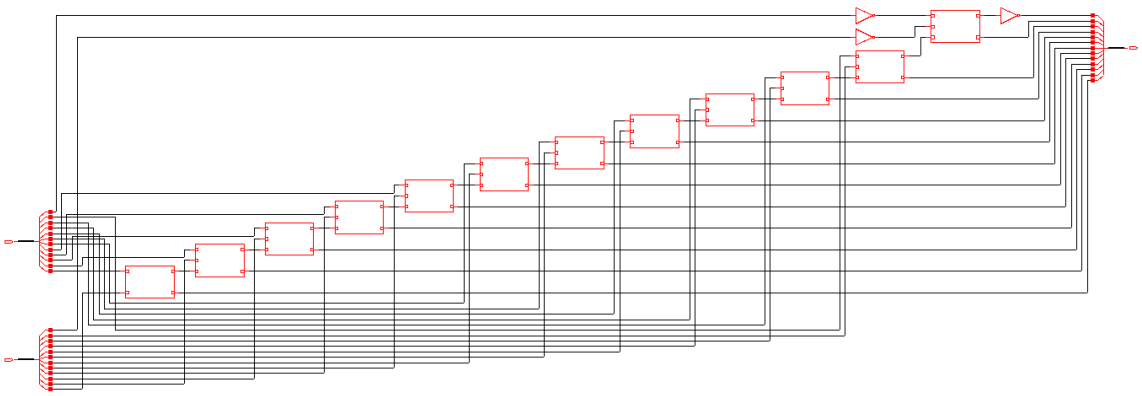


Abbildung 4.7: Schaltnetz eines 12 Bit Addierers, Eingänge links (12 Bit), Ausgang rechts (13 Bit)

4.3.4 Vergleich der Syntheseergebnisse

In Tabelle 4.2 ist eine Gegenüberstellung der Syntheseergebnisse unter den Aspekten Anzahl der Gatter und Fläche.

Tabelle 4.2: Vergleich

	Gatter	Fläche (Prozess: 350nm)
13 Bit Konstantenmultiplizierer für $\sqrt{2}/2$	82	6612 µm^2
13 Bit regulärer Multiplizierer	175	23 261 µm^2
12 Bit Addierer	15	3257 µm^2
13 Bit 2er-Komplement-Bildung	24	2147 µm^2

4.3.5 Gegenüberstellung der Konstantenmultiplikation und der Bildung des 2er-Komplements

Unter diesem Punkt sollen die Konstantenmultiplikation und die Bildung des 2er-Komplements unter Aspekten der benötigten Zeit und des benötigten Platzes auf einem Chip betrachtet werden. Um einen Eindruck hiervon zu erhalten, werden im Kapitel Entwurf in Abschnitt 4.3 jeweils die Schaltnetzte gezeigt. Wie dort erläutert, lässt sich anhand dieser sagen, dass es bei dieser Art der Implementierung keinen zeitlichen Gewinn gibt, da beide kritischen Pfade etwa gleich lang sind. Für die knapp 4 mal mehr Gatter bei der Multiplikation ist auch ein größerer Vertrahtungsaufwandt erforderlich, sodass die Konstantenmultiplizierer auf einem Chip eine etwas größere Fläche beanspruchen. Da es sich hier insgesamt aber um wenige Gatter handelt, wirkt sich dies erst bei sehr vielen Instanzen aus. Es kann an dieser Stelle deshalb festgehalten werden, dass dieser Unterschied nicht als entscheidend geltend gemacht werden kann.

4.4 Schema der Zustandsfolge

In Abbildung 4.8 sind die Zustände des in VHDL implemetierten Zustandsautomaten zu sehen. Da es sich um einen sehr strikten Ablauf handelt und keine Eingangssignale Einfluss auf die Zustandsfolge haben, wurde sich gegen die Darstellung als klassichen Automatengraph entschieden. Stattdessen ist in Abschnitt 4.5 ergänzend das UML-Diagramm mit der detaillierten Abfolge der Berechnung zu sehen, welches einen wesentlich höheren Informationsgehalt besitzt. Es wurde so gestaltet, dass daraus hervorgeht, welches der aktuelle Zustand ist.

Der Zustand `set_ready_bit` wird nach dem zweiten Durchlauf der DFT-Einheit, also wenn die 2D-DFT berechnet ist, erreicht. Dieser setzt für einen Takt das Signal `result_ready` auf Eins.

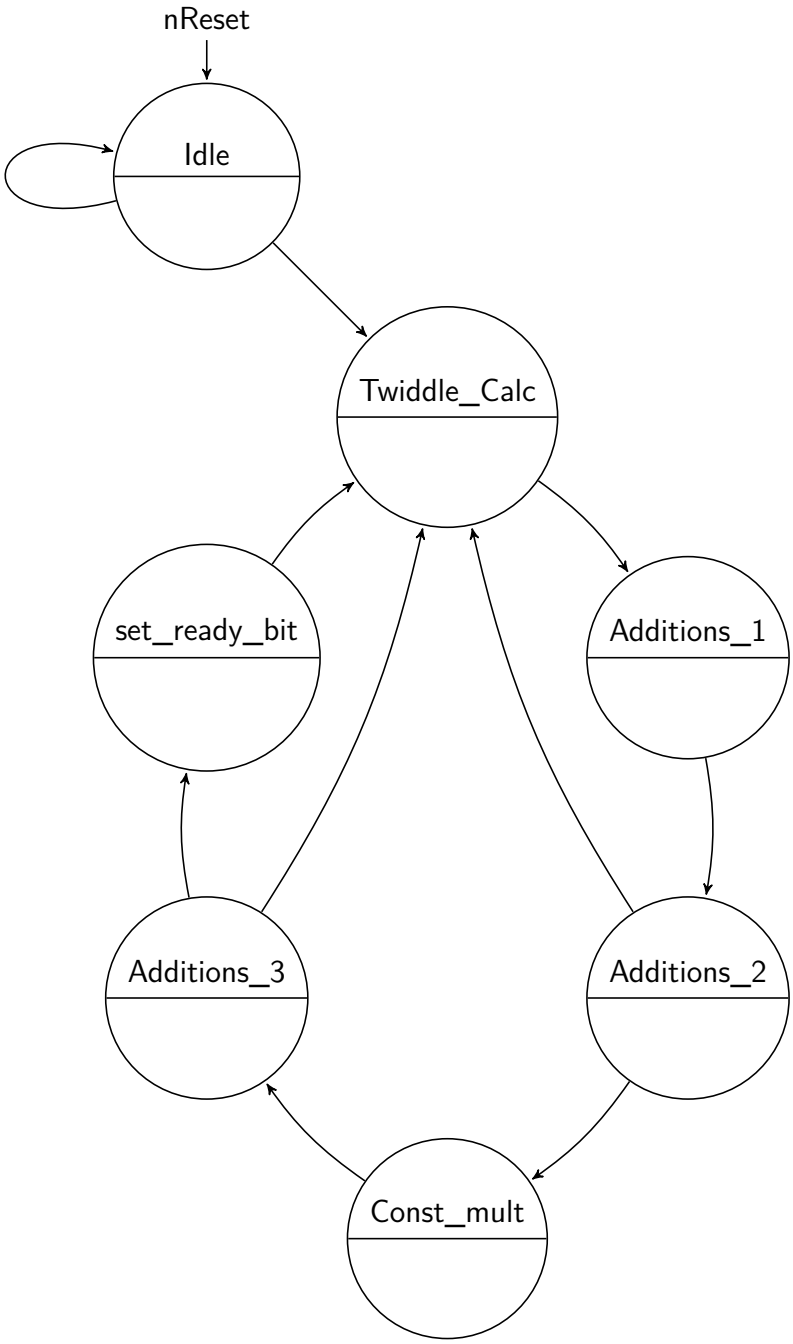
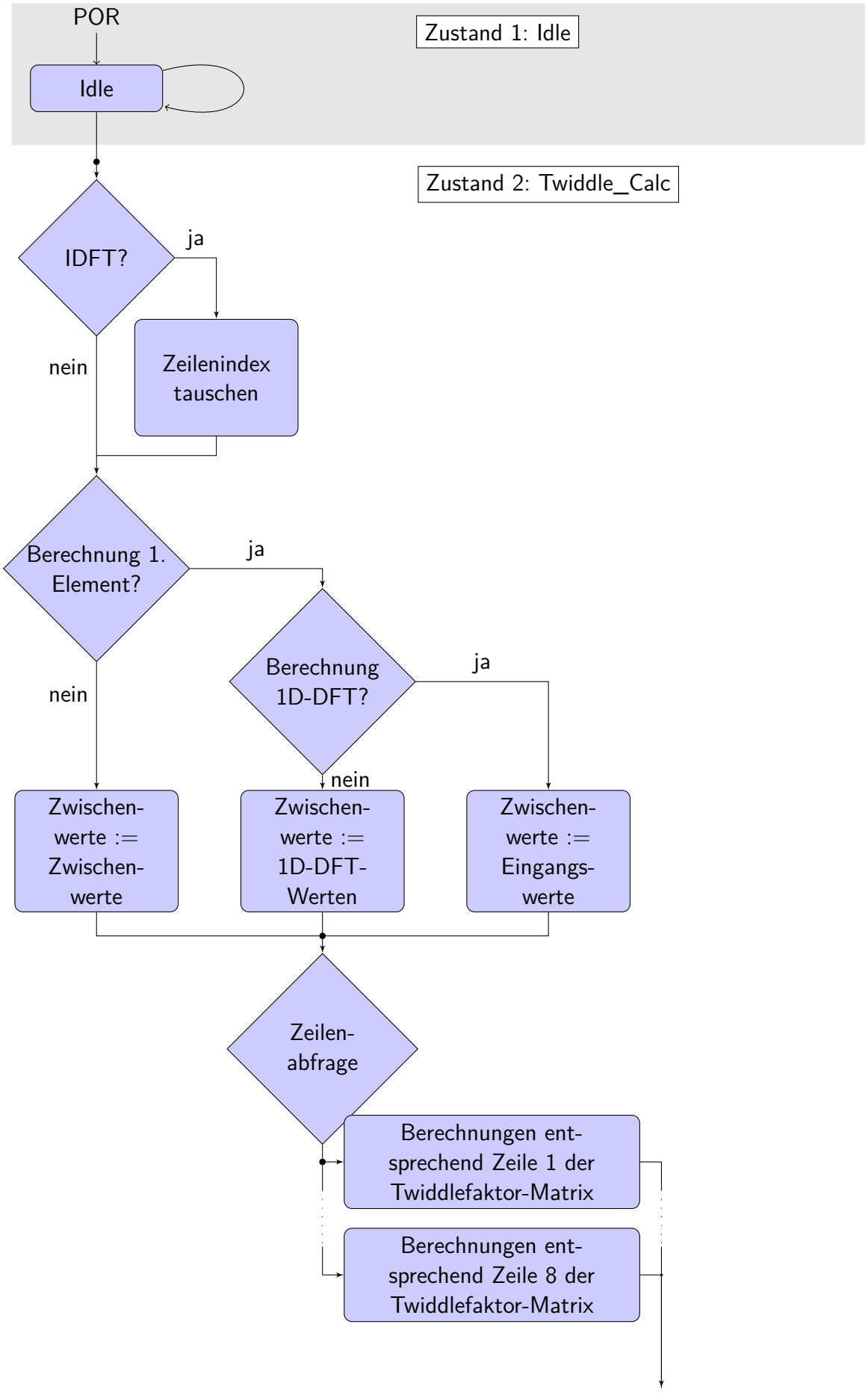
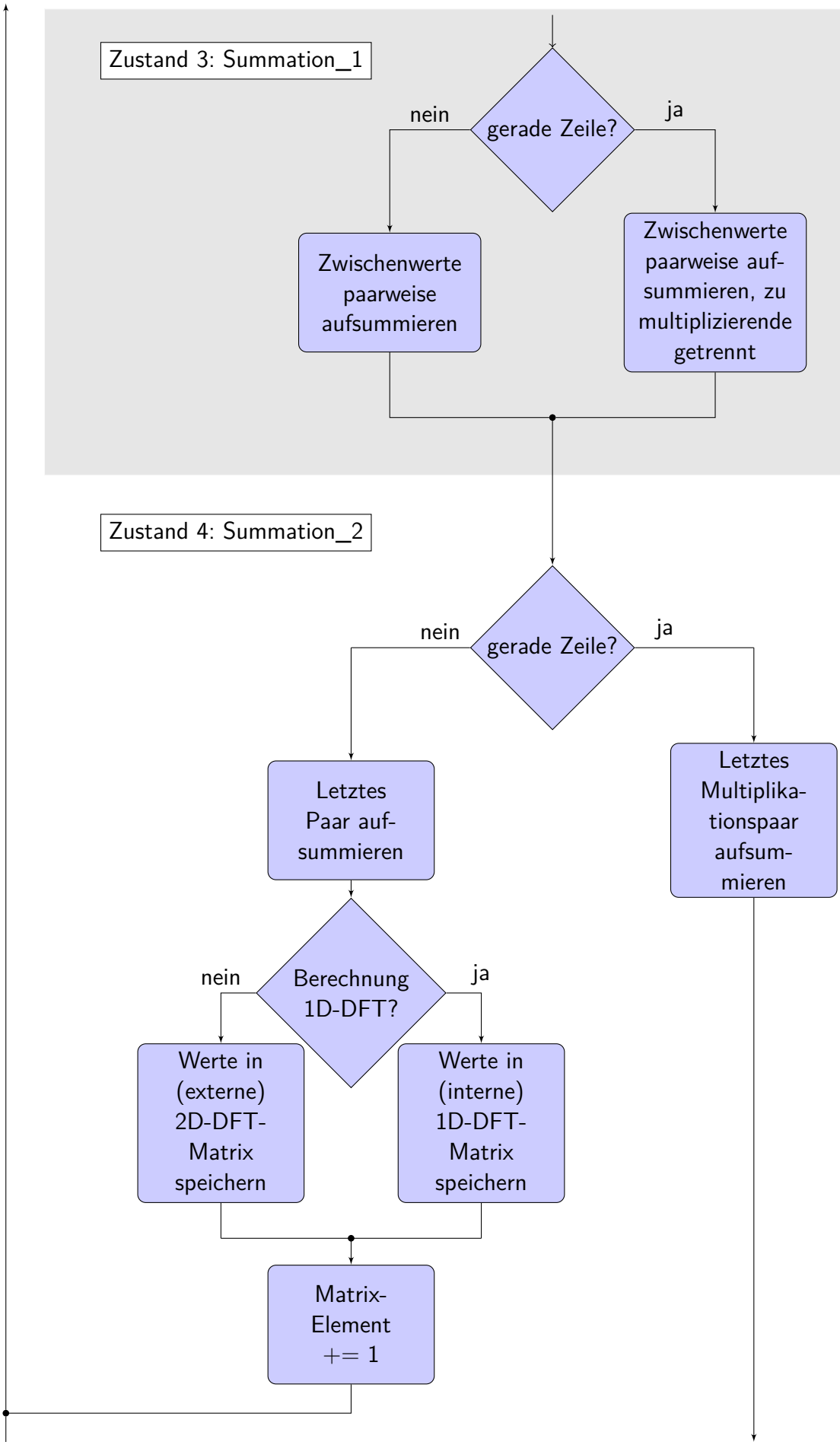
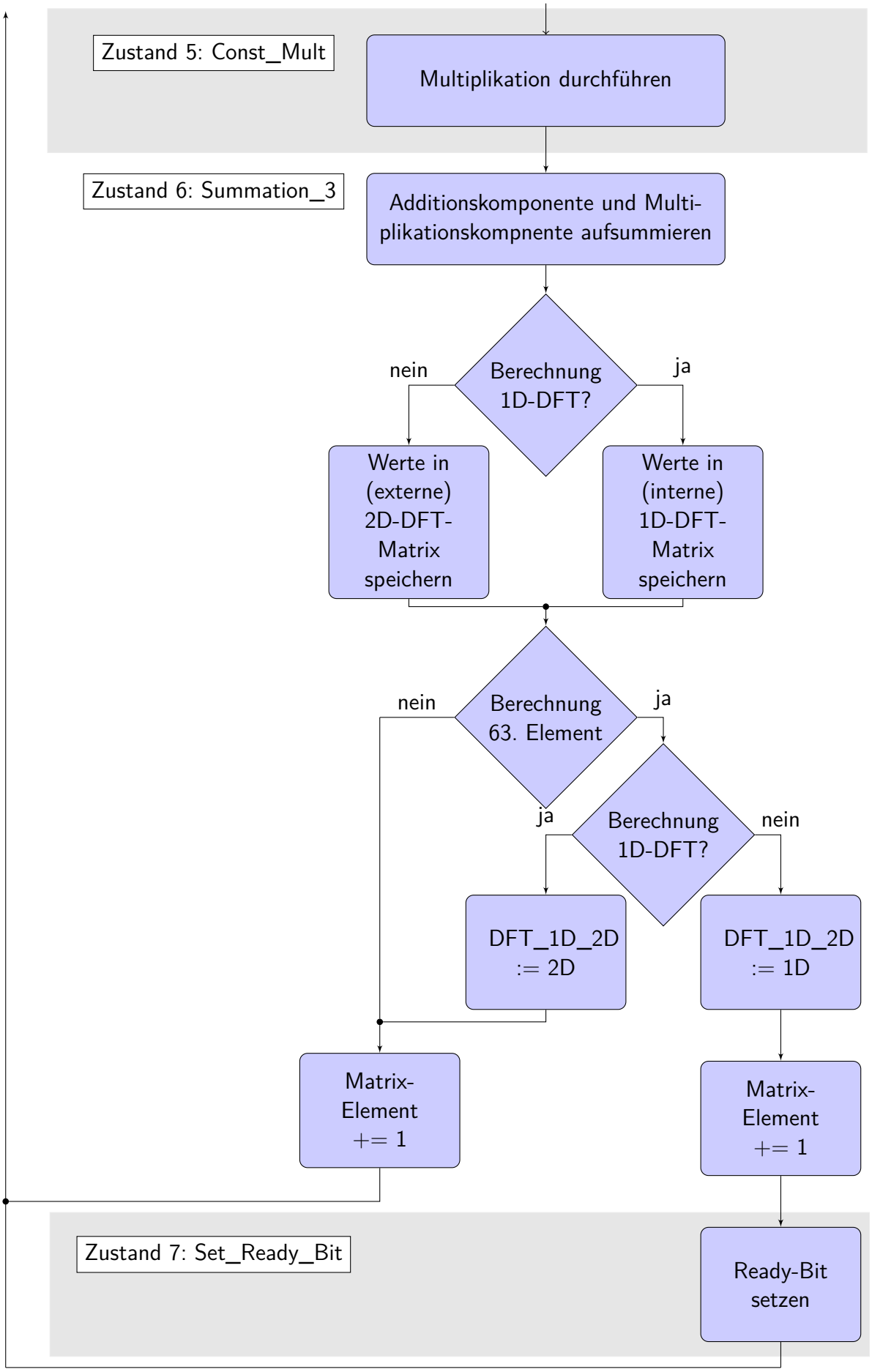


Abbildung 4.8: Automatengraf

4.5 UML-Diagramm




Zustand 3: Summation_1
gerade Zeile?
nein
ja
Zwischenwerte paarweise aufsummieren
Zwischenwerte paarweise aufsummieren, zu multiplizierende getrennt
Zustand 4: Summation_2
gerade Zeile?
nein
ja
Letztes Paar aufsummieren
Letztes Multiplikationspaar aufsummieren
Berechnung 1D-DFT?
nein
ja
Werte in (externe) 2D-DFT-Matrix speichern
Werte in (interne) 1D-DFT-Matrix speichern
Matrix-Element += 1


Zustand 5: Const_Mult
Multiplikation durchführen
Zustand 6: Summation_3
Additionskomponente und Multiplikationskompnente aufsummieren
Berechnung 1D-DFT?
nein
ja
Werte in (externe) 2D-DFT-Matrix speichern
Werte in (interne) 1D-DFT-Matrix speichern
Berechnung 63. Element
nein
ja
Berechnung 1D-DFT?
ja
nein
DFT_1D_2D := 2D
DFT_1D_2D := 1D
Matrix-Element += 1
Matrix-Element += 1
Zustand 7: Set_Ready_Bit
Ready-Bit setzen

5 Evaluation

5.1 Simulation der 2D-DFT

Zur Simulation der Signalverläufe von Hardwarekomponenten dient in der Cadence-Umgebung das Programm NC Sim. Das Programm beherrscht lediglich bei einzelnen Vektoren die Umrechnung zu vorzeichenbehafteten Zahlen im Dezimalsystem. Bei der Bündelung von Vektoren können nur positive Dezimalzahlen dargestellt werden. Dies hat zur Folge, dass Vektoren, die eine negative Zahl repräsentieren, mittels $2^{n+1} + m$, $n =$ Bitbreite des Vektors und $m =$ angezeigte Zahl, bei Bedarf händisch umgerechnet werden müssten. Die Darstellung von Festkoomazahlen ist in keinem Fall möglich.

Anhand der Simulation kann die Anzahl der im Voraus ermittelten, zur Berechnung der 2D-DFT benötigten Takte, verifiziert werden, was nachfolgend geschen soll.

Nachdem `nReset` auf '1' gesetzt wird, werden die Eingangswerte eingelesen. Wenn dieser Vorgang abgeschlossen ist, geht `loaded` auf '1'. Mit der nächsten steigenden Taktflanke, in Bild 5.1 bei 340 ns, beginnt die Berechnung der 2D-DFT. Beendet ist sie, nachdem die Matrizenmultiplikation auf die Eingangswerte und anschließend auf die 1D-DFT-Werte angewandt wurde. Also nach $2 \cdot 64$ einzelnen Berechnungen. Wenn dies erfolgt ist, wird `result_ready` auf '1' gesetzt. Dies geschieht bei 20 820 ns. Bei einer Taktfrequenz von $(40\,\text{ns})^{-1}$ (siehe 8.17) ergeben sich so 512 Takte. Dies bestätigt auch der Edge Count, ebenfalls auf dem Bild zu sehen, welcher die Flanken des `clk`-Signals zählt. In der Simulation ist zu erkennen, dass die Berechnung der Elemente unterschiedlich viele Takte beansprucht. Hieran lässt sich ebenfalls sehen, dass die 1. (ungerade) Zeile weniger Takte gegenüber der 2. (geraden) Zeile benötigt.

5.2 Zeitabschätzung im Einsatz als ABS-Sensor

Anhand der nun bekannten Größe von 512 Takten kann ermittelt werden, ob diese Implemenatation vom zeitlichen Aspekt her akzeptabel ist. Da ein Einsatzszenario der ABS-Sensor ist, wird an dieser Stelle ein Blick hierauf geworfen. Da der ABS-Sensor an der Radnabe sitzt, wird hierfür die Raddrehzahl benötigt. Um diese zu ermitteln, wird von einer maximalen Geschwindikeit von $v_{max} = 250\,\text{KM/h}$ ausgegangen. Weiter wird ein realtiv kleiner Reifenumfang von ca. 1 m angenommen. Als maximale Taktfrequenz des Sensors ist 1 MHz vorgegeben.

Der Reifen hat eine Breite von 175 cm, eine Flankenhöhe von 75 % der Breite und die Felge einen Durchmesser von 14 Zoll. Somit errechnet sich der Reifenumfang gemäß (5.1)

$$\begin{aligned} U &= (175\,\text{cm} \cdot 75\% \cdot 2 + 14 \cdot 2{,}54\,\text{cm}) \cdot \pi \\ &\simeq 0{,}94\,\text{m} \end{aligned} \tag{5.1}$$

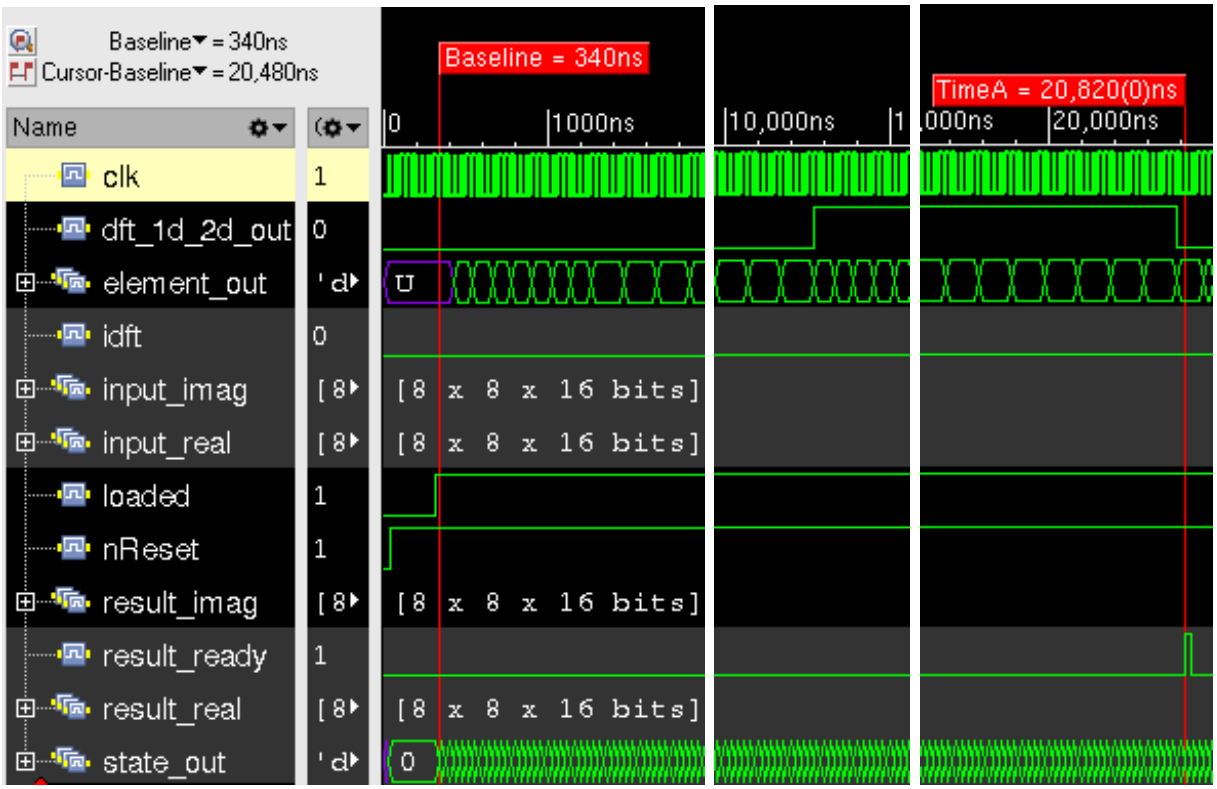


Abbildung 5.1: Ausschnitt des Simulationstools NCSim von der Berechnung und Verifikation der 2D-DFT.

Abbildung 5.2: Edge Count des Taktsignals für die vollständige Simulation der 2D-DFT.

In Gleichung 5.2 wird die Anzahl der Radumdrehungen bei maximaler Geschwindigkeit berechnet

$$\begin{aligned} RPM &= \frac{\frac{250\,\mathrm{Km/h}}{0{,}94\,\mathrm{m}}}{60\,\mathrm{sec}} \\ &= 4386\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}} \\ &= 73\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{sec}} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Durch die Taktfrequenz und die benötigten Takte kann in (5.3) die maximale Anzahl der 2D-DFTs pro Sekunde errechnet werden.

$$\begin{aligned} N_{DFT,sec} &= \frac{100\,\mathrm{MHz}}{512\,\mathrm{Takte}} \\ &= 195312 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Somit ist es nun möglich die unter diesen Voraussetzungen maximale Zahl der 2D-DFTs während einer Umdrehung zu bestimmen (5.4)

$$\begin{aligned} N_{DFT,U} &= \frac{195\,312\,\frac{\mathrm{2D-DFT}}{\mathrm{sec}}}{73\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{sec}}} \\ &= 2675\,\frac{\mathrm{2D-DFT}}{\mathrm{U}} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nun kann in (5.5) gezeigt werden, dass bei einer Winkelauflösung von 1° knapp 7,5 2D-DFTs berechnet werden könnten. Die Dauer liegt somit gut im zeitlichen Rahmen, der vorganden ist. Darüber hinaus kann an dieser Stelle bereits gesagt werden, dass noch reichlich Zeit für andere Berechnungen vorhanden ist.

$$\begin{aligned} N_{DFT,1^\circ} &= \frac{2675\,\frac{\mathrm{2D-DFT}}{\mathrm{U}}}{360^\circ} \\ &= 7{,}43\,\frac{\mathrm{2D-DFT}}{1^\circ} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Um eine Aussage über die restliche zur Verfügung stehenden Zeit bzw. Takte machen zu können, wird in Gleichung (5.6) gezeigt, dass pro Winkel etwa 3800 Takte für Berechnungen zu Verfügung stehen. Somit ist gezeigt, dass für andere Aufgaben ausreichen Zeit vorhanden ist und die Implemenatation erfolgreich ist.

$$
\begin{aligned}
N_{Takte,U} &= \frac{100\,\mathrm{MHz}}{73\frac{U}{sec}} \\
&= 1,37 \cdot 10^6 \frac{Takte}{Umdrehung} \\
N_{Takte,1^\circ} &= \frac{1,37 \cdot 10^6 \frac{Takte}{Umdrehung}}{360^\circ} \\
&\simeq 3800\ \mathrm{Takte}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Da 512 etwa 13,5% von 3800 sind, resultiert hieraus, dass noch etwa 86,5% bzw. knapp 3300 Takte nutzbar sind.

5.3 Test der Matrixmultiplikation

1D-DFT mit Integer-Werten

2D-DFT mit Integer-Werten

2D-DFT mit Werten SQ-Format

Unter anderem weil NC Sim bzw. dessen Unterprogramm SimVision zur Anzeige von Signalverläufen (Waveform) nur Integer darstellen kann und bei als Vektor gebündelten Signalen diese nicht einmal als vorzeichenbehaftet (signed), wurde der Einfachheit halber zunächst die Berechnung als Ganzzahl-Multiplikation mit dem Faktor 3 betrachtet. Da es bei diesem Faktor und den gewählten Eingangswerten nicht zu einem Überlauf kommen kann, war es zu diesem Zeitpunkt noch nicht nötig, sich Gedanken über die Breite des Ergebnisvektors bzw. den Ausschnitt daraus für die weitere Berechnung zu machen. Deshalb konnte an dieser Stelle noch auf den Bitshift zur Halbierung der Werte verzichtet werden.

Erst als der Faktor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ übernommen wurde, wurden die Ergebnisse breiter als der Vektor für die weitere Berechnung an Bits zur Verfügung stellt.

$\frac{\sqrt{2}}{2}_{10} = 0001011010100_2$ in S2Q10, als Integer betrachtet jedoch 724_{10}.

Daraus folgt, dass ein Teil der Bits abgeschnitten werden müssen. Da die Dualzahlen jetzt im S1Q10-Format betrachtet werden, es sich also um Kommazahlen handelt, müssen die hinteren Bits abgeschnitten werden. Zudem können vorne Bits ohne Informationsverlust gestrichen werden, da durch die Multiplikation ein weiteres Negations-Bit dazugekommen ist und auf Grund des gegebenen Faktors der Wertebereich vorne nie ganz ausgenutzt wird. (Verifizieren / Belegen!)

5.4 Testumgebung

In Matlab muss hierfür entweder die Funktion `transpose()` oder `.'` verwendet werden. Letzteres muss elementweise angewandt werden, da das Apostroph alleine die komplex konjugiert Transponierte bildet.

5.4.1 Struktogramm des Testablaufs

5.4.2 Reale Eingangswerte

5.5 Chipdesign

5.5.1 Anzahl Standardzellen

Benötigte Standardzellen für 1D / 2D

Benötigte Standardzellen bei 3 Lagen / 4 Lagen

5.5.2 Visualisierung der Netzliste

5.5.3 Floorplan, Padring

6 Schlussfolgerungen

6.1 Zusammenfassung

6.2 Bewertung und Fazit

Es konnte eine effiziente Berechnung implementiert werden, die der FFT in nichts nachsteht. Wenn nicht die Ausgangssituation gewesen wäre, dass eine möglichst flexibel gehaltene Matrixmultiplikation erstrebenswert ist, hätte auch eine FFT, dessen Berechnungsvorschrift bekannt ist, implementiert werden können. Für DFT anderer Größe als 2^N gilt dies nicht.

6.3 Ausblick

7 Abkürzungsverzeichnis

1D-DFT	eindimensionale diskrete Fouriertransformation
2D-DFT	zweidimensionale diskrete Fouriertransformation
ADC	Analog Digital Converter
ADU	Analog Digital Umsetzer
AMR	anisotroper magnetoresistiver Effekt
ASIC	Application Specific Integrated Circuit, *dt.: Anwendungsspezifischer Integrierter Schaltkreis*
DCT	diskrete Kosinus Transformation
DFT	diskrete Fouriertransformation
FFT	Fast Fouriertransformation
FT	Fouriertransformation
IDFT	inverse diskrete Fouriertransformation
ISAR	Integrated Sensor Array
LSB	Least Significant Bit
MSB	Most Significant Bit
RAM	Random Access Memory
TMR	tunnelmagnetoresistiver Effekt

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] M. Krey, „Systemarchitektur und Signalverarbeitung für die Diagnose von magnetischen ABS-Sensoren“, *test*, 2015.

8 Anhang

8.1 Skript zur Bewertung von Twiddlefaktormatrizen

```
%% Dateiname: dct_bewertung.m
%% Funktion:  Bewertet die Koeffizienten der DCT-Twiddlefaktormatrix
%%            darauf basierend, wie trivial die Berechnungen mit
%%            den Twiddlefaktoren sind.
%%            Als trivial gelten Berechnungen mit den Werten -1, -0.5, 0, +0.5, +1
%%            Es wird ein Verhaeltnis aus trivialen und nicht trivialen Werten
%%            erstellt.
%% Argumente: N (Groesse der NxN DCT-Matrix)
%% Author:    Thomas Lattmann
%% Datum:     17.10.2017
%% Version:   1.0

function dct_bewertung(N)

  % Twiddlefaktor-Matrix erzeugen
  W = cos(pi/N*([0:N-1]')*([0:N-1]+.5));
  W = round(W*1000000)/1000000;

  % Werte kleiner 0,000001 auf 0 setzen (arithmetische Ungenauigkeiten)
  W(abs(W) < 0.000001) = 0;


  % Anzahl verschiedener Werte ermitteln
  different_nums = unique(W);
  different_non_trivial_nums = different_nums(find(different_nums ~= 1));
  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
    different_non_trivial_nums ~= -1));
  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
    different_non_trivial_nums ~= 0.5));
  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
    different_non_trivial_nums ~= -0.5));
  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
    different_non_trivial_nums ~= 0));

  different_non_trivial_nums = unique(abs(different_non_trivial_nums));
  different_non_trivial_nums
  %non_trivial = length(abs(different_non_trivial_nums))


```

```
  % Jeweils die Menge der verschiedenen Werte ermitteln
37  num_count = zeros(1, length(different_nums));
    for k = 1:length(different_nums)
39    for n = 1:N
        for m = 1:N
41        if different_nums(k) == W(m,n)
            num_count(k) = num_count(k) +1;
43        end
        end
45    end
    end
47

49  % nicht triviale Werte der Matrix zaehlen
    nontrivial_nums = 0;
51  for k = 1:length(different_nums)
      if abs(different_nums(k)) != 1
53      if abs(different_nums(k)) != 0.5
          if different_nums(k) != 0
55          nontrivial_nums = nontrivial_nums + num_count(k);
          end
57      end
      end
59  end

61  nums_of_matrix = N*N;

63  trivial_nums = N*N - nontrivial_nums

65  nontrivial_nums

67  v = trivial_nums/nontrivial_nums

69 end
```

Listing 8.1: Octave-Skript zur Bewertung unterschiedlicher DCT-Twiddlefaktormatrizen

```
1 %% Dateiname: dft_bewertung.m
  %% Funktion:  Bewertet die Koeffizienten der DFT-Twiddlefaktormatrix
3 %%            darauf basierend, wie trivial die Berechnungen mit
  %%            den Twiddlefaktoren sind.
5 %%            Als trivial gelten Berechnungen mit den Werten -1, -0.5, 0,
      +0.5, +1
  %%            Es wird ein Verhaeltnis aus trivialen und nicht trivialen
      Werten
7 %%            erstellt.
  %% Argumente: N (Groesse der NxN DFT-Matrix)
9 %% Author:    Thomas Lattmann
  %% Datum:     17.10.2017
11 %% Version:   1.0

13 function dft_bewertung(N)
```

```
15  % Twiddlefaktor-Matrix erzeugen
    W = exp(-i*2*pi*[0:N-1]'*[0:N-1]/N);
17  W = round(W*1000000)/1000000;

19  % Matrix nach Im und Re trennen und Werte runden
    W_r = real(W);
21  W_i = imag(W);

23  % Werte kleiner 0,000001 auf 0 setzen (arithmetische Ungenauigkeiten)
    W_r(abs(W_r) < 0.000001) = 0;
25  W_i(abs(W_i) < 0.000001) = 0;


27


29  % Anzahl verschiedener Werte ermitteln
    different_nums_real = unique(W_r);
31  different_nums_imag = unique(W_i);

33  different_nums = [different_nums_real; different_nums_imag];
    different_nums = unique(different_nums);
35  different_non_trivial_nums = different_nums(find(different_nums ~= 1));
    different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
      different_non_trivial_nums ~= -1));
37  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
      different_non_trivial_nums ~= 0.5));
    different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
      different_non_trivial_nums ~= -0.5));
39  different_non_trivial_nums = different_non_trivial_nums(find(
      different_non_trivial_nums ~= 0));

41  different_non_trivial_nums = unique(abs(different_non_trivial_nums));
    non_trivial = length(abs(different_non_trivial_nums))
43
    % Jeweils die Menge der verschiedenen Werte ermitteln (hier Re)
45  num_count_real = zeros(1, length(different_nums_real));
    for k = 1:length(different_nums_real)
47    for n = 1:N
        for m = 1:N
49        if different_nums_real(k) == W_r(m,n)
            num_count_real(k) = num_count_real(k) +1;
51        end
        end
53    end
    end
55


57  % Jeweils die Anzahl der verschiedenen Werte ermitteln (hier Im)
    num_count_imag = zeros(1,length(different_nums_imag));
59  for k = 1:length(different_nums_imag)
      for n = 1:N
```

```
61        for m = 1:N
            if different_nums_imag(k) == W_i(m,n)
63            num_count_imag(k) = num_count_imag(k) +1;
            end
65        end
      end
67  end


69
    % nicht triviale Werte der reellen Matrix zaehlen
71  nontrivial_nums_real = 0;
    for k = 1:length(different_nums_real)
73    if abs(different_nums_real(k)) != 1
        if abs(different_nums_real(k)) != 0.5
75        if different_nums_real(k) != 0
            nontrivial_nums_real = nontrivial_nums_real + num_count_real(k);
77        end
        end
79    end
    end
81
    % nicht triviale Werte der imaginaeren Matrix zaehlen
83  nontrivial_nums_imag = 0;
    for k = 1:length(different_nums_imag)
85    if abs(different_nums_imag(k)) != 1
        if abs(different_nums_imag(k)) != 0.5
87        if different_nums_imag(k) != 0
            nontrivial_nums_imag = nontrivial_nums_imag + num_count_imag(k);
89        end
        end
91    end
    end
93
    nums_of_each_matrix = N*N;
95
    trivial_nums_real = N*N - nontrivial_nums_real
97  trivial_nums_imag = N*N - nontrivial_nums_imag

99  nontrivial_nums_real
    nontrivial_nums_imag
101
    trivial_nums_total = trivial_nums_real + trivial_nums_imag
103 nontrivial_nums_total = nontrivial_nums_real + nontrivial_nums_imag

105 v = trivial_nums_total/nontrivial_nums_total

107 end
```

Listing 8.2: Octave-Skript zur Bewertung unterschiedlicher DFT-Twiddlefaktormatrizen

8.2 Gate-Report des 12 Bit Konstatenmultiplizierers

```
rc:/> report gates
===============================================================
  Generated by:           Encounter(R) RTL Compiler RC14.25 - v14.20-s046_1
  Generated on:           May 30 2017  03:29:41 pm
  Module:                 multiplier
  Technology library:     c35_CORELIB_TYP 3.02
  Operating conditions:   _nominal_ (balanced_tree)
  Wireload mode:          enclosed
  Area mode:              timing library
===============================================================


 Gate    Instances     Area          Library
-----------------------------------------------------
ADD21            5     728.000     c35_CORELIB_TYP
AOI210           2     145.600     c35_CORELIB_TYP
AOI220          18    1638.000     c35_CORELIB_TYP
CLKIN0           6     218.400     c35_CORELIB_TYP
IMUX20          38    3458.000     c35_CORELIB_TYP
INV0            27     982.800     c35_CORELIB_TYP
NAND20          12     655.200     c35_CORELIB_TYP
NOR20            8     436.800     c35_CORELIB_TYP
OAI220           6     546.000     c35_CORELIB_TYP
XNR20           15    1638.000     c35_CORELIB_TYP
XNR30            6    1201.200     c35_CORELIB_TYP
XNR31            3     600.600     c35_CORELIB_TYP
XOR20            5     637.000     c35_CORELIB_TYP
-----------------------------------------------------
total          151   12885.600


  Type    Instances     Area    Area %
-------------------------------------------
inverter         33   1201.200     9.3
logic           118  11684.400    90.7
-------------------------------------------
total           151  12885.600   100.0

rc:/>
```

Listing 8.3: RC Gate-Report

8.3 Twiddlefaktormatrix im S1Q10-Format

```
%% Dateiname:          twiddle2file.m
%% Funktion:          Erzeugt eine Datei mit den binaeren komplexen
```

```
%%                    Twiddlefaktoren
%% Argumente:         N (Groesse der NxN DFT-Matrix)
%% Aufbau der Datei:  Wie die Matrix, enthaelt Realteil und Imaginaerteil.
%%                    Alle Werte sind wie im Beispiel durch Leerzeichen
    getrennt:
%%                    Re{W(1,1)} Im{W(1,1)} Re{W(1,2)} Im{W(1,2)}
%%                    Re{W(2,1)} Im{W(2,1)} Re{W(2,2)} Im{W(2,2)}
%% Abhaenigkeiten:    (1) twiddle_coefficients.m
%%                    (2) dec_to_s1q10.m
%%                    (3) bit_vector2integer.m
%%                    (4) zweier_komplement.m
%% Author:            Thomas Lattmann
%% Datum:             02.11.17
%% Version:           1.0

function twiddle2file(N)

  % Dezimale Twiddlefaktormatrix erstellen
  W_dec = twiddle_coefficients(N);
  W_dec_real = real(W_dec);
  W_dec_imag = imag(W_dec);

  W_bin_int_real = zeros(size(W_dec_real));
  W_bin_int_imag = zeros(size(W_dec_imag));

  for m = 1:N
    for n = 1:N
      bit_vector = dec_to_s1q10(W_dec_real(m,n));
      W_bin_int_real(m,n) = bit_vector2integer(bit_vector);

      bit_vector = dec_to_s1q10(W_dec_imag(m,n));
      W_bin_int_imag(m,n) = bit_vector2integer(bit_vector);
    end
  end

  fid=fopen('Twiddle_s1q10_komplex.txt', 'w+');

  for m=1:N
    for n=1:N
      fprintf(fid, '%012d ', W_bin_int_real(m,n));
      fprintf(fid, '%012d', W_bin_int_imag(m,n));
      if n < N
        fprintf(fid, ' ');
      end
    end
    if m < N
      fprintf(fid, '\n');
    end
  end

  fclose(fid);
```

```
53
end
```

Listing 8.4: Erstellen der Twiddlefaktormatrix-Datei

```
%% Dateiname: twiddle_coefficients.m
%% Funktion:  Erstellt eine Matrix (W) mit den Twiddlefaktoren fuer die DFT
    der
%%            Groesse, die mit N an das Skript uebergeben wurde.
%% Argumente: N (Groesse der NxN DFT-Matrix)
%% Author:    Thomas Lattmann
%% Datum:     02.11.17
%% Version:   1.0

function W = twiddle_coefficients(N)

  % Twiddlefaktoren fuer die DFT
  W = exp(-i*2*pi*[0:N-1]'*[0:N-1]/N)

  % auf 6 Nachkommastellen reduzieren
  W = round(W*1000000)/1000000;

  % negative Nullen auf 0 setzen
   W_real = real(W);
   W_imag = imag(W);
   W_real(abs(W_real)<00000.1) = 0;
   W_imag(abs(W_imag)<00000.1) = 0;
  W = W_real + i*W_imag;

end
```

Listing 8.5: Erzeugen der Twiddlefaktormatrix

```
%% Dateiname:       dec_to_s1q10.m
%% Funktion:        Konvertiert eine Dezimalzahl in das binaere S1Q10-Format
%% Argumente:       Dezimalzahl im Bereich von -2...+2-1/2^10
%% Abhaenigkeiten: (1) zweier_komplement.m
%% Author:          Thomas Lattmann
%% Datum:           02.11.17
%% Version:         1.0

function bit_vector = dec_to_s1q10(val)

   bit_width=12;
   bit_vector=zeros(1,bit_width);
   dec_temp=0;
   val_abs=abs(val);
   val_int=floor(val_abs);
   val_frac=val_abs-val_int;

   if val > 2-1/2^(bit_width-2) % 1.99902... bei 12 Bit und somit 10 Bit
    fuer Nachkomma
```

```
    disp('Diese Zahl kann nicht im s1q11-Format dargestellt werden.')
  elseif val < -2
    disp('Diese Zahl kann nicht im s1q11-Format dargestellt werden.')
  else

    % Vorkommastellen
    if abs(val) >= 1
      bit_vector(2) = 1;
      if val == -2
        bit_vector(1) = 1;
      end
    end

    % Nachkommastellen
    for k = 1:bit_width-2
      % berechnen der Differenz des Twiddlefaktors und des derzeitigen
    Wertes der Binaerzahl
      d = val_frac - dec_temp;
      if d >= 1/2^k
        bit_vector(k+2) = 1;
        dec_temp = dec_temp+1/2^k;
      end
    end

    % 2er-Komplement bilden, falls val negativ
    if val < 0
      bit_vector=zweier_komplement(bit_vector);
    end
  end
end
```

Listing 8.6: Dezimalzahl nach S1Q10 konvertieren

```
%% Dateiname: zweier_komplement.m
%% Funktion:  Bilden des 2er-Komplements eines "Bit"-Vektors
%% Argumente: Vektor aus Nullen und Einsen
%% Author:    Thomas Lattmann
%% Datum:     02.11.17
%% Version:   1.0

function bit_vector = zweier_komplement(bit_vector)
  bit_width=length(bit_vector);

  for j = 1:bit_width
    bit_vector(j) = not(bit_vector(j));
  end
  bit_vector(bit_width) = bit_vector(bit_width) + 1;
  for j = 1:bit_width-1
    if bit_vector(bit_width -j +1) == 2
      bit_vector(bit_width -j +1) = 0;
      bit_vector(bit_width -j) = bit_vector(bit_width -j) + 1;
    end
```

```
  end
end
```

Listing 8.7: Bildung des 2er-Komplements

```
%% Dateiname: bit_vector2integer.m
%% Funktion:  Wandelt einen Vektor von Zahlen in eine einzelne Zahl (
    Integer)
%%            Beispiel: [0 1 1 0 0 1] => 11001
%%           Um fuehrende Nullen zu erhalten muss z.B.  printf('%06d',
    Integer)
%%            genutzt werden. Hierbei wird vorne mit Nullen aufgefuellt,
    wenn
%%            'Integer' weniger als 6 stellen hat.
%% Argumente: Vektor (aus Nullen und Einsen)
%% Author:    Thomas Lattmann
%% Datum:     02.11.17
%% Version:   1.0

function bin_int = bit_vector2integer(bit_vector)

  bin_int=0;
  bit_width=length(bit_vector);

  % Konvertierung von Vektor nach Integer
  for l = 1:bit_width
    bin_int = bin_int + bit_vector(bit_width - l + 1)*10^(l-1);
  end

end
```

Listing 8.8: Binär-Vektor in Binär-Integer umwandeln

```
%% Dateiname: s1q10_to_dec.m
%% Funktion:  Konvertiert eine binaere Zahl im S1Q10-Format als Dezimalzahl
%% Argumente: Vektor aus Nullen und Einsen
%% Author:    Thomas Lattmann
%% Datum:     02.11.17
%% Version:   1.0

function dec = s1q10_to_dec(bit_vector)

  % Dezimalzahl aus s1q10 Binaerzahl berechnen

  bit_width=length(bit_vector);
  dec = 0;

  if bit_vector(1) == 1
    dec = -2;
    if bit_vector(2) == 1
      dec = -1;
    end
```

```
20    elseif bit_vector(2) == 1
        dec = 1;
22    end

24    for n = 3:bit_width
        if bit_vector(n) == 1
26        dec = dec + 1/2^(n-2);
        end
28    end
  end
```

Listing 8.9: Kontroll-Skript für S1Q10 nach Dezimal

8.4 Programmcode

```
1 library IEEE;
  use IEEE.STD_LOGIC_1164.ALL;
3



5

  package constants is
7   constant mat_size : integer;
    constant bit_width_extern : integer;
9   constant bit_width_adder : integer;
    constant bit_width_multiplier : integer;
11 end constants;

13 package body constants is
    constant mat_size : integer := 8;
15  constant bit_width_extern : integer := 13;
    constant bit_width_adder : integer := bit_width_extern+1;
17  constant bit_width_multiplier : integer := bit_width_adder*2;

19 end constants;
```

Listing 8.10: Deklaration der Konstanten

```
  -- Package, welches ein 2D-Array bereitstellt.
2 -- Das 2D-Array besteht aus 1D-Arrays, dies bringr gegenueber der direkten
    Erzeugung (m,n) statt (m)(n) den Vorteil, dass
  -- dass zeilen- sowie spaltenweise zugewiesen werden kann. Sonst waere nur
    die komplette Matrix oder einzelne Elemente moeglich.
4
  library IEEE;
6 use IEEE.STD_LOGIC_1164.ALL;
  use ieee.numeric_std.all;
8 library work;
  use work.all;
10 use constants.all;
```

```
12
package datatypes is
14     type t_1d_array is array(integer range 0 to mat_size-1) of signed(
    bit_width_extern-1 downto 0);
     type t_2d_array is array(integer range 0 to mat_size-1) of t_1d_array;
16
     type t_1d_array6_13bit is array(integer range 0 to 5) of signed(
    bit_width_adder-1 downto 0);
18

20     subtype t_twiddle_coeff_long is signed(16 downto 0);
     constant twiddle_coeff_long : t_twiddle_coeff_long := "
    00101101010000010";
22     subtype t_twiddle_coeff is signed(bit_width_adder-1 downto 0);
     --constant twiddle_coeff :  t_twiddle_coeff := twiddle_coeff_long(16
    downto 16-(bit_width_adder-1));
24



26


28     -- Zustandsautomat 1D-DFT
     subtype t_dft8_states is std_logic_vector(2 downto 0);
30     constant idle             : t_dft8_states := "000";
     constant twiddle_calc     : t_dft8_states := "001";
32     constant additions_stage1 : t_dft8_states := "010";
     constant additions_stage2 : t_dft8_states := "011";
34     constant const_mult       : t_dft8_states := "100";
     constant additions_stage3 : t_dft8_states := "101";
36     constant set_ready_bit    : t_dft8_states := "110";

38 end datatypes;
```

Listing 8.11: Deklaration eigener Datentypen

```
library IEEE;
2 use ieee.std_logic_1164.all;
use ieee.numeric_std.all;
4
library STD;  -- for reading text file
6 use STD.TEXTIO.ALL;
use ieee.std_logic_textio.all;
8
library work;
10 use work.all;
use datatypes.all;
12 use constants.all;


14
entity read_input_matrix is
16   port(
        clk          : in   bit;
```

```
18          loaded       : out bit;
            input_real   : out t_2d_array;
20          input_imag   : out t_2d_array
        );
22 end entity read_input_matrix;


24
   architecture bhv of read_input_matrix is
26 begin
     reading :  process
28
       variable     element_1_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
30     variable     element_1_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_2_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
32     variable     element_2_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_3_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
34     variable     element_3_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_4_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
36     variable     element_4_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_5_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
38     variable     element_5_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_6_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
40     variable     element_6_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_7_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
42     variable     element_7_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
       variable     element_8_real  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');
44     variable     element_8_imag  : std_logic_vector(bit_width_extern-1
      downto 0) := (others => '0');

46     variable     r_space    : character;

48     variable  fstatus          : file_open_status;   -- status r,w
       variable  inline       : line;     -- readout line
50     file   infile     : text;     -- filehandle for reading ascii text

52     variable textfilename : string(1 to 29);
```

```
54      begin
56
58        if bit_width_extern = 12 then
            textfilename := "InputMatrix_komplex_12Bit.txt";
60        else
            textfilename := "InputMatrix_komplex_16Bit.txt";
62        end if;
64        file_open(fstatus,infile, textfilename,  read_mode);
66  --        if fstatus = NAME_ERROR then
    --          file_open(fstatus,infile, "HDL/InputMatrix_komplex.txt",
        read_mode);
68  --          --report "Ausgabe-Datei befindet sich im Unterverzeichnis 'HDL
        '.";
    --        end if;
70
          for i in 0 to mat_size-1 loop
72
            wait until clk = '1' and clk'event;
74            readline(infile, inline);
              read(inline, element_1_real);
76            read(inline, r_space);
              read(inline, element_1_imag);
78            read(inline, r_space);
              read(inline, element_2_real);
80            read(inline, r_space);
              read(inline, element_2_imag);
82            read(inline, r_space);
              read(inline, element_3_real);
84            read(inline, r_space);
              read(inline, element_3_imag);
86            read(inline, r_space);
              read(inline, element_4_real);
88            read(inline, r_space);
              read(inline, element_4_imag);
90            read(inline, r_space);
              read(inline, element_5_real);
92            read(inline, r_space);
              read(inline, element_5_imag);
94            read(inline, r_space);
              read(inline, element_6_real);
96            read(inline, r_space);
              read(inline, element_6_imag);
98            read(inline, r_space);
              read(inline, element_7_real);
100           read(inline, r_space);
              read(inline, element_7_imag);
```

```
102             read(inline, r_space);
                read(inline, element_8_real);
104             read(inline, r_space);
                read(inline, element_8_imag);
106
                input_real(i)(0) <= signed(element_1_real);
108             input_imag(i)(0) <= signed(element_1_imag);
                input_real(i)(1) <= signed(element_2_real);
110             input_imag(i)(1) <= signed(element_2_imag);
                input_real(i)(2) <= signed(element_3_real);
112             input_imag(i)(2) <= signed(element_3_imag);
                input_real(i)(3) <= signed(element_4_real);
114             input_imag(i)(3) <= signed(element_4_imag);
                input_real(i)(4) <= signed(element_5_real);
116             input_imag(i)(4) <= signed(element_5_imag);
                input_real(i)(5) <= signed(element_6_real);
118             input_imag(i)(5) <= signed(element_6_imag);
                input_real(i)(6) <= signed(element_7_real);
120             input_imag(i)(6) <= signed(element_7_imag);
                input_real(i)(7) <= signed(element_8_real);
122             input_imag(i)(7) <= signed(element_8_imag);

124             if i = mat_size-1 then
                  loaded <= '1' after 10 ns;
126             end if;
          end loop;
128       file_close(infile);
          wait;
130


132   end process;
  end bhv;
```

Listing 8.12: Eingangs-Matrix aus Textdatei einlesen

```
1 library ieee;
  use ieee.std_logic_1164.all;
3 use ieee.numeric_std.all;

5 library work;
  use work.all;
7 use datatypes.all;

9 entity read_input_matrix_tb is
  end entity read_input_matrix_tb;
11
  architecture arch of read_input_matrix_tb is
13
    signal clk          : bit := '0';
15  signal loaded       : bit := '0';
    signal input_real   : t_2d_array;
17  signal input_imag   : t_2d_array;
```

```
19   component read_input_matrix is
       port(
21           clk          : in  bit;
             loaded       : out bit;
23           input_real   : out t_2d_array;
             input_imag   : out t_2d_array
25         );
   end component;
27
   begin
29   dut : read_input_matrix
       port map(
31               clk        => clk,
                 loaded     => loaded,
33               input_real => input_real,
                 input_imag => input_imag
35             );

37   clk <= not clk after 20 ns;
end arch;
```

Listing 8.13: Testbench für das Einlesen aus einer Textdatei

```
1  library IEEE;
   use ieee.std_logic_1164.all;
3  use ieee.numeric_std.all;

5  library STD;  -- for writing text file
   use STD.TEXTIO.ALL;
7  use ieee.std_logic_textio.all;

9  library work;
   use work.all;
11 use datatypes.all;
   use constants.all;
13



15
   entity write_results is
17   port(
         result_ready : in  bit;
19       result_real  : in  t_2d_array;
         result_imag  : in  t_2d_array;
21       write_done   : out bit
       );
23 end entity write_results;


25
   architecture bhv of write_results is
27 begin
   writing_to_file : process(result_ready)
```

```
29
    variable fstatus : file_open_status; -- status r,w
31  variable outline : line; -- writeout line
    file     outfile : text; -- filehandle
33
   --variable output1 : bit_vector(3 downto 0) := "0101";
35 --variable output2 : bit_vector(3 downto 0) := "0110";

37  variable element_1_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_1_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
39  variable element_2_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_2_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
41  variable element_3_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_3_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
43  variable element_4_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_4_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
45  variable element_5_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_5_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
47  variable element_6_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_6_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
49  variable element_7_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_7_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
51  variable element_8_real : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
    variable element_8_imag : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
   ;
53  variable space : character := ' ';

55  begin

57    file_open(fstatus, outfile, "/home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/
   Results.txt",  write_mode);

59    --if result_ready = '1' then

61  for i in 0 to mat_size-1 loop
      element_1_real := std_logic_vector(result_real(i)(0));
```

```
63        element_1_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(0));
          element_2_real := std_logic_vector(result_real(i)(1));
65        element_2_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(1));
          element_3_real := std_logic_vector(result_real(i)(2));
67        element_3_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(2));
          element_4_real := std_logic_vector(result_real(i)(3));
69        element_4_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(3));
          element_5_real := std_logic_vector(result_real(i)(4));
71        element_5_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(4));
          element_6_real := std_logic_vector(result_real(i)(5));
73        element_6_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(5));
          element_7_real := std_logic_vector(result_real(i)(6));
75        element_7_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(6));
          element_8_real := std_logic_vector(result_real(i)(7));
77        element_8_imag := std_logic_vector(result_imag(i)(7));

79        write(outline, element_1_real);
          write(outline, space);
81        write(outline, element_1_imag);
          write(outline, space);
83        write(outline, element_2_real);
          write(outline, space);
85        write(outline, element_2_imag);
          write(outline, space);
87        write(outline, element_3_real);
          write(outline, space);
89        write(outline, element_3_imag);
          write(outline, space);
91        write(outline, element_4_real);
          write(outline, space);
93        write(outline, element_4_imag);
          write(outline, space);
95        write(outline, element_5_real);
          write(outline, space);
97        write(outline, element_5_imag);
          write(outline, space);
99        write(outline, element_6_real);
          write(outline, space);
101       write(outline, element_6_imag);
          write(outline, space);
103       write(outline, element_7_real);
          write(outline, space);
105       write(outline, element_7_imag);
          write(outline, space);
107       write(outline, element_8_real);
          write(outline, space);
109       write(outline, element_8_imag);

111       writeline(outfile, outline);
      end loop;
113
```

```
    write_done <= '1';
115     file_close(outfile);
    --end if;
117
  end process;
119 end bhv;
```

Listing 8.14: Ergebnis-Matrix in Textdatei schreiben

```
1  library IEEE;
   use ieee.std_logic_1164.all;
3  use ieee.numeric_std.all;

5  library STD;  -- for writing text file
   use STD.TEXTIO.ALL;
7  use ieee.std_logic_textio.all;

9  library work;
   use work.all;
11 use datatypes.all;
   use constants.all;
13

15 entity write_test_tb is
   end entity write_test_tb;
17

19 architecture bhv of write_test_tb is

21   signal clk          : bit;
     signal loaded       : bit;
23   signal result_ready : bit;
     signal write_done   : bit;
25   signal loop_running : bit;
     signal loop_number  : signed(2 downto 0);
27   signal input_real   : t_2d_array;
     signal input_imag   : t_2d_array;
29   signal output       : std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0);

31   component read_input_matrix
       port(
33           clk        : in  bit;
             loaded     : out bit;
35           input_real : out t_2d_array;
             input_imag : out t_2d_array
37         );
     end component;
39
     component write_results
41     port(
         result_ready : in bit;
43       result_real  : in  t_2d_array;
```

```
          result_imag   : in  t_2d_array;
          write_done    : out bit;
          loop_number   : out signed(2 downto 0);
          loop_running  : out bit;
          output        : out std_logic_vector(bit_width_extern-1 downto 0)
        );
  end component;

begin

  mat : read_input_matrix
    port map(
              clk         => clk,
              loaded      => loaded,
              input_real  => input_real,
              input_imag  => input_imag
            );

  write : write_results
    port map(
              result_ready => result_ready,
              result_real  => input_real,
              result_imag  => input_imag,
              write_done   => write_done,
              loop_number  => loop_number,
              loop_running => loop_running,
              output       => output
            );

  result_ready <= loaded  after 20 ns;
  clk          <= not clk after 10 ns;

end bhv;
```

Listing 8.15: Testbensch für das schreiben in eine Textdatei

```
library IEEE;
use IEEE.STD_LOGIC_1164.ALL;
use ieee.numeric_std.all;
library work;
use work.all;
use datatypes.all;
use constants.all;


library STD;  -- for reading text file
use STD.TEXTIO.ALL;
use ieee.std_logic_textio.all;

entity dft8optimiert is
port(
     clk           : in  bit;
```

```
      nReset         : in  bit;
      loaded         : in  bit;
      input_real     : in  t_2d_array;
      input_imag     : in  t_2d_array;
      result_real    : out t_2d_array;
      result_imag    : out t_2d_array;
      result_ready   : out bit;
      idft           : in  bit;
      state_out      : out t_dft8_states;
      element_out    : out unsigned(5 downto 0);
      dft_1d_2d_out  : out bit
    );
end dft8optimiert;


architecture arch of dft8optimiert is

  signal dft_state, next_dft_state : t_dft8_states;


begin

  FSM_TAKT: process(clk)
  begin
    if clk='1' and clk'event then
      dft_state <= dft_state;
      state_out <= dft_state;
      if nReset='0' then
        dft_state <= idle;
        state_out <= idle;
      elsif loaded = '0' then
        dft_state <= idle;
        state_out <= idle;
      elsif loaded='1' and dft_state = idle then
        dft_state <= twiddle_calc;
        state_out <= twiddle_calc;
      else
        dft_state <= next_dft_state;
        state_out <= next_dft_state;
      end if;
    end if;
  end process;


  FSM_KOMB: process(dft_state)
    --constant twiddle_coeff : signed(16 downto 0) := "00010110101000001";
    variable twiddle_coeff : signed(bit_width_adder-1 downto 0);

    variable mult_re, mult_im : signed(bit_width_multiplier-1 downto 0);

    variable W_row, I_col : integer;
```

```
68      variable dft_1d_real, dft_1d_imag : t_2d_array;
        variable matrix_real, matrix_imag : t_2d_array;
70      variable temp_re, temp_im : t_1d_array6_13bit;
        variable temp14bit_re, temp14bit_im : signed(bit_width_adder downto 0);
72      variable dft_1d_2d    : bit;
        variable element      : unsigned(5 downto 0) := "000000";
74

76      variable row_col_idx : integer := 0;

78      --variable LineBuffer : LINE;

80

    begin
82      twiddle_coeff := "0001011010100";
        -- Flip-Flops
84         -- werden das 1. Mal sich selbst zu gewiesen, bevor sie einen Wert
     haben!
        result_ready <= '0';
86      element       := element;
        dft_1d_2d     := dft_1d_2d;
88      temp_re       := temp_re;
        temp_im       := temp_im;
90      mult_re       := mult_re;
        mult_im       := mult_im;
92      dft_1d_real   := dft_1d_real;
        dft_1d_imag   := dft_1d_imag;
94      matrix_real   := matrix_real;
        matrix_imag   := matrix_imag;
96      dft_1d_2d_out <= dft_1d_2d;

98

        -- Die Matrix hat 64 Elemente -> 2^6=64 -> 6-Bit Vektor passt genau.
     Ueberlauf = 1. Element vom naechsten Durchlauf.
100     -- Der Elemente-Vektor kann darueber hinaus in vordere Haelfte = Zeile
     und hintere Haelfte = Spalte augeteilt werden.
        -- So laesst sich auch ein Matrix-Element mit zwei Indizes ansprechen:
102
        -- Bei der IDFT sind die Zeilen 1 und 7, 2 und 6, 3 und 5 vertauscht. 1
     und 4 bleiben wie sie sind.
104
        row_col_idx := to_integer(element(5 downto 3)); -- Wird bei der
     Twiddlefaktor-Matrix als Zeilen-, bei der Zwischen- und
106                                                     -- Ausgangsmatrix als
     Spaltenindex verwendet.

108     if idft = '1' then
          if row_col_idx = 0 then
110         W_row := 0;
          else
112         W_row := 8-row_col_idx;  -- Twiddlefaktor-Matrix
```

```
      end if;
    else
      W_row := row_col_idx;  -- Twiddlefaktor-Matrix
    end if;

    I_col := to_integer(element(2 downto 0));  -- Input-Matrix


    if element = "000000" then
      if dft_1d_2d = '0' then
        matrix_real := input_real;
        matrix_imag := input_imag;
      else
        matrix_real := dft_1d_real;
        matrix_imag := dft_1d_imag;
      end if;
    end if;


    case dft_state is
      when idle =>
        next_dft_state <= twiddle_calc;

      when twiddle_calc =>  -- dft_state_out = 1
        -- Mit resize werden die 12 Bit Eingangswerte vorzeichengerecht auf 13 Bit erweitert, um um die richtige Groesse zu haben.
        -- Bei der Addition muessen die Summanden die gleiche Bit-Breite wie der Ergebnis-Vektor haben.
        case W_row is
          -- Die Faktoren (Koeffizienten) der Twiddlefaktor-Matrix W lassen sich ueber exp(-i*2*pi*[0:7]'*[0:7]/8) berechnen.
          -- 1. Zeile aus W -> nur Additionen
          when 0 =>
            -- Die 1. Zeile aus W besteht nur aus den Faktoren (1+j0). Daraus resultiert, dass die rellen
            -- und die imaginaeren Werte der Eingangs-Matrix unabhaengig von einander aufsummiert werden.
            -- Real
            temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(1) := resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(2) := resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(3) := resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);
            -- Imag
            temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder) + resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
```

```
            temp_im(2) := resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder)
    + resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
154         temp_im(3) := resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder)
    + resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);

156

        -- 2. Zeile aus W besteht aus den Faktoren
158     -- 0: ( 1.00000 + 0.00000i), 1: ( 0.70711 + 0.70711i), 2:
    (0.00000 + 1.00000i), 3: (-0.70711 + 0.70711i),
        -- 4: (-1.00000 + 0.00000i), 5: (-0.70711 - 0.70711i), 6:
    (0.00000 - 1.00000i), 7: ( 0.70711 - 0.70711i)
160
        -- Wegen der Faktoren (+/-0.70711 +/-0.70711i) haben die geraden
    Zeilen (beginnend bei 1) 12 statt 8 Subtraktionen
162     -- Zunaechst werden die Werte aufsummiert, die mit dem Faktor 1 "
    multipliziert" werden muessen.
        -- Dann werden die Werte aufsummiert, die mit 0,70711
    multipliziert werden muessen. Um sowohl den Quelltext und
164     -- insbesondere auch den Platzbedarf auf dem Chip klein zuhalten,
     wird die Multiplikation auf die Summe aller und
        -- nicht auf die einzelnen Werte angewandt.
166     -- Da immer genau die Haelfte der Faktoren positiv und die andere
     negativ ist, werden die Eingangswerte so sortiert,
        -- dass keine Negationen noetig sind.
168     when 1 =>
            -- Real
170         temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(1) := resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder);
172         -- MultPart
            temp_re(2) := resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
174         temp_re(3) := resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(4) := resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
176         temp_re(5) := resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
            -- Imag
178         temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder);
180         -- MultPart
            temp_im(2) := resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
182         temp_im(3) := resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(4) := resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
```

```
184             temp_im(5) := resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);

186         -- 3. Zeile aus W
            -- 0: (1.00000 + 0.00000i), 1: (0.00000 + 1.00000i), 2: (-1.00000
     + 0.00000i), 3: (-0.00000 - 1.00000i),
188         -- 4: (1.00000 - 0.00000i), 5: (0.00000 + 1.00000i), 6: (-1.00000
     + 0.00000i), 7: (-0.00000 - 1.00000i)
        when 2 =>
190             -- Real
            temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder);
192             temp_re(1) := resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(2) := resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder);
194             temp_re(3) := resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);
            --Imag
196             temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder);
198             temp_im(2) := resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(3) := resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder);
200
        -- 4. Zeile aus W
202     -- 0: ( 1.00000 + 0.00000i), 1: (-0.70711 + 0.70711i), 2:
    (-0.00000 - 1.00000i), 3: ( 0.70711 + 0.70711i)
        -- 4: (-1.00000 + 0.00000i), 5: ( 0.70711 - 0.70711i), 6: (
    0.00000 + 1.00000i), 7: (-0.70711 - 0.70711i)
204     when 3 =>
            -- Real
206             temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(1) := resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder);
208             --MultPart
            temp_re(2) := resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
210             temp_re(3) := resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(4) := resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);
212             temp_re(5) := resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);

214             -- Imag
```

```
            temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder);
            --MultPart
            temp_im(2) := resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(3) := resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(4) := resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(5) := resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);

        -- 5. Zeile
        -- 0: (1.00000 + 0.00000i), 1: (-1.00000 + 0.00000i), 2: (1.00000
 - 0.00000i), 3: (-1.00000 + 0.00000i),
        -- 4: (1.00000 - 0.00000i), 5: (-1.00000 + 0.00000i), 6: (1.00000
 - 0.00000i), 7: (-1.00000 + 0.00000i)
        when 4 =>
            -- Real
            temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(1) := resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(2) := resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(3) := resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);
            -- Imag
            temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(2) := resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
            temp_im(3) := resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);

        -- 6. Zeile
        -- 0: ( 1.00000 + 0.00000i), 1: (-0.70711 - 0.70711i), 2: (
0.00000 + 1.00000i), 3: ( 0.70711 - 0.70711i),
        -- 4: (-1.00000 + 0.00000i)  5: ( 0.70711 + 0.70711i), 6:
(-0.00000 - 1.00000i), 7: (-0.70711 + 0.70711i)
        when 5 =>
            -- Real
            temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder);
            temp_re(1) := resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder)
- resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder);
            --MultPart
```

```
246             temp_re(2) := resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(3) := resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
248             temp_re(4) := resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(5) := resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);
250             -- Imag
                temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder);
252             temp_im(1) := resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder);
            --MultPart
254             temp_im(2) := resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
                temp_im(3) := resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
256             temp_im(4) := resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);
                temp_im(5) := resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder);
258
        -- 7. Zeile
260     -- 0: (1.00000 + 0.00000i), 1: (-0.00000 - 1.00000i), 2:
    (-1.00000 + 0.00000i), 3: ( 0.00000 + 1.00000i),
        -- 4: (1.00000 - 0.00000i), 5: (-0.00000 - 1.00000i), 6:
    (-1.00000 + 0.00000i), 7: (-0.00000 + 1.00000i)
262     when 6 =>
            -- Real
264             temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(1) := resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder);
266             temp_re(2) := resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(3) := resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder);
268             -- Imag
                temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder);
270             temp_im(1) := resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
                temp_im(2) := resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder);
272             temp_im(3) := resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);

274     -- 8. Zeile
        -- 0: ( 1.00000 + 0.00000i), 1: ( 0.70711 - 0.70711i), 2:
    (-0.00000 - 1.00000i), 3: (-0.70711 - 0.70711i),
```

```
276         -- 4: (-1.00000 + 0.00000i), 5: (-0.70711 + 0.70711i), 6:
    (-0.00000 + 1.00000i), 7: ( 0.70711 + 0.70711i)
        when 7 =>
278             -- Real
                temp_re(0) := resize(matrix_real(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(2)(I_col), bit_width_adder);
280             temp_re(1) := resize(matrix_imag(6)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(4)(I_col), bit_width_adder);
                --MultPart
282             temp_re(2) := resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(3) := resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder);
284             temp_re(4) := resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
                temp_re(5) := resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
286             -- Imag
                temp_im(0) := resize(matrix_imag(0)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(4)(I_col), bit_width_adder);
288             temp_im(1) := resize(matrix_real(2)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(6)(I_col), bit_width_adder);
                --MultPart
290             temp_im(2) := resize(matrix_real(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(3)(I_col), bit_width_adder);
                temp_im(3) := resize(matrix_imag(1)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(5)(I_col), bit_width_adder);
292             temp_im(4) := resize(matrix_real(3)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_imag(5)(I_col), bit_width_adder);
                temp_im(5) := resize(matrix_imag(7)(I_col), bit_width_adder)
    - resize(matrix_real(7)(I_col), bit_width_adder);
294
        when others => element := element; -- "dummy arbeit", es sind
    bereits alle Faelle abgedeckt!
296     end case;

298     next_dft_state <= additions_stage1;


300
   when additions_stage1 =>  -- dft_state_out = 2
302
    -- Es wird vor jeder Addition ein Bitshift auf die Summanden
    angewandt, um den Wertebereich der Speichervariable beim
    zurueckschreiben nicht zu ueberschreiten (1. Mal)
304
    -- Zeilen 1, 3, 5, 7 (ungerade) aufsummieren (bzw. 0(000XXX), 2(010
    XXX), 4(100XXX), 6(110XXX) beginnend bei 0)
306     if element(3) = '0' then

308
```

```
310         -- Real
            temp_re(0) := resize(temp_re(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
312         temp_re(1) := resize(temp_re(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(3)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            -- Imag
314         temp_im(0) := resize(temp_im(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            temp_im(1) := resize(temp_im(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(3)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
316       else
            -- gerade Zeilen aus W
318         -- Real
            --ConstPart
320         temp_re(0) := resize(temp_re(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            --MultPart
322         temp_re(2) := resize(temp_re(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(3)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            temp_re(4) := resize(temp_re(4)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(5)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
324         -- Imag
            --ConstPart
326         temp_im(0) := resize(temp_im(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            --MultPart
328         temp_im(2) := resize(temp_im(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(3)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
            temp_im(4) := resize(temp_im(4)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(5)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
330       end if;

332       next_dft_state <= additions_stage2;

334

        when additions_stage2 => -- dft_state_out = 3
336       -- Es wird vor jeder Addition ein Bitshift auf die Summanden
    angewandt, um den Wertebereich der Speichervariable nicht zu
    ueberschreiten (2. Mal)
      -- Zusaetzlich wird wird beim Zuweisen der ungeraden Zeilen an die
    1D-DFT-Matrix zwei wweitere Male geshiftet.
```

```
338         -- 1 Mal, um den Wertebereich der 1D- bzw. 2D-DFT-Matrix klein
    genug zu halten, ein weiteres Mal, um gleich oft wie bei den geraden
    Zeilen zu shiften

340         -- Zeilen 1, 3, 5, 7 (wie oben)
            if element(3) = '0' then
342
                -- Real
344             temp_re(0) := resize(temp_re(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
                -- Imag
346             temp_im(0) := resize(temp_im(0)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(1)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);

348             -- Hier werden die Bits um 2 Stellen nach rechts geschoben,
    damit die Werte mit den Zeilen 2, 4, 6, 8 vergleichbar sind. Dort wird
    insgesamt gleich
                -- oft geshiftet, aber auch 1x mehr aufaddiert.
350             -- Indizes vertauschen -> Transponiert abspeichern
                if dft_1d_2d = '0' then
352                 dft_1d_real(l_col)(row_col_idx) := resize(temp_re(0)(
    bit_width_adder-1 downto 2), bit_width_extern);
                    dft_1d_imag(l_col)(row_col_idx) := resize(temp_im(0)(
    bit_width_adder-1 downto 2), bit_width_extern);
354             else
                    result_real(l_col)(row_col_idx) <= resize(temp_re(0)(
    bit_width_adder-1 downto 2), bit_width_extern);
356                 result_imag(l_col)(row_col_idx) <= resize(temp_im(0)(
    bit_width_adder-1 downto 2), bit_width_extern);
                end if;
358
                element := element+1;
360             element_out <= element;

362             -- naechster Zustand
                next_dft_state <= twiddle_calc;
364
            else
366             -- Real
                temp_re(2) := resize(temp_re(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_re(4)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);
368
                -- Imag
370             temp_im(2) := resize(temp_im(2)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder) + resize(temp_im(4)(bit_width_adder-1 downto 1),
    bit_width_adder);

372             -- naechster Zustand
```

```
            next_dft_state <= const_mult;
374         end if;

376

        when const_mult =>  -- dft_state_out = 4
378

        -- Der Zielvektor der Multiplikation ist 26 Bit breit, die beiden
    Multiplikanten sind mit je 13 Bit wie gefordert halb so breit.
380
        -- Zeilen 2, 4, 6, 8 (vergleichbar mit oben)
382         mult_re := temp_re(2) * twiddle_coeff; --(16 downto 16-(
    bit_width_adder-1));
            mult_im := temp_im(2) * twiddle_coeff; --(16 downto 16-(
    bit_width_adder-1));
384
            next_dft_state <= additions_stage3;
386

        when additions_stage3 =>  -- dft_state_out = 5
388
        -- Die vordersten 12 Bit des Multiplikationsergebnisses werden
    verwendet und um 1 Bit nach rechts geshiftet, damit der Wert halbiert
    wird und der Zielvektor spaeter keinen Ueberlauf hat.
390         -- Um wieder die vollen 13 Bit zu erhalten, wird die resize-
    Funktion verwendet.
            -- Real
392
            temp14bit_re := resize(mult_re(bit_width_multiplier-4 downto
394 bit_width_multiplier-4-bit_width_extern), bit_width_adder+1) + resize(
    temp_re(0)(bit_width_adder-1 downto 1), bit_width_adder+1);
            temp_re(0) := temp14bit_re(bit_width_adder downto 1);
396
            -- Imag
398         temp14bit_im := resize(mult_im(bit_width_multiplier-4 downto
    bit_width_multiplier-4-bit_width_extern), bit_width_adder+1) + resize(
    temp_im(0)(bit_width_adder-1 downto 1), bit_width_adder+1);
            temp_im(0) := temp14bit_im(bit_width_adder downto 1);
400
            -- Indizes vertauschen -> Transponiert abspeichern
402         if dft_1d_2d = '0' then
              dft_1d_real(l_col)(row_col_idx) := temp_re(0)(bit_width_adder-1
    downto 1);
404           dft_1d_imag(l_col)(row_col_idx) := temp_im(0)(bit_width_adder-1
    downto 1);
            else
406           result_real(l_col)(row_col_idx) <= temp_re(0)(bit_width_adder-1
    downto 1);
              result_imag(l_col)(row_col_idx) <= temp_im(0)(bit_width_adder-1
    downto 1);
408         end if;
```

```
410         next_dft_state <= twiddle_calc;
            if element = 63 then
412           if dft_1d_2d = '1' then
                next_dft_state <= set_ready_bit;
414           end if;
              dft_1d_2d := not dft_1d_2d;
416           dft_1d_2d_out <= dft_1d_2d;
            end if;
418


420         element := element+1;
            element_out <= element;
422


424       when set_ready_bit =>
            result_ready <= '1';
426         next_dft_state <= twiddle_calc;


428
          when others => next_dft_state <= twiddle_calc;
430     end case;

432   end process;
    end arch;
```

Listing 8.16: Berechnung der 2D-DFT

```
    library ieee;
2   use ieee.std_logic_1164.all;
    use ieee.numeric_std.all;
4   library work;
    use work.all;
6   use constants.all;
    use datatypes.all;
8
    entity dft8optimiert_top is
10  --      port(
    --           result_real : out t_2d_array;
12  --           result_imag : out t_2d_array
    --         );
14  end entity dft8optimiert_top;

16  architecture arch of dft8optimiert_top is

18    signal nReset         : bit;
      signal clk            : bit;
20    signal input_real     : t_2d_array;
      signal input_imag     : t_2d_array;
22    signal result_real    : t_2d_array;
      signal result_imag    : t_2d_array;
24    signal loaded         : bit;
      signal result_ready   : bit;
```

```
26  signal write_done     : bit;
    signal idft           : bit := '0';
28
    signal state_out      : t_dft8_states;
30  signal element_out    : unsigned(5 downto 0);
    signal dft_1d_2d_out  : bit;
32


34  component dft8optimiert
      port(
36          clk             : in  bit;
            nReset          : in  bit;
38          loaded          : in  bit;
            input_real      : in  t_2d_array;
40          input_imag      : in  t_2d_array;
            result_real     : out t_2d_array;
42          result_imag     : out t_2d_array;
            result_ready    : out bit;
44          idft            : in  bit;
            state_out       : out t_dft8_states;
46          element_out     : out unsigned(5 downto 0);
            dft_1d_2d_out   : out bit
48        );
    end component;
50


52  component read_input_matrix
      port(
54          clk         : in  bit;
            loaded      : out bit;
56          input_real  : out t_2d_array;
            input_imag  : out t_2d_array
58        );
    end component;
60


62  component write_results
      port(
64          result_ready : in bit;
            result_real  : in t_2d_array;
66          result_imag  : in t_2d_array;
            write_done   : out bit
68        );
    end component;
70


72  begin
      dft : dft8optimiert
74      port map(
                nReset          => nReset,
76              clk             => clk,
```

```
                loaded         => loaded,
                input_real     => input_real,
                input_imag     => input_imag,
                result_real    => result_real,
                result_imag    => result_imag,
                result_ready   => result_ready,
                idft           => idft,
                state_out      => state_out,
                element_out    => element_out,
                dft_1d_2d_out  => dft_1d_2d_out
              );

    mat : read_input_matrix
      port map(
                clk          => clk,
                loaded       => loaded,
                input_real   => input_real,
                input_imag   => input_imag
              );

    write : write_results
      port map(
                result_ready => result_ready,
                result_real  => result_real,
                result_imag  => result_imag,
                write_done   => write_done
              );

    clk    <= not clk after 20 ns;
    nReset <= '1' after 40 ns;

end arch;
```

Listing 8.17: Top-Level-Entität der 2D-DFT

8.5 Testumgebung

```
#!/bin/bash

matlab_script="binMat2decMat.m"

./simulate.sh && matlab -nojvm -nodisplay -nosplash -r $matlab_script

stty echo
```

Listing 8.18: Aufruf der Testumgebung, Vergleich von VHDL- und Matlab-Ergebnissen

tlab

```
#!/bin/bash
```

```
# global settings

errormax=15
worklib=worklib
#testbench=top_level_tb
testbench=dft8optimiert_top
architecure=arch
simulation_time="1500ns"


# VHDL-files

constant_declarations="constants.vhdl"
datatype_declarations="datatypes.vhdl"

main_entity="dft8optimiert.vhdl"
top_level_entity="dft8_optimiert_top.vhdl"
#top_level_testbench=

embedded_entity_1="read_input_matrix.vhdl"
embedded_entity_2="write_results.vhdl"


constant_declarations=$directory$constant_declarations
datatype_declarations=$directory$datatype_declarations
function_declerations=$directory$function_declerations
main_entity=$directory$main_entity
top_level_entity=$directory$top_level_entity
#top_level_testbench=$directory$top_level_testbench

embedded_entity_1=$directory$embedded_entity_1
embedded_entity_2=$directory$embedded_entity_2


# libs und logfiles

cdslib="cds.lib"
elab_logfile="ncelab.log"
ncvhdl_logfile="nchvdl.log"
ncsim_logfile="ncsim.log"

cdslib=${base_dir}${work_dir}${cdslib}
elab_logfile=${dirctory}${elab_logfile}
ncvhdl_logfile=${directory}${ncvhdl_logfile}
ncsim_logfile=${directory}${ncsim_logfile}


##

ncvhdl \
```

```
-work $worklib \
-cdslib $cdslib \
-logfile $ncvhdl_logfile \
-errormax $errormax \
-update \
-v93 \
-linedebug \
$constant_declarations \
$datatype_declarations \
$embedded_entity_1 \
$embedded_entity_2 \
$main_entity \
$top_level_entity \
#$top_level_testbench
#-status \

ncelab \
-work $worklib \
-cdslib $cdslib \
-logfile $elab_logfile \
-errormax $errormax \
-access +wc \
${worklib}.${testbench}
#-status \

ncsim \
-cdslib $cdslib \
-logfile $ncsim_logfile \
-errormax $errormax \
-exit \
${worklib}.${testbench}:${architecure} \
-input testRUN.tcl
#-status \


#ncvhdl -work worklib -cdslib /home/tlattmann/cadence/mat_mult/cds.lib -
    logfile /home/tlattmann/cadence/mat_mult/nchvdl.log -errormax 15 -update
     -v93 -linedebug /home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/constants.vhdl /
    home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/datatypes.vhdl /home/tlattmann/
    cadence/mat_mult/HDL/functions.vhdl /home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL
    /read_input_matrix.vhdl /home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/
    write_results.vhdl /home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/dft8optimiert.
    vhdl /home/tlattmann/cadence/mat_mult/HDL/dft8_optimiert_top.vhdl -
    status

#ncelab -work worklib -cdslib /home/tlattmann/cadence/mat_mult/cds.lib -
    logfile /home/tlattmann/cadence/mat_mult/ncelab.log -errormax 15 -access
     +wc worklib.dft8optimiert_top -status

#ncsim -cdslib /home/tlattmann/cadence/mat_mult/cds.lib -logfile /home/
```

```
    tlattmann/cadence/mat_mult/ncsim.log -errormax 15 worklib.
    dft8_optimiert_top:arch -input testRUN.tcl -status

#database -open waves -into waves.shm -default
#probe -create -shm :clk :input_imag :input_real :loaded :mult_im_out :
    mult_re_out :multState_out :nReset :result_imag :result_ready :
    result_real :sum1_stage1_3v6_re_out :sum1_stage2_2v3_re_out :
    sum1_stage2_3v3_re_out :sum1_stage3_1v1_re_out :sum3_stage1_im_out :
    sum3_stage1_re_out :sum3_stage2_im_out :sum3_stage2_re_out :
    sum3_stage3_im_out :sum3_stage3_re_out :sum3_stage4_im_out :
    sum3_stage4_re_out :write_done
```

Listing 8.19: Simulations des VHDL-Quelltextes

```
run 32us
```

Listing 8.20: Dauer der Simulation

```
filename_2 = 'InputMatrix_komplex.txt';
filename_1 = 'Results.txt';

delimiterIn = ' ';

bit_width_extern = 13

Input_bin = importdata(filename_2, delimiterIn);
Input_bin_real = Input_bin(:,1:2:end);
Input_bin_imag = Input_bin(:,2:2:end);

Results_vhdl_bin = importdata(filename_1, delimiterIn);
Results_vhdl_bin_real = Results_vhdl_bin(:,1:2:end);
Results_vhdl_bin_imag = Results_vhdl_bin(:,2:2:end);


Input_dec_imag = nan(8);
Results_vhdl_dec_real = nan(8);
Results_vhdl_dec_imag = nan(8);
Result_octave_real_1d = nan(8);
Result_octave_imag_1d = nan(8);


a=fi(0,1,bit_width_extern,bit_width_extern-2);

N = 8;
for m = 1:N
  for n = 1:N
    a.bin=mat2str(Results_vhdl_bin_real(m,n),bit_width_extern);
    Results_vhdl_dec_real(m,n) = a.double;
    a.bin=mat2str(Results_vhdl_bin_imag(m,n),bit_width_extern);
    Results_vhdl_dec_imag(m,n) = a.double;

    a.bin=mat2str(Input_bin_real(m,n),bit_width_extern);
```

```
35      Input_dec_real(m,n) = a.double;
        a.bin=mat2str(Input_bin_imag(m,n),bit_width_extern);
37      Input_dec_imag(m,n) = a.double;
    end
39  end


41
Input_dec=Input_dec_real+1i*Input_dec_imag;
43


45  TW=exp(-i*2*pi*[0:7]'*[0:7]/8);


47




49
%Result_octave_1d=TW*Input_dec;
51  %Result_octave_real_1d=real(Result_octave_1d.')/16
%Result_octave_imag_1d=imag(Result_octave_1d)
53
Result_octave=TW*Input_dec*TW.';
55  Result_octave=Result_octave./256;

57  Results_vhdl_dec_real
Result_octave_real=real(Result_octave)
59
Result_octave_imag=imag(Result_octave);
61  Results_vhdl_dec_imag;

63  diff_real=Result_octave_real-Results_vhdl_dec_real
diff_imag=Result_octave_imag-Results_vhdl_dec_imag;
65
quit
```

Listing 8.21: Berechnung der Differenzen der DFT in Matlab und VHDL