

# Chipimplementation einer zweidimensionalen Fouriertransformation für die Auswertung eines Sensor-Arrays

Bachelorkolloquium

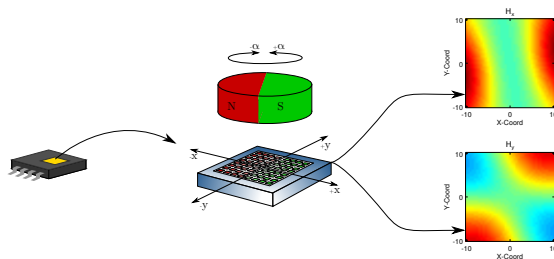
Thomas Lattmann

2. Mai 2018

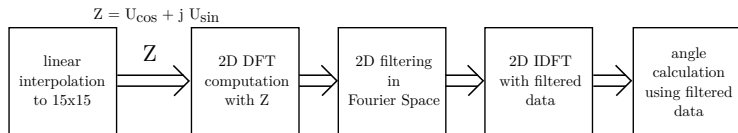
## Gliederung:

- Einleitung
- Grundlagen
- Analyse und Entwurf
- Testumgebung und Evaluation
- Zusammenfassung und Ausblick

- 350  $\mu\text{m}$  Prozess, EuroPractice
- Array von Magnetsensoren
- Sensoren, Signalverarbeitung & Ausgabe des digitalen Nutzsignals auf einem ASIC



Quelle: SensorAusgang.pdf, K.-R. Riemschneider + T. Schütte



Quelle: [Frequency\\_filtering\\_and\\_stray\\_field\\_compensation\\_using\\_2D-DFT\\_algorithm.pdf](#), K.-R. Riemschneider + T. Schütze

## Gliederung:

- Interpretation von Dualzahlen
- Komplexe Multiplikation
- Matrixmultiplikation
- DFT und IDFT
- 2D-DFT

Mögliche Arten sind:

- positive Ganzzahldarstellung (a)
- Darstellung im Einerkomplement (b)
- Darstellung im Zweierkomplement (c)
- vorzeichenbehaftete Festkommazahlen (SQ-Format) mit u. ohne Vorkommaanteil (d)

Beispiel:

1001011010100<sub>2</sub>

$$4096 + 512 + 128 + 64 + 16 + 4 = 4820_{10} \quad (a)$$

$$-(512 + 128 + 64 + 16 + 4) = -724_{10} \quad (b)$$

$$-4096 + 512 + 128 + 64 + 16 + 4 = -3372_{10} \quad (c)$$

$$-4 + 0,5 + 0,125 + 0,062 + 0,015625 + 0,00390625 = -3,29296875_{10} \quad \text{in S2Q10 (d)}$$

Mögliche Arten sind:

- positive Ganzzahldarstellung (a)
- Darstellung im Einerkomplement (b)
- Darstellung im Zweierkomplement (c)
- vorzeichenbehaftete Festkommazahlen (SQ-Format) mit u. ohne Vorkommaanteil (d)

Beispiel:

$$1001011010100_2$$

$$4096 + 512 + 128 + 64 + 16 + 4 = 4820_{10} \quad (a)$$

$$-(512 + 128 + 64 + 16 + 4) = -724_{10} \quad (b)$$

$$-4096 + 512 + 128 + 64 + 16 + 4 = -3372_{10} \quad (c)$$

$$-4 + 0,5 + 0,125 + 0,062 + 0,015625 + 0,00390625 = -3,29296875_{10} \quad \text{in S2Q10 (d)}$$

Komplexe Multiplikation sind 4 einfache Multiplikationen und 2 Additionen.

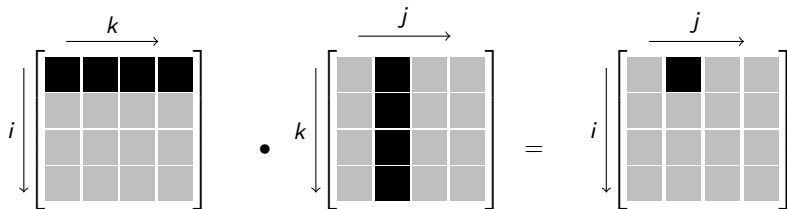
$$\begin{aligned}e + jf &= (a + jb) \cdot (c + jd) \\&= a \cdot c + j(a \cdot d) + j(b \cdot c) + j^2(b \cdot d) \\&= a \cdot c - b \cdot d + j(a \cdot d + b \cdot c)\end{aligned}$$

Wenn einer der beiden Multiplikatoren keinen Imaginärteil haben, reduziert sich das zu

$$\begin{aligned}e + jf &= a \cdot (c + jd) \\&= a \cdot c + j(a \cdot d)\end{aligned}$$



# Veranschaulichung der Matrixmultiplikation



DFT:

Summenschreibweise

$$X^*[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}$$

Matrixschreibweise

$$W = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}$$
$$X^* = W \cdot x$$

IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] \cdot e^{+j2\pi \frac{mn}{N}}$$

DFT:

Summenschreibweise

$$X^*[m] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}$$

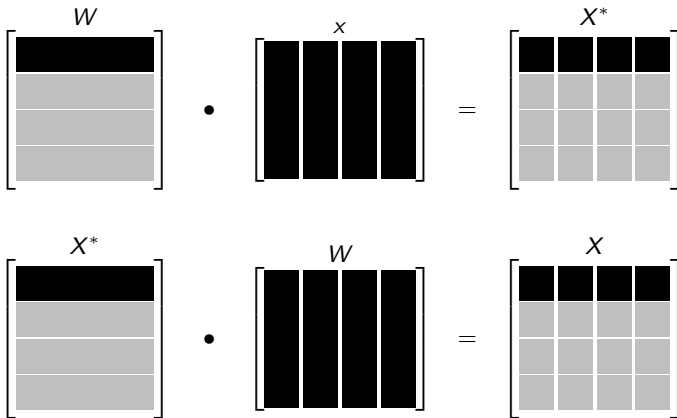
Matrixschreibweise

$$W = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{mn}{N}}$$
$$X^* = W \cdot x$$

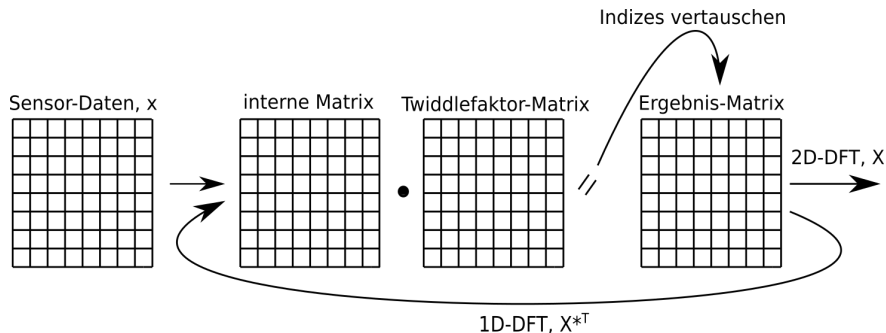
IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X^*[m] \cdot e^{+j2\pi \frac{mn}{N}}$$

$$\begin{aligned} X &= W \cdot x \cdot W \\ &= X^* \cdot W \end{aligned}$$

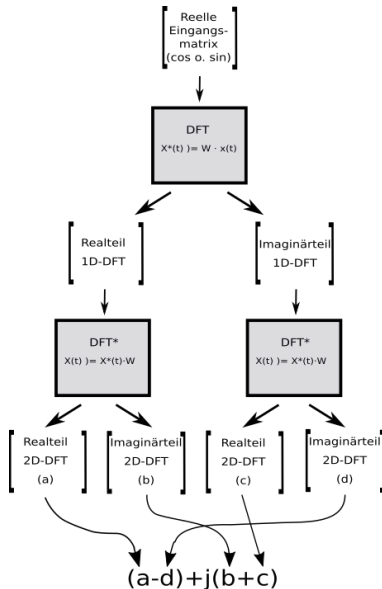


$$\begin{aligned} X &= \left( (x \cdot W)^T \cdot W \right)^T \\ &= \left( X^{*T} \cdot W \right)^T \end{aligned}$$

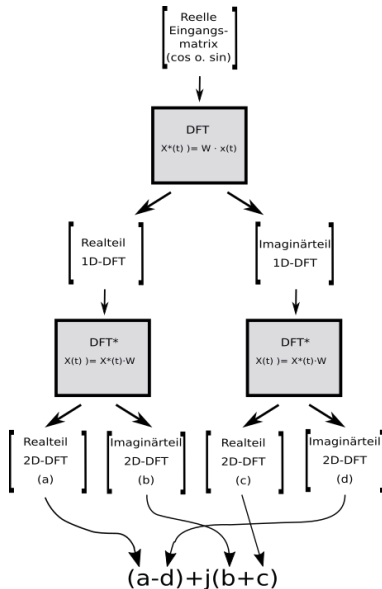


- optimierte Matrixmultiplikation mit reellen Eingangswerten
- optimierte Matrixmultiplikation mit komplexen Eingangswerten
- Fast Fouriertransformation (Butterfly-Algorithmus)
- allgemeine Matrixmultiplikation

# 2D-DFT mit reellen Eingangswerten zur Ausnutzung von Redundanzen



# 2D-DFT mit reellen Eingangswerten zur Ausnutzung von Redundanzen

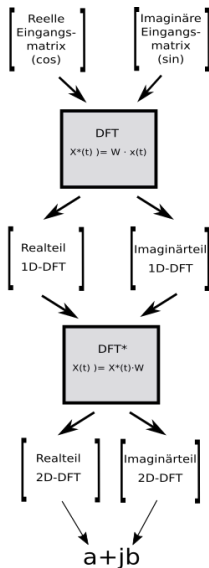


	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6	A4	B4	C4	D4	E4	F4	G4	H4
7	A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3
8	A2	B2	C2	D2	E2	F2	G2	H2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6	-A4	-B4	-C4	-D4	-E4	-F4	-G4	-H4
7	-A3	-B3	-C3	-D3	-E3	-F3	-G3	-H3
8	-A2	-B2	-C2	-D2	-E2	-F2	-G2	-H2



## 2D-DFT mit komplexen Eingangswerten



Methode	Anzahl reeller Multiplikationen
reelle Eingangswerte	64
komplexe Eingangswerte	128
FFT	128
allgemeine Matrixmultiplikation	4096

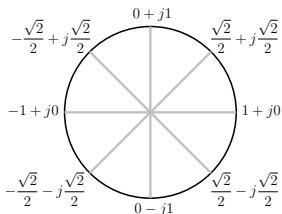
Gliederung:

- Gegenüberstellung verschiedener Größen von Twiddlefaktormatrizen
- Optimieren der  $8 \times 8$ -DFT
- Konstantenmultiplikation
- Benötigte Takte
- Zustandsfolge
- Entwickeln der 2D-DFT auf Basis der 1D-DFT

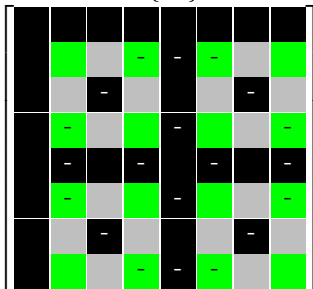
# Gegenüberstellung verschiedener Größen von DFT-Twiddlefaktormatrizen

N	8	9	12	15	16
$N \times N$	64	81	144	225	256
trivial $\Re$	48	45	128	81	128
nicht triv. $\Re$	16	36	16	144	128
triv. $\Im$	48	21	96	45	128
nicht triv. $\Im$	16	60	48	180	128
$\sum$ triv.	96	66	224	126	256
$\sum$ nicht triv.	32	96	64	324	256
Anzahl verschiedener nicht trivialer Werte	1	7	1	13	3
Verhältnis $\sum$ trivial / $\sum$ nicht trivial	3	0,6875	3,5	0,3889	1

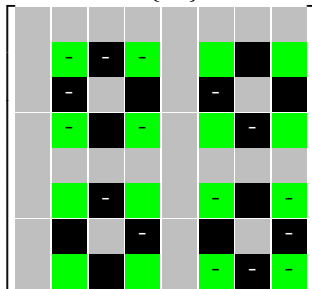
# Optimierung der 8x8-DFT



$Re\{W\}$

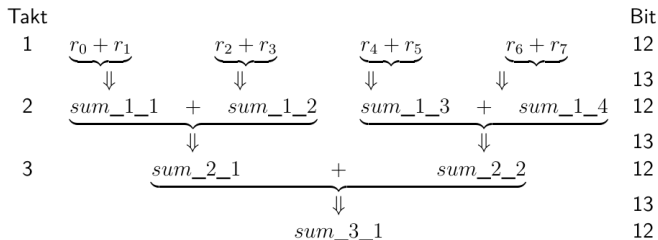


$Im\{W\}$

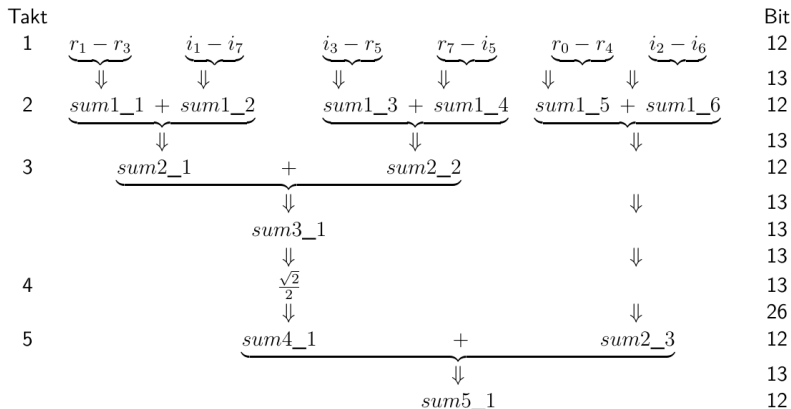


Legende:  $\blacksquare = 1$   $\blacksquare = -1$   $\square = 0$   $\color{red}\square = \frac{\sqrt{2}}{2}$   $\color{red}\square = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. Spalte:  $r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$



2. Spalte:  $r_1 - r_3 + i_1 - i_7 + i_3 - r_5 + r_7 - i_5 + r_0 - r_4 + i_2 - i_6$



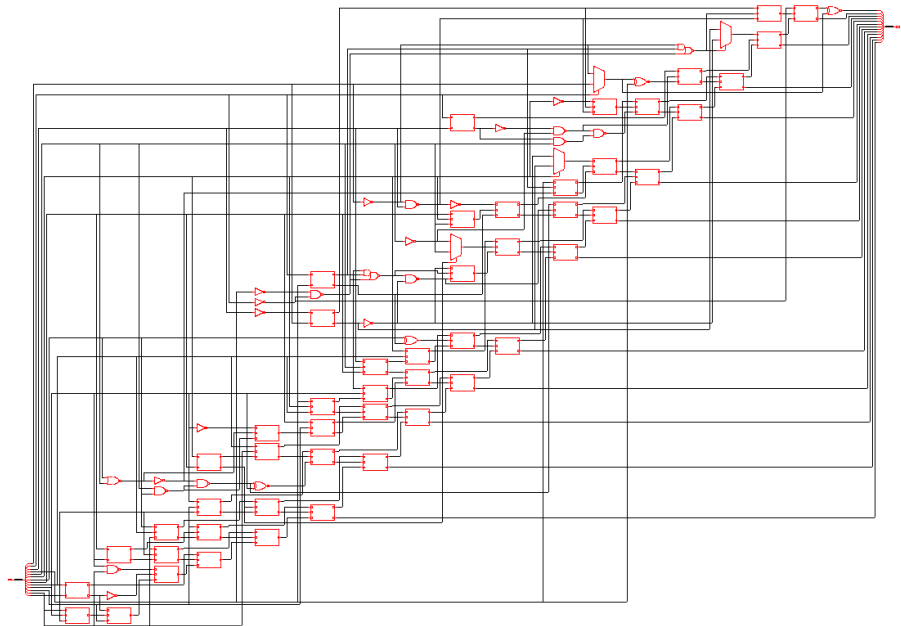
# Summe der Takte für die Berechnung der 2D-DFT

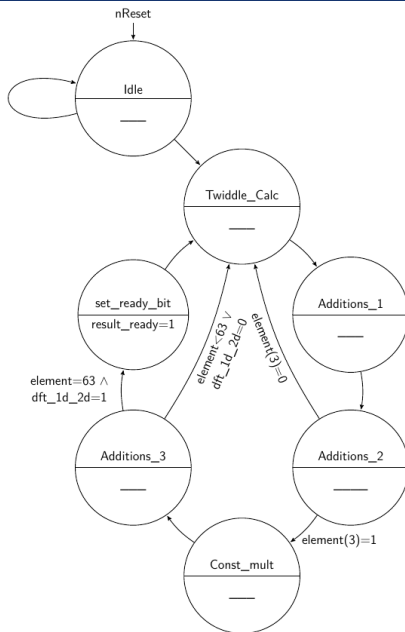
Zeile	Additionen pro Element ( $N$ )	Takte pro Element ( $\log_2(N)$ )	Takte für Multiplikation	Summe der Takte
1	8	3	0	3
2	12	3,6	1	5
3	8	3	0	3
4	12	3,6	1	5
5	8	3	0	3
6	12	3,6	1	5
7	8	3	0	3
8	12	3,6	1	5

$$\Rightarrow \text{Summe der Takte ist } \underbrace{(3 \cdot 4)}_{\substack{\text{ungerade} \\ \text{Zeilen} \\ \text{aus} \\ W}} + \underbrace{(5 \cdot 4)}_{\substack{\text{gerade} \\ \text{Zeilen} \\ \text{aus} \\ W}} \cdot \underbrace{8}_{\substack{\text{alle} \\ \text{Spalten} \\ \text{aus} \\ \text{Input}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{1D-DFT} \\ \text{und} \\ \text{2D-DFT}}} = 512$$



# Konstantenmultiplikation mit $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.70703125 = 0001011010100_2$



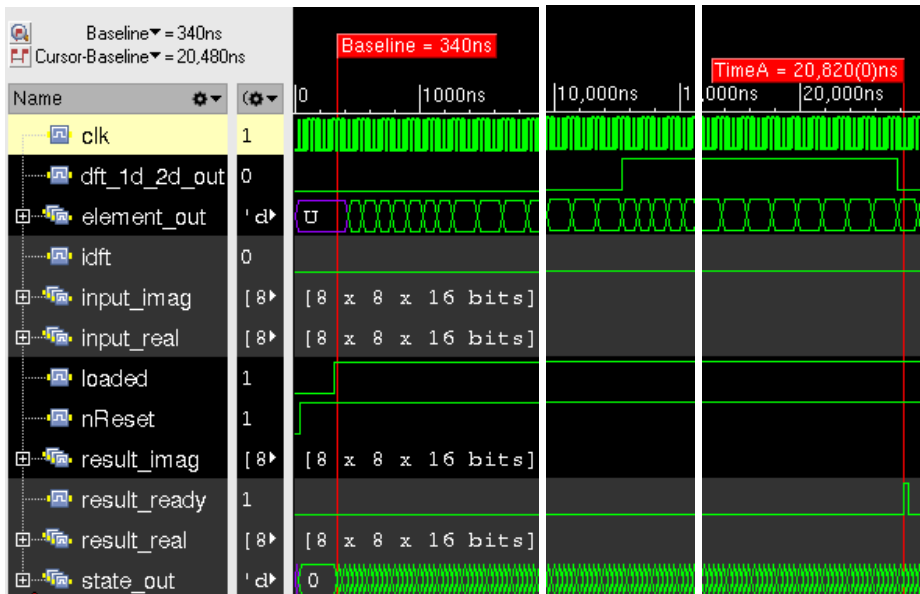


Gliederung:

- Testumgebung
- Zeitabschätzung
- Chipimplementation

- Simulation mit NC Sim und SimVision
  - ▶ nützlich für Teilfunktionen
  - ▶ Betrachtung einzelner Signalverläufe
- Automatisierung durch Shell-Skript
  - ▶ Simulation mit NC Sim und TCL-Skript
  - ▶ Berechnung mittels Matlab
  - ▶ Vergleich

# Simulationsprogramm NC Sim



### Edge counts for :clk:

Number of posedges	512
Number of negedges	512
Number of edges	1024
Time high	10,240ns
Time low	10,240ns
Duty cycle	50%

Ok

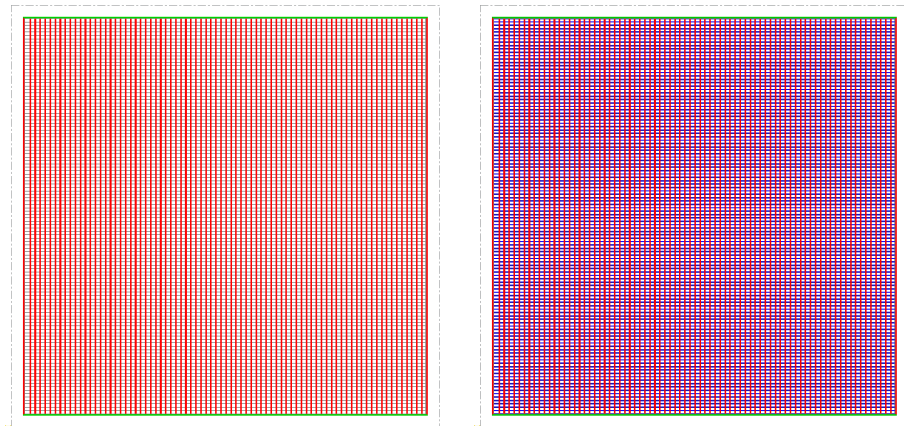
Gegeben: Systemtakt: 100 MHz, max. Drehzahl: 8000min<sup>-1</sup>, Auflösung: 1°

$$\frac{8000 \text{ min}^{-1}}{60} = 133, \bar{3} \text{ sec}^{-1}$$

$$\curvearrowright 1 \text{ Umdrehung} = \frac{1}{133, \bar{3} \text{ sec}^{-1}} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

$$1^\circ \hat{=} \frac{7,5 \cdot 10^{-3} \text{ sec}}{360} = 20,83 \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

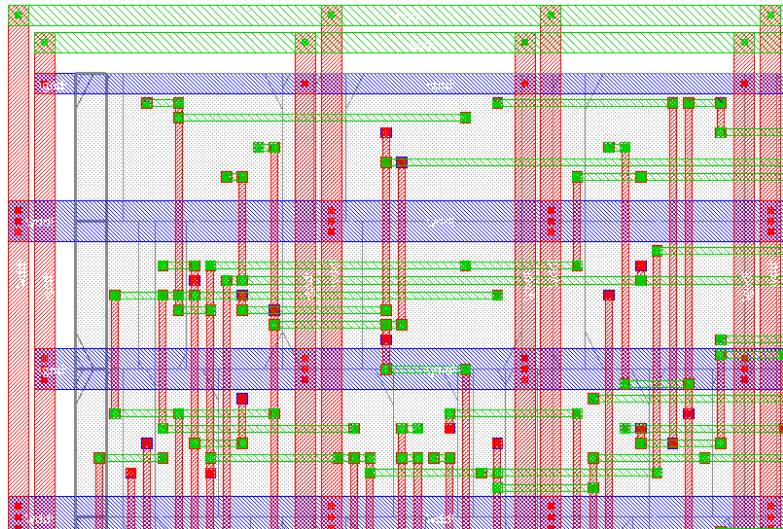
$$20,83 \cdot 10^{-6} \text{ sec} \cdot 100 \text{ MHz} = 2083 \text{ Takte}$$



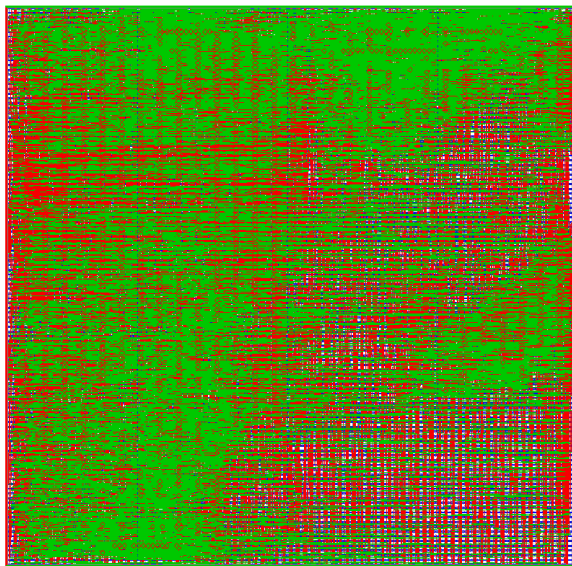
blau: Layer 1, rot: Layer 2, grün: Layer 3



# Chipimplementation: Platzierung der Standardzellen



blau: Layer 1, rot: Layer 2, grün: Layer 3



Standardzellen:

15 310

Fläche:

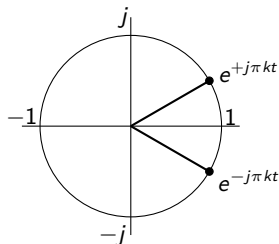
$1\,524\,960\mu\text{m}^2 = 1,5\text{mm}^2$

Prozess:

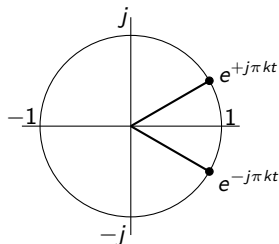
$350\mu\text{m}^2$

$$W = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi mn}{N}}$$

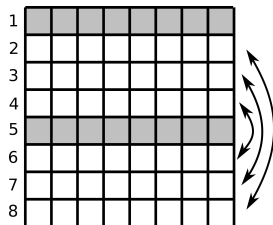
$$W^* = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{+\frac{j2\pi mn}{N}}$$



$$W = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{j2\pi mn}{N}}$$



$$W^* = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{+\frac{j2\pi mn}{N}}$$



- DFT als  $8 \times 8$  hat sich als effizient erwiesen
- Optimierung der Multiplikationen mit der Twiddlefaktormatrix
- Kritischer Pfad scheint Konstantenmultiplikation zu sein
- Berechnung der 1D- und 2D-DFT mit selber Einheit
- Benötigte Takte liegen im realistischen Rahmen
- DFT und IDFT benötigen zusammen etwa 50% der verfügbaren Takte
- IDFT kann durch geringe Ergänzungen berechnet werden
- Wertvolle Grundlagen für die Implementation der  $15 \times 15$  2D-DFT

- Reduzierung des kritischen Pfades
  - ▶ auf zwei Schaltnetze aufteilen
  - ▶ Wallace-Tree verwenden
- 15x15 mit ähnlich vielen Takten