Ejercicios, métodos numéricos.
FIUSAC

Wilson S. Tubín
wilsoneliseogt@gmail.com

Los ejercicios fueron tomados de libro titulado «Análisis Numérico» novena edicion de Richard L. Burden y J. Douglas Faires.

Capítulo 1

Biseccion

Ejercicios de Seccion 2.1, Pág. 54

1.1. ejercicio 2

Sea $f(x) := 3(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$. Use el método de bisección para encontrar p_3 en los siguientes intervalos.

a) $[-2, 1.5]$

b) $[-1.25, 2.5]$

1.1.1. inciso a)

```
$ biseccion(-2,1.5,5,3);
```

N	a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)	f$(a)*$f(p)	error
1	-2	1.5	-0.25	-22.5	3.75	2.109375	-47.4609375	1.75
2	-2	-0.25	-1.125	-22.5	2.109375	-1.2949219	29.1357428	0.875
3	-1.125	-0.25	-0.6875	-1.2949219	2.109375	1.8786621	-2.4327207	0.4375

1.1.2. inciso b)

```
biseccion(-1.25,2.5,5,3);
```

N	a	b	p	f(a)	f(b)	f(p)	f$(a)*$f(p)	error
1	-1.25	2.5	0.625	-2.953125	31.5	-0.2285156	0.6748351	1.875
2	0.625	2.5	1.5625	-0.2285156	31.5	4.5944824	-1.0499109	0.9375
3	0.625	1.5625	1.09375	-0.2285156	4.5944824	0.3496399	-0.0798982	0.46875

1.2. ejercicio 3

Use el método de biseccion para encontrar la solución de $f(x) := x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ con una toleracia de 10^{-2}

1.2.1. inciso b)

En el intervalo $[1, 3.2]$

```
f(x):=x^3-7*x^2+14*x-6;
biseccion(1,3.2,2,20);
```


N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\,f(p)$	*error*
1	1	3.2	2.1	2	-0.112	1.791	3.582	1.1
2	2.1	3.2	2.65	1.791	-0.112	0.552	0.989	0.55
3	2.65	3.2	2.925	0.552	-0.112	0.0858	0.0474	0.275
4	2.925	3.2	3.0625	0.0858	-0.112	-0.0544	-0.00467	0.137
5	2.925	3.0625	2.9938	0.0858	-0.0544	0.00633	5.4311×10^{-4}	0.0687
6	2.9938	3.0625	3.0281	0.00633	-0.0544	-0.0265	-1.6782×10^{-4}	0.0344
7	2.9938	3.0281	3.0109	0.00633	-0.0265	-0.0107	-6.76889×10^{-5}	0.0172
8	2.9938	3.0109	3.0023	0.00633	-0.0107	-0.00233	-1.47614×10^{-5}	0.00859

1.3. ejercicio 5

Use el metodo de biseccion para encontrar la solución, de los siguientes, con una tolerancia de 10^{-5}

1.3.1. inciso a)

La funcion $f(x) := x - 2^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$

```
f(x):=x-2^(-x);
biseccion(0, 1, 5, 20);
```

N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	0	1	0.5	-1	0.5	-0.207107	0.207107	0.5
2	0.5	1	0.75	-0.207107	0.5	0.155396	-0.0321837	0.25
3	0.5	0.75	0.625	-0.207107	0.155396	-0.0234198	0.00485039	0.125
4	0.625	0.75	0.6875	-0.0234198	0.155396	0.0665711	-0.00155908	0.0625
5	0.625	0.6875	0.65625	-0.0234198	0.0665711	0.0217245	$-5.08783454 \times 10^{-4}$	0.03125
6	0.625	0.65625	0.640625	-0.0234198	0.0217245	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	$1.89702079 \times 10^{-5}$	0.015625
7	0.640625	0.65625	0.648438	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	0.0217245	0.0104666	$-8.47803889 \times 10^{-6}$	0.0078125
8	0.640625	0.648438	0.644531	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	0.0104666	0.00483065	$-3.9128623 \times 10^{-6}$	0.00390625
9	0.640625	0.644531	0.642578	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	0.00483065	0.00201091	$-1.62885012 \times 10^{-6}$	0.00195313
10	0.640625	0.642578	0.641602	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	0.00201091	$6.00595889 \times 10^{-4}$	$-4.86487499 \times 10^{-7}$	9.765625×10^{-4}
11	0.640625	0.641602	0.641113	$-8.10008039 \times 10^{-4}$	$6.00595889 \times 10^{-4}$	$-1.0466935 \times 10^{-4}$	$8.47830146 \times 10^{-8}$	4.8828125×10^{-4}
12	0.641113	0.641602	0.641357	$-1.0466935 \times 10^{-4}$	$6.00595889 \times 10^{-4}$	2.4797245×10^{-4}	$-2.5955115 \times 10^{-8}$	$2.44140625 \times 10^{-4}$
13	0.641113	0.641357	0.641235	$-1.0466935 \times 10^{-4}$	2.4797245×10^{-4}	$7.16538452 \times 10^{-5}$	$-7.49996137 \times 10^{-9}$	$1.22070313 \times 10^{-4}$
14	0.641113	0.641235	0.641174	$-1.0466935 \times 10^{-4}$	$7.16538452 \times 10^{-5}$	$-1.65071784 \times 10^{-5}$	$1.72779562 \times 10^{-9}$	$6.10351563 \times 10^{-5}$
15	0.641174	0.641235	0.641205	$-1.65071784 \times 10^{-5}$	$7.16538452 \times 10^{-5}$	$2.75734769 \times 10^{-5}$	$-4.55160301 \times 10^{-10}$	$3.05175781 \times 10^{-5}$
16	0.641174	0.641205	0.64119	$-1.65071784 \times 10^{-5}$	$2.75734769 \times 10^{-5}$	5.5331851×10^{-6}	$-9.13372735 \times 10^{-11}$	$1.52587891 \times 10^{-5}$
17	0.641174	0.64119	0.641182	$-1.65071784 \times 10^{-5}$	5.5331851×10^{-6}	$-5.48698768 \times 10^{-6}$	$9.05746843 \times 10^{-11}$	$7.62939453 \times 10^{-6}$

1.3.2. inciso c)

En el intervalo $[-3, -2]$ y $[-1, 0]$ con la funcion $f(x) := 2\,x\,\cos(2\,x) - (x+1)^2$

intervalo [-3, -2]

```
f(x):=2*x*cos(2*x)-(x+1)^2;
biseccion(-3, -2, 5, 20);
```

N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	-3	-2	-2.5	-9.7610217	1.6145745	-3.6683109	35.806463	0.5
2	-2.5	-2	-2.25	-3.6683109	1.6145745	-0.613919	2.2520454	0.25
3	-2.25	-2	-2.125	-0.613919	1.6145745	0.630247	-0.38692	0.125
4	-2.25	-2.125	-2.1875	-0.613919	0.630247	0.0380755	-0.0233753	0.0625
5	-2.25	-2.1875	-2.21875	-0.613919	0.0380755	-0.280836	0.172411	0.03125
6	-2.21875	-2.1875	-2.203125	-0.280836	0.0380755	-0.119557	0.0335759	0.015625
7	-2.203125	-2.1875	-2.1953125	-0.119557	0.0380755	-0.0402785	0.00481557	0.0078125
8	-2.1953125	-2.1875	-2.1914063	-0.0402785	0.0380755	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	$3.96821888 \times 10^{-5}$	0.00390625
9	-2.1914063	-2.1875	-2.1894531	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	0.0380755	0.0185743	$-1.8299343 \times 10^{-5}$	0.00195313
10	-2.1914063	-2.1894531	-2.1904297	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	0.0185743	0.00880185	$-8.67153955 \times 10^{-6}$	9.765625×10^{-4}
11	-2.1914063	-2.1904297	-2.190918	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	0.00880185	0.00391015	$-3.85225692 \times 10^{-6}$	4.8828125×10^{-4}
12	-2.1914063	-2.190918	-2.1911621	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	0.00391015	0.00146293	$-1.44127166 \times 10^{-6}$	$2.44140625 \times 10^{-4}$
13	-2.1914063	-2.1911621	-2.1912842	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	0.00146293	$2.38981324 \times 10^{-4}$	$-2.35443194 \times 10^{-7}$	$1.22070313 \times 10^{-4}$
14	-2.1914063	-2.1912842	-2.1913452	$-9.85194952 \times 10^{-4}$	$2.38981324 \times 10^{-4}$	$-3.73078418 \times 10^{-4}$	$3.67554975 \times 10^{-7}$	$6.10351563 \times 10^{-5}$
15	-2.1913452	-2.1912842	-2.1913147	$-3.73078418 \times 10^{-4}$	$2.38981324 \times 10^{-4}$	$-6.70414481 \times 10^{-5}$	$2.50117174 \times 10^{-8}$	$3.05175781 \times 10^{-5}$
16	-2.1913147	-2.1912842	-2.1912994	$-6.70414481 \times 10^{-5}$	$2.38981324 \times 10^{-4}$	$8.59717127 \times 10^{-5}$	$-5.76366811 \times 10^{-9}$	$1.52587891 \times 10^{-5}$
17	-2.1913147	-2.1912994	-2.1913071	$-6.70414481 \times 10^{-5}$	$8.59717127 \times 10^{-5}$	$9.46557602 \times 10^{-6}$	$-6.34585923 \times 10^{-10}$	$7.62939453 \times 10^{-6}$

intervalo [-1, 0]

```
f(x):=2*x*cos(2*x)-(x+1)^2;
biseccion(-1, 0, 5, 20);
```

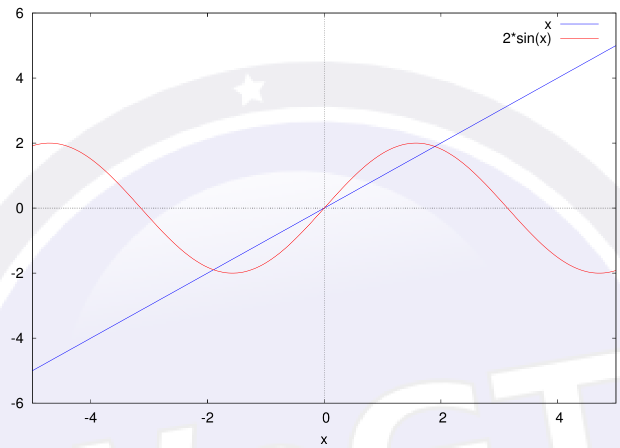
N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	-1	0	-0.5	0.832294	-1	-0.790302	-0.657764	0.5
2	-1	-0.5	-0.75	0.832294	-0.790302	-0.168606	-0.14033	0.25
3	-1	-0.75	-0.875	0.832294	-0.168606	0.296306	0.246613	0.125
4	-0.875	-0.75	-0.8125	0.296306	-0.168606	0.0528816	0.0156691	0.0625
5	-0.8125	-0.75	-0.78125	0.0528816	-0.168606	-0.0608144	-0.00321596	0.03125
6	-0.8125	-0.78125	-0.796875	0.0528816	-0.0608144	-0.00468056	$-2.47515541 \times 10^{-4}$	0.015625
7	-0.8125	-0.796875	-0.804688	0.0528816	-0.00468056	0.0239252	0.0012652	0.0078125
8	-0.804688	-0.796875	-0.800781	0.0239252	-0.00468056	0.00957807	$2.29156947 \times 10^{-4}$	0.00390625
9	-0.800781	-0.796875	-0.798828	0.00957807	-0.00468056	0.00243764	$2.33478872 \times 10^{-5}$	0.00195313
10	-0.798828	-0.796875	-0.797852	0.00243764	-0.00468056	-0.00112424	$-2.74050365 \times 10^{-6}$	9.765625×10^{-4}
11	-0.798828	-0.797852	-0.79834	0.00243764	-0.00112424	$6.56003277 \times 10^{-4}$	$1.59910056 \times 10^{-6}$	4.8828125×10^{-4}
12	-0.79834	-0.797852	-0.798096	$6.56003277 \times 10^{-4}$	-0.00112424	$-2.34294318 \times 10^{-4}$	$-1.5369784 \times 10^{-7}$	$2.44140625 \times 10^{-4}$
13	-0.79834	-0.798096	-0.798218	$6.56003277 \times 10^{-4}$	$-2.34294318 \times 10^{-4}$	$2.10811015 \times 10^{-4}$	$1.38292717 \times 10^{-7}$	$1.22070313 \times 10^{-4}$
14	-0.798218	-0.798096	-0.798157	$2.10811015 \times 10^{-4}$	$-2.34294318 \times 10^{-4}$	$-1.17525187 \times 10^{-5}$	$-2.47756039 \times 10^{-9}$	$6.10351563 \times 10^{-5}$
15	-0.798218	-0.798157	-0.798187	$2.10811015 \times 10^{-4}$	$-1.17525187 \times 10^{-5}$	$9.95265316 \times 10^{-5}$	$2.09812892 \times 10^{-8}$	$3.05175781 \times 10^{-5}$
16	-0.798187	-0.798157	-0.798172	$9.95265316 \times 10^{-5}$	$-1.17525187 \times 10^{-5}$	$4.38863273 \times 10^{-5}$	$4.36785394 \times 10^{-9}$	$1.52587891 \times 10^{-5}$
17	-0.798172	-0.798157	-0.798164	$4.38863273 \times 10^{-5}$	$-1.17525187 \times 10^{-5}$	$1.60667345 \times 10^{-5}$	$7.05109969 \times 10^{-10}$	$7.62939453 \times 10^{-6}$

1.4. ejercicio 7

1.4.1. inciso a)

Grafique $y = x$ y $y = 2 * sin(x)$ en un mismo cuadro.

```
wxplot2d([x,2*sin(x)],[x,-5,5]);
```



1.4.2. inciso b)

```
f(x):=2*sin(x);
biseccion(3.05, 3.2, 5, 20);
```

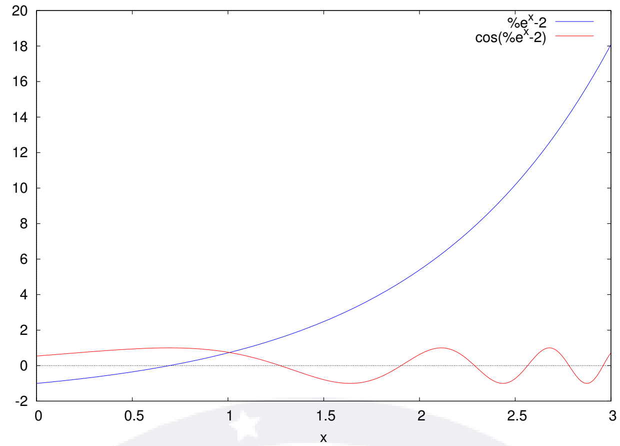
N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	3.05	3.2	3.125	0.182929	-0.116748	0.0331838	0.00607029	0.075
2	3.125	3.2	3.1625	0.0331838	-0.116748	-0.0418116	-0.00138747	0.0375
3	3.125	3.1625	3.14375	0.0331838	-0.0418116	-0.00431469	$-1.43177725 \times 10^{-4}$	0.01875
4	3.125	3.14375	3.134375	0.0331838	-0.00431469	0.0144352	$4.79013963 \times 10^{-4}$	0.009375
5	3.134375	3.14375	3.1390625	0.0144352	-0.00431469	0.0050603	$7.30463764 \times 10^{-5}$	0.0046875
6	3.1390625	3.14375	3.1414062	0.0050603	-0.00431469	$3.72807177 \times 10^{-4}$	$1.88651682 \times 10^{-6}$	0.00234375
7	3.1414062	3.14375	3.1425781	$3.72807177 \times 10^{-4}$	-0.00431469	-0.00197094	$-7.34781511 \times 10^{-7}$	0.00117188
8	3.1414062	3.1425781	3.1419922	$3.72807177 \times 10^{-4}$	-0.00197094	$-7.99067799 \times 10^{-4}$	$-2.97898211 \times 10^{-7}$	5.859375×10^{-4}
9	3.1414062	3.1419922	3.1416992	$3.72807177 \times 10^{-4}$	$-7.99067799 \times 10^{-4}$	$-2.1313032 \times 10^{-4}$	$-7.9456513 \times 10^{-8}$	2.9296875×10^{-4}
10	3.1414062	3.1416992	3.1415527	$3.72807177 \times 10^{-4}$	$-2.1313032 \times 10^{-4}$	$7.98384296 \times 10^{-5}$	$2.97643396 \times 10^{-8}$	$1.46484375 \times 10^{-4}$
11	3.1415527	3.1416992	3.141626	$7.98384296 \times 10^{-5}$	$-2.1313032 \times 10^{-4}$	$-6.66459454 \times 10^{-5}$	$-5.32090762 \times 10^{-9}$	$7.32421875 \times 10^{-5}$
12	3.1415527	3.141626	3.1415894	$7.98384296 \times 10^{-5}$	$-6.66459454 \times 10^{-5}$	$6.59624209 \times 10^{-6}$	$5.26633609 \times 10^{-10}$	$3.66210937 \times 10^{-5}$
13	3.1415894	3.141626	3.1416077	$6.59624209 \times 10^{-6}$	$-6.66459454 \times 10^{-5}$	$-3.00248517 \times 10^{-5}$	$-1.9805119 \times 10^{-10}$	$1.83105469 \times 10^{-5}$
14	3.1415894	3.1416077	3.1415985	$6.59624209 \times 10^{-6}$	$-3.00248517 \times 10^{-5}$	$-1.17143048 \times 10^{-5}$	$-7.72703903 \times 10^{-11}$	$9.15527344 \times 10^{-6}$

1.5. ejercicio 9

1.5.1. inciso a)

Grafique $y = e^x - 2$ y $y = cos(e - 2)$ en un mismo cuadro

```
wxplot2d([%e^x-2,cos(%e^x-2)],[x,0,3]);
```



1.5.2. inciso b)

Use el método de biseccion para aproximar la intersección $e^x - 2 = \cos(e-2)$ en el intervalo $[0.5, 1.5]$ con una tolerancia 10^{-5}

```
f(x):=cos(%e-2)-%e^x+2;
biseccion(0.5, 1.5, 5, 20);
```

N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	*error*
1	0.5	1.5	1.0	1.1042163	-1.7287515	0.0346557	0.0382674	0.5
2	1.0	1.5	1.25	0.0346557	-1.7287515	-0.737405	-0.0255553	0.25
3	1.0	1.25	1.125	0.0346557	-0.737405	-0.327279	-0.0113421	0.125
4	1.0	1.125	1.0625	0.0346557	-0.327279	-0.140658	-0.00487462	0.0625
5	1.0	1.0625	1.03125	0.0346557	-0.140658	-0.0516318	-0.00178934	0.03125
6	1.0	1.03125	1.015625	0.0346557	-0.0516318	-0.00815098	$-2.82478261 \times 10^{-4}$	0.015625
7	1.0	1.015625	1.0078125	0.0346557	-0.00815098	0.013336	$4.62167997 \times 10^{-4}$	0.0078125
8	1.0078125	1.015625	1.0117188	0.013336	-0.00815098	0.00261348	$3.48533162 \times 10^{-5}$	0.00390625
9	1.0117188	1.015625	1.0136719	0.00261348	-0.00815098	-0.0027635	$-7.22234146 \times 10^{-6}$	0.00195313
10	1.0117188	1.0136719	1.0126953	0.00261348	-0.0027635	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	$-1.92600075 \times 10^{-7}$	9.765625×10^{-4}
11	1.0117188	1.0126953	1.012207	0.00261348	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	0.00127022	$3.31969708 \times 10^{-6}$	4.8828125×10^{-4}
12	1.012207	1.0126953	1.0124512	0.00127022	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	$5.98344986 \times 10^{-4}$	$7.60030235 \times 10^{-7}$	$2.44140625 \times 10^{-4}$
13	1.0124512	1.0126953	1.0125732	$5.98344986 \times 10^{-4}$	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	$2.62345571 \times 10^{-4}$	$1.56973157 \times 10^{-7}$	$1.22070313 \times 10^{-4}$
14	1.0125732	1.0126953	1.0126343	$2.62345571 \times 10^{-4}$	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	$9.43304821 \times 10^{-5}$	$2.47471842 \times 10^{-8}$	$6.10351563 \times 10^{-5}$
15	1.0126343	1.0126953	1.0126648	$9.43304821 \times 10^{-5}$	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	1.0319092×10^{-5}	$9.73404922 \times 10^{-10}$	$3.05175781 \times 10^{-5}$
16	1.0126648	1.0126953	1.0126801	1.0319092×10^{-5}	$-7.36948619 \times 10^{-5}$	$-3.16875645 \times 10^{-5}$	$-3.26986893 \times 10^{-10}$	$1.52587891 \times 10^{-5}$
17	1.0126648	1.0126801	1.0126724	1.0319092×10^{-5}	$-3.16875645 \times 10^{-5}$	$-1.06841561 \times 10^{-5}$	$-1.1025079 \times 10^{-10}$	$7.62939453 \times 10^{-6}$

1.6. ejercicio 11

1.6.1. inciso b)

Sea $f(x) := (x+2)\ (x+1)\ x\ (x-2)\ (x-1)^3$. Encuentre el cero de f por el método de bisección.

```
f(x):=(x+2)*(x+1)*x*(x-2)*(x-1)^3;
biseccion(-2.5,3,3,20);
```


N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	*error*
1	-2.5	3	0.25	-361.758	480	0.5191	-187.79	2.75
2	-2.5	0.25	-1.125	-361.758	0.5191	3.68975	-1334.8	1.375
3	-2.5	-1.125	-1.8125	-361.758	3.68975	23.4202	-8472.43	0.6875
4	-2.5	-1.8125	-2.15625	-361.758	23.4202	-50.9081	18416.4	0.3438
5	-2.15625	-1.8125	-1.98438	-50.9081	23.4202	3.2324	-164.555	0.1719
6	-2.15625	-1.98438	-2.07031	-50.9081	3.2324	-18.355	934.418	0.08594
7	-2.07031	-1.98438	-2.02734	-18.355	3.2324	-6.36363	116.805	0.04297
8	-2.02734	-1.98438	-2.00586	-6.36363	3.2324	-1.28615	8.18457	0.02148
9	-2.00586	-1.98438	-1.99512	-1.28615	3.2324	1.0406	-1.33836	0.01074
10	-2.00586	-1.99512	-2.00049	-1.28615	1.0406	-0.1056	0.1358	0.005371
11	-2.00049	-1.99512	-1.9978	-0.1056	1.0406	0.4717	-0.04982	0.002686
12	-2.00049	-1.9978	-1.99915	-0.1056	0.4717	0.1841	-0.01945	0.001343
13	-2.00049	-1.99915	-1.99982	-0.1056	0.1841	0.03953	-0.004175	6.713867×10^{-4}

1.7. ejercicio 13

Encuentre una aproximación de $\sqrt[3]{25}$ con una tolerancia de 10^{-4} por el método de bisección.

```
f(x):=1-(25^(1/3)/x);
biseccion(2.8, 3, 4, 20);
```

N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	2.8	3	2.9	-0.044292	0.025327	-0.008282	3.6682581×10^{-4}	0.1
2	2.9	3	2.95	-0.008282	0.025327	0.0088075	$-7.2943911 \times 10^{-5}$	0.05
3	2.9	2.95	2.925	-0.008282	0.0088075	3.35816×10^{-4}	$-2.7812209 \times 10^{-6}$	0.025
4	2.9	2.925	2.9125	-0.008282	3.35816×10^{-4}	-0.0039546	3.2751815×10^{-5}	0.0125
5	2.9125	2.925	2.91875	-0.0039546	3.35816×10^{-4}	-0.0018048	7.1372113×10^{-6}	0.00625
6	2.91875	2.925	2.921875	-0.0018048	3.35816×10^{-4}	$-7.3334356 \times 10^{-4}$	1.323533×10^{-6}	0.003125
7	2.921875	2.925	2.923437	$-7.3334356 \times 10^{-4}$	3.35816×10^{-4}	$-1.9847806 \times 10^{-4}$	1.4555261×10^{-7}	0.0015625
8	2.923437	2.925	2.924219	$-1.9847806 \times 10^{-4}$	3.35816×10^{-4}	6.8740339×10^{-5}	$-1.3643449 \times 10^{-8}$	7.8125×10^{-4}
9	2.923437	2.924219	2.923828	$-1.9847806 \times 10^{-4}$	6.8740339×10^{-5}	$-6.4851012 \times 10^{-5}$	1.2871503×10^{-8}	3.90625×10^{-4}
10	2.923828	2.924219	2.924023	$-6.4851012 \times 10^{-5}$	6.8740339×10^{-5}	1.949125×10^{-6}	$-1.2640273 \times 10^{-10}$	1.953125×10^{-4}
11	2.923828	2.924023	2.923926	$-6.4851012 \times 10^{-5}$	1.949125×10^{-6}	$-3.1449828 \times 10^{-5}$	2.0395532×10^{-9}	9.765625×10^{-5}

1.8. ejercicio 15

Aproxime la solución de $f(x) := x^3 - x - 1$ en el intervalo $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-4}.

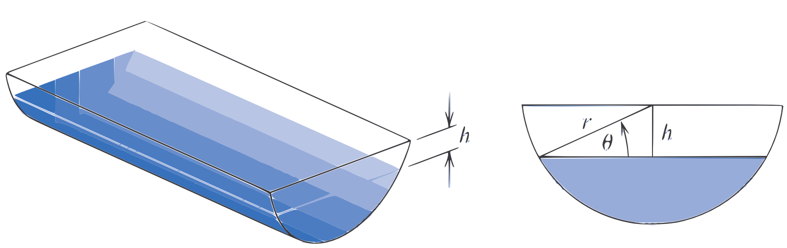
```
f(x):=x^3-x-1;
biseccion(1,2,4,20);
```

N	a	b	p	$f(a)$	$f(b)$	$f(p)$	$f(a)\ f(p)$	$error$
1	1	2	1.5	-1	5	0.875	-0.875	0.5
2	1	1.5	1.25	-1	0.875	-0.29688	0.29688	0.25
3	1.25	1.5	1.375	-0.29688	0.875	0.22461	-0.066681	0.125
4	1.25	1.375	1.3125	-0.29688	0.22461	-0.051514	0.015293	0.0625
5	1.3125	1.375	1.34375	-0.051514	0.22461	0.082611	-0.0042556	0.03125
6	1.3125	1.34375	1.328125	-0.051514	0.082611	0.014576	$-7.5086113 \times 10^{-4}$	0.015625
7	1.3125	1.328125	1.320313	-0.051514	0.014576	-0.018711	9.6385239×10^{-4}	0.0078125
8	1.320313	1.328125	1.324219	-0.018711	0.014576	-0.0021279	3.9815164×10^{-5}	0.0039063
9	1.324219	1.328125	1.326172	-0.0021279	0.014576	0.0062088	-1.321205×10^{-5}	0.0019531
10	1.324219	1.326172	1.325195	-0.0021279	0.0062088	0.0020367	$-4.3338815 \times 10^{-6}$	9.765625×10^{-4}
11	1.324219	1.325195	1.324707	-0.0021279	0.0020367	$-4.6594883 \times 10^{-5}$	9.9151369×10^{-8}	4.8828125×10^{-4}
12	1.324707	1.325195	1.324951	$-4.6594883 \times 10^{-5}$	0.0020367	9.9479097×10^{-4}	$-4.6352169 \times 10^{-8}$	2.4414063×10^{-4}
13	1.324707	1.324951	1.324829	$-4.6594883 \times 10^{-5}$	9.9479097×10^{-4}	4.7403882×10^{-4}	$-2.2087783 \times 10^{-8}$	1.2207031×10^{-4}
14	1.324707	1.324829	1.324768	$-4.6594883 \times 10^{-5}$	4.7403882×10^{-4}	2.1370716×10^{-4}	$-9.9576603 \times 10^{-9}$	6.1035156×10^{-5}

1.9. ejercicio 19)

Un tanque de longitud L tiene una seccion transversal semicircular de radio r. El agua a una distancia h de la parte superior tiene un volumen V

$$V = L[0.5\,\pi\, r^2 - r^2\, arcsin(h/r) - h\,(r^2 - h^2)^{1/2}]$$



Suponga que $L = 10\,ft$, $r = 1\,ft$, y $V = 12.4\,ft^3$. Encuentre la **profundidad** del agua en el tanque con una tolerancia de $0.01\,ft$.

$$\begin{aligned} 12.4 &= 10\,[0.5\,\pi\,1^2 - 1^2\,arcsin(h/1) - h\,(1^2 - h^2)^{1/2}] \\ 12.4 &= 10\,[0.5\,\pi\, - arcsin(h) - h\,(1 - h^2)^{1/2}] \end{aligned}$$

se necesita un h tal que al sustituir en el miembro derecho de 12.4. Si se resta 12.4 a la ecuación se tiene

$$0 = 10\,[0.5\,\pi\, - arcsin(h) - h\,(1 - h^2)^{1/2}] - 12.4$$

luego se require un h, tal que al sustituir, de el valor de 0. En otras palabras, es menester hallar la raíz de la funcion, que ahora lo definimos como $f\,(h)$

$$f\,(h) = 10\,[0.5\,\pi\, - arcsin(h) - h\,(1 - h^2)^{1/2}] - 12.4 = 0$$

```
f(h):=10*(0.5*%pi-asin(h)-h*(1-h^2)^(1/2))-12.4;
biseccion(0,1,3,20);
```

N	a	b	p	$f\,(a)$	$f\,(b)$	$f\,(p)$	$f\,(a)\ f\,(p)$	$error$
1	0	1	0.5	3.30796	−12.4	−6.25815	−20.7017	0.5
2	0	0.5	0.25	3.30796	−6.25815	−1.63945	−5.42325	0.25
3	0	0.25	0.125	3.30796	−1.63945	0.8145	2.6943	0.125
4	0.125	0.25	0.1875	0.8145	−1.63945	−0.4199	−0.342	0.0625
5	0.125	0.1875	0.1563	0.8145	−0.4199	0.1957	0.1594	0.03125
6	0.1563	0.1875	0.1719	0.1957	−0.4199	−0.1125	−0.02203	0.01563
7	0.1563	0.1719	0.1641	0.1957	−0.1125	0.04149	0.008121	0.007813
8	0.1641	0.1719	0.168	0.04149	−0.1125	−0.03555	−0.001475	0.003906
9	0.1641	0.168	0.166	0.04149	−0.03555	0.002966	1.23086×10^{-4}	0.001953
10	0.166	0.168	0.167	0.002966	−0.03555	−0.01629	-4.832935×10^{-5}	9.765625×10^{-4}

por lo tanto $h = 0.167$. Luego la profundidad es: radio menos el valor de h hallado

$$profundidad = r - h = 1 - 0.167 = 0.833$$

Capítulo 2

Punto fijo

Ejercicios de Seccion 2.2, Pág. 64

2.1. ejercicio 5

Use iteraciones con el método de punto fijo y determine la solución de $x^4 - 3x^2 - 3$ en el intervalo $[1, 2]$ con una tolerancia de 10^{-2}. Use $p_0 = 1$. Se escoge y verifica $g(x)$

$$g(x) = \left(3x^2 + 3\right)^{1/4}\ ; \quad g'(x) = \frac{1.5\,x}{(3x^2+3)^{0.75}}\ ; \quad g'(1) = 0.39127$$

```
g(x):=(3*x^2+3)^(1/4);
puntofijo(1,2,20);
```

N	x	g(x)	error
1	1	1.5651	0.565
2	1.5651	1.7936	0.228
3	1.7936	1.8859	0.0924
4	1.8859	1.9228	0.0369
5	1.9228	1.9375	0.0147
6	1.9375	1.9433	0.00581

2.2. ejercicio 11

Determine el intervalo $[a, b]$ en el que las iteraciones de punto fijo convergan. Estimar el numero de iteraciones necesarias para obtener una aproximación con 10^{-5} de tolerancia. Obtenga la raiz.

2.2.1. inciso b)

$x = \frac{5}{x^2} + 2$

```
g(x):=5/x^2+2;
puntofijo(2.6,5,20);
```

N	x	g(x)	error
1	2.6	2.739645	0.139645
2	2.739645	2.6661644	0.0734806
3	2.6661644	2.7033899	0.0372255
4	2.7033899	2.684152	0.0192379
5	2.684152	2.6939941	0.00984208
6	2.6939941	2.6889326	0.00506153
7	2.6889326	2.6915287	0.00259608
8	2.6915287	2.6901953	0.00133336
9	2.6901953	2.6908796	$6.84344391 \times 10^{-4}$
10	2.6908796	2.6905283	3.5136427×10^{-4}
11	2.6905283	2.6907086	1.8036815×10^{-4}
12	2.6907086	2.690616	$9.25984046 \times 10^{-5}$
13	2.690616	2.6906636	$4.75363581 \times 10^{-5}$
14	2.6906636	2.6906392	$2.44038989 \times 10^{-5}$
15	2.6906392	2.6906517	$1.25281495 \times 10^{-5}$
16	2.6906517	2.6906453	6.4315776×10^{-6}

2.2.2. inciso f)

$x = 0.5\,(\sin x + \cos x)$

```
g(x):=0.5*(sin(x)+cos(x));
puntofijo(0.6,5,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & 0.6 & 0.694989 & 0.094989 \\ 2 & 0.694989 & 0.704219 & 0.00922983 \\ 3 & 0.704219 & 0.704778 & 5.59244952 \times 10^{-4} \\ 4 & 0.704778 & 0.70481 & 3.19565575 \times 10^{-5} \\ 5 & 0.70481 & 0.704812 & 1.81941422 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

2.3. ejercicio 13

Encontrar los ceros de $f\,(x) = x^2 + 10\cos x$ usando el método de punto fijo con la funcion iterativa g apropiada. La tolerancia es 10^{-4}.

Primer cero en $x = -2.1$

$$g(x) = -acos\left(\frac{-x^2}{10}\right)\ ; \quad g\,'(x) = -\frac{0.2\,x}{(1 - 0.01\,x^4)^{0.5}}\ ; \quad g\,'(-2.1) = 0.46796$$

```
g(x):=-acos((-x^2)/10);
puntofijo(-2.1,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & -2.1 & -2.027509 & 0.072491 \\ 2 & -2.027509 & -1.994434 & 0.033075 \\ 3 & -1.994434 & -1.979889 & 0.014545 \\ 4 & -1.979889 & -1.973596 & 0.0062922 \\ 5 & -1.973596 & -1.970894 & 0.0027025 \\ 6 & -1.970894 & -1.969737 & 0.0011571 \\ 7 & -1.969737 & -1.969242 & 4.9477865 \times 10^{-4} \\ 8 & -1.969242 & -1.969031 & 2.1144729 \times 10^{-4} \\ 9 & -1.969031 & -1.96894 & 9.034162 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

otro cero en $x = 1.8$

$$g(x) = acos\left(\frac{-x^2}{10}\right)\ ; \quad g\,'(x) = \frac{0.2\,x}{(1 - 0.01\,x^4)^{0.5}}\ ; \quad g\,'(1.8) = 0.46796$$

```
g(x):=acos((-x^2)/10);
puntofijo(1.8,4,20);
```


$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & 1.8 & 1.900751 & 0.10075 \\ 2 & 1.900751 & 1.940442 & 0.039691 \\ 3 & 1.940442 & 1.956846 & 0.016404 \\ 4 & 1.956846 & 1.963756 & 0.0069106 \\ 5 & 1.963756 & 1.966691 & 0.0029347 \\ 6 & 1.966691 & 1.967942 & 0.0012505 \\ 7 & 1.967942 & 1.968475 & 5.3360859 \times 10^{-4} \\ 8 & 1.968475 & 1.968703 & 2.2784079 \times 10^{-4} \\ 9 & 1.968703 & 1.9688 & 9.730918 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

otro cero en $x = -3.2$ con un $g(x)$ diferente

$$g(x) = \frac{2x^2 - 10cos(x)}{3x}\ ; \quad g\,'(x) = \frac{0.33333\,\left(10\,x\,\sin x + 10\,\cos x + 2\,x^2\right)}{x^2}\ ; \quad g\,'(-3.2) = 0.28089$$

```
g(x):=(2*x^2-10*cos(x))/(3*x);
puntofijo(-3.2,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & -3.2 & -3.173224 & 0.026776 \\ 2 & -3.173224 & -3.165413 & 0.0078103 \\ 3 & -3.165413 & -3.163025 & 0.0023883 \\ 4 & -3.163025 & -3.162285 & 7.4034559 \times 10^{-4} \\ 5 & -3.162285 & -3.162054 & 2.3046173 \times 10^{-4} \\ 6 & -3.162054 & -3.161983 & 7.183305 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

otro cero en $x = 3$

$$g(x) = \frac{2x^2 - 10cos(x)}{3x}; \quad g'(x) = \frac{0.33333\ (10\,x\ \sin x + 10\ \cos x + 2\,x^2)}{x^2}; \quad g'(3) = 0.4568$$

```
puntofijo(3,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & 3 & 3.099992 & 0.099992 \\ 2 & 3.099992 & 3.141002 & 0.041011 \\ 3 & 3.141002 & 3.155234 & 0.014231 \\ 4 & 3.155234 & 3.159837 & 0.0046029 \\ 5 & 3.159837 & 3.161289 & 0.0014524 \\ 6 & 3.161289 & 3.161744 & 4.5464195 \times 10^{-4} \\ 7 & 3.161744 & 3.161886 & 1.4195461 \times 10^{-4} \\ 8 & 3.161886 & 3.16193 & 4.4287896 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

2.4. ejercicio 14

Use el método punto fijo para determinar la solución, con una tolerancia 10^{-4}, de $x = tan(x)$, para x en [4, 5]. Para hallar $g(x)$ se sigue

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{tan(x)}; \quad 0 = \frac{1}{tan(x)} - \frac{1}{x}; \quad x = \frac{1}{tan(x)} - \frac{1}{x} + x; \quad luego\ \ x = g(x) = \frac{1}{tan(x)} - \frac{1}{x} + x$$

probando $g(x)$

$$g'(x) = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} + \frac{1}{x^2} + 1; \quad g'(4) = -0.68346$$

```
g(x):=1/tan(x)-1/x+x;
puntofijo(4,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & x & g\,(x) & error \\ 1 & 4 & 4.613691 & 0.61369 \\ 2 & 4.613691 & 4.495965 & 0.11773 \\ 3 & 4.495965 & 4.493411 & 0.0025536 \\ 4 & 4.493411 & 4.493409 & 1.4462156 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Newton, Secante y Posicion falsa

Ejercicios de Seccion 2.3, Pág. 75

3.1. ejercicio 1

Sea $f(x) = x^2 - 6$ y $p_0 = 1$. Use el método de Newton para encontrar p_2.

$$f'(x) = 2\,x$$

```
f(x):=x^2-6;
newton(1,4,2);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 1 & 3.5 & 2.5 \\ 2 & 3.5 & 2.607143 & 0.89286 \end{pmatrix}$$

3.2. ejercicio 3

Sea $f(x) = x^2 - 6$. Con $p_0 = 3$ y $p_1 = 2$, buscar p_3.

3.2.1. inciso a)

Usando el método de la secante.

```
f(x):=x^2-6;
secante(3,2,4,3);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 3 & 2 & 2.4 & 0.4 \\ 2 & 2 & 2.4 & 2.454545 & 0.054545 \\ 3 & 2.4 & 2.454545 & 2.449438 & 0.0051073 \end{pmatrix}$$

3.2.2. inciso b)

Usando el método de posicion falsa.

```
posicionfalsa(3,2,4,3);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 3 & 2 & 2.4 & 0.4 \\ 2 & 3 & 2.4 & 2.444444 & 0.044444 \\ 3 & 3 & 2.444444 & 2.44898 & 0.0045351 \end{pmatrix}$$

3.2.3. inciso c)

El inciso a) o el inciso b) está mas cerca de $\sqrt{6}$?

R// Por el método de la secante $p_3 = 2.449438$ y por el método de posición falsa $p_3 = 2.44898$. Dado que $\sqrt{6} = 2.4494897427$ decimos que el inciso a) por el método de la secante es más exacto.

3.3. ejercicio 5

Use el método de Newton para encontrar la solucion con una tolerancia 10^{-4} para los siguientes problemas.

3.3.1. inciso a)

Para $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ en el intervalo $[1, 4]$.

$$f'(x) = 3\,x^2 - 4\,x$$

```
f(x):=x^3-2*x^2-5;
newton(2.5,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 2.5 & 2.714286 & 0.21429 \\ 2 & 2.714286 & 2.690952 & 0.023334 \\ 3 & 2.690952 & 2.690647 & 3.0401747 \times 10^{-4} \\ 4 & 2.690647 & 2.690647 & 5.1228279 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

3.3.2. inciso c)

Para $f(x) = x - cos(x) = 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

$$f'(x) = sin(x) + 1$$

```
f(x):=x-cos(x);
newton(0,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0 & 1.0 & 1.0 \\ 2 & 1.0 & 0.75036 & 0.24964 \\ 3 & 0.75036 & 0.73911 & 0.011251 \\ 4 & 0.73911 & 0.73909 & 2.7757526 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

3.4. ejercicio 6

Use el método de Newton para encontrar la solución con una tolerancia 10^{-5} para los siguientes problemas

3.4.1. inciso b)

Para $f(x) = ln(x-1) + cos(x-1) = 0$ en el intervalo $[1.3, 2]$

$$f'(x) = \frac{1.0}{x-1} - \sin(x-1)$$

```
f(x):=ln(x-1)+cos(x-1);
newton(1.3, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 1.3 & 1.3818471 & 0.0818471 \\ 2 & 1.3818471 & 1.3973207 & 0.0154736 \\ 3 & 1.3973207 & 1.3977482 & 4.27431534 \times 10^{-4} \\ 4 & 1.3977482 & 1.3977485 & 3.1148496 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

3.4.2. inciso e)

Para $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ y $[3, 5]$.

$$f'(x) = e^x - 6\,x$$

intervalo[0, 1]

$$f'(x) = e^x - 6\,x$$

```
f(x):=%e^x-3*x^2;
newton(0.5, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0.5	1.1650895	0.665089
2	1.1650895	0.936227	0.228863
3	0.936227	0.910397	0.0258303
4	0.910397	0.910008	$3.89003009 \times 10^{-4}$
5	0.910008	0.910008	$8.93744134 \times 10^{-8}$

intervalo[3,5]

$$f'(x) = e^x - 6\,x$$

```
f(x):=%e^x-3*x^2;
newton(3, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	3	6.3154355	3.3154355
2	6.3154355	5.4741495	0.841286
3	5.4741495	4.7516461	0.722503
4	4.7516461	4.2011347	0.550511
5	4.2011347	3.868723	0.332412
6	3.868723	3.7479169	0.120806
7	3.7479169	3.733279	0.0146379
8	3.733279	3.7330791	$1.99887999 \times 10^{-4}$
9	3.7330791	3.733079	$3.68620818 \times 10^{-8}$

3.5. ejercicio 7

Utilice el método de la secante para encontrar la solución, con una tolerancia 10^{-4}, para los siguientes problemas.

3.5.1. inciso b)

Para $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en el intervalo $[-3, -2]$.

```
f(x):=x^3+3*x^2-1;
secante(-3, -2, 4, 20);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-3	-2	-2.75	0.75
2	-2	-2.75	-3.066667	0.31667
3	-2.75	-3.066667	-2.862024	0.20464
4	-3.066667	-2.862024	-2.877186	0.015162
5	-2.862024	-2.877186	-2.879414	0.002228
6	-2.877186	-2.879414	-2.879385	2.870283×10^{-5}

3.5.2. inciso d)

Para $f(x) = x - 0.8 - 0.2sin(x) = 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$

```
f(x):=x-0.8-0.2*sin(x);
secante(0, %pi/2, 4, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0 & 1.570796 & 0.91672 & 0.65408 \\ 2 & 1.570796 & 0.91672 & 0.96155 & 0.044831 \\ 3 & 0.91672 & 0.96155 & 0.96435 & 0.0027948 \\ 4 & 0.96155 & 0.96435 & 0.96433 & 1.2200555 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

3.6. ejercicio 9

Utilice el método de posicion falsa para encontrar la solución, con una tolerancia 10^{-4}, para los siguientes problemas.

3.6.1. inciso b)

Para $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ en el intervalo $[-3, -2]$.

```
f(x):=x^3+3*x^2-1;
posicionfalsa(-3, -2, 4, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & -3 & -2 & -2.75 & 0.75 \\ 2 & -3 & -2.75 & -2.867769 & 0.11777 \\ 3 & -3 & -2.867769 & -2.878406 & 0.010638 \\ 4 & -3 & -2.878406 & -2.879303 & 8.9706978 \times 10^{-4} \\ 5 & -3 & -2.879303 & -2.879378 & 7.5196398 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

3.6.2. inciso d)

Para $f(x) = x - 0.8 - 0.2sin(x) = 0$ en el intervalo $[0, \pi/2]$

```
f(x):=x-0.8-0.2*sin(x);
posicionfalsa(0, %pi/2, 4, 20);
```


$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0 & 1.570796 & 0.91672 & 0.65408 \\ 2 & 0.91672 & 1.570796 & 0.96155 & 0.044831 \\ 3 & 0.96155 & 1.570796 & 0.96417 & 0.0026194 \\ 4 & 0.96417 & 1.570796 & 0.96432 & 1.5355164 \times 10^{-4} \\ 5 & 0.96432 & 1.570796 & 0.96433 & 9.0027664 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

3.7. ejercicio 11

Use los tres métodos (newton, secante y posicion falsa) para buscar la soluncion, con una tolerancia 10^{-5}, para los siguientes problemas.

3.7.1. inciso a)

Para $f(x) = 3xe^x = 0$ en el intervalo $[1, 2]$.

Newton

$$f'(x) = 3\,x\,e^{x} + 3\,e^{x}$$

```
f(x):=3*x*%e^x;
newton(1.3, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix}
N & X_n & X_{n+1} & error \\
1 & 1.3 & 0.734783 & 0.565217 \\
2 & 0.734783 & 0.311224 & 0.423559 \\
3 & 0.311224 & 0.0738701 & 0.237354 \\
4 & 0.0738701 & 0.00508142 & 0.0687887 \\
5 & 0.00508142 & 2.569032\times10^{-5} & 0.00505573 \\
6 & 2.569032\times10^{-5} & 6.59975587\times10^{-10} & 2.568966\times10^{-5} \\
7 & 6.59975587\times10^{-10} & 4.35567771\times10^{-19} & 6.59975586\times10^{-10}
\end{pmatrix}$$

Secante

```
f(x):=3*x*%e^x;
secante(1, 2, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix}
N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\
1 & 1 & 2 & 0.7746 & 1.2253997 \\
2 & 2 & 0.7746 & 0.617357 & 0.157244 \\
3 & 0.7746 & 0.617357 & 0.281622 & 0.335735 \\
4 & 0.617357 & 0.281622 & 0.119176 & 0.162446 \\
5 & 0.281622 & 0.119176 & 0.0279083 & 0.0912673 \\
6 & 0.119176 & 0.0279083 & 0.00309614 & 0.0248122 \\
7 & 0.0279083 & 0.00309614 & 8.50847825\times10^{-5} & 0.00301106 \\
8 & 0.00309614 & 8.50847825\times10^{-5} & 2.63016187\times10^{-7} & 8.48217663\times10^{-5} \\
9 & 8.50847825\times10^{-5} & 2.63016187\times10^{-7} & 2.23777201\times10^{-11} & 2.6299381\times10^{-7}
\end{pmatrix}$$

Posicion falsa

```
f(x):=3*x*%e^x;
posicionfalsa(1, 2, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix}
N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\
1 & 1 & 2 & 0.7746 & 1.2254 \\
2 & 1 & 0.7746 & 0.4095 & 0.3651 \\
3 & 1 & 0.4095 & 0.2362 & 0.1733 \\
4 & 1 & 0.2362 & 0.1418 & 0.09445 \\
5 & 1 & 0.1418 & 0.08689 & 0.05487 \\
6 & 1 & 0.08689 & 0.0539 & 0.03299 \\
7 & 1 & 0.0539 & 0.03368 & 0.02022 \\
8 & 1 & 0.03368 & 0.02114 & 0.01254 \\
9 & 1 & 0.02114 & 0.0133 & 0.007836 \\
10 & 1 & 0.0133 & 0.008383 & 0.004917 \\
11 & 1 & 0.008383 & 0.00529 & 0.003094 \\
12 & 1 & 0.00529 & 0.00334 & 0.00195 \\
13 & 1 & 0.00334 & 0.00211 & 0.00123 \\
14 & 1 & 0.00211 & 0.001333 & 7.767375\times10^{-4}
\end{pmatrix}$$

3.7.2. inciso b)

Para $f(x) = 2\,x + 3\,cos(x) - e^x = 0$ en el intervalo [0, 1].

$$f\,'(x) = -3\,\sin x - e^x + 2$$

Newton

```
f(x):=2*x+3*cos(x)-%e^x;
newton(0.5, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0.5	2.3252348	1.8252348
2	2.3252348	1.592329	0.732906
3	1.592329	1.288817	0.303512
4	1.288817	1.2409046	0.0479124
5	1.2409046	1.2397154	0.00118917
6	1.2397154	1.2397147	$7.29899547 \times 10^{-7}$

Secante

```
f(x):=2*x+3*cos(x)-%e^x;
secante(0.5, 1, 5, 20);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0.5	1	1.4173405	0.41734
2	1	1.4173405	1.217055	0.200285
3	1.4173405	1.217055	1.2377761	0.0207211
4	1.217055	1.2377761	1.2397376	0.0019615
5	1.2377761	1.2397376	1.2397147	$2.29590039 \times 10^{-5}$
6	1.2397376	1.2397147	1.2397147	$2.29674058 \times 10^{-8}$

Posicion falsa

```
f(x):=2*x+3*cos(x)-%e^x;
posicionfalsa(0.5, 1, 5, 20);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0.5	1	1.4173405	0.41734
2	1.4173405	1	1.217055	0.200285
3	1.217055	1.4173405	1.2377761	0.0207211
4	1.2377761	1.4173405	1.2395503	0.00177417
5	1.2395503	1.4173405	1.2397008	1.5046154×10^{-4}
6	1.2397008	1.4173405	1.2397135	$1.27497504 \times 10^{-5}$
7	1.2397135	1.4173405	1.2397146	$1.08030887 \times 10^{-6}$

3.8. ejercicio 17

El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = 230\,x^4 + 18\,x^3 + 9\,x^2 - 221\,x - 9$$

tiene dos ceros reales, la una en $[-1, 0]$ y la otra en $[0, 1]$. Aproximar estos ceros con 10^{-6} usando:

- Método de Posicion falsa

- Método de la Secante
- Método de Newton

3.8.1. inciso a)

intervalo [-1, 0]

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
posicionfalsa(-1, 0, 6, 30);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-1	0	-0.02036199	0.02036199
2	-1	-0.02036199	-0.03043025	0.01006826
3	-1	-0.03043025	-0.03547981	0.005049567
4	-1	-0.03547981	-0.03803041	0.002550599
5	-1	-0.03803041	-0.03932338	0.001292966
6	-1	-0.03932338	-0.03998001	$6.566287334 \times 10^{-4}$
7	-1	-0.03998001	-0.04031378	$3.337740601 \times 10^{-4}$
8	-1	-0.04031378	-0.04048352	$1.697416654 \times 10^{-4}$
9	-1	-0.04048352	-0.04056987	$8.634310068 \times 10^{-5}$
10	-1	-0.04056987	-0.04061379	$4.392576813 \times 10^{-5}$
11	-1	-0.04061379	-0.04063614	$2.23479565 \times 10^{-5}$
12	-1	-0.04063614	-0.04064751	$1.137024619 \times 10^{-5}$
13	-1	-0.04064751	-0.0406533	$5.785072919 \times 10^{-6}$
14	-1	-0.0406533	-0.04065624	$2.943413834 \times 10^{-6}$
15	-1	-0.04065624	-0.04065774	$1.497599226 \times 10^{-6}$
16	-1	-0.04065774	-0.0406585	$7.61975133 \times 10^{-7}$

intervalo [0, 1]

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
posicionfalsa(0, 1, 6, 30);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0	1	0.25	0.75
2	0.25	1	0.7737628	0.5237628
3	0.7737628	1	0.9448852	0.1711224
4	0.9448852	1	0.9611108	0.01622563
5	0.9611108	1	0.9623057	0.001194866
6	0.9623057	1	0.9623917	$8.608441294 \times 10^{-5}$
7	0.9623917	1	0.9623979	6.1920579×10^{-6}
8	0.9623979	1	0.9623984	$4.453438442 \times 10^{-7}$

3.8.2. inciso b)

intervalo [-1, 0]

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
secante(-1, 0, 6, 30);
```

N	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-1	0	-0.02036199	0.02036199
2	0	-0.02036199	-0.04069126	0.02032927
3	-0.02036199	-0.04069126	-0.04065926	$3.199385755 \times 10^{-5}$
4	-0.04069126	-0.04065926	-0.04065929	$2.573803404 \times 10^{-8}$

intervalo [1,0]

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
secante(0.5, 1, 6, 30);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.8942214 & 0.1057786 \\ 2 & 1 & 0.8942214 & 0.9570464 & 0.062825 \\ 3 & 0.8942214 & 0.9570464 & 0.9632104 & 0.006164091 \\ 4 & 0.9570464 & 0.9632104 & 0.9623896 & 8.208126831 \times 10^{-4} \\ 5 & 0.9632104 & 0.9623896 & 0.9623984 & 8.772062474 \times 10^{-6} \\ 6 & 0.9623896 & 0.9623984 & 0.9623984 & 1.432207719 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

3.8.3. inciso c)

intervalo [-1, 0]

$$f'(x) = 920\,x^3 + 54\,x^2 + 18\,x - 221$$

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
newton(-0.5, 6, 30);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & -0.5 & -0.1504525 & 0.3495475 \\ 2 & -0.1504525 & -0.04181681 & 0.1086357 \\ 3 & -0.04181681 & -0.04065934 & 0.00115747 \\ 4 & -0.04065934 & -0.04065929 & 5.518157035 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

intervalo [0, 1]

$$f'(x) = 920\,x^3 + 54\,x^2 + 18\,x - 221$$

```
f(x):=230*x^4+18*x^3+9*x^2-221*x-9;
newton(0.7, 6, 30);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0.7 & 1.43262236 & 0.7326224 \\ 2 & 1.43262236 & 1.15993576 & 0.2726866 \\ 3 & 1.15993576 & 1.01378674 & 0.146149 \\ 4 & 1.01378674 & 0.9670653 & 0.04672145 \\ 5 & 0.9670653 & 0.9624416 & 0.004623643 \\ 6 & 0.9624416 & 0.9623984 & 4.322351778 \times 10^{-5} \\ 7 & 0.9623984 & 0.9623984 & 3.754473843 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

3.9. ejercicio 24

Buscar una aproximación de λ, con 10^{-4}, para la siguiente ecuación

$$1564000 = 1000000\,e^{\lambda} + \frac{435000}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right)$$

$$f'(x) = \frac{435000\,e^x}{x} + 1000000\,e^x - \frac{435000\,(e^x - 1)}{x^2}$$

```
f(x):=1000000*%e^x+435000/x*(%e^x-1)-1564000;
newton(0.01, 4, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 0.01 & 0.10501 & 0.09501 \\ 2 & 0.10501 & 0.10101 & 0.0040043 \\ 3 & 0.10101 & 0.101 & 7.5800338\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

3.10. ejercicio 25

La suma de dos numeros da 20. Si a ámbos se les añade su raiz cuadrada y se multiplican da 155.55.

$$x+y=20 \quad \longrightarrow \quad y=20-x$$

$$\begin{aligned} \left(x+\sqrt{x}\right)\left(y+\sqrt{y}\right) &= 155.55 \\ \left(x+\sqrt{x}\right)\left(20-x+\sqrt{20-x}\right) &= 155.55 \\ \left(x+\sqrt{x}\right)\left(20-x+\sqrt{20-x}\right)-155.55 &= 0=f(x) \end{aligned}$$

```
f(x):=(x+sqrt(x))*(20-x+sqrt(20-x))-155.55;
secante(6, 7, 6, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 6 & 7 & 6.54963582 & 0.4503642 \\ 2 & 7 & 6.54963582 & 6.50999293 & 0.03964289 \\ 3 & 6.54963582 & 6.50999293 & 6.51286432 & 0.002871395 \\ 4 & 6.50999293 & 6.51286432 & 6.51284873 & 1.559160583\times 10^{-5} \\ 5 & 6.51286432 & 6.51284873 & 6.51284873 & 6.580253675\times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

```
f(x):=(x+sqrt(x))*(20-x+sqrt(20-x))-155.55;
secante(13, 14, 6, 20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & error \\ 1 & 13 & 14 & 13.4503642 & 0.5496358 \\ 2 & 14 & 13.4503642 & 13.4845347 & 0.03417049 \\ 3 & 13.4503642 & 13.4845347 & 13.4871656 & 0.002630904 \\ 4 & 13.4845347 & 13.4871656 & 13.4871513 & 1.430811379\times 10^{-5} \\ 5 & 13.4871656 & 13.4871513 & 13.4871513 & 5.532454495\times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

por lo tanto los dos numeros son: $x=6.512849$ y $y=13.487151$

Capítulo 4

Newton

Ejercicios de Seccion 2.4, Pág. 85

4.1. ejercicio 1

Use el método de newton para encontrar la solución, con 10^{-5}, para los siguientes problemas.

4.1.1. inciso a)

Con $x^2 - 2\,x\,e^{-x} + e^{-2x} = 0$, para $0 \leq x \leq 1$

$$f'(x) = 2\,x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} - 2\,e^{-2\,x} + 2\,x$$

```
f(x):=x^2-2*x*%e^(-x)+%e^(-2*x);
newton(0.4, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	0.4	0.480919	0.0809186
2	0.480919	0.523341	0.0424222
3	0.523341	0.545066	0.0217253
4	0.545066	0.55606	0.0109942
5	0.55606	0.561591	0.00553032
6	0.561591	0.564364	0.00277352
7	0.564364	0.565753	0.00138885
8	0.565753	0.566448	6.949512×10^{-4}
9	0.566448	0.566796	$3.47606794 \times 10^{-4}$
10	0.566796	0.566969	$1.73836207 \times 10^{-4}$
11	0.566969	0.567056	$8.69263072 \times 10^{-5}$
12	0.567056	0.5671	$4.34652049 \times 10^{-5}$
13	0.5671	0.567122	$2.17331155 \times 10^{-5}$
14	0.567122	0.567132	$1.08666849 \times 10^{-5}$
15	0.567132	0.567138	$5.43337546 \times 10^{-6}$

4.1.2. inciso d)

con $f(x) = e^{6x} + 3(ln\,2)^2\,e^{2x} - (ln\,8)e^{4x} - (ln\,2)^3 = 0$ para $-1 \leq x \leq 0$

$$f'(x) = 6\,e^{6\,x} - 8.3177662\,e^{4\,x} + 2.8827181\,e^{2\,x}$$

```
f(x):=%e^(6*x)+3*(ln(2))^2*%e^(2*x)-(ln(8))^(4*x)-(ln(2))^3;
newton(-0.226, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-0.226	-0.211125	0.0148746
2	-0.211125	-0.201572	0.00955342
3	-0.201572	-0.195354	0.00621838
4	-0.195354	-0.191272	0.00408156
5	-0.191272	-0.188579	0.0026934
6	-0.188579	-0.186795	0.00178354
7	-0.186795	-0.185611	0.00118374
8	-0.185611	-0.184825	$7.86825148 \times 10^{-4}$
9	-0.184825	-0.184301	$5.23519142 \times 10^{-4}$
10	-0.184301	-0.183952	$3.48556248 \times 10^{-4}$
11	-0.183952	-0.18372	$2.32168422 \times 10^{-4}$
12	-0.18372	-0.183566	$1.54689109 \times 10^{-4}$
13	-0.183566	-0.183463	$1.03086573 \times 10^{-4}$
14	-0.183463	-0.183394	$6.87065421 \times 10^{-5}$
15	-0.183394	-0.183348	$4.57965054 \times 10^{-5}$
16	-0.183348	-0.183318	$3.05275326 \times 10^{-5}$
17	-0.183318	-0.183297	$2.03511819 \times 10^{-5}$
18	-0.183297	-0.183284	$1.35694578 \times 10^{-5}$
19	-0.183284	-0.183275	$9.05340675 \times 10^{-6}$

4.2. ejercicio 2

Use el método de newton para encontrar la solución, con 10^{-5}, para los siguientes problemas.

4.2.1. inciso b)

Con $f(x) = x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ para $-3 \leq x \leq -2$

$$f'(x) = 30\,x^4 + 36\,x^3 - 6\,x^2 - 10\,x$$

```
f(x):=x^2+6*x^5+9*x^4-2*x^3-6*x^2+1;
newton(-2, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-2	-1.7287234	0.271277
2	-1.7287234	-1.5335706	0.195153
3	-1.5335706	-1.4086994	0.124871
4	-1.4086994	-1.3490539	0.0596455
5	-1.3490539	-1.3350657	0.0139882
6	-1.3350657	-1.3343478	$7.17972296 \times 10^{-4}$
7	-1.3343478	-1.3343459	1.8315956×10^{-6}

4.2.2. inciso d)

con $f(x) = e^{3x} - 27\,x^6 + 27\,x^4\,e^x - 9x^2e^{2x} = 0$ para $3 \leq x \leq 5$

$$f'(x) = 3\,e^{3\,x} - 18\,x^2\,e^{2\,x} - 18\,x\,e^{2\,x} + 27\,x^4\,e^x + 108\,x^3\,e^x - 162\,x^5$$

```
f(x):=%e^(3*x)-27*x^6+27*x^4*%e^x-9*x^2*%e^(2*x);
newton(3.75 , 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	3.75	3.7444462	0.00555385
2	3.7444462	3.7406964	0.00374979
3	3.7406964	3.738175	0.00252142
4	3.738175	3.7364843	0.0016907
5	3.7364843	3.7353527	0.00113152
6	3.7353527	3.7345964	$7.56314696 \times 10^{-4}$
7	3.7345964	3.7340913	$5.05089051 \times 10^{-4}$
8	3.7340913	3.7337542	$3.37114627 \times 10^{-4}$
9	3.7337542	3.7335293	$2.24917153 \times 10^{-4}$
10	3.7335293	3.7333793	$1.50029691 \times 10^{-4}$
11	3.7333793	3.7332792	$1.00038024 \times 10^{-4}$
12	3.7332792	3.7332125	$6.67225522 \times 10^{-5}$
13	3.7332125	3.7331678	$4.46622606 \times 10^{-5}$
14	3.7331678	3.7331384	$2.94270173 \times 10^{-5}$
15	3.7331384	3.73312	$1.84303995 \times 10^{-5}$
16	3.73312	3.733105	$1.50264624 \times 10^{-5}$
17	3.733105	3.7330931	$1.18391299 \times 10^{-5}$
18	3.7330931	3.7330998	$6.68252653 \times 10^{-6}$

4.3. ejercicio 5

Use el método de newton y para encontrar la solución, con 10^{-5} para

$$f(x) = e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0, \qquad para \quad -1 \leq x \leq 0$$

$$f'(x) = 6\,e^{6\,x} - 8.316\,e^{4\,x} + 2.882\,e^{2\,x}$$

```
f(x):=%e^(6*x)+1.441*%e^(2*x)-2.079*%e^(4*x)-0.3330;
newton(-0.16, 5, 20);
```

N	X_n	X_{n+1}	$error$
1	-0.16	-0.166343	0.00634307
2	-0.166343	-0.16908	0.00273704
3	-0.16908	-0.16959	$5.10103882 \times 10^{-4}$
4	-0.16959	-0.169607	$1.63192092 \times 10^{-5}$
5	-0.169607	-0.169607	$1.62934153 \times 10^{-8}$

Capítulo 5

Steffensen

Ejercicios de Seccion 2.5, Pág. 90

5.1. ejercicio 4

Sea $g(x) = 1 + (sin\, x)^2$ y $p_0 = 1$. Use el método de steffensen para encontrar $p^{(1)}_{n+2}$ y $p^{(2)}_{n+2}$

```
g(x):=1+(sin(x))^2;
steffensen(1, 4, 20);
```

$$\begin{pmatrix} k & p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & p_{n+2} & error \\ 1 & 1 & 1.708073 & 1.981273 & 2.152905 & 1.152905 \\ 2 & 2.152905 & 1.697735 & 1.983973 & 1.873464 & 0.27944 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $p^{(1)}_{n+2} = 2.152905$ y $p^{(2)}_{n+2} = 1.873464$

5.2. ejercicio 8

Use el método de steffensen para encontrar, con una tolerancia menor a 10^{-4}, la raiz de $x - 2^{-x} = 0$ en el intervalo $[0, 1]$

```
g(x):=2^(-x);
steffensen(0,4,20);
```

$$\begin{pmatrix} k & p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & p_{n+2} & error \\ 1 & 0 & 1 & 0.5 & 0.66667 & 0.66667 \\ 2 & 0.66667 & 0.62996 & 0.64619 & 0.64122 & 0.02545 \\ 3 & 0.64122 & 0.64117 & 0.64119 & 0.64119 & 3.0447173 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$$

por lo tanto la solución aproximada es 0.64119

5.3. ejercicio 9

Use el método de steffensen con $p_0 = 2$ y calcule una aproximación de $\sqrt{3}$ con una tolerancia 10^{-4}.

```
g(x):=0.5*(x+3/x);
steffensen(2, 4, 20);
```

$$\begin{pmatrix} k & p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & p_{n+2} & error \\ 1 & 2 & 1.75 & 1.732143 & 1.730769 & 0.26923 \\ 2 & 1.730769 & 1.732051 & 1.732051 & 1.732051 & 0.0012816 \\ 3 & 1.732051 & 1.732051 & 1.732051 & 1.732051 & 1.756042 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

por la aproximación a $\sqrt{3}$ es 1.732051

5.4. ejercicio 12

5.4.1. inciso b)

Use el método de steffensen para aproximar la solución de $x^3 - 2x - 5 = 0$ con una toleracia menor a 10^{-5}. Use $g(x) = \sqrt[3]{2x + 5}$.

```
g(x):=(2*x+5)^(1/3);
steffensen(1, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix} k & p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & p_{n+2} & error \\ 1 & 1 & 1.9129312 & 2.0665808 & 2.0976736 & 1.0976736 \\ 2 & 2.0976736 & 2.0950258 & 2.0946236 & 2.0945515 & 0.00312207 \\ 3 & 2.0945515 & 2.0945515 & 2.0945515 & 2.0945515 & 1.92422669 \times 10^{-8} \end{pmatrix}$$

por lo tanto la aproximación a la solucion es 2.0945515

5.4.2. inciso c)

Use el método de steffensen para aproximar la solución de $3\,x^2 - e^x = 0$ con una toleracia menor a 10^{-5}. Use $g(x) = \sqrt{\frac{e^x}{3}}$.

```
g(x):=sqrt((%e^x)/(3));
steffensen(0, 5, 20);
```

$$\begin{pmatrix} k & p_0^{(k)} & p_1^{(k)} & p_2^{(k)} & p_{n+2} & error \\ 1 & 0 & 0.57735 & 0.770565 & 0.86775 & 0.86775 \\ 2 & 0.86775 & 0.890982 & 0.901392 & 0.909844 & 0.0420938 \\ 3 & 0.909844 & 0.909933 & 0.909974 & 0.910008 & 1.64019988 \times 10^{-4} \\ 4 & 0.910008 & 0.910008 & 0.910008 & 0.910008 & 2.55462373 \times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

por lo tanto la aproximación a la solucion es 0.910008

Capítulo 6

Lagrange

Ejercicios de Seccion 3.1, Pág.114

6.1. ejercicio 1

Para las siguientes funciones $f(x)$, sea $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 0.9$. Construir el polinomio de interpolación, de grado adecuado, para aproximar $f(0.45)$, y encuentre el error absoluto.

6.1.1. inciso b)

$f(x) = \sqrt{1+x}$

```
f(x):=sqrt(1+x);
a:matrix([0,0.6]);
a:addrow(a,map(f,a));
polagrange(a);
```

la tabla es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 1.0 & 1.264911064067352 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{(1.0)\ (x-0.6)}{0-0.6} + \frac{(1.264911064067352)\ (x-0)}{0.6-0} = \frac{8268424\,x + 18727245}{18727245}$$

$$p\,(x) = \frac{8268424\,x + 18727245}{18727245}$$

$$p\,(0.45) = 1.198683298050514$$

$$f\,(0.45) = 1.20415945787923$$

$$error\ absoluto = |f(0.45) - p(0.45)| = 0.0054761598287154$$

6.1.2. inciso d)

$f(x) = \tan(x)$

```
f(x):=tan(x);
a:matrix([0,0.6]);
a:addrow(a,map(f,a));
polagrange(a);
```

la tabla es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.6 \\ 0 & 0.68413680834169 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{(0)\ (x-0.6)}{0-0.6} + \frac{(0.68413680834169)\ (x-0)}{0.6-0} = \frac{8078723\,x}{7085182}$$

$$p\,(x) = \frac{8078723\,x}{7085182}$$

$$p\,(0.45) = 0.51310260625627$$

$$f\,(0.45) = 0.48305506561658$$

$$error\ absoluto = |f\,(0.45) - p\,(0.45)\,| = 0.03004754063969$$

6.2. ejercicio 5

Use polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para aproximar lo siguiente:

6.2.1. inciso b)

$f\left(-1/3\right)$ con los datos

$$\begin{pmatrix} -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.0718125 & -0.02475 & 0.3349375 & 1.101 \end{pmatrix}$$

Grado uno:

```
a:matrix([-0.5,-0.25],[-0.02475,0.3349375]);
polagrange(a);
```

los datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 \\ -0.02475 & 0.3349375 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{(0.3349375)\ (x - \text{-}0.5)}{\text{-}0.25 - \text{-}0.5} + \frac{(\text{-}0.02475)\ (x - \text{-}0.25)}{\text{-}0.5 - \text{-}0.25} = \frac{11510\,x + 5557}{8000}$$

$$p\left(x\right) = \frac{11510\,x + 5557}{8000}$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5161}{24000} = 0.21504166666667$$

Grado dos:

```
a:matrix([-0.5,-0.25,0],[-0.02475,0.3349375,1.101]);
polagrange(a);
```

los datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.02475 & 0.3349375 & 1.101 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{0.3349375\ (x - \text{-}0.5)\ (x - 0)}{(\text{-}0.25 - \text{-}0.5)\ (\text{-}0.25 - 0)} + \frac{\text{-}0.02475\ (x - \text{-}0.25)\ (x - 0)}{(\text{-}0.5 - \text{-}0.25)\ (\text{-}0.5 - 0)} + \frac{1.101\ (x - \text{-}0.25)\ (x - \text{-}0.5)}{(0 - \text{-}0.25)\ (0 - \text{-}0.5)} = \frac{3251\,x^2 + 3877\,x + 1101}{1000}$$

$$p\left(x\right) = \frac{3251\,x^2 + 3877\,x + 1101}{1000}$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1529}{9000} = 0.16988888888889$$

Grado tres:

```
a:matrix([-0.75,-0.5,-0.25,0],[-0.0718125,-0.02475,0.3349375,1.101]);
polagrange(a);
```

se utiliza todos los datos de la tabla original

$$\begin{pmatrix} -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.0718125 & -0.02475 & 0.3349375 & 1.101 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\begin{aligned}
&\frac{0.3349375\ (x - \text{-}0.5)\ (x - \text{-}0.75)\ (x-0)}{(\text{-}0.25 - \text{-}0.5)\ (\text{-}0.25 - \text{-}0.75)\ (\text{-}0.25-0)}\\
&+\frac{\text{-}0.02475\ (x - \text{-}0.25)\ (x - \text{-}0.75)\ (x-0)}{(\text{-}0.5 - \text{-}0.25)\ (\text{-}0.5 - \text{-}0.75)\ (\text{-}0.5-0)}\\
&+\frac{\text{-}0.0718125\ (x - \text{-}0.25)\ (x - \text{-}0.5)\ (x-0)}{(\text{-}0.75 - \text{-}0.25)\ (\text{-}0.75 - \text{-}0.5)\ (\text{-}0.75-0)}\\
&+\frac{1.101\ (x - \text{-}0.25)\ (x - \text{-}0.5)\ (x - \text{-}0.75)}{(0 - \text{-}0.25)\ (0 - \text{-}0.5)\ (0 - \text{-}0.75)}\\
&=\frac{1000\,x^3+4001\,x^2+4002\,x+1101}{1000}
\end{aligned}$$

$$p\left(x\right)=\frac{1000\,x^3+4001\,x^2+4002\,x+1101}{1000}$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{589}{3375}=0.17451851851852$$

6.2.2. inciso d)

$f\left(0.9\right)$ con los datos

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ -0.1769446 & 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

Grado uno:

```
a:matrix([0.8,1.0],[0.22363362,0.65809197]);
polagrange(a);
```

los datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1.0 \\ 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{(0.22363362)\ (x-1.0)}{0.8-1.0}+\frac{(0.65809197)\ (x-0.8)}{1.0-0.8}=\frac{368539439989973\,x-256891063989973}{169654670000000}$$

$$p\left(x\right)=\frac{368539439989973\,x-256891063989973}{169654670000000}$$

$$p\left(0.9\right)=0.440862795$$

Grado dos:

```
a:matrix([0.7,0.8,1.0],[0.0138,0.224,0.658]);
polagrange(a);
```

los datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ 0.0138 & 0.224 & 0.658 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{0.01375227\ (x-0.8)\ (x-1.0)}{(0.7-0.8)\ (0.7-1.0)}+\frac{0.22363362\ (x-0.7)\ (x-1.0)}{(0.8-0.7)\ (0.8-1.0)}$$
$$+\frac{0.65809197\ (x-0.7)\ (x-0.8)}{(1.0-0.7)\ (1.0-0.8)}=\frac{24492750\,x^2+173142225\,x-131825778}{100000000}$$

$$p\,(x)=\frac{24492750\,x^2+173142225\,x-131825778}{100000000}$$

$$p\,(0.9)=0.43841352$$

Grado tres:

```
a:matrix([0.6,0.7,0.8,1.0],[-0.1769446,0.01375227,0.22363362,0.65809197]);
polagrange(a);
```

se utiliza los datos originales

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ -0.1769446 & 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{-0.1769446\ (x-0.7)\ (x-0.8)\ (x-1.0)}{(0.6-0.7)\ (0.6-0.8)\ (0.6-1.0)}$$
$$+\frac{0.01375227\ (x-0.6)\ (x-0.8)\ (x-1.0)}{(0.7-0.6)\ (0.7-0.8)\ (0.7-1.0)}$$
$$+\frac{0.22363362\ (x-0.6)\ (x-0.7)\ (x-1.0)}{(0.8-0.6)\ (0.8-0.7)\ (0.8-1.0)}$$
$$+\frac{0.65809197\ (x-0.6)\ (x-0.7)\ (x-0.8)}{(1.0-0.6)\ (1.0-0.7)\ (1.0-0.8)}$$
$$=-\frac{357148250\,x^3-941856125\,x^2+389440945\,x+63648536}{200000000}$$

$$p\,(x)=-\frac{357148250\,x^3-941856125\,x^2+389440945\,x+63648536}{200000000}$$

$$p\,(0.9)=0.4419850025$$

6.3. ejercicio 6

6.3.1. inciso b)

Use la aproximación por polinomio de Lagrange de grados uno, dos y tres para $f(0)$ utilizando los datos:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1.9375 & 1.33203 & 0.800781 & 0.6875 \end{pmatrix}$$

Grado 1:

```
a:matrix([-0.25,0.25],[1.33203,0.800781]);
polagrange(a);
```

se toman dos pares de puntos adecuados para la aproximación

$$\begin{pmatrix} -0.25 & 0.25 \\ 1.33203 & 0.800781 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{(1.33203)\ (x-0.25)}{\text{-0.25}-0.25}+\frac{(0.800781)\ (x-\text{-0.25})}{0.25-\text{-0.25}}=-\frac{2124996\,x-2132811}{2000000}$$

$$p\left(x\right)=-\frac{2124996\,x-2132811}{2000000}$$

$$p\left(0\right)=\frac{2132811}{2000000}=1.0664055$$

Grado dos:

```
a:matrix([-0.25,0.25,0.5],[1.33203,0.800781,0.6875]);
polagrange(a);
```

se escojen los puntos mas adecuados

$$\begin{pmatrix} -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1.33203 & 0.800781 & 0.6875 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{1.33203\ (x-0.25)\ (x-0.5)}{(\text{-0.25}-0.25)\ (\text{-0.25}-0.5)}+\frac{0.800781\ (x-\text{-0.25})\ (x-0.5)}{(0.25-\text{-0.25})\ (0.25-0.5)}$$
$$+\frac{0.6875\ (x-\text{-0.25})\ (x-0.25)}{(0.5-\text{-0.25})\ (0.5-0.25)}=\frac{2437496\,x^2-3187494\,x+3046873}{3000000}$$

$$p\left(x\right)=\frac{2437496\,x^2-3187494\,x+3046873}{3000000}$$

$$p\left(0\right)=\frac{3046873}{3000000}=1.015624333333334$$

Grado tres:

```
a:matrix([-0.5,-0.25,0.25,0.5],[1.9375,1.33203,0.800781,0.6875]);
polagrange(a);
```

se utiliza las cuatro pares de puntos originales

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 1.9375 & 1.33203 & 0.800781 & 0.6875 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

$$\frac{1.33203\ (x-\text{-0.5})\ (x-0.25)\ (x-0.5)}{(\text{-0.25}-\text{-0.5})\ (\text{-0.25}-0.25)\ (\text{-0.25}-0.5)}$$
$$+\frac{1.9375\ (x-\text{-0.25})\ (x-0.25)\ (x-0.5)}{(\text{-0.5}-\text{-0.25})\ (\text{-0.5}-0.25)\ (\text{-0.5}-0.5)}$$
$$+\frac{0.800781\ (x-\text{-0.25})\ (x-\text{-0.5})\ (x-0.5)}{(0.25-\text{-0.25})\ (0.25-\text{-0.5})\ (0.25-0.5)}$$
$$+\frac{0.6875\ (x-\text{-0.25})\ (x-\text{-0.5})\ (x-0.25)}{(0.5-\text{-0.25})\ (0.5-\text{-0.5})\ (0.5-0.25)}$$
$$=-\frac{1500016\,x^3-1968756\,x^2+1499996\,x-1476561}{1500000}$$

$$p\,(x) = -\frac{1500016\,x^3 - 1968756\,x^2 + 1499996\,x - 1476561}{1500000}$$

$$p\,(0) = \frac{492187}{500000} = 0.984374$$

6.4. ejercicio 9

Sea $P_3(x)$ el polinomio de interpolación de los datos $(0,\,0)$, $(0.5,\ y)$, $(1,\ 3)$ y $(2,\ 2)$. El coeficiente de x^3 en $P_3(x)$ es 6. Encuentre y.

Haciendo las operaciones correspondientes a un polinomio de grado tres

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-0)\ (x-1)\ (x-2)\ y}{(0.5-0)\ (0.5-1)\ (0.5-2)} \\
&+\frac{0\ (x-0.5)\ (x-1)\ (x-2)}{(0-0.5)\ (0-1)\ (0-2)} \\
&+\frac{3\ (x-0)\ (x-0.5)\ (x-2)}{(1-0)\ (1-0.5)\ (1-2)} \\
&+\frac{2\ (x-0)\ (x-0.5)\ (x-1)}{(2-0)\ (2-0.5)\ (2-1)} \\
= &\frac{\left(8\,x^3 - 24\,x^2 + 16\,x\right)\ y - 16\,x^3 + 42\,x^2 - 17\,x}{3}
\end{aligned}$$

$$p\,(x) = \frac{\left(8\,x^3 - 24\,x^2 + 16\,x\right)\ y - 16\,x^3 + 42\,x^2 - 17\,x}{3}$$

luego se encuentra que el coeficiente de x^3 es $(8y-16)/3$ que es quivalente a 6 como lo indica el ejercicio:

$$\frac{8y-16}{3} = 6$$

$$8y - 16 = 18$$

$$8y = 18 + 16 = 34$$

$$y = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} = 4.25$$

6.5. ejercicio 10

Sea $f\,(x) = \sqrt{x - x^2}$ y $P_2\,(x)$ el polinomio de interpolacion con $x_0 = 0$, x_1 y $x_2 = 1$. Encuentre el valor de x_1 en $(0,\ 1)$ para que $f\,(0.5) - P_2\,(0.5) = -0.25$.

Del enunciado se tiene

$$f\,(0.5) - P_2\,(0.5) = -0.25$$

evaluando la funcion f en el valor 0.5 se tiene $f(0.5) = 0.5$, entonces

$$f\,(0.5) + 0.25 = P_2\,(0.5)$$

$$0.5 + 0.25 = P_2\,(0.5)$$

$$P_2\,(0.5) = 0.75$$

ahora si $x_1 = m$ y $f(x_1) = \sqrt{x_1 - x_1^2} = n$, haciendo la interpolación

$$\frac{0\ (x-1)\ (x-m)}{(0-1)\ (0-m)}+\frac{0\ (x-0)\ (x-m)}{(1-0)\ (1-m)}+\frac{n\ (x-0)\ (x-1)}{(m-0)\ (m-1)}=\frac{n\,x^2-n\,x}{m^2-m}$$

$$p\,(x)=\frac{n\,x^2-n\,x}{m^2-m}$$

deshaciendo las sustituciones

$$p\,(x)=\frac{x^2\,\sqrt{x_1-x_1{}^2}-x\,\sqrt{x_1-x_1{}^2}}{x_1{}^2-x_1}$$

sabiendo que $P_2\,(0.5)=0.75$ se puede

$$\frac{x^2\,\sqrt{x_1-x_1{}^2}-x\,\sqrt{x_1-x_1{}^2}}{x_1{}^2-x_1}=0.75$$

de la misma fuente $P_2\,(0.5)=0.75$ se ve también que $x=0.5$, sustituyendo este último y luego simplificando el resultante

$$-\frac{\sqrt{x_1-x_1{}^2}}{4\,x_1{}^2-4\,x_1}=\frac{3}{4}$$

aplicando el método de newton para encontrar x_1 se hace

$$f\,(x_1)=-\frac{\sqrt{x_1-x_1{}^2}}{4\,x_1{}^2-4\,x_1}-\frac{3}{4}=0$$

```
f(x):=-sqrt(x-x^2)/(4*x^2-4*x)-3/4;
newton(0.872,7,20);
```

$$\begin{pmatrix} N & X\_n & X\_n+1 & error \\ 1 & 0.872 & 0.87268093 & 6.809250663\times10^{-4} \\ 2 & 0.87268093 & 0.872678 & 2.9287616645\times10^{-6} \\ 3 & 0.872678 & 0.872678 & 5.4665716398\times10^{-11} \end{pmatrix}$$

por tanto, x_1 vale 0.872678

6.6. ejercicio 12

Utilice el polinomio de interpolación de Lagrange de grado tres o menos, aproximando a cuatro digitos, para calcular cos(0.750). Utilice los siguientes valores.

$$\cos(0.698)=0.7661\quad \cos(0.733)=0.7432\quad \cos(0.768)=0.7193\quad \cos(0.803)=0.6946$$

se va ha utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.733 & 0.768 & 0.803 \\ 0.7432 & 0.7193 & 0.6946 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.733,0.768,0.803],[0.7432,0.7193,0.6946]);
polagrange(a);
```

$$\frac{0.7432\ (x-0.768)\ (x-0.803)}{(0.733-0.768)\ (0.733-0.803)}+\frac{0.7193\ (x-0.733)\ (x-0.803)}{(0.768-0.733)\ (0.768-0.803)}+\frac{0.6946\ (x-0.733)\ (x-0.768)}{(0.803-0.733)\ (0.803-0.768)}=-\frac{4000000\,x^2+2361000\,x-12983969}{12250000}$$

$$p\,(x)=-\frac{4000000\,x^2+2361000\,x-12983969}{12250000}$$

$$p\,(0.75)=0.73169135$$

6.7. ejercicio 13

Construir los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones.

6.7.1. inciso b)

$f(x) = \sin(ln\ x) \quad x_0 = 2.0,\ x_1 = 2.4,\ x_2 = 2.6$

```
a:matrix([2,2.4,2.6]);
ln(x):=log(x)/log(%e);
f(x):=sin(ln(x));
a:addrow(a,map(f,a));
polagrange(a);
```

entonces tenemos los datos

$$\begin{pmatrix} 2 & 2.4 & 2.6 \\ 0.63896128 & 0.76784388 & 0.81660905 \end{pmatrix}$$

haciendo la interpolación

$$\frac{0.63896128\ (x-2.4)\ (x-2.6)}{(2-2.4)\ (2-2.6)} + \frac{0.76784388\ (x-2)\ (x-2.6)}{(2.4-2)\ (2.4-2.6)}$$
$$+\frac{0.81660905\ (x-2)\ (x-2.4)}{(2.6-2)\ (2.6-2.4)} = 0.13063441\,x^2 - 0.89699789\,x + 0.63249687$$

$$p(x) = 0.13063441\,x^2 - 0.89699789\,x + 0.63249687$$

6.7.2. inciso d)

$f(x) = \cos(x) + \sin(x), \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0.25,\ x_2 = 0.5,\ x_3 = 1.0$. Los datos a utilizar son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1.21631638 & 1.357008100 & 1.38177329 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0,0.25,0.5,1]);
f(x):=cos(x)+sin(x);
a:addrow(a,map(f,a));
polagrange(a);
```


$$\begin{aligned} &\frac{1\ (x-0.25)\ (x-0.5)\ (x-1)}{(0-0.25)\ (0-0.5)\ (0-1)} \\ &+\frac{1.2163\ (x-0)\ (x-0.5)\ (x-1)}{(0.25-0)\ (0.25-0.5)\ (0.25-1)} \\ &+\frac{1.357\ (x-0)\ (x-0.25)\ (x-1)}{(0.5-0)\ (0.5-0.25)\ (0.5-1)} \\ &+\frac{1.3818\ (x-0)\ (x-0.25)\ (x-0.5)}{(1-0)\ (1-0.25)\ (1-0.5)} \\ &= -\frac{1192\,x^3 + 8178\,x^2 - 15097\,x - 15000}{15000} \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$p(x) = -\frac{1192\,x^3 + 8178\,x^2 - 15097\,x - 15000}{15000}$$

6.8. ejercicio 18

6.8.1. inciso a)

Un censo de la poblacion de Estados Unidos da los resultados en la siguiente tabla, en miles, desde 1950 a 200.

$$\begin{pmatrix} Anio & 1950 & 1960 & 1970 & 1980 & 1990 & 2000 \\ Poblacion & 151326 & 179323 & 203302 & 226542 & 249633 & 281422 \end{pmatrix}$$

Use interpolacion de Lagrange para aproximar la poblacion en los años 1940,1975 y 2020.

Para año 1940

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 1950 & 1960 \\ 151326 & 179323 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

```
a:matrix([1950,1960],[151326,179323])
polagrange(a);
p(1940);
```

$$\frac{(151326)\ (x-1960)}{1950-1960}+\frac{(179323)\ (x-1950)}{1960-1950}=0.1\ (27997\,x-53080890)$$

$$p\,(x)=0.1\ (27997\,x-53080890)$$

$$p\,(1940)=123329.0$$

Para año 1975

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 1970 & 1980 \\ 203302 & 226542 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

```
a:matrix([1970,1980],[203302,226542]);
polagrange(a);
p(1975);
```

$$\frac{(203302)\ (x-1980)}{1970-1980}+\frac{(226542)\ (x-1970)}{1980-1970}=2324\,x-4374978$$

$$p\,(x)=2324\,x-4374978$$

$$p\,(1975)=214922$$

Para año 2020

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 1990 & 2000 \\ 249633 & 281422 \end{pmatrix}$$

haciendo los calculos

```
a:matrix([1990,2000],[249633,281422]);
polagrange(a);
p(2020);
```

$$\frac{(249633)\ (x-2000)}{1990-2000}+\frac{(281422)\ (x-1990)}{2000-1990}=0.1\ (31789\,x-60763780)$$

$$p\,(x)=0.1\ (31789\,x-60763780)$$

$$p\,(2020)=345000.0$$

6.9. ejercicio 19

Se sospecha que las altas cantidades de tanino en las hojas del roble maduras inhiben el crecimiento, en invierno, de polilla, larvas que dañan mucho estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla muestra el peso promedio de dos muestras de larvas en los primeros 28 días después del nacimiento. La primera muestra se crió en las hojas de roble jóvenes, mientras que la segunda muestra fue criados en hojas maduras del mismo árbol.

a) Utilizar la interpolación de Lagrange para aproximar la curva del peso promedio para cada muestra

b) Encontrar un peso promedio máximo aproximado para cada muestra por la determinación del máximo de la polinomio de interpolación.

Dia	0	6	10	13	17	20	28
Muestra 1 (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Muestra 2 (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

Cuadro 6.1: Peso promedio de dos muestras de larvas.

6.9.1. inciso a)

Se escogen los puntos mas apropiados; aquellos en los que los pesos de la **muestra uno** alcanzan sus puntos mas altos. Utilizando los datos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 13 \\ 17.33 & 42.67 & 37.33 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([6,10,13],[17.33,42.67,37.33]);
polagrange(a);
```

$$\frac{42.67\ (x-13)\ (x-6)}{(10-13)\ (10-6)}+\frac{37.33\ (x-10)\ (x-6)}{(13-10)\ (13-6)}$$
$$+\frac{17.33\ (x-10)\ (x-13)}{(6-10)\ (6-13)}=-7.14285\times 10^{-4}\left(1623\,x^2-34837\,x+126332\right)$$

$$p\,(x)=-7.14285714\times 10^{-4}\left(1623\,x^2-34837\,x+126332\right)$$

Se escogen los puntos mas apropiados; aquellos en los que los pesos de la **muestra dos** alcanzan sus puntos mas altos. Utilizando los datos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 13 \\ 16.11 & 18.89 & 15 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([6,10,13],[16.11,18.89,15]);
polagrange(a);
```

$$\frac{18.89\ (x-13)\ (x-6)}{(10-13)\ (10-6)}+\frac{15\ (x-10)\ (x-6)}{(13-10)\ (13-6)}$$
$$+\frac{16.11\ (x-10)\ (x-13)}{(6-10)\ (6-13)}=-2.38095\times 10^{-4}\left(1195\,x^2-22039\,x+21552\right)$$

$$p\,(x)=-2.380952\times 10^{-4}\left(1195\,x^2-22039\,x+21552\right)$$

6.9.2. inciso b)

Para la muestra uno

$$\frac{d}{d\,x}\left(-7.1428\times 10^{-4}\,\left(1623\,x^2-34837\,x+126332\right)\right)=-7.142857\times 10^{-4}\,\left(3246\,x-34837\right)$$

$$p'\left(x\right)=-7.142857\times 10^{-4}\,\left(3246\,x-34837\right)=0$$
$$x=10.73228589032656$$
$$p\left(10.73228589032656\right)=43.29165841475221$$

Para la muestra dos

$$\frac{d}{d\,x}\left(-2.3809\times 10^{-4}\,\left(1195\,x^2-22039\,x+21552\right)\right)=-2.38095\times 10^{-4}\,\left(2390\,x-22039\right)$$

$$p'\left(x\right)=-2.38095\times 10^{-4}\,\left(2390\,x-22039\right)=0$$
$$x=9.221338912133891$$
$$p\left(19.06251051006176\right)=19.06251051006176$$

Capítulo 7

Neville

Ejercicios de Seccion 3.2, Pág.123

7.1. ejercicio 1

Use el metodo de Neville para obtener la aproximación de polinomio de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para los siguientes ejercicios.

7.1.1. inciso b)

$f(-1/3)$ con los datos

$$\begin{pmatrix} -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.0718125 & -0.02475 & 0.3349375 & 1.101 \end{pmatrix}$$

grado 1

usando los datos

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -0.25 \\ -0.02475 & 0.3349375 \end{pmatrix}$$

```
a:transpose(matrix([-0.5,-0.25],[-0.02475000,0.33493750]));
neville(-1/3,a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{Y} & \text{Columna 1} \\ -0.5 & -0.02475 & 0 \\ -0.25 & 0.3349375 & 0.21504166666667 \end{pmatrix}$$

grado 2

usando los datos

$$\begin{pmatrix} -0.75 & -0.5 & -0.25 \\ -0.0718125 & -0.02475 & 0.3349375 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([-0.75,-0.5,-0.25],[-0.07181250,-0.02475000,0.33493750]);
neville(-1/3,a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{Y} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ -0.75 & -0.0718125 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.02475 & 0.006625 & 0 \\ -0.25 & 0.3349375 & 0.21504166666667 & 0.18030555555556 \end{pmatrix}$$

grado 3

usando los datos

$$\begin{pmatrix} -0.75 & -0.5 & -0.25 & 0 \\ -0.0718125 & -0.02475 & 0.3349375 & 1.101 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([-0.75,-0.5,-0.25,0],[-0.07181250,-0.02475000,0.33493750,1.10100000]);
neville(-1/3,a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{Y} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ -0.75 & -0.0718125 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.02475 & 0.006625 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0.3349375 & 0.21504166666667 & 0.18030555555556 & 0 \\ 0 & 1.101 & 0.079583333333333 & 0.16988888888889 & 0.17451851851852 \end{pmatrix}$$

7.1.2. inciso d)

$f(0.9)$ con los datos

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ -0.1769446 & 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

grado 1

usando

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1.0 \\ 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:transpose(matrix([0.8,1.0],[0.22363362,0.65809197]));
neville(0.9,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} \\ 0.8 & 0.22363362 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 0.440862795 \end{pmatrix}$$

grado 2

usando

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.7,0.8,1.0],[0.01375227,0.22363362,0.65809197]);
neville(0.9,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0.7 & 0.01375227 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.22363362 & 0.43351497 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 0.440862795 & 0.43841352 \end{pmatrix}$$

grado 3

usando

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ -0.1769446 & 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.6,0.7,0.8,1.0],[-0.17694460,0.01375227,0.22363362,0.65809197]);
neville(0.9,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0.6 & -0.1769446 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.01375227 & 0.39514601 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.22363362 & 0.43351497 & 0.45269945 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 0.440862795 & 0.43841352 & 0.4419850025 \end{pmatrix}$$

7.2. ejercicio 2

Use el método de neville para obtener la aproximación por polinomio de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para los siguientes incisos.

7.2.1. inciso a)

$f(0.43)$ con los datos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 1 & 1.64872 & 2.71828 & 4.48169 \end{pmatrix}$$

grado 1

usando
$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 1.64872 & 2.71828 \end{pmatrix}$$

```
a:transpose(matrix([0.25,0.5],[1.64872,2.71828]));
neville(0.43,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} \\ 0.25 & 1.64872 & 0 \\ 0.5 & 2.71828 & 2.4188032 \end{pmatrix}$$

grado 2

usando
$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 1.64872 & 2.71828 & 4.48169 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.25,0.5,0.75],[1.64872,2.71828,4.48169]);
neville(0.43,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0.25 & 1.64872 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2.71828 & 2.4188032 & 0 \\ 0.75 & 4.48169 & 2.2245252 & 2.34886312 \end{pmatrix}$$

grado 3

usando
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 1 & 1.64872 & 2.71828 & 4.48169 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0,0.25,0.5,0.75],[1,1.64872,2.71828,4.48169]);
neville(0.43,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1.64872 & 2.1157984 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2.71828 & 2.4188032 & 2.376382528 & 0 \\ 0.75 & 4.48169 & 2.2245252 & 2.34886312 & 2.36060473408 \end{pmatrix}$$

7.2.2. inciso d)

$f(0.25)$ con los datos
$$\begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.8619948 & 0.95802009 & 1.0986123 & 1.2943767 \end{pmatrix}$$

grado 1

usando
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 1.0986123 & 1.2943767 \end{pmatrix}$$

```
a:transpose(matrix([0,0.5],[1.0986123,1.2943767]));
neville(0.25,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} \\ 0 & 1.0986123 & 0 \\ 0.5 & 1.2943767 & 1.1964945 \end{pmatrix}$$

grado 2

usuando

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.95802009 & 1.0986123 & 1.2943767 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([-0.5,0 ,0.5],[0.95802009,1.0986123,1.2943767]);
neville(0.25,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ -0.5 & 0.95802009 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0986123 & 1.168908405 & 0 \\ 0.5 & 1.2943767 & 1.1964945 & 1.18959797625 \end{pmatrix}$$

grado 3

usando

$$\begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.8619948 & 0.95802009 & 1.0986123 & 1.2943767 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([-1,-0.5,0 ,0.5],[0.86199480,0.95802009,1.0986123,1.2943767]);
neville(0.25,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ -1 & 0.8619948 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.95802009 & 1.102058025 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0986123 & 1.168908405 & 1.185621 & 0 \\ 0.5 & 1.2943767 & 1.1964945 & 1.18959797625 & 1.188935146875 \end{pmatrix}$$

7.3. ejercicio 3

7.3.1. inciso b

Use el metodo de neville para aproximar $\sqrt{3}$ con $f(x) = \sqrt{x}$ y los valores $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ y $x_4 = 5$.

Entonces los datos a utilizar son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.4142135 & 2.0 & 2.23606 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0,1,2,4,5]);
f(x):=sqrt(x);
a:addrow(a, map(f,a));
neville(3,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \text{Columna 4} \\ 0 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.0 & 3.0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1.414213562373095 & 1.82842712474619 & 1.242640687119286 & 0 & 0 \\ 4 & 2.0 & 1.707106781186548 & 1.747546895706429 & 1.621320343559643 & 0 \\ 5 & 2.23606797749979 & 1.76393202250021 & 1.726048528291102 & 1.736797711998765 & 1.690606764623116 \end{pmatrix}$$

7.4. ejercicio 5

El metodo de neville es usado para aproximar $f(0.4)$, obteniendo la siguiente tabla:

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{0,1} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

Determine $P_2 = f(0.5)$.

Solución: Se introduce la matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.5 & 0.75 \\ 1 & 2 & m & 8 \end{pmatrix}$$

en la funcion *neville*

```
a:matrix([0,0.25,0.5,0.75],[1,2,m,8]);
neville(0.4,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 2 & 2.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & m & 4.0\,(0.15\,m+0.2) & 2.0\,(1.6\,(0.15\,m+0.2)+0.26) & 0 \\ 0.75 & 8 & 4.0\,(0.35\,m-0.8) & 2.0\,(0.6\,(0.35\,m-0.8)+1.4\,(0.15\,m+0.2)) & 1.33\,(0.8\,(0.6\,(0.35\,m-0.8)+1.4\,(0.15\,m+0.2))+0.7\,(1.6\,(0.15\,m+0.2)+0.26)) \end{pmatrix}$$

observando estos resultados (columna 1) con la tabla se puede igualar

$$2.0\,(0.6\,(0.35\,m-0.8)+1.4\,(0.15\,m+0.2)) = 2.96$$

luego despejando m se encuentra que

$$m = 4$$

luego $P_2 = f(0.5) = 4$.

7.5. ejercicio 6

El metodo de neville es usado para aproximar $f(0.4)$, obteniendo la siguiente tabla:

$$\begin{array}{llll} x_0 = 0 & P_0 = 0 & & \\ x_1 = 0.4 & P_1 = 2.8 & P_{0,1} = 3.5 & \\ x_2 = 0.7 & P_2 & P_{1,2} & P_{0,1,2} = 27/7 \end{array}$$

Determine $P_2 = f(0.7)$.

Solución: Se introduce la matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 2.8 & m \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0,0.4,0.7],[0,2.8,m]);
neville(0.5,a);
```

$$\begin{pmatrix} X & Y & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 2.8 & 3.5 & 0 \\ 0.7 & m & 3.333334\,(0.1\,m+0.56) & 1.428571\,(1.6666667\,(0.1\,m+0.56)+0.7) \end{pmatrix}$$

observando estos resultados (columna 2) con la tabla se puede igualar

$$1.428571\,(1.6666667\,(0.1\,m+0.56)+0.7) = 27/7$$

despejando de aquí m se tiene

$$m = 6.4$$

luego $P_2 = f(0.7) = 6.4$

7.6. ejercicio 9

Algoritmo de Neville se utiliza para aproximar $f(0)$ usando $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, y $f(2)$. Suponer $f(-1)$ fue estimado en 2 y $f(1)$ en 3. Determinar el error en el cálculo original del valor de la polinomio de interpolación a la aproximación de $f(0)$.

$$-\frac{f(2)}{6}+2\frac{f(1)}{3}+2\frac{f(-1)}{3}-\frac{f(-2)}{6}$$

7.7. ejercicio 12

Use iteraciones inversas de interpolación para buscar una aproximación de la solución de $x-e^{-x}=0$, usando los datos

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

la solución de la ecuación es un n tal que al evaluar en e^{-x} da el mismo n, de esa forma la expresión al que se le busca la solución ($x-e^{-x}=0$) quede de la forma n-n=0.

Por lo tanto hay que interpolar n con los datos

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.740818 & 0.67032 & 0.606531 & 0.548812 \end{pmatrix}$$

y sabiendo que la aproximación de $f(n)$ resultante debe ser igual a n, se despeja n.

```
a: matrix([0.3,0.4,0.5,0.6],[0.740818,0.67032,0.606531,0.548812]);
neville(n,a);
```

Columna 1

$$10.0\ (0.67032\ (n-0.3)-0.740818\ (n-0.4))$$

$$10.0\ (0.606531\ (n-0.4)-0.67032\ (n-0.5))$$

$$10.0\ (0.548812\ (n-0.5)-0.606531\ (n-0.6))$$

Columna 2

$$\begin{gathered}5.0\,(10.0\,(0.606531\,(n-0.4)-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.3)\\-10.0\,(0.67032\,(n-0.3)-0.740818\,(n-0.4))\,(n-0.5))\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}5.0\,(10.0\,(0.548812\,(n-0.5)-0.606531\,(n-0.6))\,(n-0.4)\\-10.0\,(0.606531\,(n-0.4)-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.6))\end{gathered}$$

Columna 3

$$\begin{aligned}&3.3333333\,(5.0\,(10.0\,(0.548812\,(n-0.5)-0.606531\,(n-0.6))\,(n-0.4)\\&-10.0\,(0.606531\,(n-0.4)-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.6))\,(n-0.3)-5.0\,(10.0\,(0.606531\,(n-0.4)\\&-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.3)-10.0\,(0.67032\,(n-0.3)-0.740818\,(n-0.4))\,(n-0.5))\,(n-0.6))\end{aligned}$$

Por lo tanto aproximación de $f(n)$ resultante debe ser igual a n y luego se despeja n

$$\begin{aligned}&3.3333333\,(5.0\,(10.0\,(0.548812\,(n-0.5)-0.606531\,(n-0.6))\,(n-0.4)\\&-10.0\,(0.606531\,(n-0.4)-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.6))\,(n-0.3)-5.0\,(10.0\,(0.606531\,(n-0.4)\\&-0.67032\,(n-0.5))\,(n-0.3)-10.0\,(0.67032\,(n-0.3)-0.740818\,(n-0.4))\,(n-0.5))\,(n-0.6))=n\end{aligned}$$

despejando n se obtiene

$$\begin{aligned}&n_1=-2.5199847\,(0.866025\,i-0.5)+1.6372081\,(-0.866025\,i-0.5)+1.4499218\\&n_2=1.6372081\,(0.866025\,i-0.5)-2.5199847\,(-0.866025\,i-0.5)+1.4499218\\&n_3=0.567145\end{aligned}$$

Entonces la solucion de la expresión $x-e^{-x}=0$ es 0.567145

Capítulo 8

Diferencias divididas Newton

Ejercicios de Seccion 3.3, Pág.133

8.1. ejercicio 1

Por *diferencias divididas de Newton* obtenga polinomios de interpolación grados uno, dos y tres

8.1.1. inciso b)

$f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$ $f(0.7) = 0.01375227$ $f(0.8) = 0.22363362$ $f(1.0) = 0.65809197$

Grado uno

usando los datos

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 1.0 \\ 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.8,1.0],[0.22363362,0.65809197]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & Columna\ 1 \\ 0.8 & 0.22363362 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 2.17229175 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 2.17229175\ (x - 0.8) + 0.22363362$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = 2.17229175\ (x - 1.0) + 0.65809197$$

Interpolación

$$pProg\,(0.9) = 0.440862795$$

Grado dos

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.7,0.8,1.0],[0.01375227,0.22363362,0.65809197]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & Columna\ 1 & Columna\ 2 \\ 0.7 & 0.01375227 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.22363362 & 2.098813499999998 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 2.17229175 & 0.24492750000001 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 0.2449275\ (x - 0.8)\ (x - 0.7) + 2.0988134\ (x - 0.7) + 0.01375$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = 0.24492750000001\ (x - 1.0)\ (x - 0.8) + 2.17229175\ (x - 1.0) + 0.65809197$$

Interpolación

$$pProg\,(0.9) = 0.43841352$$

Grado tres

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.8 & 1.0 \\ -0.1769446 & 0.01375227 & 0.22363362 & 0.65809197 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.6,0.7,0.8,1.0],[-0.1769446,0.01375227,0.22363362,0.65809197]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0.6 & -0.1769446 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.01375227 & 1.906968701 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.22363362 & 2.098813498 & 0.9592239 & 0 \\ 1.0 & 0.65809197 & 2.17229175 & 0.244927501 & -1.785741249949 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = -1.7857\ (x-0.8)\ (x-0.7)\ (x-0.6) + 0.9592\ (x-0.7)\ (x-0.6) + 1.9069\ (x-0.6) - 0.17694$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = -1.7857\ (x-1.0)\ (x-0.8)\ (x-0.7) + 0.2449\ (x-1.0)\ (x-0.8) + 2.1722\ (x-1.0) + 0.6580$$

Interpolación

$$pProg\,(0.9) = 0.4419850025$$

8.2. ejercicio 3

Por *diferencias divididas de Newton* obtenga polinomios de interpolación grados uno, dos y tres

8.2.1. inciso b)

$f(0.25)$ *si* $f(0.1) = -0.62049958, f(0.2) = -0.28398668, f(0.3) = 0.00660095, f(0.4) = 0.24842440$

Grado uno

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.28398668 & 0.00660095 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.2,0.3],[-0.28398668,0.00660095]);
difnewton(a);
```


$$\begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{F(x)} & \text{Columna 1} \\ 0.2 & -0.28398668 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.905876300000001 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 2.905876300000001\ (x-0.2) - 0.28398668$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = 2.905876300000001\ (x-0.3) + 0.00660095$$

Interpolación

$$pProg\,(0.25) = -0.138692865$$

Grado dos

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.28398668 & 0.00660095 & 0.2484244 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.2,0.3,0.4],[-0.28398668,0.00660095,0.2484244]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0.2 & -0.28398668 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.905876300000001 & 0 \\ 0.4 & 0.2484244 & 2.418234499999999 & -2.438209000000007 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = -2.438209\ (x - 0.3)\ (x - 0.2) + 2.9058763\ (x - 0.2) - 0.28398$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = -2.438209\ (x - 0.4)\ (x - 0.3) + 2.4182345\ (x - 0.4) + 0.2484$$

Interpolación

$$pProg\,(0.25) = -0.1325973425$$

Grado tres

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.62049958 & -0.28398668 & 0.00660095 & 0.2484244 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.1,0.2,0.3,0.4],[-0.62049958,-0.28398668,0.00660095,0.2484244]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0.1 & -0.6204 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.2839 & 3.365129 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.9058763 & -2.2962 & 0 \\ 0.4 & 0.24842 & 2.4182345 & -2.438209 & -0.473152 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = -0.473151\ (x - 0.3)\ (x - 0.2)\ (x - 0.1) - 2.296263\ (x - 0.2)\ (x - 0.1) + 3.365129\ (x - 0.1) - 0.62049$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = -0.473152\ (x - 0.4)\ (x - 0.3)\ (x - 0.2) - 2.438209\ (x - 0.4)\ (x - 0.3) + 2.4182345\ (x - 0.4) + 0.248424$$

Interpolación

$$pProg\,(0.25) = -0.132774774375$$

8.3. ejercicio 5

Por *diferencias divididas de Newton* obtenga polinomios de interpolación grados uno, dos y tres

8.3.1. inciso b)

$f(0.25)$ si $f(0.1) = -0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

Grado uno

usando los datos

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ -0.28398668 & 0.00660095 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.2,0.3],[-0.28398668,0.00660095]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & \text{Columna 1} \\ 0.2 & -0.28398668 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.905876300000001 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 2.905876300000001\ (x - 0.2) - 0.28398668$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = 2.905876300000001\ (x - 0.3) + 0.00660095$$

Interpolación

$$pReg\,(0.25) = -0.138692865$$

Grado dos

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.28398668 & 0.00660095 & 0.2484244 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.2,0.3,0.4],[-0.28398668,0.00660095,0.2484244]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0.2 & -0.28398668 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.905876300000001 & 0 \\ 0.4 & 0.2484244 & 2.418234499999999 & -2.438209000000007 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = -2.43820900000001\ (x - 0.3)\ (x - 0.2) + 2.905876300000001\ (x - 0.2) - 0.28398668$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = -2.43820900000001\ (x - 0.4)\ (x - 0.3) + 2.418234499999999\ (x - 0.4) + 0.2484244$$

Interpolación

$$pReg\,(0.25) = -0.1325973425$$

Grado tres

datos a utilizar

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ -0.62049958 & -0.28398668 & 0.00660095 & 0.2484244 \end{pmatrix}$$

```
a:matrix([0.1,0.2,0.3,0.4],[-0.62049958,-0.28398668,0.00660095,0.2484244]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0.1 & -0.62049958 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & -0.28398668 & 3.365129000000001 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.00660095 & 2.905876300000001 & -2.2962635 & 0 \\ 0.4 & 0.2484244 & 2.418234499999999 & -2.438209000000007 & -0.47315166666669 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = -0.47315\ (x-0.3)\ (x-0.2)\ (x-0.1) - 2.2962\ (x-0.2)\ (x-0.1) + 3.365129\ (x-0.1) - 0.62049$$

Polinomio de diferencias regresivas

$$pReg(x) = -0.473152\ (x-0.4)\ (x-0.3)\ (x-0.2) - 2.438209\ (x-0.4)\ (x-0.3) + 2.4182345\ (x-0.4) + 0.24842$$

Interpolación

$$pReg\,(0.25) = -0.132774774375$$

8.4. ejercicio 7

8.4.1. inciso a)

Use interpolación, de grado tres, por diferencias divididas de Newton, para los siguientes puntos.

x	$f(x)$
-0.1	5.3
0	2
0.2	3.19
0.3	1

Solucion:

```
a:matrix([-0.1,0,0.2,0.3],[5.3,2,3.19,1]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ -0.1 & 5.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -32.99 & 0 & 0 \\ 0.2 & 3.19 & 5.9499 & 129.83 & 0 \\ 0.3 & 1 & -21.9 & -92.833 & -556.6666 \end{pmatrix}$$

Polinomio Diferencias progresivas

$$pProg(x) = -556.6666\ (x-0.2)\ x\ (x+0.1) + 129.8333\,x\ (x+0.1) - 33.0\ (x+0.1) + 5.3$$

Polinomio Diferencias Regresivas

$$pReg(x) = -556.666\ (x-0.3)\ (x-0.2)\ x - 92.833\ (x-0.3)\ (x-0.2) - 21.9\ (x-0.3) + 1$$

8.4.2. inciso b)

Agrege $f(0.35) = 0.97260$ a los puntos y construya el polinomio de interpolación de grado cuatro.

Solucion:

```
a:matrix([-0.1,0,0.2,0.3,0.35],[5.3,2,3.19,1,0.97260]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & Columna\ 1 & Columna\ 2 & Columna\ 3 & Columna\ 4 \\ -0.1 & 5.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -32.999 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 3.19 & 5.9499 & 129.8333 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & -21.900 & -92.8333 & -556.6666 & 0 \\ 0.35 & 0.9726 & -0.548 & 142.346666 & 671.94285 & 2730.2433862 \end{pmatrix}$$

Polinomio Diferencias progresivas

$$pProg(x) = 2730.24\ (x-0.3)\ (x-0.2)\ x\ (x+0.1) - 556.66\ (x-0.2)\ x\ (x+0.1)$$
$$+129.83\,x\ (x+0.1) - 33.0\ (x+0.1) + 5.3$$

Polinomio Diferencias Regresivas

$$pReg(x) = 2730.24\ (x-0.35)\ (x-0.3)\ (x-0.2)\ x + 671.942\ (x-0.35)\ (x-0.3)\ (x-0.2)$$
$$+142.346\ (x-0.35)\ (x-0.3) - 0.548\ (x-0.35) + 0.9726$$

8.5. ejercicio 9

8.5.1. inciso a)

Aproximar $f(0.05)$ usando los siguientes datos, con la formula de diferencias progresivas:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

```
a:matrix([0.0,0.2,0.4,0.6,0.8],[1.0,1.2214,1.49182,1.82212,2.22554]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} X & F(x) & Columna\ 1 & Columna\ 2 & Columna\ 3 & Columna\ 4 \\ 0.0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1.2214 & 1.107 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1.49182 & 1.352099 & 0.61275 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1.82212 & 1.6515 & 0.7485 & 0.22625 & 0 \\ 0.8 & 2.22554 & 2.0171 & 0.914 & 0.27583 & 0.0619792 \end{pmatrix}$$

Formula de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 0.06197916\ (x-0.6)\ (x-0.4)\ (x-0.2)\ x + 0.22625\ (x-0.4)\ (x-0.2)\ x$$
$$+0.61275\ (x-0.2)\ x + 1.107\,x + 1.0$$

Evaluación

$$pProg\,(0.05) = 1.051258798828125$$

8.5.2. inciso b)

Use la formula por diferencias regresivas de Newton para aproximar $f(0.65)$.

La formula de diferencias Regresivas es

$$pReg(x) = 0.061\ (x-0.8)\ (x-0.6)\ (x-0.4)\ (x-0.2) + 0.2758\ (x-0.8)\ (x-0.6)\ (x-0.4)$$
$$+0.914\ (x-0.8)\ (x-0.6) + 2.0171\ (x-0.8) + 2.22554$$

Evaluación

$$pReg\,(0.65) = 1.915550517578125$$

8.6. ejercicio 13

Los siguientes datos los da un polinomio $P(x)$ de grado desconocido.

x	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

Determine el coeficiente de x^2 en $P(x)$ si todos tercer-orden de diferencias progresivas son 1.

```
a:matrix([0,1,2],[2,-1,4]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Polinomio de diferencias progresivas

$$pProg(x) = 4\ (x-1)\ x - 3\,x + 2$$

Simplificando

$$pProg(x) = 4\,x^2 - 7\,x + 2$$

8.7. ejercicio 16

Para una funcion f, la formula de diferencia dividida de interpolación da el polinomio

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x-0.25) + \frac{16}{3}x(x-0.25)(x-0.5),$$

con los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, y $x_3 = 0.75$. Buscar $f(0.75)$.

```
a:matrix([0,0.25,0.5,0.75],[1,m,n,p]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & m & 4.0\ (m-1) & 0 & 0 \\ 0.5 & n & 4.0\ (n-m) & 2.0\ (4.0\ (n-m) - 4.0\ (m-1)) & 0 \\ 0.75 & p & 4.0\ (p-n) & 2.0\ (4.0\ (p-n) - 4.0\ (n-m)) & 1.33\ (2.0\ (4.0\ (p-n) - 4.0\ (n-m)) - 2.0\ (4.0\ (n-m) - 4.0\ (m-1))) \end{pmatrix}$$

ahora comparando

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x-0.25) + \frac{16}{3}x(x-0.25)(x-0.5)$$

con la forma general

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

se ve de esto que $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 4/3$. Igualando estos valores con los a_0, a_1, a_2, a_3 de la tabla

$$4.0\ (m-1) = 1 \qquad m = 1.25$$

$$2.0\ (4.0\ (n-1.25) - 4.0\ (1.25-1)) = 1 \qquad n = 1.625$$

$$1.33333\ (2.0\ (4.0\ (p-1.625) - 4.0\ (1.625-1.25)) - 2.0\ (4.0\ (1.625-1.25) - 4.0\ (1.25-1))) = 4/3 \qquad p = 2.25$$

Luego $f(0.75) = 2.25$.

8.8. ejercicio 17

Para una funcion f, las diferencias progresivas estan dados por

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = 50/7$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

Complete la tabla.

```
a:matrix([0,0.4,0.7],[m,n,6]);
difnewton(a);
```

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0.4 & n & 2.5\ (n-m) & 0 \\ 0.7 & 6 & 3.333333333333334\ (6-n) & 1.4286\ (3.3333\ (6-n) - 2.5\ (n-m)) \end{pmatrix}$$

De la ultima fila columna 1 y comparando con la tabla dada se tiene

$$3.333333333333334\ (6-n) = 10$$

de esto se saca que $n = 3$

De forma similar se ve que

$$1.42857\ (3.33333\ (6-n) - 2.5\ (n-m)) = 50/7$$

sutituyendo el valor de n encontrado

$$1.42857\ (3.33333\ (6-3) - 2.5\ (3-m)) = 50/7$$

de aquí se saca que $m = 1$

Por lo que la tabla es

$$\begin{pmatrix} \text{X} & \text{F(x)} & \text{Columna 1} & \text{Columna 2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 3 & 5.0 & 0 \\ 0.7 & 6 & 10.0 & 7.142857142857146 \end{pmatrix}$$

Capítulo 9

Jacobi y Gauss-Seidel

Ejercicios de Seccion 7.3, Pág.459

9.1. ejercicio 1

Encuentre, por el metodo de jacobi, la primera y segunda iteracion, para las siguientes sistemas de ecuaciones, use $x^{(0)} = 0$.

9.1.1. inciso a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

```
a:matrix([3,-1,1],[3,6,2],[3,3,7]);
b:matrix([1],[0],[4]);
x_0:matrix([0,0,0]);
jacobi(a,b,x_0,4,2);
```

$$\begin{pmatrix} N & X1 & X2 & X3 & EX1 & EX2 & EX3 & ERROR \\ 1 & 0.33333 & 0 & 0.57143 & 0.33333 & 0 & 0.57143 & 0.57143 \\ 2 & 0.14286 & -0.35714 & 0.42857 & 0.19048 & 0.35714 & 0.14286 & 0.35714 \end{pmatrix}$$

Solución aproximada $(0.14286, -0.35714, 0.42857)$.

9.1.2. inciso b)

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

```
a:matrix([10,-1,0],[-1,10,-2],[0,-2,10]);
b:matrix([9],[7],[6]);
x_0:matrix([0,0,0]);
jacobi(a,b,x_0,4,2);
```

$$\begin{pmatrix} N & X1 & X2 & X3 & EX1 & EX2 & EX3 & ERROR \\ 1 & 0.9 & 0.7 & 0.6 & 0.9 & 0.7 & 0.6 & 0.9 \\ 2 & 0.97 & 0.91 & 0.74 & 0.07 & 0.21 & 0.14 & 0.21 \end{pmatrix}$$

Solución aproximada $(0.97, 0.91, 0.74)$.

9.2. ejercicio 2

Encuentre, por el metodo de jacobi, la primera y segunda iteracion, para las siguientes sistemas de ecuaciones, use $x^{(0)} = 0$.

9.2.1. inciso b)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 1/2x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 - 1/2x_3 &= -4, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

```
a:matrix([-2,1,0.5],[1,-2,-0.5],[0,1,2]);
b:matrix([4],[-4],[0]);
x_0:matrix([0,0,0]);
jacobi(a,b,x_0,6,2);
```

N	X1	X2	X3	EX1	EX2	EX3	ERROR
1	−2.0	2.0	0	2.0	2.0	0	2.0
2	−1.0	1.0	−1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Solución aproximada $(-1, 1, -1)$.

9.2.2. inciso d)

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_4 &= 0,\\
-x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5,\\
-x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0,\\
-x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6,\\
-x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2,\\
-x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6.
\end{aligned}
$$

```
a:matrix([4,-1,0,-1,0,0],[-1,4,-1,0,-1,0],[0,-1,4,0,0,-1],
[-1,0,0,4,-1,0],[0,-1,0,-1,4,-1],[0,0,-1,0,-1,4]);
b:matrix([0],[5],[0],[6],[-2],[6]);
x_0:matrix([0,0,0,0,0,0]);
jacobi(a,b,x_0,6,2);
```

N	X1	X2	X3	X4	X5	X6	EX1	EX2	EX3	EX4	EX5	EX6	ERROR
1	0	1.25	0	1.5	−0.5	1.5	0	1.25	0	1.5	0.5	1.5	1.5
2	0.6875	1.125	0.6875	1.375	0.5625	1.375	0.6875	0.125	0.6875	0.125	1.0625	0.125	1.0625

Solución aproximada $(0.6875, 1.125, 0.6875, 1.375, 0.5625, 1.375)$.

9.3. ejercicio 3

Repita el ejercicio 1 usando el método de Gauss-Seidel.

9.3.1. inciso a)

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 &= 9,\\
-x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7,\\
-2x_2 + 10x_3 &= 6.
\end{aligned}
$$

```
a:matrix([10,-1,0],[-1,10,-2],[0,-2,10]);
b:matrix([9],[7],[6]);
x_0:matrix([0,0,0]);
gseidel(a,b,x_0,6,2);
```

N	X1	X2	X3	EX1	EX2	EX3	ERROR
1	0.9	0.79	0.758	0.9	0.79	0.758	0.9
2	0.979	0.9495	0.7899	0.079	0.1595	0.0319	0.1595

Solución aproximada $(0.979, 0.9495, 0.7899)$.

9.3.2. inciso d)

$$\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\
-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\
2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\
-x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\
2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6.
\end{aligned}$$

```
a:matrix([4,1,1,0,6],[-1,-3,1,1,0],[2,1,5,-1,-1],[-1,-1,-1,4,0],[0,2,-1,1,4]);
b:matrix([6],[6],[6],[6],[6]);
x_0:matrix([0,0,0,0,0]);
gseidel(a,b,x_0,6,2);
```

$$\begin{pmatrix}
N & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & EX1 & EX2 & EX3 & EX4 & EX5 & ERROR \\
1 & 1.5 & -2.5 & 1.1 & 1.525 & 2.64375 & 1.5 & 2.5 & 1.1 & 1.525 & 2.64375 & 2.64375 \\
2 & -2.115625 & -0.4197917 & 2.96395833 & 1.60713542 & 2.04910156 & 3.615625 & 2.08020833 & 1.86395833 & 0.08213542 & 0.5946484 & 3.615625
\end{pmatrix}$$

Solución aproximada $(-2.115625, -0.4197917, 2.96395833, 1.60713542, 2.04910156)$.

9.4. ejercicio 4

Repita el ejercicio 2 utilizando el método de Gauss-Seidel.

9.4.1. inciso b)

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + 1/2x_3 &= 4, \\
x_1 - 2x_2 - 1/2x_3 &= -4, \\
x_2 + 2x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

```
a:matrix([-2,1,0.5],[1,-2,-0.5],[0,1,2]);
b:matrix([4],[-4],[0]);
x_0:matrix([0,0,0]);
gseidel(a,b,x_0,6,2);
```

$$\begin{pmatrix}
N & X1 & X2 & X3 & EX1 & EX2 & EX3 & ERROR \\
1 & -2.0 & 1.0 & -0.5 & 2.0 & 1.0 & 0.5 & 2.0 \\
2 & -1.625 & 1.3125 & -0.65625 & 0.375 & 0.3125 & 0.15625 & 0.375
\end{pmatrix}$$

Solución aproximada $(-1.625, 1.3125, -0.65625)$.

9.4.2. inciso d)

$$\begin{aligned}
4x_1 - x_2 - x_4 &= 0, \\
-x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 &= 5, \\
-x_2 + 4x_3 - x_6 &= 0, \\
-x_1 + 4x_4 - x_5 &= 6, \\
-x_2 - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2, \\
-x_3 - x_5 + 4x_6 &= 6.
\end{aligned}$$

```
a:matrix([4,-1,0,-1,0,0],[-1,4,-1,0,-1,0],[0,-1,4,0,0,-1],
[-1,0,0,4,-1,0],[0,-1,0,-1,4,-1],[0,0,-1,0,-1,4]);
b:matrix([0],[5],[0],[6],[-2],[6]);
x_0:matrix([0,0,0,0,0,0]);
gseidel(a,b,x_0,6,2);
```

$$\begin{pmatrix} N & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & EX1 & EX2 & EX3 & EX4 & EX5 & EX6 & ERROR \\ 1 & 0 & 1.25 & 0.3125 & 1.5 & 0.1875 & 1.625 & 0 & 1.25 & 0.3125 & 1.5 & 0.1875 & 1.625 & 1.625 \\ 2 & 0.6875 & 1.546875 & 0.7929688 & 1.71875 & 0.7226563 & 1.87890625 & 0.6875 & 0.296875 & 0.4804688 & 0.21875 & 0.5351563 & 0.2539063 & 0.6875 \end{pmatrix}$$

Solución aproximada $(0.6875, 1.546857, 0.7929688, 1.71875, 0.7226563, 1.87890625)$.